博士論文
トレード・オフ理論の再考
Reconsideration of the Trade-off Theory

横浜国立大学大学院
国際社会科学府
陳　冠州
CHEN GUANZHOU

2018 年 3 月
March 2018

目次

イントロダクション 5

第 1 章 最適資本構成：株主有限責任ケース 11

1.1 初めに 11
1.2 先行研究 12
1.3 ベーシックモデル 15
1.4 低 EBIT 時に節税効果が享受できない場合 29
1.5 結論 35
1.6 補論 36

第 2 章 最適資本構成：債権者保護ケース 41

2.1 初めに 41
2.2 先行研究 42
2.3 モデル 45
2.4 比較静学 50
2.5 債券の元本が保証されたケース 57
2.6 結論 59
2.7 補論 60

第 3 章 最適政府支出 63

3.1 初めに 63
3.2 先行研究 65
3.3 モデル 67
3.4 モデルの性質と応用 73
3.5 結論 84
3.6 補論 85

結論 91

参考文献 93

イントロダクション

本論ではトレード・オフ理論のフレームワークの下で、コーポレート・ファイナンス分野における最適資本構成問題とパブリック・ファイナンス分野における最適政府支出問題を議論するために定量的モデルを構築した。同じトレード・オフ型モデルを構築されたものの、議論の焦点や仮定の違いによって本論を三章に分けている。第一章と第二章は企業の最適資本構成について議論したものであり、第三章では最適政府支出について議論した。本章では各テーマの研究価値、先行研究、および各章の概要、結果と課題を簡単に紹介する。

最適資本構成

加重平均資本コスト (WACC:Weighted Average Cost of Capital) を下げ、企業の市場価値を高めるための企業資本構成に対する意思決定は、フィナンシャル・マネジャーにとっての重要な責任である。一方、企業の資本構成に基づいてデフォルト・リスク等に対して評価を与え、社債、貸付等の市場価値を求めることは銀行、年金ファンド等の機関投資家及び格付機構にとって極めて重要である。企業価値、社債価値、自己資本価値および最適資本構成の間の関係について、学術界と実務界で長い間に議論されている。

現在行われているような応用経済学の一部としてのコーポレート・ファイナンス研究の出発点になったのは、Modigliani/Miller[36] で論じられた資本構成の理論である。周知のとおり、この論文はその後のコーポレート・ファイナンス研究に非常に大きな影響を与えた。彼らは、(1) 完備資本市場、(2) 法人税なし、(3) 対称情報、(4) 取引コストなし、(5) 企業収益は外生的であるという 5 つの仮定の下で、企業の資本構成が企業価値に対して中立的であることを示した。資本構成の無効性原理とも知られているが、税金が存在する現実の世界においては MM 無関連命題が受け入れられるとは言い難い。

1958 年の論文に対する批判に答え、Modigliani/Miller[37] は税金がないという仮定を緩めた。負債を持つ企業の市場価値は、事業内容が同一の負債のない企業の市場価値と負債から生じる節税効果の合計となると主張した。この命題からは、経営者は企業価値を最大にするためには 100% の負債で運営するべきだという結論が導かれるが、残念ながら、

そのような企業は存在しない。MM 理論の枠組みで現実の資本構成を説明するためには修正が必須となるものの、MM 理論の最大の意義は、市場メカニズムを抽象化することにより、例えば自社株を買い取ると株式の需給が締まるから株価が上がるだろうというような単純で皮相的な理解を正すところにある。この意味で彼らの議論と現実との間のギャップの存在を理由にその現実妥当性の有無を論じるのはいささか勇み足と言わざるを得ない。

MM 理論が発表された後、倒産コストを考慮した静的トレード・オフ理論が生まれた。節税効果を得るために負債による資金調達へのインセンティブが働く一方、企業倒産のもたらすコストを考慮すると、企業が資金調達を負債に頼ることには一定の限界があり、ここから最適負債比率の存在が示唆される。静的なトレード・オフ理論の後に動的な枠組みでトレード・オフ理論を構築する流れが生まれた。その際に社債の評価が重要となるが、社債の評価に大きな影響を与えたのは Black-Scholes-Merton モデルである。Black-Scholes-Merton モデルは、無リスク利子率が定数で、原資産価格が対数正規分布に従うという仮定を置き、その原資産を持つヨーロッパ型コール・オプションとプット・オプションの価格を導出するフォーミュラである。債務不履行の可能性のある債券にはオプション的性質があることに着目し、Black-Scholes-Merton モデルを適用したものは数多く挙げられる。

Leland[26] はトレード・オフ理論を今日的な理論的枠組みで再解釈し倒産確率や最適資本構成を定量的に扱うことを可能にしたという意味でその意義は大きい。しかし、この論文では企業の資産価値のプロセスを外生的に与えているため、企業の資産価値が事業リスクや事業の期待成長率等の要因からどのように影響を受け、さらにそれらの要因が債券価値や自己資本価値にどのように影響を与えるかについて議論することができない。実はこのことから Leland[26] で行われた比較静学では、債券価値は企業の事業リスクに関する増加関数となるような「Junk Bond」効果が生じる。その他、比較静学で分析する際、税引後の資産価値が一定と仮定したことにより、債券価値、自己資本価値、企業価値が限界税率の増加関数となるような直感的に受け入れがたい性質が得られてしまう。

Goldstein-Ju-Leland[16] は上記の問題点を克服するために、理論的枠組みの本質は変わらないものの、企業が事業からもたらす収益の現在価値の合計として企業価値を内生的に表し、投資家以外に政府と倒産コストの受取手を含める「パイ理論」というアプローチの下でモデルを再構築した。彼らのアプローチは従来のトレード・オフ理論と矛盾しないが、資本構成の変更によって企業の事業に対する受取手の請求権価値がどのように変動するかをより直接的に調べることができることで意義が大きい。

本論に企業の資本構成について二章がある。第一章では企業の倒産タイミングを株主が決定できると仮定し、株主有限責任ルールの下で倒産閾値を導出して議論したものである。それに対し、第二章は債権者の利益が保護されることに着目して議論したものである。債権者保護は二つのケースを考えているが、より具体的にいうと、一つは企業が約束

した利息を支払い不能になった場合に倒産することと、もう一つは企業の資産価値が借入の元本を下回った時に倒産するケースである。これから第一章と第二章の概略を簡単に紹介する。

本論の第一章「最適資本構成：株主有限責任ケース」は Leland[26] のモデルをベースにしながら、企業の資産価値を EBIT から内生的に求めた。また、倒産時に企業所有権が変わり、元の債権者が新株主になることを仮定した。このため、倒産費用が繰越できることと考え、新株主にとってのタックスシールドとなる。この定式化により節税効果が倒産コストからも発生するようにモデルを構築した。こうして構築してきたモデルにおいては、Leland[26] ではできなかった比較静学、つまり、企業資産価値と EBIT、EBIT の期待成長率、事業リスク及びリスクの市場価格との比較静学を行うことが可能となった。結果として自己資本価値が事業リスクの増加によって低下する性質や、法人税率が上昇すると自己資本価値及び債券価値が低下する等、Leland[26] と異なるより直感的な性質が得られた。特に前者の性質は先行研究では触れられていない重要な性質である。本質的に Goldstein-Ju-Leland[16] と同じモデルが使われているが、本稿ではトレード・オフ理論による構築されたことから、彼らのモデルと比べ節税効果と倒産リスクが企業価値に与える影響についてより直接に調べることができる点は特筆に値すると考える。

以上の仮定の下で構築されたベーシックモデルにおいて、直感的な性質が得られているものの、企業が倒産しない限り、節税効果がいつでも十分に享受できることが仮定されている。言い換えると、EBIT が支払クーポンを下回った場合、政府から補助金がもらえることに相当する。より現実に近いことを考慮するために、第一章では低 EBIT 時において支払クーポンによる節税効果が無くなることを考え、ベーシックモデルを拡張した。企業の資産価値を EBIT から導出できたことにより、Leland[26] と異なり、節税効果が無くなるタイミングにおける企業資産価値の閾値を内生的に計算することが可能となった。この分析が先行研究にはないものとなっている。分析の結果、各請求権の性質はベーシックモデルと同じように直感的なものが得られたほか、最適負債比率はベーシックモデルのそれより下がり、実際に観察された低い負債比率を理論上で示唆している。さらに、最適負債比率は EBIT の期待成長率の減少関数であり、事業リスクに対して非弾力的であるような興味深い性質が明らかに示された。つまり、事業の成長性が高い企業は時価ベースの負債比率が必ずしも高いわけではない一方、事業リスクの変化によって負債比率をさほど変える必要がないことを示唆している。

ただこの章では十分に検討されなかった問題点もある。例えば、一般的に企業ごとに限界法人税率が違う。限界税率の推定は節税効果を考える上で極めて重要であるが、それを推定するためにシミュレーションに頼ることが多く、閉じた解を求めようとする本稿のモデルではそれを割愛する。また、負債の借換コストが存在する場合における戦略的に借入額の増加または減少、そして債権者の利益を保護するような倒産シナリオについては考え

ていない。これらを今後の課題としたい。

第二章「最適資本構成：債権者保護ケース」は Goldstein[16] のモデルから拡張したものである。ところが、EBIT が幾何ブラウン運動ではなく、EBIT がマイナスになることが可能だという意味でより現実に近い仮定として算術ブラウン運動に従うことを仮定した。そして、法人税率、支払利子に対する税率及び配当に対する税率を考慮しながらモデルを構築し、企業の市場価値、債券価値、自己資本価値および最適負債比率などの関係について定量的に再検討した。

この章では債権者の利益が守られたことに注目するため、倒産閾値の設定においては株主が自主的に選択することは考えていない。そこで、本稿では債権者保護に関して現実に近いと考えられる二つのルールを提示してモデルを構築した。一つは EBIT が約束された支払クーポンを下回った時に倒産することとなる。もう一つは、税引き前倒産コスト引き前の債券元本が保証される場合、そこで倒産の閾値を決めることである。各請求権に対して比較静学を分析した結果、直感に合うような性質が得られた。また、モデルから計算した負債比率は低く、実際に観察された低い負債比率を理論上で示唆している。最適クーポンに関する多くの比較静学の結果が二つのケースにおいても特に変わらないことが分かった。また、元本保証のケースにおいて、倒産時の EBIT の閾値がクーポンをある程度下回ることは許容され、これによって最適クーポンの下での債券価値、企業の市場価値と既存株主の資本価値は支払利息が保証されたケースより高いことが示された。ただ、元本保証のケースにおいて、EBIT が支払クーポンを下回った場合、節税効果が変わるか、または株主のペイオフが変わるかどうかについて本稿では議論されなかった。EBIT が算術ブラウン運動に従う仮定は最適クーポンに与える純粋な効果についてもまだ解明されていない。これらの問題を今後の課題としたい。

最適政府支出

日本の年金・医療・介護は、これまでの急速な高齢化に対し、最大限の対応をしてきた。給付水準は概ね先進諸国並み、医療については世界第 1 位の評価を受けている。今後の高齢化は先進国では最も速く進行する見込みであり、高齢者数の増大によって現在の年金・医療・介護のサービス水準を維持するだけでも、税金投入を毎年 1 兆円以上増加させる必要があるといわれている。この財源を確保できなければ、社会保障制度の維持が困難になるであろう。一体改革では、この高齢化に対応するための財源を確保し、制度の維持を図るが、改革の具体策としてはまだまだ議論のところにある。

社会保障の安定財源を確保することが重要だというのはいうまでもないが、高齢化、失業保険等により社会保障給付が大きく伸びてしまう現行制度のままでは、今後、給付増によって累積される国の債務を減らすために再び大幅な国民負担増を求める「いたちごっ

こ」となってしまう恐れがある。実証研究の多くは社会保障と経済成長には負の相関、つまり、社会保障の規模が大きくなると、経済成長にマイナスの効果があるとしている。例えば、日本の場合、古川・高川・植村 [3] の研究は、社会保障の規模を測る指標の一つである国民負担率と経済成長率の間には負の相関がみられ、また、同様な関係が、国民負担率と貯蓄率、資本ストック率にも見られることを示した。よって、社会保障のベネフィットには限界があり、潜在的なコストがあることは示唆される。社会保障に関わるこのトレード・オフを如何にバランスさせるかは日本政策当局にとっての急務である。

政府支出が与えられた場合、政府のファイナンス方法は人々の消費行動に対して影響を与えないことはリカード=バローの等価定理として周知される。リカードは、財政赤字になると、不足分を公債を発行して補足するような経済を考える。また、公債の負担は将来世代にかかる税によって償還されなければならないと想定する。この場合、公債の市場利子率と民間資金の預貯金利子率が同じであれば、生涯所得は変わらない。なぜかというと、人々は将来の増税を見越して現在の消費を減少するであろう。そうすると、現在世代は税負担と同じ効果を節約という形で受けているわけであり、将来世代の負担が重くなるということはない。バロー [7][8] はリカードが提唱したこの考え方をさらに発展させた。バローにより、国家の歳入を租税で賄うか、公債で賄うかは、それぞれの場合における予算制約式を解くことによって現在から将来への負担転嫁が起こるかどうかを見ることができる。実際に解いてみると、前者と後者で予算制約式は一致するので、公債発行は経済に中立的だという結論が得られた。また、遺産を考慮しながら世代を超えたモデルを再度構築した結果、公債の負担転嫁が将来世代に及ばないことも示された。しかし、彼らの議論では、あくまで政府支出が与えられたものであり、政府支出の最適水準を議論する余地がなかった。一方、国債の評価においては信用リスクを実際に考慮しているのに対し、彼らはクレジット・イベントについても考慮されていない。クレジット・イベントが考慮されないことによって彼らの論文で議論された財政の持続可能性は実は不十分だと考えられる。

本論の第三章「最適政府支出」は、Goldstein[16] のモデルを拡張し、最適政府支出の導出へ応用してみた。構造的なアプローチでトレード・オフ型モデルを用いて最適政府支出を議論する研究は筆者の知る限り存在しない。本章の貢献は財政政策に関する学術的かつ実務的な議論に新しい視点を与えたことにある。

政府支出のメリットとしては貧富の格差を縮めることによってもたらされる所得移転効果と考え、デメリットとして財政赤字の際に国債を発行することによってもたらされる国債のデフォルトコストと潜在的な増税負担と考える。このようなトレード・オフ関係から最適な政府支出レベルが存在すると考え、モデルを構築した結果として、最適政府支出レベルの閉じた解を得た。そして、最適な財政改革における所得価値の閾値を導出することにより、現在の GDP レベルと財政改革を行わざるを得ない GDP の閾値との相対関係が

求まった。これにより、我々が定義した財政改革の発生確率を求めることが可能となり、さらに割引債に対する評価とイールドスプレッドの期間構造に関する分析へ応用することもできた。

モデルの検証について、日本の場合において妥当だと考えられるパラメータを設定して計算した最適政府支出対 GDP 比率は 19% となっており、実際に観察された平成 27 年度までの 22 年間の平均値 18%、または直近の水準とほぼ同じ結果が得られた。モデルから得られた期間構造は短期では凸、長期では凹となっており、実際に観測された直近の期間構造と同一の形状となっている。債券評価の際に重要である金利リスクや流動性リスクについては考慮されていないことから、本稿のモデルで取り上げた財政改革リスクは上述の期間構造の形状の新たな説明要因となるといえる。また、本稿で再確認された重要な性質は、政府はつねにサープラスを確保する必要がなく、例えば日本のように財政赤字になっているにもかかわらず、まだ持続不可能までとはいえないのである。

残された課題は少なくない。第一に、日本の安全資産収益率は極めて低い水準にとどまっており、現状では政府支出の成長率より明らかに低い。本稿モデルでは政府支出の現在価値が発散しないために、安全資産収益率が政府支出の期待成長率を上回らなくてはいけないという制約条件が必要だが、今後金利が上昇する可能性があるものの、ほぼゼロ金利の下での現在の日本の財政問題を十分に扱うことができたとはいえない。第二に、本稿では実データを利用して日本以外の各国の財政問題を分析することは行っていない。第三に、マクロ経済学の分野で財政問題を議論する上で重要である総消費や総貯蓄等との関連性は扱うことができていない。これらの問題は今後の課題としたい。

最後に

本論では、コーポレート・ファイナンスの最適資本構成問題とパブリック・ファイナンスの最適政府支出問題を統一されたトレード・オフ理論の枠組みで議論することができた。モデルを構築するには以下のプロセスに従う。(1) 原資産の拡散プロセスを定義する。(2) 安全資産の存在を仮定して無裁定条件から派生証券が満足する微分方程式を導出する。(3) 負債、または政府支出に関わるベネフィットとコストを定義する。(4) 具体的な境界条件を与えることによって請求権価値を導出する。(5) 目的関数を定義して倒産閾値、または財政改革が起きる閾値を解き、最適クーポン、または最適政府支出を導出する。以上のプロセスにより、モデルにおける各請求権の性質を分析することができる。筆者はこのトレード・オフ理論の枠組みをさらに多くの問題へ応用することを期待する。

第 1 章

最適資本構成：株主有限責任ケース

本稿は Leland[26] のモデルを拡張し、企業価値と最適資本構成および負債、自己資本の市場価値の間の定量的関係を再検討した。事業の成長性とリスク等の要因が各請求権に与える影響を分析するために、本稿では企業の資産価値と EBIT との関係を結びつけた。ベーシックモデルでは負債を持つ企業が倒産しない限り、いつでも節税効果が得られると考える。比較静学を行った結果、企業の資産価値を原資産とする各請求権について直感に合う性質が得られた。ただ、自己資本価値はコールオプションとしての性質に反し、事業リスクの減少関数となることが明らかになった。また、自己資本価値と債券価値は法人税率の減少関数など先行研究と異なる性質も示されている。低 EBIT 時に当期節税効果が享受できないことを考え、本稿のベーシックモデルを拡張した。Leland[26] のモデルと異なり、節税効果がなくなる時における企業資産価値の閾値を外生的に与えるのではなく、EBIT と支払クーポンとの相対関係から内生的に計算することができた。この拡張モデルにおいては、最適負債比率はベーシックモデルと異なって EBIT の期待成長率の減少関数である一方、事業リスクに対して非感応的だという興味深い性質が得られた。

1.1　初めに

加重平均資本コスト (WACC:Weighted Average Cost of Capital) を下げ、企業の市場価値を高めるための企業資本構成に対する意思決定は、フィナンシャル・マネジャーにとっての重要な責任である。一方、企業の資本構成に基づいてデフォルト・リスク等に対して評価を与え、社債、貸付等の市場価値を求めることは銀行、年金ファンド等の機関投資家及び格付機構にとって極めて重要である。企業価値、社債価値、自己資本価値および最適資本構成の間の関係について、学術界と実務界で長い間に議論され続いている。

本稿は Leland[26] のモデルから拡張し、企業の最適資本構成に関する伝統的トレード・オフ理論によって企業の市場価値、自己資本価値および債券価値の間の量的関係を再検討

するものである。企業の資産価値と EBIT [*1]との関係を定義し、倒産時に債権者が企業資産を取得して新株主になることを仮定することにより、Leland[26] と異なる結論が得られた。比較静学を行った結果、企業の資産価値を原資産とする各デリバティブの性質は直感的な結果になっているほか、妥当なパラメータの下で計算した最適負債比率が実際の日本企業の平均負債比率に近い水準となる。主な成果として次の三点にまとめられる。まず、自己資本価値はコールオプションの性質に反して、企業の事業リスクの減少関数であることが明らかとなった。第二に、節税効果がなくなる臨界値における企業の資産価値について、恣意的な水準に設定した Leland[26] と異なり、EBIT と利払いの相対的関係から合理的な水準を設定できた。第三に、企業価値低下時に節税効果がなくなるような拡張モデルに対して分析した結果、最適負債比率は EBIT の期待成長率の減少関数であることが明らかとなった。

本稿でよく使われる概念と記号についてであるが、特に断らないかぎり、政府、債権者と株主に分配可能な企業の生むキャッシュフロー（EBIT）に対する請求権の価値を企業の資産価値と呼び、これを記号 V により表す。一方、株式市場と債券市場で観測できるような自己資本価値と負債の価値の合計を企業の市場価値と定義し、記号 v により表すこととする。他の経済変数については本文で説明する。

本稿の構成は以下の通りである。まず 1.2 節で先行研究を紹介する。次に 1.3 節でベーシックモデルを説明し、モデルの比較静学を行って最適資本構成について分析する。そして、1.4 節で EBIT が支払クーポンを下回った場合に当期節税効果の恩恵を受けられないことを考慮した拡張モデルについて議論し、負債の価値、企業価値および資本構成との量的関係について数値例を用いて議論する。最後に結論をまとめた上で問題点と筆者にとって今後の研究方向と課題等を示したい。数式の展開や導出に関する詳しい説明が必要とされる部分は補論にまとめられる。

1.2　先行研究

現在行われているような応用経済学の一部としてのコーポレート・ファイナンス研究の出発点になったのは、Modigliani/Miller[36] で論じられた資本構成の理論である。周知のとおり、この論文はその後のコーポレート・ファイナンス研究に非常に大きな影響を与えた。彼らは、（1）完備資本市場、（2）法人税なし、（3）対称情報、（4）取引コストなし、（5）企業収益は外生的であるという 5 つの仮定の下で、企業の資本構成が企業価値に対し

[*1] EBIT(Earnings Before Interest and Taxes): 支払金利前税引前利益、計算方法として

$$\text{EBIT} = \text{税引前当期純利益} \quad + \quad \text{支払利息} \quad - \quad \text{受取利息}$$

で定義されている。特に断らない限り、日本会計基準における営業利益と近似するものと考えてもよい。

て中立的であることを示した。資本構成の無効性原理とも知られているが、税金が存在する現実の世界においては MM 無関連命題が受け入れられるとは言い難い。

1958 年の論文に対する批判に答え、Modigliani/Miller[37] は税金がないという仮定を緩めた。負債を持つ企業の市場価値は、事業内容が同一の負債のない企業の市場価値と負債から生じる節税効果の合計となると主張した。この命題からは、経営者は企業価値を最大にするためには 100% の負債で運営するべきだという結論が導かれるが、残念ながら、そのような企業は存在しない。MM 理論の枠組みで現実の資本構成を説明するためには修正が必須となるものの、MM 理論の最大の意義は、市場メカニズムを抽象化することにより、例えば自社株を買い取ると株式の需給が締まるから株価が上がるだろうというような単純で皮相的な理解を正すところにある。この意味で彼らの議論と現実との間のギャップの存在を理由にその現実妥当性の有無を論じるのはいささか勇み足と言わざるを得ない。

MM 理論が発表された後、倒産コストを考慮した静的トレード・オフ理論が生まれた。節税効果を得るために負債による資金調達へのインセンティブが働く一方、企業倒産のもたらすコストを考慮すると、企業が資金調達を負債に頼ることには、一定の限界があり、ここから最適負債比率の存在が示唆される。企業の負債比率に関する実証論文は多くあり、例えば、日本市場で実証したのは岩村／福澤 [1] がある。彼らは、日本の資本市場は形式的にも実質的にも、規制当局によって厳しく参入規制されていたにも関わらず、多くの産業においてビジネス・リスク指標として使われる損益分岐点売上高比率の標準偏差と自己資本比率（負債比率）との間に正（負）の相関が存在することを示した。事業リスクの異なる産業には異なる最適資本構成が存在することがうかがわれる。

静的なトレード・オフ理論の後に動的な枠組みでトレード・オフ理論を構築する流れが生まれた。その際に社債の評価が重要となるが、社債の評価に大きな影響を与えたのは Black-Scholes-Merton モデルである。Black-Scholes-Merton モデルは、無リスク利子率が定数で、原資産価格が対数正規分布に従うという仮定を置き、その原資産を持つヨーロッパ型コール・オプションとプット・オプションの価格を導出するフォーミュラである。債務不履行の可能性のある債券にはオプション的性質があることに着目し、Black-Scholes-Merton モデルを適用したものに Black/Cox[10]、Leland[26]、Leland[27]、Goldstein[16]、Fan[15] 等が数多く挙げられる。

同一の枠組みで動的トレード・オフ理論を構築した Leland[26] は企業の資産価値が

$$dV/V = \mu(V,t)dt + \sigma dW$$

のような拡散プロセスに従うと仮定した。ただし、μ は企業資産の期待成長率で、σ はボラティリティ、すなわち資産価値成長率の標準偏差であり、W は一次元ウィーナー・プロセスである。次にこの資産価値を原資産とする満期がないデリバティブを考える。このデリバティブが企業が倒産するまでに毎期一定の金額 P をペイアウトすることを仮定し、そ

の価値を $F(V)$ で表すことにすると、無裁定の下で関数 F は次の常微分方程式（ODE）

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + rVF_V(V) - rF(V) + P = 0$$

を満足しなければならない。ただし r はリスクフリーレートである。この ODE の一般解は

$$F(V) = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-X}$$

で与えられることが知られている。ただし、$X = 2r/\sigma^2$ である。一般解に各デリバティブの具体的に持つ境界条件を与えることによって特殊解を得ることができる。例えば負債価値、倒産コスト、および節税効果は各々デリバティブとして捉えることができ、企業倒産時の境界条件等を与えることで具体的な特殊解の形が得られる。そして、Leland[26] の定義から企業の資産価値に節税効果を加えて倒産コストを引いたものが企業の市場価値となり、企業価値から負債価値を引くことにより自己資本価値を求めることができる。

Leland[26] はトレード・オフ理論を今日的な理論的枠組みで再解釈し倒産確率や最適資本構成を定量的に扱うことを可能にしたという意味でその意義は大きい。しかし、この論文では企業の資産価値のプロセスを外生的に与えているため、企業の資産価値が事業リスクや事業の期待成長率等の要因からどのように影響を受け、さらにそれらの要因が債券価値や自己資本価値にどのように影響を与えるかについて議論することができない。実はこのことから Leland[26] で行われた比較静学では、債券価値は企業の事業リスクに関する増加関数となるような「Junk Bond」効果が生じる。その他、比較静学で分析する際、税引後の資産価値が一定と仮定したことにより、債券価値、自己資本価値、企業価値が限界税率の増加関数となるような直感的に受け入れがたい性質が得られてしまう。

Goldstein-Ju-Leland[16] は上記の問題点を克服するために、理論的枠組みの本質は変わらないものの、企業が事業からもたらす収益の現在価値の合計として企業価値を内生的に表し、投資家以外に政府と倒産コストの受け取り手を含める「パイ理論」というアプローチの下でモデルを再構築した。この「パイ理論」という考え方の下では次の等式

$$\begin{aligned} V &= E + D + G + BC \\ &= V_M + V_N \end{aligned}$$

が成立する。ただし、E は自己資本価値、D は債券価値、G は税金の現在価値で表される政府の取り分、BC は倒産コスト、$V_M \equiv E + D = v$ は企業の資産価値にマーケットで評価される部分（企業の市場価値に相当する）、$V_N \equiv G + BC$ は企業の資産価値にマーケットで直接評価されない部分である。このアプローチの下では、企業がもたらすキャッシュフローに対する請求権の価値の合計 V が資本構成から影響を受けないという MM 理論の再解釈が可能である。ただ、EBIT に対する請求権の価値は資本構成と無関係である

ものの、資本構成によりマーケットで評価される分 V_M とマーケットで直接に評価されない分 V_N の相対的割合が変化することになる[*2]。Goldstein-Ju-Leland[16] では最適資本構成はマーケットで評価できる V_M を最大化する資本構成として定義する。もちろん、企業のマーケット価値のみを考えるこれまでのトレードオフ理論における最適資本構成も V_M を最大化することを指しているので、彼らのアプローチは従来のトレードオフ理論と矛盾しないが、資本構成の変更によって企業の事業に対する受取手の請求権価値がどのように変動するかをより直接的に調べることができることで意義が大きい。

次の節では本稿のベーシックモデルのセットアップを紹介する。Leland[26] から拡張したモデルであるため、彼のモデルと比較しながら議論するような形を取る。出発点の違いとして、Leland[26] で企業の資産価値が外生的に与えられることに対し、本稿では各請求権の価値と EBIT との関係に注目するために予め EBIT と企業の資産価値 V との関係を定義して議論を展開していくことである。

1.3　ベーシックモデル

まず企業の資産価値と EBIT の関係について説明しよう。t 時点における企業の EBIT を δ_t で表し、マイナスになる場合を考えないとし、これが

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \mu_E dt + \sigma dz_t \tag{1.1}$$

のような一次元幾何ブラウン運動に従うと仮定する。ただし、μ_E、σ は定数でそれぞれ EBIT の期待成長率、EBIT の成長率の標準偏差（事業リスクの大きさ）を表し、dz_t は一次元ブラウン運動である。我々は企業の事業投資戦略が与えられたと考える。つまり、負債で資金調達した後（または資本構成を変更した後）に、株主あるいは経営者自身の利益を追求するためにそれまでの事業リスクと異なるビジネスを行うというような資産置換問題を議論しない。では、EBIT のプロセスをリスク中立測度で書き換えると、

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \mu dt + \sigma dz_t^Q \tag{1.2}$$

となる。ただし、$\mu \equiv \mu_E - \sigma\theta$ は EBIT のリスク中立期待成長率であり、θ はリスクの市場価格である。ここで、マーケットには安全資産が存在し、収益率は定数 r であると仮定する。そして、企業の資産価値は将来に生み出す EBIT の現在価値の合計であると考え、リスク中立測度で表すと

$$V_t = \int_t^\infty \mathbb{E}_t^Q[\delta_s]e^{-r(s-t)}ds \tag{1.3}$$

[*2] 厳密に言うと、Goldstein-Ju-Leland[16] は債券（再）発行コストというものも考慮していたが、本筋から外れないで議論を単純化するために、主なプレーヤーはここで議論された四つのタイプにする。

となる。ここで $\mathbb{E}_t^Q[\cdot]$ は t 時点におけるリスク中立確率の下での期待値を表す。δ_s が対数正規分布に従うことを注意しながら、(1.2) 式と (1.3) 式を解くことにより、 V_t と EBIT との関係が

$$V_t = \frac{\delta_t}{r-\mu} = \frac{\delta_t}{r-\mu_E+\sigma\theta} \tag{1.4}$$

のように導出される。ただし、キャッシュフローの割引現在価値の合計を発散させないために、ここでは $r-\mu_E+\sigma\theta > 0$ を仮定する。(1.4) 式を見ればわかるが、企業の資産価値 V_t は δ_t と EBIT の期待成長率 μ_E に関する増加関数となる一方、リスクフリーレート r、企業の事業リスク σ とリスクの市場価格 θ に関する減少関数である。また、(1.4) 式から企業の資産価値と EBIT が同じプロセスに従うことがわかり、企業の資産価値のプロセスは

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dz_t^Q$$

のとおりである。

今この企業が負債を持っていないとする。この時、負債からもたらされる節税効果が得られないものの、倒産コスト等もないので、資産価値から税金の現在価値の分だけ取られる。つまり、負債のない企業の市場価値、または自己資本価値は税引き後の資産価値 $E=(1-\tau)V$ となる。ただし、τ は定数で法人税率を表す。次に、企業が負債として債券を発行することを考えよう。この場合、企業に対するそれぞれの請求権（毎期一定の P でペイアウトする）は企業の資産価値を原資産とするデリバティブと考える。裁定取引が存在しない限り、その価値を $F(V)$ により表すことにすると次の偏微分方程式（PDE）

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV} + \mu VF_V + F_t - rF + P = 0 \tag{1.5}$$

を満足しなければならない。ただし、F の添え字は偏微分を表す。

ここで、Leland[26] と同じく、企業が発行した債券はコンソル債で、満期がないことを仮定する。この仮定により企業の資産価値を原資産とするデリバティブの価値は時間から独立となり、言い換えれば、 $F_t=0$ となり、偏微分方程式 (1.5) 式は常微分方程式（ODE）

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV} + \mu VF_V - rF + P = 0 \tag{1.6}$$

となる。常微分方程式 (1.6) 式の一般解は

$$F(V) = A_0 + A_1V^{-Y} + A_2V^{-X} \tag{1.7}$$

である。ただし、A_0、A_1 と A_2 は未知の係数であり、X および Y は

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right] > 0$$

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right] < 0$$

となる。導出の詳細については補論に記載されている。(1.6) 式を満たすそれぞれの請求権の価値は一般解 (1.7) 式に境界条件を与えることで求められる。そこで企業が倒産することを決める資産価値の閾値は必要とされるので、この倒産閾値を V_B と書くことにする。

常微分方程式の一般解が以上のように分かったうえで、最初に債券価値を導出しよう。本稿では、倒産時において、債権者が企業の新株主になることを考える。そして、企業が倒産した場合に発生するさまざまなコストの合計を αV_B にする、ただし $\alpha \in [0, 1)$。元債権者が倒産コストを支払って企業の余剰資産を新株主として取得する。経営を続けるために法人税を支払う義務が生じ、新株主の自己資本価値は負債のない場合と同じように税引き後の資産価値となる。一方、企業資産価値が借入額と比べて十分に高く、倒産する可能性がほとんどない時には、債券価値は毎期もらえるクーポンの現在価値の合計 C/r に近づく。以上により、債券の境界条件は

$$\begin{aligned} &\text{At} \quad V = V_B, \quad D(V) = (1-\tau)(1-\alpha)V_B \\ &\text{As} \quad V \to \infty, \quad D(V) = \frac{C}{r} \end{aligned}$$

と書ける。一般解において $X > 0, Y < 0$ が成立することに注意すると、$V \to \infty$ の場合、$A_2 V^{-X}$ が 0 に収束し、$A_1 V^{-Y}$ が無限大に拡散してしまうことから、$A_1 = 0$、$A_0 = C/r$ となることがわかる。まだ A_2 が分からないが、$V = V_B$ の状態における境界条件を利用すれば、A_2 が求められる。結果として債券の価値は

$$D(V) = \frac{C}{r} + \left[(1-\tau)(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X} \tag{1.8}$$

のとおりとなる。$p_B \equiv (V/V_B)^{-X}$ をリスク中立倒産確率と見なすことができる。

続いて、倒産コストを考える。明らかであるが、企業の資産価値が十分に高い時には、倒産コストは 0 へ収束する一方、倒産する場合においては、仮定によって αV_B のコストが発生する。これにより、倒産コストの境界条件は

$$\begin{aligned} &\text{At} \quad V = V_B, \quad BC(V) = \alpha V_B \\ &\text{As} \quad V \to \infty, \quad BC(V) = 0 \end{aligned}$$

のように定式化できる。以上の境界条件を用いて倒産コストを解くと下記

$$BC(V) = \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} \tag{1.9}$$

のとおりとなる。

節税効果については、企業が毎期手にする節税効果は τC であり、もし企業資産価値が十分に大きく、倒産する可能性が極めて小さい時に節税効果の現在価値の合計は $\tau C/r$ に近づく。一方、倒産する状態においては、倒産コストがタックスシールドになり、つまり費用として控除対象となって、$\tau\alpha V_B$ の節税効果が発生する。以上より節税効果の境界条件は

$$\begin{aligned}&\text{At} \quad V = V_B, \quad TB(V) = \tau\alpha V_B\\&\text{As} \quad V \to \infty, \quad TB(V) = \frac{\tau C}{r}\end{aligned}$$

となる。上記の境界条件を用いて解くと節税効果は次の式のように導出できる。

$$TB(V) = \frac{\tau C}{r} + \tau\left(\alpha V_B - \frac{C}{r}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} \tag{1.10}$$

節税効果の境界条件と計算式は Leland [26] と違うことに注意が必要である。彼のモデルでは支払利息だけ節税効果をもたらすことを仮定しているのに対し、本稿では企業倒産時に企業の所有権は既存株主から債権者に移転し、債権者が新株主になると仮定するので、倒産コストは新株主にとっての損金として考え、この費用（損失）をそれ以降の会計期間に繰り越すことによってそれ以降の利益と相殺されることから節税効果が得られると考える。そして、倒産費用から発生する節税効果の価値は債権者が享受することによって負債の価値も彼のモデルと違うことに留意すべきである。

以上の準備の下で負債を持つ企業の市場価値は、負債がない時における企業の市場価値 $(1-\tau)V$ に、節税効果を加え倒産コストを除くことで求めることができる。つまり、負債を持つ場合の企業の市場価値は

$$\begin{aligned}v(V) &= (1-\tau)V + TB - BC\\&= (1-\tau)V + \frac{\tau C}{r} - \left[(1-\tau)\alpha V_B + \frac{\tau C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。法人税率が上がると、節税効果が上昇することが分かるが、企業の資産価値に対する政府の取り分も大きくなるから、Leland の性質 [26] と異なって企業の市場価値は法人税率の上昇とともに必ずしも上がるとは限らない。これも企業の税引き後資産価値を定数と仮定した Leland[26] との相違点である。

そして、負債を持つ場合の自己資本価値は企業の市場価値から負債の価値を引くことにより

$$\begin{aligned}E(V) &= v(V) - D(V)\\&= (1-\tau)\left[V - \frac{C}{r} + \left(\frac{C}{r} - V_B\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right]\end{aligned} \tag{1.12}$$

のように得られる。

最適借入戦略を議論する前に、倒産閾値を決めなければならない。ここで V_B の決め方について考える。本稿では企業の経営者の役割として企業の市場価値を最大化することを考える。そこで、企業の市場価値を表す (1.11) 式を V_B で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial V_B} = -\left[(X+1)(1-\tau)\alpha V_B^X + X\frac{\tau C}{r}V^{-X}V_B^{X-1}\right] \tag{1.13}$$

となるが、$0 < \tau < 1$ に注意しながら、中括弧の中は正の値であるため、上式は負となる。従い、企業の市場価値 v は倒産閾値 V_B の減少関数となり、企業の市場価値を最大化するためには V_B をできればできるだけ低く設定すればよい。だが、企業の資産価値が $V \geq V_B$ を満たす場合、自己資本価値が負の値になってはいけないという株主有限責任ルール制約がある限り V_B を無限に小さくすることができない。最終的には最適な V_B はいわゆる Smooth-pasting condition により計算することができる。つまり

$$\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} = 0 \tag{1.14}$$

を満足する V_B である。これを解くと、

$$V_B^* = \frac{C}{r}\frac{X}{1+X} \tag{1.15}$$

となる。(1.15) 式を見れば分かるように、最適倒産タイミングにおける企業資産価値を表す V_B^* には以下の性質

1. クーポンで表される借入額と比例する
2. 企業の資産価値から独立する
3. 法人税率とは無関係である
4. 倒産コスト α と無関係である
5. リスクフリー利子率が増加するとともに、V_B^* が低くなる

を持つ。最適に決められた倒産閾値 V_B^* を負債価値、企業価値、自己資本価値のそれぞれに代入すれば、倒産のタイミングを最適に選んだ時におけるそれぞれの資産価値が求められる。その他に、コンソル債が発行されることに留意しながら、債券の利回りとイールドスプレッドは

$$R = C/D \tag{1.16}$$

$$YS = R - r \tag{1.17}$$

のように計算することができる。

1.3.1　ベーシックモデルの比較静学

各請求権の価値とそれぞれのパラメータとの関係はすこし複雑になっているので、モデルの性質をより分かりやすく検証するために、この節では比較静学に数値例を加えて示していく。ここでは各パラメータの基準値を表 1.1 で表すように設定する。Leland[26] のモデルと比較したいので彼の論文に使われたパラメータと近い数値を使っている。

表 1.1　パラメータの基準値

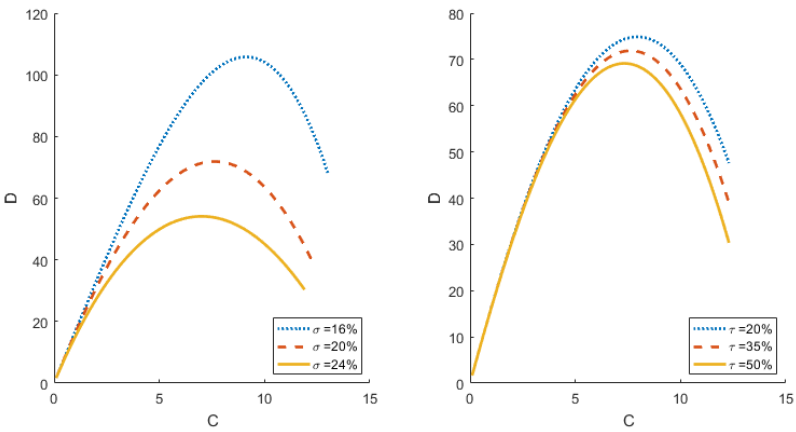
変数定義	記号	基準値
EBIT	δ	7
リスクフリーレート	r	6%
EBITの期待成長率	μ_E	8%
EBIT成長率の標準偏差	σ	20%
リスクの市場価格	θ	0.4
法人税率	τ	35%
倒産コスト	α	50%

表 1.2　ベーシックモデルの比較静学

	パラメータを増加させる場合、変数の変化方向							
変数	C	σ	r	α	τ	δ	μ_E	θ
D	>0; <0 as $V \to V_B$	<0	<0	<0	<0	>0	>0	<0
R	>0	>0	>0	>0	>0	<0	<0	>0
YS	>0	>0	>0	>0	>0	<0	<0	>0
v	>0; <0 as $V \to V_B$	<0	<0	<0	<0	>0	>0	<0
E	<0	<0	<0	0	<0	>0	>0	<0

表 1.2 はベーシックモデルにおける各経済変数の比較静学の結果をまとめたものである。他のパラメータを初期値に固定したままで検証したいパラメータだけを変化させ、各経済変数の変化方向を示している。企業の資産価値を EBIT から導出することにより、Leland[26] になかった比較静学ができるようになった。つまり、それぞれの請求権価値が初期の EBIT 水準、EBIT の期待成長率 μ_E、リスクの市場価格である θ からどのような影響を受けるかを見ることができる。

図 1.1　債券価値がクーポン、リスクと税率から受ける影響



まず、債券価値の性質から見ていきたい。図 1.1 は債券価値をクーポンの関数として表したものである。図からわかるように、債券価値が最初にクーポンとともに上昇するが、支払クーポンが増えると、倒産可能性が上昇し債券価値が下がってしまう。債券価値がクーポンの凹関数であるということは、債券価値を最大とするクーポン C_{maxD} が存在することが示唆される。これを求めるには、$D(C;V_B^*)$ を C に関して微分し、結果を 0 とおいて C を解くと債券価値を最大化するクーポン

$$C_{maxD} = \frac{r(1+X)V}{X[1+(\alpha+\tau-\alpha\tau)X]^{1/X}} \tag{1.18}$$

が得られる。また、図 1.1 の左では事業リスクの異なる三つのケースを描いている。他の条件が変わらない場合、事業リスクを表す σ の上昇によって債券価値が下がることが示されている。事業リスクの増加により、企業の資産価値が下がることにより、(1.18) 式から債券価値を最大化するクーポン C_{maxD} も少なくなることが示されている。図 1.1 の右は 3 つの異なる法人税率 τ でプロットした負債価値を表したものである。税率が上昇すると、負債価値が下がることが分かる。Goldstein[16] の考え方の下で、税率の上昇によって企業の将来もたらす収益の現在価値に対して政府の取り分が大きくなり、株主と債権者に属する分が少なくなるはずであるから、この結果も直感的である。本稿の設定の下で支払利息に対して課税されないものの、債権者が倒産後に新しい株主になるので、法人税率の上昇とともに倒産後における政府の取り分が大きくなり、債権者の取り分が減ってしまう。これにより、支払クーポンが与えられた場合において負債価値が法人税率の上昇とともに低下すると自然に考えられる。また、法人税率が上がると債権者が倒産を避けるために支払クーポンを減らすべきだということも図 1.1 から分かり、これは (1.18) 式からも確かめられる。倒産コストとリスクフリーレートが債券価値と C_{maxD} に与える影響は図 1.2 で確認できる。

図 1.2　債券価値がクーポン、倒産コストとリスクフリーレートから受ける影響

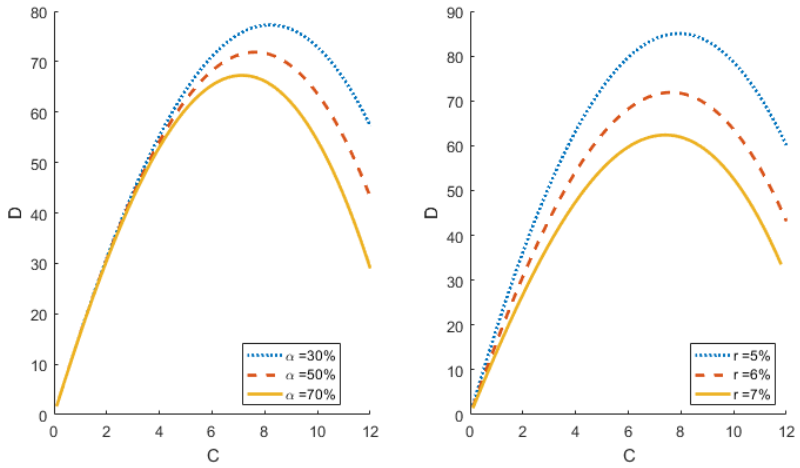


図 1.3 はイールドスプレッドをベーシスポイントで表したものである。いずれも支払クーポンの増加につれて高くなる一方、倒産コストが高ければ高いほど、イールドスプレッドも高くなることが表される。ただ Leland[26] と違う結果になる注目すべき点であるが、このモデルではイールドスプレッドは法人税率 τ に関する増加関数である。負債価値 D が τ の上昇によって下がることを注意すれば、$\mathrm{YS} = C/D - r$ より、イールドスプレッドが増加することが分かる。また、支払クーポンが固定された場合、イールドスプレッドは他のパラメータ、例えば μ_E、δ の減少関数になっている性質も直感に合う。

図 1.3　イールドスプレッドがクーポン、倒産コストと法人税率から受ける影響

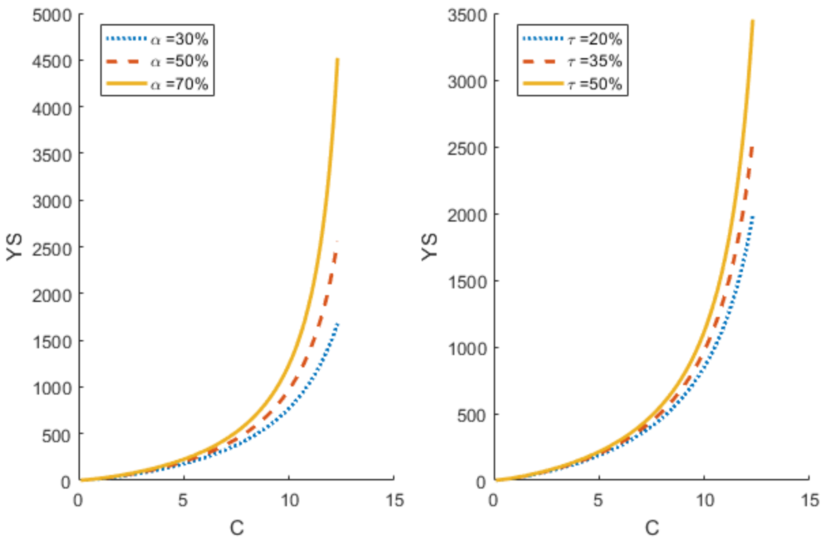
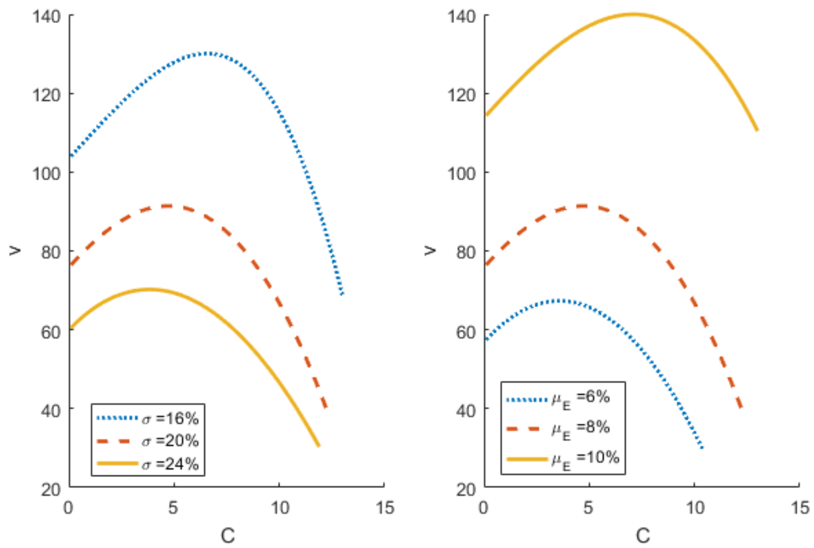


図 1.4 は企業の市場価値をクーポンの関数として表したものである。クーポンを借入の大きさとして考えると、借入を増やすにつれて節税効果が生じることによって企業価値は

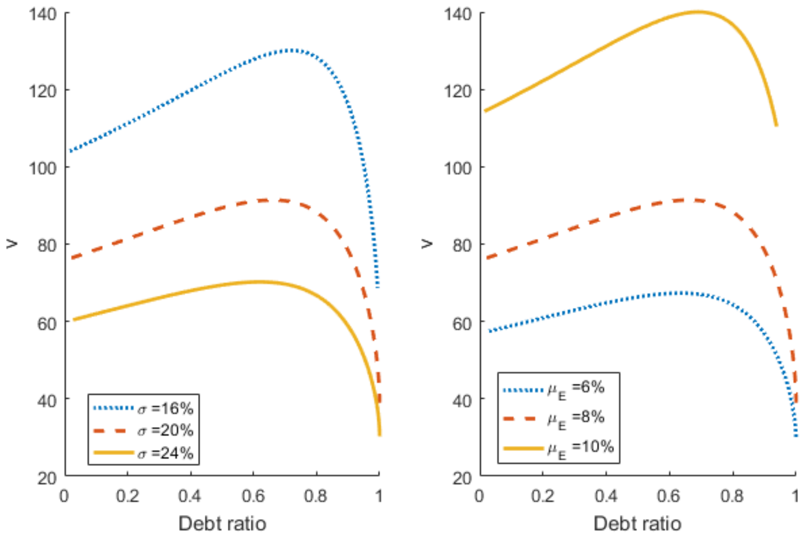
上昇する。一方、支払クーポンはあるレベルを超えると、倒産コストが企業の市場価値を減少させるように作用するトレード・オフ関係が示されている。また、企業の市場価値 v は企業の事業リスク σ に関する減少関数、事業成長性 μ_E の増加関数であることも図で示されている。

図 1.4　企業の市場価値がクーポン、事業リスクと事業成長性から受ける影響



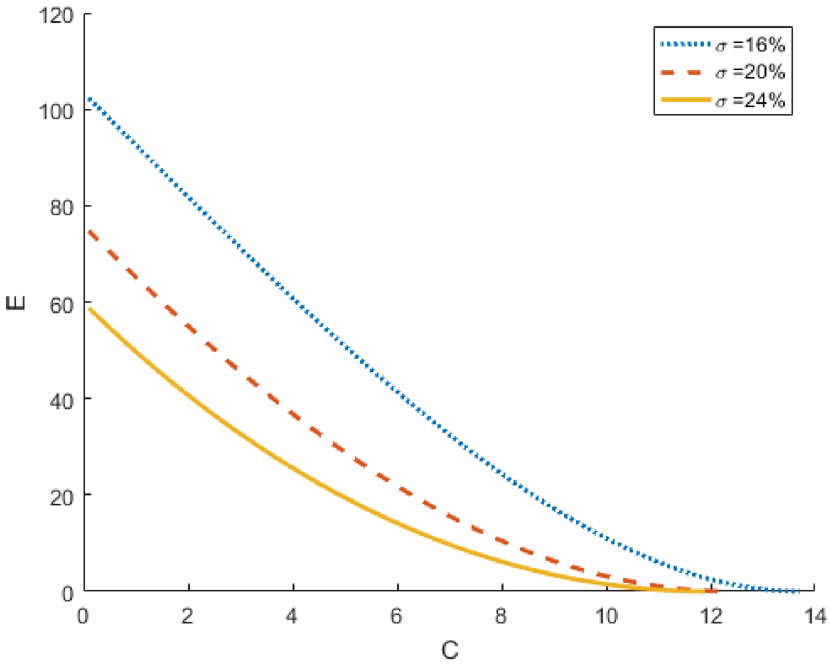
西岡、馬場 [2] は、日本企業の平均負債比率（時価）が 50% から 65% の範囲にあることを示した。これに対し、横軸をレバレッジにした図 1.5 では設定されたパラメータで計算した最適な負債比率は 60% から 80% の範囲にあり、日本企業の実際の負債比率より高い結果になっている。一つ考えられる理由として、今まで考えてきたベーシックモデルでは、債券を発行することによっていつでも節税効果が享受できる設定になっているからである。言い換えると、EBIT が支払クーポンを下回った場合、政府から補助金を受けられることを想定するため、節税効果が十分に果たせることとなる。しかし、現実の場合においては、EBIT が支払クーポンに足りない場合、企業の倒産を避けるには支払利息に足りない資金をさらに外部（多くの場合は株主から）から調達しなければならない。従い、ここで議論されるベーシックモデルにおいて負債の効果は過大評価になるかもしれない。また後の節で説明するが、我々はベーシックモデルを EBIT が支払利息を下回る場合節税効果を十分に享受できないことを考慮したモデルに拡張する。

図 1.5　企業の市場価値がレバレッジ、事業リスクと事業成長性から受ける影響



自己資本価値は Leland[26] の結果と異なって事業リスクの増加によって低下することが図 1.6 から見られる。コールオプションとしての性質を持っている自己資本価値は原資産である企業資産のリスクの増加関数になることが一般的に知られている。だが、本稿では企業の資産価値が EBIT のプロセスにより内生的に決定されることを仮定した。(1.4) 式から企業の事業リスク σ の増加により、原資産である企業の資産価値 V が低下することが分かる。原資産の価値が下がることから派生証券（コールまたはプットオプションを指す）の価値も低下する。この効果により、自己資本価値はコールオプションとしての性質を持つものの、原資産のリスクの増加によって下がることになる。

図 1.6　自己資本価値がクーポンと事業リスクから受ける影響



以上では企業の資産価値と EBIT との関係を考えた上で、資産価値を原資産とする各請求権がそれぞれのパラメータに対する反応を示した。このベーシックモデルは比較静学の分析結果から分かるように、直感に合う性質を持っている。すでに示したように、債権者の価値を最大化するような借入戦略がある。ただ、債権者の価値の最大化より、企業の経営者は既存株主の価値を最大化すべきだという考え方はより一般的であろう。債券価値と同じように、企業の市場価値も支払クーポンの凹関数になっていることから、企業の市場価値を最大化するクーポンレベルが存在することは示唆されている。我々は企業の市場価値の最大化に焦点を合わせながら、次の節でさらに詳しく議論する。

1.3.2　最適資本構成

前節で示したように、企業市場価値対クーポン曲線が凹になっていることから企業の市場価値を最大化するような最適クーポン C^* が存在することがわかる。$v(C;V_B^*)$ を C に関して微分して, 結果を 0 とおいて C を計算すると最適クーポンは

$$C^* = rV\left(\frac{X+1}{X}\right)\left(\frac{\tau}{\alpha X+\tau X-\alpha\tau X+\tau}\right)^{1/X} \tag{1.19}$$

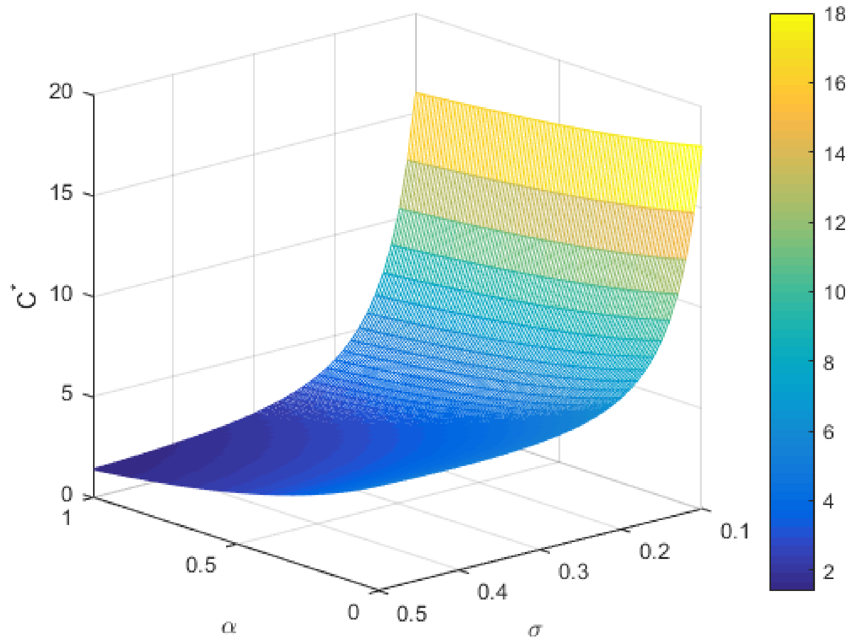
のような閉じた解になる。最適クーポンの性質をより分かりやすく理解するために、ここでパラメータ X を定数と考える。そして、借入額の程度を表す最適クーポンは

- 現時点の EBIT が高ければ高いほど、借入額を増やすべき
- EBIT の期待成長率が高ければ高いほど、借入額を増やすべき
- 事業リスクが高ければ高いほど、借入額を減らすべき
- リスクの市場価格が高ければ高いほど、借入額を減らすべき
- 倒産コストが高ければ高いほど、借入額を減らすべき

のような性質を持っている。最適クーポン C^* を $D(C;V_B^*)$、$v(C;V_B^*)$ と $E(C;V_B^*)$ に代入すれば、企業が最適クーポンを選択した場合におけるそれぞれの債券価値、企業市場価値と自己資本価値を計算することができる。

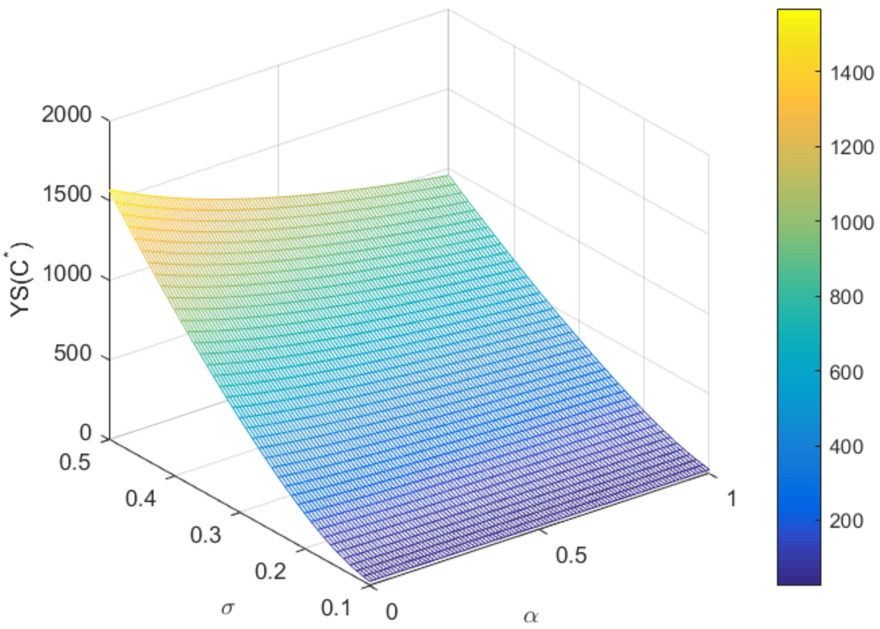
図 1.7 は最適クーポン、事業リスクと倒産コストの量的関係を示した 3D 図である。σ 軸で見ればすぐ分かるであろうが、最適クーポンは事業リスクの減少関数である。また、(1.19) 式により、事業リスクが高ければ高いほど、企業の資産価値 V が下がることから最適クーポンは減らすべきだということが分かる。逆に、事業リスクが小さい時には、倒産確率が低下し、財務状況に余裕が生じるから、節税効果を十分利用するためにより多くの負債を調達すべきだということが示されている。一方、図 1.7 では C^* と α との数値関係も表されている。(1.19) 式から最適クーポンは倒産コスト α の減少関数だというのがすぐ分かる。節税効果の限界増分より倒産コストの限界増分の方が高いと、両者のバランスを取るために借入額を減らすべきだということである。そして、図 1.7 の数値計算から、最適クーポンの倒産コストに対する反応度合が事業リスクのそれより小さいことも示されている。

図 1.7 最適クーポンが倒産コストと事業リスクから受ける影響



イールドスプレッド、倒産コストと事業リスクとの数値関係を示したものが図 1.8 である。最適クーポンが選ばれた場合のイールドスプレッドの性質に興味深い点がある。それはイールドスプレッドが倒産コスト α の減少関数ということである。倒産コストが高い場合、倒産時に債権者の回収額が少なくなるため、イールドスプレッドが上がると一般的に考えられる。だが、すでに説明したように、倒産コストが上がると、それに応じて最適クーポン C^* が減少するため、倒産可能性が低くなり、イールドスプレッドも小さくなるのである。

図 1.8　最適クーポンの下でイールドスプレッドが倒産コストと事業リスクから受ける影響



本節の最後に、支払クーポンが最適に選択された場合に、それぞれのパラメータを妥当な範囲に変動させて観察されたモデルの比較静学の結果は表 1.3 のようにまとめられた。

表 1.3　最適クーポンが選択された場合の比較静学

	パラメータを増加させる場合、変数の変化方向						
変数	σ	r	α	τ	δ	μ_E	θ
C^*	<0	<0	<0	>0	>0	>0	<0
$D(C^*)$	<0	<0	<0	>0	>0	>0	<0
$R(C^*)$	>0	>0	<0	>0	0	<0	>0
$YS(C^*)$	>0	>0	<0	>0	0	<0	>0
$v(C^*)$	<0	<0	<0	<0	>0	>0	<0
$E(C^*)$	<0	<0	>0	<0	>0	>0	<0
$D/_v(C^*)$	<0	>0	<0	>0	0	>0	<0

以上からベーシックモデルにおける最適クーポンの導出と性質を紹介したが、すでに述べたように、ベーシックモデルでは企業が倒産していない限りにいつでも節税効果が得られると仮定されたので、より現実的な視点で見ると、最適クーポンも過大評価してしまう恐れがある。この問題を克服するために、次の節で低 EBIT 時の節税効果の処理について

議論する。

1.4　低 EBIT 時に節税効果が享受できない場合

前節まで構築されたベーシックモデルでは、企業が倒産していない限り、支払クーポンからもたらされる節税効果がつねに得られると仮定した。この節では企業の資産価値 V がある境界値 V_T(ただし、$V_T > V_B$) を下回った場合、まだ倒産しないものの、支払クーポンからの節税効果が失われるという仮定を設ける。そこで、節税効果の当期ペイアウトがなくなる場合における解を求める必要がある。常微分方程式の (1.6) 式における派生証券のペイアウトがゼロの場合（つまり $P = 0$ の時）の一般解は

$$TB(V) = A_1 V^{-Y} + A_2 V^{-X}, \quad V_B \leq V \leq V_T \tag{1.20}$$

のとおりとなる。導出については数学補足まで参照してください。そして、企業の資産価値 V が V_T を上回る場合、ベーシックモデルで議論してきたように、毎期支払利息からの節税効果が得られるので、境界条件から常数項 A_0 は $\tau C/r$ となることが分かる。これによって $V \geq V_T$ の場合における一般解は

$$TB(V) = \frac{\tau C}{r} + B_2 V^{-X}, \quad V \geq V_T. \tag{1.21}$$

のように書ける。ただし、未知のパラメータ A_1、A_2 と B_2 を解くには、我々は新しい節税効果 $TB(V)$ が以下の境界条件

$$TB(V_B) = A_1 V_B^{-Y} + A_2 V_B^{-X} = \tau\alpha V_B \tag{1.22}$$

$$TB(V_T) = A_1 V_T^{-Y} + A_2 V_T^{-X} = \frac{\tau C}{r} + B_2 V_T^{-X} \tag{1.23}$$

$$TB'(V_T) = -Y A_1 V_T^{-Y-1} - X A_2 V_T^{-X-1} = -X B_2 V_T^{-X-1} \tag{1.24}$$

を満たすと考える。上記の三つの境界条件を利用すれば三つの未知のパラメータ A_1、A_2 と B_2 を求めることができる。求められた係数の解はそれぞれ

$$A_1 = \frac{\tau C X}{r(X-Y)} V_T^Y \tag{1.25}$$

$$A_2 = \alpha\tau V_B^{X+1} + \frac{\tau C X}{r(Y-X)} V_B^{X-Y} V_T^Y \tag{1.26}$$

$$B_2 = \frac{\tau C X}{r(Y-X)} V_T^Y V_B^{X-Y} + \tau\alpha V_B^{X+1} - \frac{\tau C Y}{r(Y-X)} V_T^X \tag{1.27}$$

となる。

新しく求められた $V_B \leq V \leq V_T$ における節税効果 $TB(V) = A_1 V^{-Y} + A_2 V^{-X}$ を (1.11) 式に代入して企業市場価値を計算してから、債券価値を引くと自己資本価値が得ら

れる。また Smooth-Pasting Condition$dE/dV\ |_{V=V_B}=0$ より企業価値を最大化する V_B を計算することができる。ところが、この場合では V_B に関する閉じた解がなく、数値解で解くしかない。ただし、数式を簡単化してみた結果、新しい倒産閾値とベーシックモデルの最適倒産閾値との間にある関係が成立することが示せる。この拡張モデルにおける倒産閾値を V_B' と記号し、次の等式

$$\frac{V_B^*}{V_B'}\left[1-\tau\left(\frac{V_B'}{V_T}\right)^{-Y}\right]=1-\tau \tag{1.28}$$

を満たすことが確認できる。ただし、V_B^* はベーシックモデルにおける最適倒産閾値である。$Y<0$、$V_B'<V_T$ を注意すると、中括弧の中の値は $1-\tau$ より大きいことが分かる。従い、等式を満たすために、$V_B'>V_B^*$ ということが確認できるであろう。つまり、EBIT が支払利息を下回った状態において節税効果が失われるケースの場合、節税効果がいつでももらえるケースと比べてより早い段階で倒産させたほうがよいということもいえる。V_B' の求め方についていろいろな数値計算方法で解けると考えられるが、ここでは数値計算の詳細に触れなく、ソフトに任せることにする。

本稿で EBIT と企業資産価値 V の関係をすでに導出したので、Leland[26] のように V_T を外生的に与える必要がなく、V_T を内生的に計算することができる。例えば、EBIT が支払クーポンを下回った直後では、節税効果が享受できないとすると、節税効果がなくなる時における企業資産価値の閾値 V_T は、$\delta=C$ の時の企業資産価値に相当する[*3]。つまり、(1.4) 式により、

$$V_T=V(\delta;\delta=C)=\frac{C}{r-\mu} \tag{1.29}$$

のように内生的に計算できる。

低 EBIT で節税効果がなくなることを仮定した場合における各請求権価値の比較静学はベーシックモデルのそれとは変わらないことが確認できる。しかし、各請求権の価値がパラメータに対する反応の強さが変わる。まずは節税効果の性質を見てみよう。

[*3] EBIT が支払利息を下回った時、既存株主が企業を破綻させないために、足りない分については株主がポケットマネーを出して債権者に支払う必要がある。業績低迷な状態においては、公募増資等は考えにくく、オーナー企業や親会社等に第三者割当増資で助けてもらうことが一般的だと考えられる。事業が継続できることにより、支払利息から節税効果が得られるが、既存株主にとって出したポケットマネーをコストとして捉えるので、特に断りなければ、節税効果とこのコストがちょうど相殺されることを仮定すると、本節の拡張モデルの設定を合理化することが考えられる。

図 1.9　節税効果が倒産コストとクーポンから受ける影響

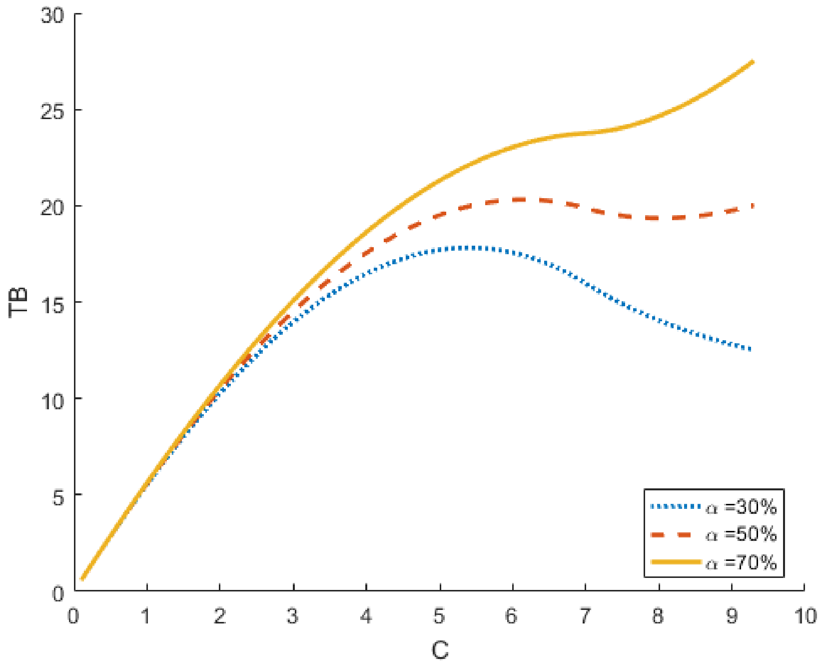


図 1.9 で使われた EBIT の初期値は 7 である。ベーシックモデルと同じように、債券を発行することにより、節税効果が発生する。支払クーポンが下から 7 に近づくと、EBIT が支払クーポンをカバーできなくなるので、節税効果が低くなったり、増分が小さくなったりすることが確認できる。一方、企業が倒産する時に倒産コストからも節税効果が得られるので、特に倒産コストが大きい場合、V が V_B' に近づくと節税効果も大きくなることが示されている。

図 1.10　企業市場価値がレバレッジと EBIT の期待成長率から受ける影響

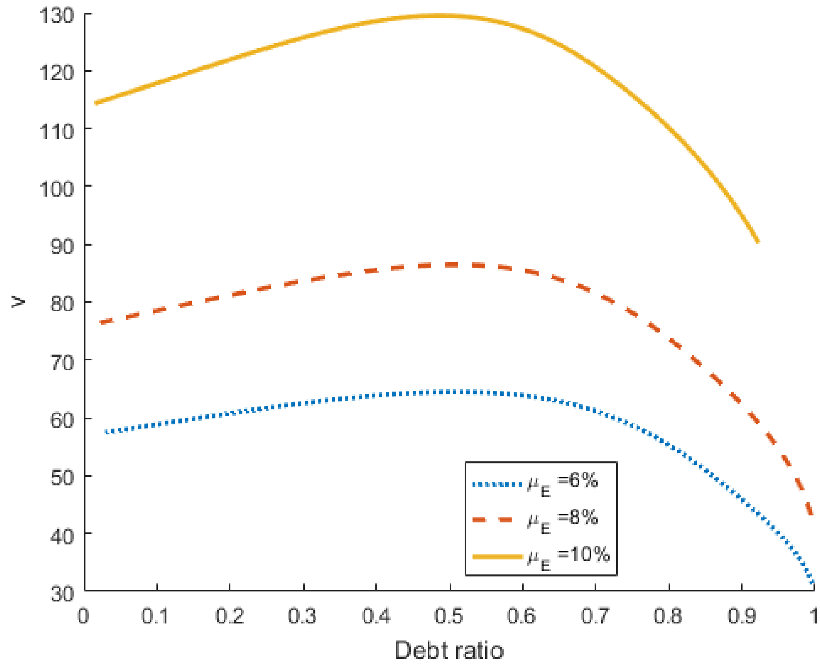
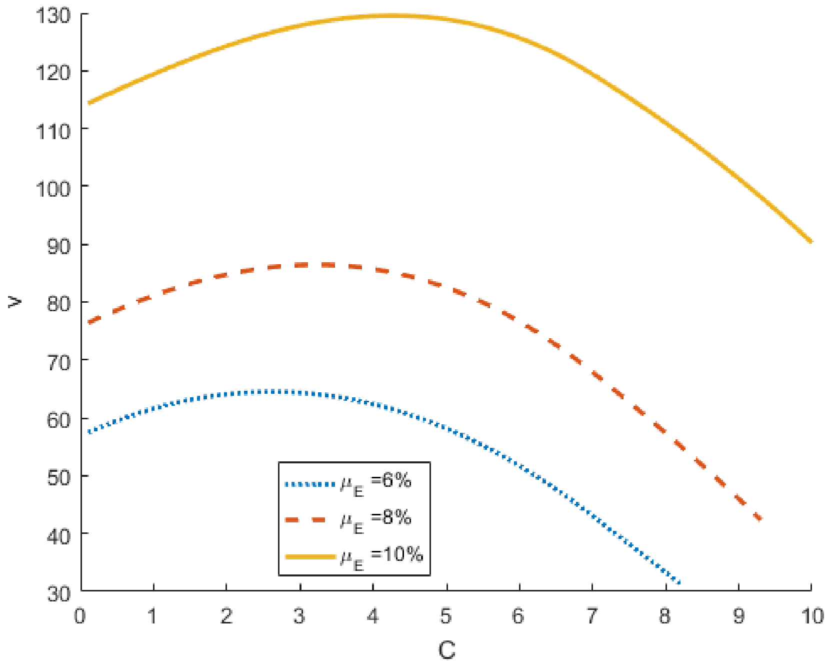


図 1.10 は企業価値対レバレッジ曲線を異なる EBIT の期待成長率の下で描いたものである。この図から興味深い点を読み取ることができる。それは、他のパラメータが変わらない場合、EBIT の期待成長率が高いほど、最適レバレッジが下がることである ($\mu_E : 0.06 \rightarrow 0.08 \rightarrow 0.1$; 最適レバレッジ:51% → 50% → 48%)。企業の負債調達に関する一般的な考え方では、企業収益の期待成長率が高い場合に余裕があることから、節税効果を得るためにより多くの負債を調達するであろう。ところが、この拡張モデルでは最適レバレッジが低下している。これは一見すると企業収益の期待成長率が高いときには負債は減らすべきだと主張しているように見えるが実はそうではない。

図 1.11　企業市場価値がクーポンと EBIT の期待成長率から受ける影響



以上の点についてより詳しく説明する。図 1.11 は EBIT の期待成長率が企業価値に与える影響を示したものである。図 1.10 との違いというと、ただ横軸をクーポンにしただけである。図 1.11 から明らかにわかることは、EBIT の期待成長率が高くなればなるほど、企業価値を最大化するクーポンレベルは上昇するということである。つまり、クーポンであらわす借入額は増やすべきである。これは前に述べた一般的な考え方とは矛盾しない。最適レバレッジが下がる理由は、実は自己資本価値も EBIT の期待成長率の増加関数であり、μ_E の増加に対する限界増加分は最適レバレッジにおける債券価値のそれより大きいためである。図 1.12 と図 1.13 で確認してみよう。最適クーポンは 3.3 となるので、クーポンレベル 3.3 のところに、自己資本価値が μ_E に対する感応度合は負債のそれより大きいことが確認できる。このため一見すると誤解を生じるような結果として、EBIT の期待成長率と最適レバレッジの間の負の関係が成立しているのである。また、低 EBIT 時に節税効果がなくなる拡張モデルにおいては、数値計算から求められた最適クーポンはベーシックモデルの 4.7 から 3.3 までに低下した。業種にもよるが、インタレスト・カバレッジ・レシオは 2〜3 の間にあれば標準だとよくいわれる。そこで基準パラメータの下で求めた最適インタレスト・カバレッジ・レシオは 2.1 となり、直感に合うと考える。

図 1.12　負債価値が EBIT の期待成長率とクーポンから受ける影響

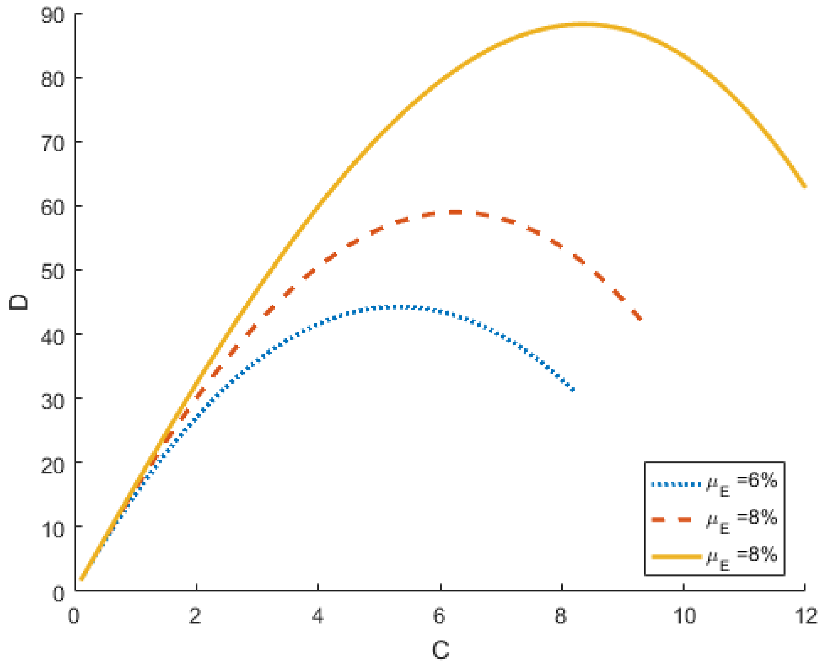
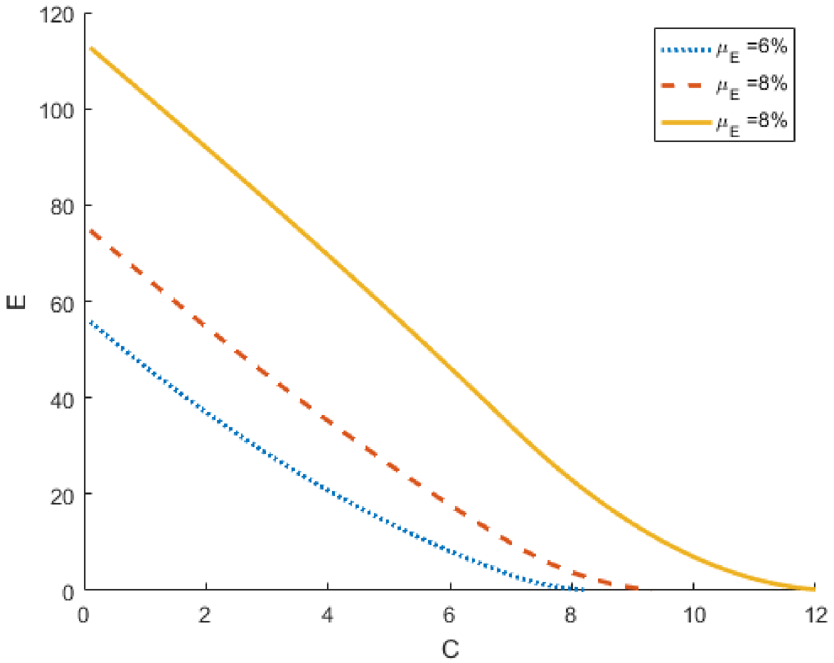


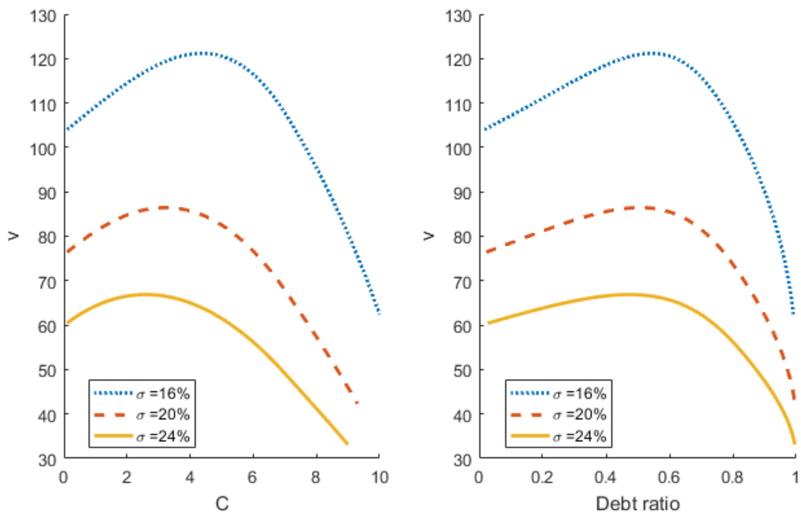
図 1.13　自己資本価値が EBIT の期待成長率とクーポンから受ける影響



最後に興味深い性質を紹介する。図 1.14 は企業の市場価値は事業リスクから受ける影響を示している。ベーシックモデルと同じように、事業リスクが高ければ高いほど、企業

価値を最大化するような最適クーポンレベルが低下することが明らかに示されている。それに対し、借入額が最適に選択された場合、企業の最適負債比率は事業リスクにほぼ感応しないことが数値計算から示されている。

図 1.14　事業リスクに非感応的な最適負債比率



以上では低 EBIT 時に節税効果が享受できないことを仮定した拡張モデルの導出と性質を紹介した。新しい節税効果の設定によって倒産閾値が変わった。自己資本価値、負債価値と企業の市場価値等の請求権の比較静学はベーシックモデルのそれと同じことが確認されたが、最適クーポンレベルと最適負債比率はベーシックモデルと異なった結果が得られた。より現実に近い仮定を置いて構築したこの拡張モデルで求められた最適負債比率は実証研究から観察された日本企業の負債比率に近いことが分かった。

1.5　結論

本稿は Leland[26] をベースにしながら、企業の資産価値を EBIT から内生的に求めた。また、倒産時に企業所有権が変わり、元の債権者が新株主になることを仮定した。このため倒産コストは新株主にとってのタックスシールドとなる。この定式化により節税効果が倒産コストからも発生するモデルを再構築した。こうして構築してきたモデルにおいては、Leland[26] ではできなかった企業資産価値と EBIT、EBIT の期待成長率、事業リスク、リスクの市場価格の比較静学を行うことが可能となった。結果として自己資本価値が事業リスクの増加によって低下する性質や、法人税率が上昇すると自己資本の価値および債券価値が低下する等、Leland[26] と異なるより直感的な性質が得られた。特に前者の性質は先行研究では触れられていない重要な性質である。

もちろん上記の議論においては Goldstein-Ju-Leland [16] と本質的に同じモデルが利用されているため、モデルとしては新しい部分はない。ただトレード・オフ理論による構築されたこのモデルは、Goldstein-Ju-Leland [16] と比べ節税効果と倒産リスクが企業価値に与える影響についてより直接的に調べることができる点は特筆に値する。

本稿の拡張モデルでは、すなわち低 EBIT であるために支払クーポンからの節税効果がなくなる場合、Leland[26] と異なり、節税効果がなくなる時における資産価値の閾値 V_T を内生的に計算することが可能となる。この分析が先行研究にはないものとなっている。分析の結果、各請求権の性質はベーシックモデルと同じように直感的なものが得られたほか、最適負債比率も実証研究から観察されたものにより近い結果となった。さらに、最適負債比率は EBIT の期待成長率の減少関数であり、事業リスクに対して非感応的であるような興味深い性質が明らかに示された。

ただ本モデルでは十分に検討されなかった問題点もある。例えば、一般的に企業ごとに限界法人税率が違う。限界税率の推定は節税効果を考える上で極めて重要であるが、それを推定するためにシミュレーションに頼ることが多く、閉じた解を求めようとする本稿のモデルではそれを割愛する。また、コンソル債を仮定したため、借入額の戦略的増加または減少、元本の返済等は考えていなく、倒産シナリオに関する想定も限られていると考える。そして、リスキーな社債に関わる金利の期間構造等も扱わなかった。これらに関するモデルについては、Graham[17]、Leland[29] が挙げられる。また、本稿では倒産に関する実確率に関する分析を行わなかったほか、情報の非対称性で起こるエージェンシー問題等にも触れてない。これらについては今後の課題としたい。

1.6 補論

1.6.1 企業資産価値の導出

EBIT のプロセスは

$$d\delta = \mu\delta dt + \sigma\delta dz^Q$$

で表される。ただし、μ と σ は定数で、$\mu \equiv \mu_E - \sigma\theta$ である。今関数 $f(\delta) \equiv \ln\delta$ を定義する。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} = \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\delta^2}$$

が分かる。次に伊藤の補題を使うと次の式

$$
\begin{aligned}
df &= d\ln\delta \\
&= \left[0 + \mu\delta\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta^2\left(-\frac{1}{\delta^2}\right)\right]dt + \frac{1}{\delta}\sigma\delta dz^Q \\
&= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz^Q
\end{aligned}
$$

が得られる。また、t 時点から s 時点までの関数 f の差分は

$$
f_s - f_t = \ln\frac{\delta_s}{\delta_t} = \int_t^s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)du + \int_t^s \sigma dz_u^Q
$$

と書け、そして

$$
\delta_s = \delta_t \exp\left[\int_t^s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)du + \int_t^s \sigma dz_u^Q\right]
$$

のように書き換えられる。リスク中立期待値を取り、さらに対数正規分布に従う変数の期待値公式を利用して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t^Q[\delta_s] &= \delta_t \exp\left[\int_t^s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)du\right] \times \mathrm{E}_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s \sigma dz_u^Q\right)\right] \\
&= \delta_t \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t)\right] \times \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2(s-t)\right] \\
&= \delta_t e^{\mu(s-t)} \\
&= \delta_t e^{(\mu_E - \sigma\theta)(s-t)}
\end{aligned}
$$

となる。以上の結果を企業の資産価値 $V_t = \int_t^\infty \mathrm{E}_t^Q[\delta_s]e^{-r(s-t)}ds$ に代入すると、

$$
\begin{aligned}
V_t &= \int_t^\infty \mathrm{E}_t^Q[\delta_s]e^{-r(s-t)}ds \\
&= \int_t^\infty \delta_t e^{(\mu_E - \sigma\theta)(s-t)} e^{-r(s-t)}ds \\
&= \delta_t \int_t^\infty e^{-(r-(\mu_E - \sigma\theta))(s-t)}ds \\
&= \frac{\delta_t}{r - \underbrace{(\mu_E - \sigma\theta)}_{\mu}}
\end{aligned}
$$

となる。

1.6.2 偏微分方程式の導出

原資産である企業の資産価値 V のプロセスは

$$
dV/V = \mu dt + \sigma dz^Q \tag{1.30}
$$

のように与えられる。伊藤の補題を使い、V を原資産とするデリバティブ $F(V,t)$ のプロセスは

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial V}dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}(dV)^2 \\ &= \left(F_t + \mu V F_V + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}\right)dt + \sigma V F_V dz^Q \end{aligned} \tag{1.31}$$

となる。現在デリバティブを一単位ロングし、原資産を F_V 単位ショートするヘッジポートフォリオ H を作る。つまり、 $H = F - F_V V$ となる。デリバティブが毎期 P を、原資産が毎期 δ をペイアウトすることに注意してこのポートフォリオ H のプロセス dH は

$$\begin{aligned} dH &= dF - F_V dV + Pdt - F_V \delta dt \\ &= \left(F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + P - F_V \delta\right)dt \\ &= \left(F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + P - F_V(r-\mu)V\right)dt \end{aligned} \tag{1.32}$$

となるが、上式三行目は $V = \delta/(r-\mu)$ の関係を使った。リスク要因がなくなることを注意しながら、無裁定条件の下で、次の等式が成立する。

$$dH = rHdt = r(F - F_V V)dt \tag{1.33}$$

ただし、r は安全資産収益率である。これで、(1.32) 式と (1.33) 式から偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \mu V F_V + F_t - rF + P = 0$$

が得られる。

1.6.3　一般解の導出

ペイアウトがない場合

常微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + \mu V F_V(V) - rF(V) = 0 \tag{1.34}$$

で与えられる。$F(V) = AV^\lambda$ と推測して常微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda(\lambda-1) + \mu\lambda - r = 0$$

が得られる。λ を解くと

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu \pm \sqrt{(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)^2 + 2r\sigma^2}\right]$$

となる。したがって、常微分方程式の一般解は

$$F(V) = A_1 V^{-X} + A_2 V^{-Y}$$

である。ただし、A_1, A_2 は未知のパラメータであり、

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right] > 0$$

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right] < 0$$

である。

ペイアウトがある場合

常微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + \mu V F_V(V) - rF(V) + P = 0 \tag{1.35}$$

である。そして、$\omega \equiv \ln V$ あるいは $V \equiv e^{\omega}$ により新しい関数 ω を定義すると、

$$\frac{d\omega}{dV} = \frac{1}{V} = e^{-\omega}$$

となる。これにより、

$$\begin{aligned}
F_V &= \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{dV} = F_\omega e^{-\omega} \\
F_{VV} &= \frac{d}{dV}F_V \\
&= \frac{d}{dV}(F_\omega e^{-\omega}) \\
&= \left[\frac{d}{d\omega}(F_\omega e^{-\omega})\right]\frac{d\omega}{dV} \\
&= (F_{\omega\omega}e^{-\omega} - F_\omega e^{-\omega})e^{-\omega} \\
&= (F_{\omega\omega} - F_\omega)e^{-2\omega}
\end{aligned}$$

が得られる。これらを (1.35) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sigma^2 \overbrace{V^2}^{e^{2\omega}}(F_{\omega\omega} - F_\omega)e^{-2\omega} + \mu \overbrace{V}^{e^{\omega}} F_\omega e^{-\omega} - rF(V) = -P \\
\Longleftrightarrow \quad & F_{\omega\omega} + \frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2}F_\omega - \frac{2r}{\sigma^2}F = -\frac{2P}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

となるが、さらに ω に関して微分すると、定数項がなくなり、

$$F_{\omega\omega\omega} + \frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} F_{\omega\omega} - \frac{2r}{\sigma^2} F_{\omega} = 0$$

を得る。$G(\omega) \equiv F_\omega$ と定義すれば上の式は次のように表すことができる。

$$G_{\omega\omega} + \frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} G_{\omega} - \frac{2r}{\sigma^2} G = 0 \tag{1.36}$$

解を $G(\omega) = e^{\lambda\omega}$ と推測すると (1.36) 式は

$$\lambda^2 e^{\lambda\omega} + \lambda \frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} e^{\lambda\omega} - \frac{2r}{\sigma^2} e^{\lambda\omega} = 0$$

となる。特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda \frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} - \frac{2r}{\sigma^2} = 0$$

となり、λ を解くと

$$\begin{aligned} \lambda_1 =& \frac{1}{\sigma^2}\left[0.5\sigma^2 - \mu + \sqrt{(\mu - 0.5\sigma^2)^2 + 2\sigma^2 r}\right] \\ \lambda_2 =& \frac{1}{\sigma^2}\left[0.5\sigma^2 - \mu - \sqrt{(\mu - 0.5\sigma^2)^2 + 2\sigma^2 r}\right] \end{aligned}$$

となる。以上より $G(\omega)$ の一般解は

$$G(\omega) = a_1 e^{\lambda_1 \omega} + a_2 e^{\lambda_2 \omega} = F_\omega$$

となる。$V = e^{\omega}$ を思い出して $\lambda_1 = -Y, \lambda_2 = -X$ と置くと、F の一般解は

$$\begin{aligned} F &= A_0 + \frac{1}{\lambda_1} a_1 e^{\omega\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} a_2 e^{\omega\lambda_2} \\ &= A_0 + A_1 V^{-Y} + A_2 V^{-X} \end{aligned}$$

と書き換えられる。ただし、A_0、A_1 と A_2 はまだ知らない係数である。

第 2 章

最適資本構成：債権者保護ケース

本稿は EBIT を算術ブラウン運動に従うことを仮定し、最適インタレスト・カバレッジ・レシオおよび負債、自己資本の市場価値の間の定量的関係を検討した。倒産閾値をより一般的なケースとして、企業が利息に支払えなくなった時、企業が倒産するように設定している。このような債権者保護条約付きの下で自己資本価値を最大化するような最適クーポンを導出してみた。これにより、企業の市場価値を最大化するようなインタレスト・カバレッジ・レシオの適正水準を示すこともでき、実際に観察されたインタレスト・カバレッジ・レシオと近い結果が得られた。また、企業が倒産する時に債券の「元本」が保証されたことを仮定してモデルを拡張した。比較静学の分析結果により、EBIT を原資産とする各請求権の性質について直感的な結果が得られた。

2.1　初めに

加重平均資本コスト (WACC:Weighted Average Cost of Capital) を下げ、企業の市場価値を高めるための企業資本構成に対する意思決定は、フィナンシャル・マネジャーにとっての重要な責任である。一方、企業の資本構成に基づいてデフォルトリスク等に対して評価を与え、社債、貸付等の市場価値を求めることは銀行、年金ファンド等の機関投資家、格付機関等にとって極めて重要である。企業の資本構成決定を含む資金調達に関する議論は、長くコーポレート・ファイナンスの中核をなすテーマであり、Modigliani = Miller[36] 以降多くの理論的分析が行われてきた。その中に、トレード・オフ理論とペッキングオーダー理論が主要な理論として提唱され、それら理論の現実的妥当性を問う多数の実証分析が行われてきたが、実証結果からは理論と一致した結論が得られているわけでなく、現在においても研究が継続している。

本稿は Goldstein[16] から拡張し、企業の最適資本構成に関する伝統的トレード・オフ理論によって企業の市場価値、自己資本価値および債券価値の間の量的関係を再検討する

ものである。企業の事業価値と EBIT [*1] との関係を定義したほか、倒産の閾値を外生的に与えることによって、各請求権の価値は EBIT との関係をより明らかにすることができた。

本稿の構成は以下の通りである。まず 2.2 節で先行研究を紹介する。次に本稿モデルの構築を 2.3 節で説明し、モデルにおけるそれぞれの資産価値の比較静学を行い、最適資本構成について分析する。そして、2.5 節では債権者保護の観点から倒産閾値の新しい設定方法について議論する。最後に結論をまとめ、問題点や課題等を示す。必要とされる数式の展開や導出等は補論にまとめられる。

2.2　先行研究

現在行われているような応用経済学の一部としてのコーポレート・ファイナンス研究の出発点になったのは、Modigliani/Miller[36] で論じられた資本構成の理論である。周知のとおり、この論文はその後のコーポレート・ファイナンス研究に非常に大きな影響を与えた。彼らは、（1）完備資本市場、（2）法人税なし、（3）対称情報、（4）取引コストなし、（5）企業収益は外生的であるという 5 つの仮定の下で、企業の資本構成が企業価値に対して中立的であることを示した。資本構成の無効性原理とも知られているが、税金が存在する現実の世界においては MM 無関連命題が受け入れられるとは言い難い。

1958 年の論文に対する批判に答え、Modigliani/Miller[37] は税金がないという仮定を緩めた。負債を持つ企業の市場価値は、事業内容が同一の負債のない企業の市場価値と負債から生じる節税効果の合計となると主張した。この命題からは、経営者は企業価値を最大にするためには 100% の負債で運営するべきだという結論が導かれるが、残念ながら、そのような企業は現実に存在しない。MM 理論の枠組みで現実の資本構成を説明するためには修正が必須となるものの、MM 理論の最大の意義は、市場メカニズムを抽象化することにより、例えば自社株を買い取ると株式の需給が締まるから株価が上がるだろうというような単純で皮相的な理解を正すところにある。この意味で彼らの議論と現実との間のギャップの存在を理由にその現実妥当性の有無を論じるのはいささか勇み足と言わざるを得ない。

MM 理論が発表された後、倒産コストを考慮した静的トレード・オフ理論が生まれた。節税効果を得るために負債による資金調達へのインセンティブが働く一方、企業倒産のも

[*1] EBIT(Earnings Before Interest and Taxes): 支払金利前税引前利益、計算方法として

$$\text{EBIT} = \text{税引前当期純利益} \quad + \quad \text{支払利息} \quad - \quad \text{受取利息}$$

で定義されている。特に断らない限り、日本会計基準における営業利益と近似するものと考えてもよいであろう。

たらすコストを考慮すると、企業が資金調達を負債に頼ることには、一定の限界があり、ここから最適負債比率の存在が示唆される。企業の負債比率についての実証論文は多くあり、例えば、日本の場合において佐々木等 [4] はサーベイ調査によって日本企業では資金調達の際に倒産コストを重視しており、そして伝統的なトレード・オフ理論と一部で整合的な結果が得られた一方、ペッキングオーダー理論やエージェンシーコスト理論については理論と整合的な結果は得られなかったと報告された。また、多数の企業は目標負債比率を設定しており、倒産コストや財務柔軟性、エージェンシーコストといった要因が目標負債比率の設定の有無にかかわっていることが示唆されたので、企業にとって最適な負債戦略の重要性が伺える。

静的なトレード・オフ理論の後に動的な枠組みでトレード・オフ理論を構築する流れが生まれた。その際に社債の評価が重要となるが、社債の評価に大きな影響を与えたのは Black-Scholes-Merton モデルである。Black-Scholes-Merton モデルは、無リスク利子率が定数で、原資産価格が対数正規分布に従うという仮定を置き、その原資産を持つヨーロッパ型コール・オプションとプット・オプションの価格を導出するフォーミュラである。債務不履行の可能性のある債券にはオプション的性質があることに着目し、Black-Scholes-Merton モデルを適用したものに Black/Cox[10]、Leland[26]、Leland[27]、Goldstein[16]、Fan[15] 等が数多く挙げられる。

同一の枠組みで動的トレード・オフ理論を構築した Leland[26] は企業の資産価値が

$$dV/V = \mu(V,t)dt + \sigma dW$$

のような拡散プロセスに従うと仮定した。ただし、μ は企業資産の期待成長率で、σ はボラティリティ、すなわち資産価値成長率の標準偏差である。次にこの資産価値を原資産とする満期がないデリバティブを考える。このデリバティブが企業が倒産するまでに毎期一定の金額 P をペイアウトすることを仮定し、その価値を $F(V)$ で表すことにすると、無裁定の下で関数 F は次の常微分方程式（ODE）を満足しなければならない。つまり、

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + rVF_V(V) - rF(V) + P = 0$$

ただし r はリスクフリーレートである。この ODE の一般解は

$$F(V) = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-X}$$

で与えられることが知られている。ただし、$X = 2r/\sigma^2$ である。一般解にデリバティブが具体的に持つ境界条件を与えることによって特殊解を得ることができる。例えば負債価値、倒産コスト、および節税効果は各々デリバティブとして捉えることができ、企業倒産時の境界条件等を与えることで具体的な特殊解の形が得られる。資産価値に節税効果を加

えて倒産コストを引いたものが企業の市場価値となり、企業の市場価値から負債価値を引くことにより自己資本価値を求めることができる。

Leland[26] はトレード・オフ理論を今日的な理論的枠組みで再解釈し倒産確率や最適資本構成を定量的に扱うことを可能にしたという意味でその意義は大きい。しかし、この論文で提唱された企業の資産価値が観察できない一方、そのプロセスを外生的に与えているため、企業の資産価値が事業リスクや事業の期待成長率等の要因からどのように影響を受け、さらにそれらの要因が債券価値や自己資本価値にどのように影響を与えるかについて議論することができない。実はこのことから Leland[26] で行われた比較静学では、債券価値は企業の事業リスクに関する増加関数となるという「Junk Bond」効果が生じる。その他、比較静学で分析する際、税引後の資産価値が一定と仮定したことにより、債券価値、自己資本価値、企業価値が限界税率の増加関数となるというような直感的に受け入れがたい性質が得られてしまう。

Goldstein-Ju-Leland[16] は上記の問題点を克服するために、理論的枠組みの本質は変わらないものの、企業が事業からもたらす収益の現在価値の合計として企業価値を内生的に表し、投資家以外に政府と倒産コストの受け取り手を含める「パイ理論」[*2]というアプローチの下でモデルを再構築した。この「パイ理論」というアプローチの下では次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} V &= E + D + G + BC \\ &= V_M + V_N \end{aligned}$$

ただし、E は自己資本価値、D は債券価値、G は税金の現在価値で表される政府の取り分、BC は倒産コスト、$V_M \equiv E + D = v$ は企業の資産価値にマーケットで評価される部分（企業の市場価値に相当する)、$V_N \equiv G + BC$ は企業の資産価値にマーケットで直接評価されない部分である。このアプローチの下では、企業がもたらすキャッシュフローに対する請求権の価値の合計 V が資本構成から影響を受けないという MM 理論の再解釈が可能である。ただ、この請求権の価値合計は資本構成によりマーケットで評価される分 V_M とマーケットで直接に評価されない分 V_N の相対的割合が変化することになる。Goldstein-Ju-Leland[16] では最適資本構成はマーケットで評価できる V_M を最大化する資本構成として定義する。もちろん、企業のマーケット価値のみを考えるこれまでのトレードオフ理論における最適資本構成も V_M を最大化することを指しているので、彼らのアプローチは従来のトレードオフ理論と矛盾しないが、資本構成の変更によって企業の事業に対する受取手の請求権価値がどのように変動するかをより直接的に調べることができることで意義が大きい。

*2 厳密に言うと、彼らが社債発行コストの存在を主張し、それに対する取手もいるが、特に断りがない限り、この段階ではまず無視する。

次の節では本稿のモデルのセットアップを紹介する。Goldstein[16] から拡張したモデルであるので、彼のモデルと比較しながら議論するような形を取る。主な相違点としては、Goldstein[16] で EBIT が幾何ブラウン運動に従うことを仮定したことに対し、本稿では EBIT がマイナスになることが許される算術ブラウン運動に従うことを仮定して議論を始める。

2.3　モデル

まず企業の資産価値と EBIT の関係について説明しよう。t 時点における企業の EBIT を δ_t で表し、これが

$$d\delta_t = \mu dt + \sigma dz_t^Q \tag{2.1}$$

のような一次元ブラウン運動に従うと仮定する。ただし、μ、σ は定数でそれぞれリスク中立確率の下での EBIT の期待成長分、EBIT の増分の標準偏差（事業リスクの大きさ）を表し、dz_t^Q はリスク中立確率 $\mathbb{Q}$ の下での一次元ブラウン運動である。この設定の下では、企業の事業投資戦略が与えられることになる。つまり、債券発行で資金調達した後に、株主あるいは経営者自身の利益のためにそれまでのリスクと異なる事業を行うというような資産置換問題を考えないことにする。

企業の事業価値を $V(\delta)$ と記号して、これは時間に依存しなく、EBIT に対する請求権として定義する。伊藤定理を使うと、この企業の事業価値 V のプロセスは

$$dV = \left(\mu V_\delta + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{\delta\delta}\right) dt + \sigma V_\delta dz^Q \tag{2.2}$$

となる。ただし、V_δ は V の δ に関する一階微分、$V_{\delta\delta}$ は V の δ に関する二階微分を表す。従って、リスク中立確率の下での事業価値の期待増分は

$$\mathbb{E}^Q[dV] = \left(\mu V_\delta + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{\delta\delta}\right) dt \tag{2.3}$$

となる。続いて、マーケットには安全資産が存在し、収益率を r であると仮定する。企業が毎期 δ でペイアウトすることに留意し、無裁定条件の下では、企業事業価値の増分のリスク中立期待値はリスクフリーレートによる増加分からペイアウトを引いたものとなり、つまり、

$$\mathbb{E}^Q[dV] = (rV - \delta)dt \tag{2.4}$$

を満たす。(2.4) 式と (2.3) 式を連立することにより、企業の事業価値は以下のような微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_{\delta\delta} + \mu V_\delta - rV + \delta = 0 \tag{2.5}$$

を満たすことが分かる。これを解くことによって企業の事業価値は

$$V(\delta) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\delta}{r} \tag{2.6}$$

となることが分かる。ただし、$\mu \geq 0$ と仮定するほか、事業価値が負にならないために、$\delta > -\mu/r$ を制約する。導出については補論を参照すること。

続いて、満期がなく、毎期金額 P をペイアウトするような請求権の価値を考えよう。この請求権の価値を $F(\delta)$ と記号して、微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F_{\delta\delta} + \mu F_\delta - rV + P = 0 \tag{2.7}$$

を満足する。まず $P = 0$ の場合における上記の微分方程式の一般解は

$$F(\delta) = A_1 e^{-X\delta} + A_2 e^{-Y\delta} \tag{2.8}$$

となる。ただし、

$$X = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 0$$

$$Y = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} < 0$$

であり、A_1、A_2 はまだ未知の係数であり、それぞれの請求権の境界条件によって求められる。導出については数学補論まで参考する。

以上の解を利用して倒産請求権の価値を考える。この倒産請求権は企業の EBIT が限りなく大きい場合、倒産請求権はゼロに近づく一方、EBIT が倒産を決める EBIT の閾値 δ_B に達すると、この請求権の価値は 1 となるように定義される。一般解にあるパラメータ $Y < 0$ を注意すると、EBIT が発散する場合、$A_2 e^{-Y\delta}$ も発散する。倒産請求権の定義により、EBIT が発散すると、倒産請求権はゼロに収束するから、係数 A_2 はゼロとなることがまず分かる。次に、$\delta = \delta_B$ の時、倒産請求権は 1 となるという条件を用いて A_1 が解ける。最終的に、この倒産請求権を $p_B(\delta)$ と記号して、

$$p_B(\delta) = e^{-X(\delta - \delta_B)} \tag{2.9}$$

のように求められる。ただし、当たり前であるが、$p_B \in (0, 1)$ であるために初期時点の EBIT は閾値より大きいという制約を置く。つまり、$\delta_0 > \delta_B$ である。

倒産請求権かける倒産時における企業の事業資産価値（これを V_B と記すが、企業の事業資産は δ の関数となるので、V_B を $V(\delta_B)$ と書くこともできる)、倒産時における企業の事業資産価値の現在価値は

$$V^{insolv} = V_B p_B(\delta)$$

のように書ける。これにより、倒産するまでの企業の事業資産価値は

$$\begin{aligned}V^{solv} =& V - V^{insolv}\\ =& \frac{\mu}{r^2} + \frac{\delta}{r} - \left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{\delta_B}{r}\right) e^{-X(\delta-\delta_B)}\end{aligned} \tag{2.10}$$

のように書ける。

同じ事業を行う別の企業がいると想定するが、100% 自己資本ではなく、債券を発行したと考える。発行した債券はコンソル債で満期がなく、毎期一定の金額 C でペイアウトするとする。この債券は EBIT に対する請求権だと考え、ペイアウトがあることによって倒産する前までの債券の税引前価値の一般解は

$$D_{BT}^{solv} = A_0 + A_1 e^{-X\delta} + A_2 e^{-Y\delta}$$

のように与えられる。境界条件は

$$\begin{aligned}D_{BT}^{solv}(\delta) \to \frac{C}{r}, &\quad \text{as } \delta \to \infty\\ D_{BT}^{solv}(\delta) = 0, &\quad \text{at } \delta = \delta_B\end{aligned}$$

のように与えられる。これを解くことによって D_{BT}^{solv} は倒産請求権 p_B を用いて表現すると、

$$D_{BT}^{solv} = \frac{C}{r}[1 - p_B(\delta)]$$

となる。そして、この企業の税引前の自己資本価値は

$$E_{BT}^{solv} = V^{solv} - D_{BT}^{solv}$$

と表す。ただ注意してもらいたいのは、上記の債券価値と自己資本価値は税引き前の価値であるため、市場価値で見る時に、税引後の価値で評価する必要があると考える。

株主、債権者、弁護士（倒産コストの受取人と考える）と政府を含むパイ理論の考え方の下で、政府が企業の事業収益に対する取り分は税金フローの割引現在価値の合計となる。本稿では、法人税のみならず、配当と利子に対して課される税金も考慮する。債券の金利に対し、税率 τ_i で徴税するとし、株主に対する実効税率（法人税率 τ と配当に対する税率 τ_d を含める）は $\tau_e = 1 - (1 - \tau_d)(1 - \tau)$ と定義される。従い、政府が企業が倒産する前までの事業資産に対する請求権は

$$G^{solv} = \tau_e(V^{solv} - D_{BT}^{solv}) + \tau_i \frac{C}{r}[1 - p_B]$$

となる。

税金を考慮したうえで、倒産前の債券と自己資本の市場価値は税引き後の価値となり、それぞれ

$$D^{solv} = (1-\tau_i)\frac{C}{r}(1-p_B(\delta))$$

と

$$\begin{aligned} E^{solv} =& (1-\tau_e)(V^{solv} - D^{solv}) \\ =& (1-\tau_e)\left[\frac{\delta}{r} + \frac{\mu}{r^2} - \frac{C}{r} - \left(\frac{\delta_B}{r} + \frac{\mu}{r^2} - \frac{C}{r}\right)e^{-X(\delta-\delta_B)}\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。(2.11) 式を δ_B に関して微分すれば分かるように、$\delta_B > C - \frac{1}{X} - \frac{\mu}{r}$ の場合、自己資本価値は δ_B の減少関数であることが分かる。合理的なパラメータを設定して計算すると、不等式の右側は小さい値（負の値にもなりうる）となるので、これが意味するのは、経営者がもし株主の利益を代表すると考えると、δ_B を非常に低くして債権者の利益を損なうようなインセンティブが働くであろう。現実の世界においては、経営者が恣意的に倒産閾値を決めることができなく、債権者保護の観点からいろいろな契約によって債権者が保護されている。倒産閾値の設定についてはまた後述する。

ここで、倒産時の利益再配分を考える。本稿では、企業が倒産するときに債権者が企業の事業資産を引き受けるように設定する。[*3] ところが、倒産コストが発生すると考える。倒産コストを簡単にするために、倒産時点における事業資産価値に比例していると仮定する。これを α と記号して、倒産コストの現在価値の期待値は

$$BC(\delta) = \alpha V^{insolv}$$

のように表すことができる。これによって倒産後の債券市場価値は

$$D^{insolv} = (1-\tau_e)(1-\alpha)V^{insolv}$$

となる。ここで注意することは、債権者が事業を続けることによって法人税と配当に対する税金を払う義務が生じることである。[*4] これによって、債券の市場価値は

$$\begin{aligned} D =& D^{solv} + D^{insolv} \\ =& (1-\tau_i)\frac{C}{r} + \left[(1-\tau_e)(1-\alpha)V_B - (1-\tau_i)\frac{C}{r}\right]p_B \end{aligned} \tag{2.12}$$

[*3] もちろん倒産する時に、債務の調整なども考えられる。例えば、Leland[26] のように、倒産時においては、株主も残余資産の一部がもらえるような特別ケースが考えられるが、本稿では、簡単にするために、株主が何ももらえないことのみ考える。

[*4] 元債権者が事業を続けるという仮定に非現実的かもしれない。この仮定を合理化するためには債権者が企業の事業資産を割り引いて新しい株主に売却したと考えればよろしい。

となる。ただし、p_B と V_B は前に定義されたものである。そして、コンソル債の仮定の下で、債券の利子率とイールドスプレッドは

$$R = C/D \tag{2.13}$$

と

$$YS = R - r \tag{2.14}$$

のように計算できる。

一方、倒産するときにおいては元の株主が何ももらわないので、自己資本価値はゼロとなる。これによって自己資本価値 $E = E^{solv} + 0 = E^{solv}$ が成立する。これで、債券を発行した後の企業の市場価値は

$$\begin{aligned} v =& E + D \\ =& (1-\tau_e)V + (\tau_e - \tau_i)\frac{C}{r}[1 - p_B] - (1-\tau_e)\alpha V_B p_B \end{aligned} \tag{2.15}$$

である。企業の市場価値を上式のように書けば、債券発行からもたらされる節税効果と倒産コストのトレード・オフ関係が表される。また、(2.15) 式からすぐ分かるが、$\tau_e > \tau_i$ の場合、債券を発行することによって、節税効果をかならず享受することができるが、その度合は企業の実効税率と支払利子に対する税率の差と比例する。

企業が倒産すると、債権者が倒産コストを支払い、新しい株主になることによって企業が完全自己資本を持つようになるので、この時政府の取り分は１００％自己資本の企業に対する税収の価値となるので、

$$G^{insolv} = \tau_e(1-\alpha)V^{insolv}$$

のように書け、政府の取り分の総価値は

$$\begin{aligned} G =& G^{solv} + G^{insolv} \\ =& \tau_e V - (\tau_e - \tau_i)\frac{C}{r} + \left[(\tau_e - \tau_i)\frac{C}{r} - \tau_e \alpha V_B\right] p_B \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。以上により、$V = E + D + G + BC$ という関係が確認できると考える。つまり、資本構成は企業の事業価値 V に影響を与えないことが分かり、政府と倒産コストを含めた MM 理論を再解釈することができる。

最後に、本稿では、債券の発行コストも考慮する。単純化するために、債券発行コスト RC は債券の市場価値に比例すると仮定し、

$$RC = q(D^{solv} + D^{insolv}) \tag{2.17}$$

のように表す。ただし、$q \in (0, 1)$ である。

2.3.1 倒産閾値と経営者の目的関数

前に議論したように、経営者が株主の利益を最大化するのであれば、倒産時の EBIT の閾値 δ_B を低くしようとするので、債権者は自分の利益を守る観点から資金を貸し出した際に δ_B を決めるのは自然である。現実にも、債券にはいろいろな保護条約が付くのである。ここでは一番単純なケースを考える。まず、現在の EBIT がクーポンレベルを上回ったことを仮定し、つまり、$\delta_0 > C$ と仮定する。そして、δ が支払クーポンに達した時、いわゆる企業の約束した利息を支払不能になった時、倒産が起きることとなる。これにより、$\delta_B = C$ となる。

債権者の利益が保護された上で、経営者の役割は既存株主価値を最大化することと考える。事業が外生的に与えられたことから、企業が資本構成を変更する際には、債券発行によって調達した資金を新規事業に投資するなどは考えない。社債で調達された資金を株主に配当としてペイアウトすると考える。一方、債券発行とともない、発行コストがかかるので、経営者の目的関数は資本構成を変更する直前の自己資本価値 E^- である。つまり、経営者の目的関数は

$$\max_C E^-(C; \delta_B = C) \tag{2.18}$$

となり、ただし、

$$E^-(C; \delta_B = C) = (1 - q)D + E \tag{2.19}$$

である。従い、最適クーポンは

$$C^* = \arg\max E^-(C; \delta_B = C) \tag{2.20}$$

のように書けるが、数値計算で求めることができる。これにより、最適なインタレスト・カバレッジ・レシオを求めることができ、これは

$$\mathrm{ICR} = \frac{\delta}{C^*} \tag{2.21}$$

となる。

2.4 比較静学

パラメータの基準値は表 2.1 で示されている。各種の税率等は日本の場合に近い数値を設定している。例えば、税法上では、利子と配当等に対する所得税、住民税などを含めて見ると税率は大体 20% になっており、法人税率は業種や企業規模等にもよるが、大体 35% といわれる。EBIT はクーポンとの比例関係をより分かりやすく示すために 100 と

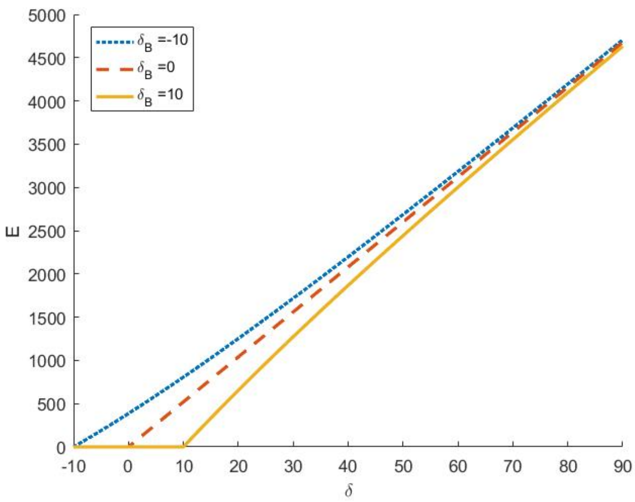
設定した。EBIT の期待成長率もそれほど高くないので、例えば 0.2% のリスク中立期待成長率を考えて EBIT の期待増分を計算すると $\mu = 0.2$ が得られる。

表 2.1　パラメータの基準値

パラメータ	論文記号	基準値
EBIT	δ	100
EBITのリスク中立期待増分	μ	0.2
EBITのボラティリティ	σ	6
支払利息に対する税率	τ_i	20%
法人税率	τ	35%
配当に対する税率	τ_d	20%
倒産コスト	α	30%
安全資産利子率	r	1%
社債発行コスト	q	1%

最適借入戦略を議論する前に、まず前に述べた重要な性質を確認したい。それは δ_B を株主が決定できる場合、それを低くすることによって自己資本価値を高めることができる性質である。図 2.1 は支払クーポンを 20 と固定した場合、倒産を決める EBIT の閾値 δ_B を変化させて自己資本価値を δ の関数としてプロットしたものである。図から示されたように、自己資本価値は EBIT の増加関数になっているほか、倒産時の EBIT の閾値 δ_B を低くするほど、自己資本価値は増加することも分かる。また、支払クーポンが与えられた場合、企業の市場価値も同じように、δ_B が小さければ小さいほど上がるという性質を持っている。従い、EBIT の倒産時における閾値を株主が決定できる場合、株主が他の請求権の価値を損ない（例えば、δ_B が低いほど、倒産時に債権者がもらえる企業の残余資産の価値は低下する）、できれば倒産させないインセンティブが働くことが分かる。

図 2.1　自己資本価値は δ_B から受ける影響

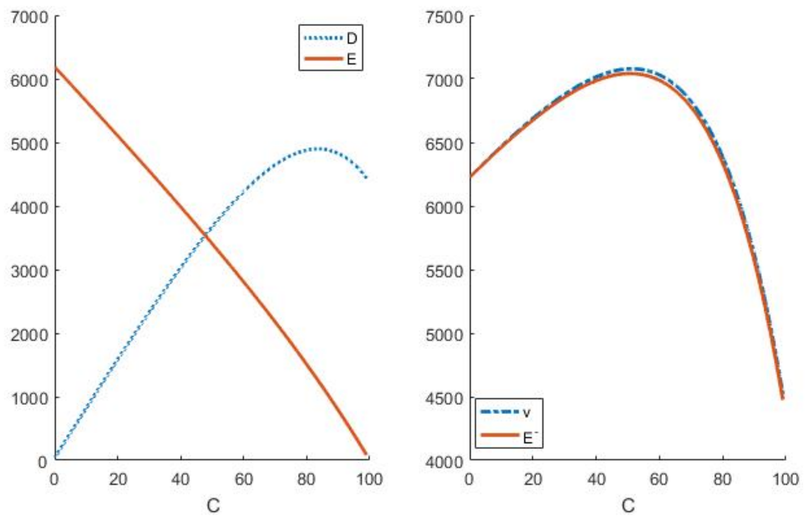


株主が以上で議論されたインセンティブを持つことから、本研究における債権者保護に関する議論を合理化することができる。合理的だと考えられる一つのケースとして、倒産時における EBIT の閾値は支払利息を下回っていけなく、つまり $\delta_B = C$ と設定する。δ_B がこのように与えられたうえで、資本構成変更直前の自己資本価値を最大化するために C を決定するのは経営者の目的だと考えている。図 2.2 はクーポンの増加が自己資本価値 E、債券価値 D、企業の市場価値 v と資本構成変更直前の自己資本価値 E^- に与える影響を示している。クーポンを増やすと、自己資本価値が減少するが、債券価値が上がる。自己資本価値の限界減少分が債券価値の限界増分を上回るまで企業の市場価値は上昇することが示されている。トレード・オフ理論における負債の節税効果と倒産コストは以下の関係

$$v = (1 - \tau_e)V + TB - BC \tag{2.22}$$

を満たすので、節税効果はこの関係から求めることができる。クーポンをさらに増やすと、倒産コストの限界増加分は節税効果の限界増加分を上回り、企業の市場価値を下げる方向に働く。企業の市場価値はクーポンの凹関数になっていることから、企業の市場価値を最大化するクーポンが存在することが示唆されている。

図 2.2　クーポンの増加が自己資本価値、債券価値及び企業の市場価値に与える影響

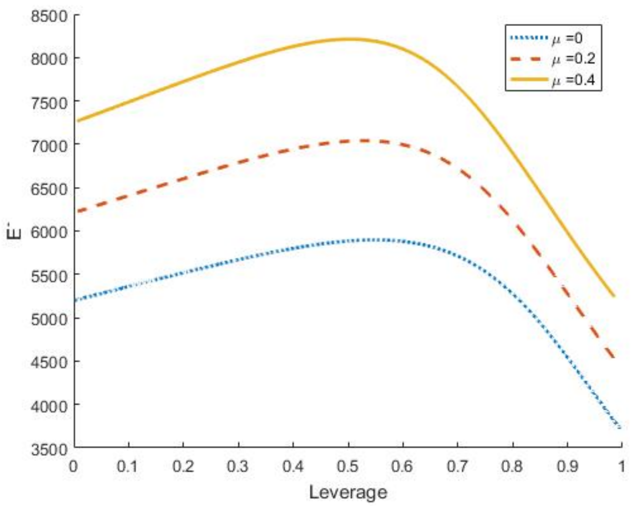


ただし、ここで注意したいのは、本稿で設定したような、経営者が債券を発行して調達した資金は株主への配当に充てる場合には、企業の市場価値を最大化することは実は既存株主の資本価値を最大化することでもある。しかし、債券発行コストが存在するため、債券発行コストは既存株主の利益にとっての最適クーポンレベルを減らす方向へ働く。

2.4.1　最適負債比率と返済額

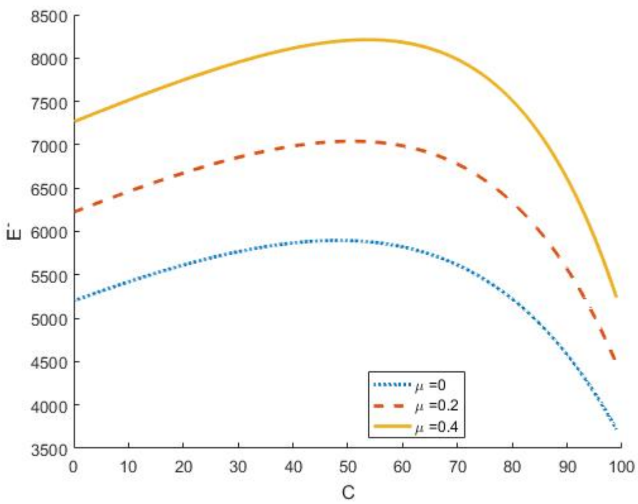
本節では、企業の市場価値を最大化するような最適負債比率の性質を見る。図 2.3 は異なる EBIT の期待成長の下で企業の市場価値を負債比率の関数としてプロットしているものである。図から示されているように、EBIT の期待成長が高ければ高いほど、企業の最適負債比率が下がることが分かる。一見すると企業が借入額を減らしているように見えるが、実はそうではない。

図 2.3　EBIT の成長性と最適負債比率



一般的な考え方の下で、EBIT の期待成長が高くなると、企業が財務的な余裕が生じて節税効果を得るために借入額をより多く調達すべきである。これを示すものは次の図 2.4 である。図 2.4 は図 2.3 とほぼ同じものであるが、ただ横軸をクーポンにしただけである。横軸をクーポンレベルにしたことによってすぐ分かるが、EBIT の期待成長が高くなるほど、借入額を代表する最適クーポンが 48.2 から 53.6 まで増える。どうして図 2.3 のような現象が現れるかというと、それは自己資本価値が EBIT の期待成長に対する反応度合は債券のそれより大きいためである。よって、最適な借入額を増やしたが、負債比率が下がってしまうようになる。

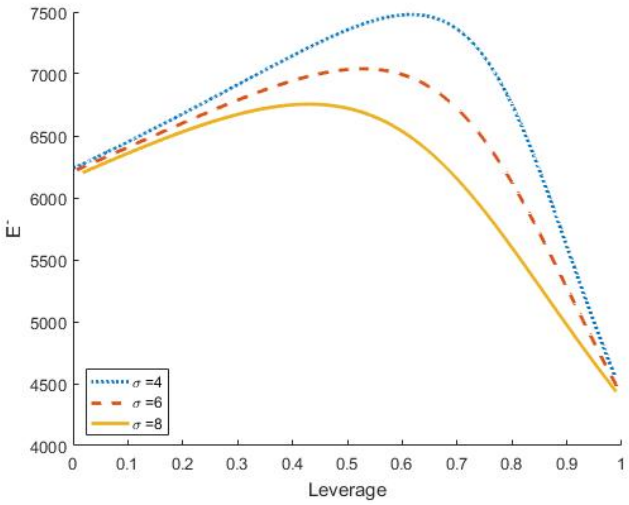
図 2.4　EBIT の成長性と返済額



その一方、直感に合うような性質もある。それは、最適負債比率が事業リスクの減少関

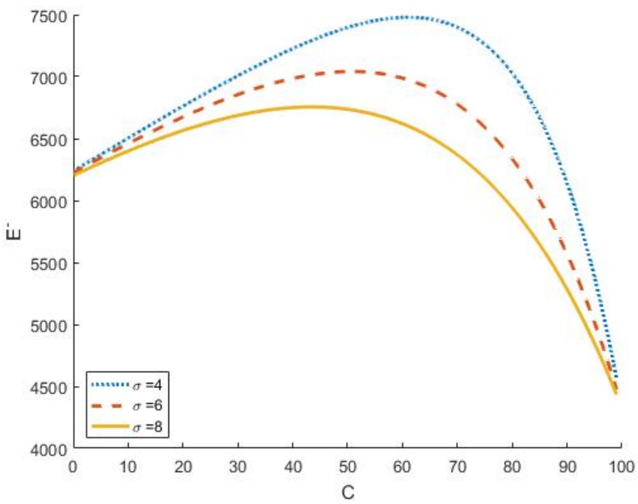
数となっていることである。事業がリスキーであればあるほど、倒産確率が上昇するから、倒産コストを避けるためには負債をできるだけ低い水準で控えたいと考えるのは一般的であろう。図 2.5 では異なる事業リスクの下で企業の市場価値を負債比率の関数としてプロットしている。これも直感に合うように最適負債比率が事業リスクの減少関数を示している。

図 2.5　事業リスクと最適負債比率



次の図 2.6 は横軸をクーポンにしたものである。横軸は負債比率である図 2.5 と整合的になっており、事業がリスキーであればあるほど、企業の市場価値を最大化するような支払クーポンを減らすべきだということが確認できる。

図 2.6　事業リスクと最適返済額



以上のことから、本稿モデルで時価ベースの負債比率で示されている性質には直感に合

うものもあれば、一見すると直感に反するものもある。ところが、クーポンで表す最適借入額を見ると、それぞれのパラメータの動きに対して直感に合うように変動していることが分かる。

表 2.2 比較静学

	最適クーポン	倒産レベル(%)	ICR	イールドスプレッド(bsp)	回収率(%)	負債比率(%)	節税効果(%)
ベース	50.74	58.95	1.97	36.52	15.99	52.51	12.84
$\alpha = 0.5$	44.85	54.04	2.23	39.30	10.14	46.49	10.48
$\alpha = 0.1$	58.52	65.44	1.71	33.34	24.36	60.26	16.01
$\tau = 0.38$	52.06	60.05	1.92	38.24	15.94	54.59	15.25
$\tau = 0.32$	49.27	57.72	2.03	34.85	15.94	50.31	10.67
$\sigma = 8$	43.51	52.92	2.30	39.21	22.49	46.05	8.26
$\sigma = 4$	61.03	67.53	1.64	32.47	9.12	61.22	19.86
$r = 1.2\%$	52.51	59.29	1.90	44.43	14.40	54.91	14.40
$r = 0.8\%$	48.48	58.79	2.06	28.21	18.23	49.47	10.92
$\mu = 0.3$	52.13	63.18	1.92	32.61	15.42	51.29	12.79
$\mu = 0.1$	49.43	54.02	2.02	41.81	16.24	53.63	13.01

最適クーポンが数値計算によって求められた場合にそれぞれの指標はどうなっているかを示しているのは表 2.2 である。最初の行はパラメータを表 2.1 で示された基準値の下で計算したものであり、二行目以降は各パラメータを変えて計算したものである。倒産レベルは V_B/V のように計算するものであり、現在の事業資産が倒産までの危険さを示唆した指標ともなる。インタレスト・カバレッジ・レシオ (ICR) は高ければ高いほど、EBIT に対して最適クーポンを低く抑えるべきだということを表す。例えば、倒産コストが高ければ高いほど、または事業リスクが高ければ高いほど、借入額を表す最適クーポンはベースケースより減らすべきであり、ICR の値も大きくなることが確認できる。イールドスプレッドの各経済変数から受ける影響も直感に合う。続いて、表 2.2 にある回収率は倒産時における債券の市場価値を債券の市場価値で割ったものであり、つまり D^{insolv}/D のように計算した指標である。ただ注意すべきなのは、これは最適クーポンが選択された場合、倒産における債権者の税引き後の権利が債券の市場価値にどれほど占めるかを現在価値で見るので、$1-\alpha$ という「回収率」より低い結果となる。そして、負債比率は D/v のように計算され、先行研究で観察された負債比率と近い水準になっている。最後の列は節税効果を示しているが、ここで節税効果の度合を

$$TB = \frac{E^{-} - (1-\tau_e)V}{(1-\tau_e)V} \times 100 \tag{2.23}$$

のように測るとする。既存株主が債券発行することによって自分の資本価値をどれほど増加させるかを示す指標となる。

以上から、支払クーポンが保証されたベーシックモデルの導出と各指標の性質を示した。妥当なパラメータを設定した上で、各指標の比較静学は直感に合う一方、最適インタレスト・カバレッジ・レシオや負債比率も現実に近い結果となっている。次の節では債権者保護について別のケースを考えてみる。

2.5　債券の元本が保証されたケース

今までの議論では、EBIT が支払クーポンを下回ったら倒産すると考えてきた。この節ではもうひとつ債券者保護ケースを考えてみる。前節と同じように、企業が倒産していない限り、毎期 C を債権者にペイアウトする。倒産時においては、企業の残余資産は最初に発行した債券の価値と等しくなるように保証されることを想定する。このような仮定の下で新しい倒産時の EBIT の閾値を求める。ただし、保証されるのは税引き前、倒産コスト引き前の社債「元本」（D_{BT} と記号する）と考える。これにより、D_{BT} は

$$D_{BT} = \frac{C}{r}\left[1 - e^{-X(\delta-\delta_B)}\right] + D_{BT}e^{-X(\delta-\delta_B)} \tag{2.24}$$

のように定式化できる。式を書き換えると、

$$D_{BT} = \frac{C}{r} \tag{2.25}$$

のように債券の税引き前倒産コスト引き前価値（元本の価値）を表すことができる。一方、我々は企業の事業資産と EBIT との関係をすでに導出したので、倒産時における企業の EBIT と債券の価値は

$$V_B = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\delta_B}{r} = D_{BT}$$

のような関係が成立するので、以上の式から

$$\delta_B = rD_{BT} - \frac{\mu}{r} \tag{2.26}$$

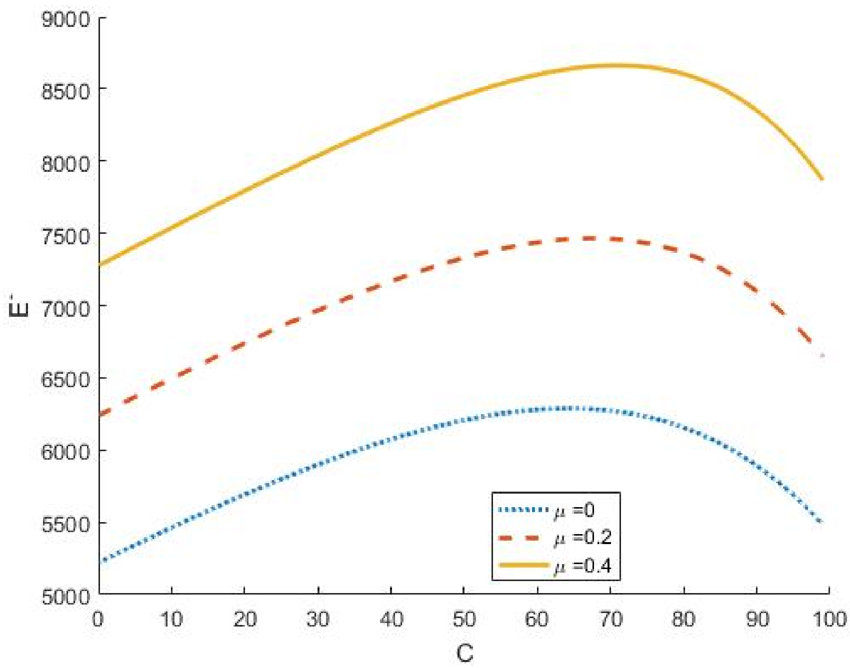
が得られる。また、債券の元本が保証されているので、債券の税引き前のクーポンレートがリスクフリーレートとなることは (2.25) 式から分かる。つまり、支払クーポン $C = rD_{BT}$ という関係が成立する。従い、上式の (2.26) 式は

$$\delta_B = C - \frac{\mu}{r} \tag{2.27}$$

のように書き換える。倒産における EBIT の閾値 δ_B が前節で考えた C より低く設定された。元本が保証されたこのケースにおいて、支払クーポンが最適に選択された場合、社債価値、企業の市場価値及び既存株主の資本価値は前節モデルのそれより上昇することが確認できる。ここで既存株主の資本価値を例として取り上げよう。図 2.7 は債券発行直前

の自己資本価値と支払クーポンの関係を示すものであるが、これは図 2.4 と比べてみれば分かるように、新しい倒産閾値の下で最適クーポンが増え、節税効果をより多く享受できるので、既存株主の資本価値が上昇することが分かる。

図 2.7　新しい倒産閾値が企業市場価値に与える影響



倒産閾値が支払クーポンより低くなることにより、倒産確率が相対的に低くなるので、そこから財務的余裕が生じ、節税効果を得るためにより多く借り入れることが分かる。他の指標の性質をまとめたものは表 2.3 である。最適クーポンの性質は前節のモデルと変わらないのであるが、μ が正である限り、クーポンが最適に選択された場合における債券価値と既存株主価値は前節のそれより高くなり、政府の取り分と倒産コストは前より少なくなったことが確認できる。結果として、債券の元本が保証されたケースにおいて、企業の市場価値をより高めることが示唆される。

表 2.3　元本が保証された場合のモデルの比較静学

	最適クーポン	倒産レベル(%)	ICR	イールドスプレッド(bsp)	回収率(%)	負債比率(%)	節税効果(%)
ベース	67.49	56.24	1.48	41.10	10.76	63.65	19.64
$\alpha = 0.5$	62.13	51.77	1.61	42.13	6.60	59.23	17.58
$\alpha = 0.1$	74.41	62.01	1.34	39.95	16.86	69.16	22.35
$\tau = 0.38$	68.67	57.22	1.46	42.49	10.73	65.43	22.93
$\tau = 0.32$	66.15	55.12	1.51	39.74	10.71	61.77	16.67
$\sigma = 8$	59.52	49.60	1.68	47.46	15.00	56.21	14.44
$\sigma = 4$	78.81	65.68	1.27	34.34	6.24	73.26	27.40
$r = 1.2\%$	66.55	57.04	1.50	48.50	10.30	64.52	20.30
$r = 0.8\%$	69.27	55.41	1.44	33.46	11.24	62.76	18.97
$\mu = 0.3$	77.78	59.83	1.29	38.21	8.82	67.45	22.58
$\mu = 0.1$	57.61	52.37	1.74	44.66	13.13	59.38	16.56

2.6　結論

本稿は Goldstein モデル [16] から拡張したものである。ところが、EBIT が幾何ブラウン運動ではなく、EBIT がマイナスになることが可能だという意味でより現実に近い仮定として算術ブラウン運動に従うことを仮定した。そして、法人税率、支払利子に対する税率及び配当に対する税率を考慮しながらモデルを構築し、企業の市場価値、債券価値、自己資本価値および最適負債比率などの関係について定量的に再検討した。

我々は債権者の利益が守られたことに注目するため、倒産閾値の設定においては株主が自主的に選択することは考えていない。そこで、本稿では債権者保護に関して現実に近いと考えられる二つのルールを提示してモデルを構築した。一つは EBIT が約束された支払クーポンを下回った時に倒産することとなる。もう一つは、税引き前倒産コスト引き前の債券元本が保証される場合、そこで倒産の閾値を決めることである。各請求権に対して比較静学を分析した結果、直感に合うような結果が得られた。また、それぞれのパラメータは近年日本と近い数値を使って求めた最適負債比率も日本企業の場合と近い水準となった。最後に、最適クーポンの比較静学の結果が二つのケースにおいても特に変わらないが、元本保証のケースにおいて、倒産時の EBIT の閾値がクーポンをある程度下回ることは許容されることによって債券価値、企業の市場価値と既存株主の資本価値をより高めることができることを明らかにした。ただ、特に元本保証のケースにおいて、EBIT が支払クーポンを下回った場合、節税効果が変わるか、または株主のペイオフが変わるかどうかについて本稿では議論されなかった。これらの問題を今後の課題としたい。

2.7　補論

2.7.1　企業事業価値の導出

まず、企業事業価値は満たす微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_{\delta\delta} + \mu V_{\delta} - rV + \delta = 0 \tag{2.28}$$

のように与えられる。次に、解の形を $V = A + B\delta$ と推測する。ただし、A, B は未知の定数である。これにより、$V_{\delta} = B$、$V_{\delta\delta} = 0$ となる。これらを微分方程式に代入すると

$$\mu B - rV + \delta = 0$$

となる。書き換えると

$$V = \frac{B\mu}{r} + \frac{\delta}{r} \tag{2.29}$$

が得られる。そして、差分は

$$dV = \frac{1}{r}d\delta = \frac{1}{r}(\mu dt + \sigma dz)$$

のように書ける。また、推測した解の形によって $dV = Bd\delta = B(\mu dt + \sigma dz)$ により、$B = 1/r$ が分かる。これを (2.29) 式に代入し、最終的に、企業の事業価値は

$$V = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\delta}{r}$$

となることが分かる。

級数から求めることもできるが、投資家はリスク中立的と仮定して δ のプロセス $d\delta = \mu dt + \sigma dz^Q$ を注意し、δ に対する請求権の価値 V はこのキャッシュフローの割引現在価値の合計と考えると、

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta + (i-1)\mu}{(1+r)^i} \tag{2.30}$$

となり、両辺を $1/(1+r)$ を掛けると、

$$\frac{V}{1+r} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta + (i-1)\mu}{(1+r)^{i+1}} \tag{2.31}$$

となる。上の二つの式の差分を取ると、

$$\frac{rV}{1+r} = \frac{\delta}{1+r} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu}{(1+r)^{i+1}} \tag{2.32}$$

となるが、これを解くと

$$V = \frac{\delta}{r} + \frac{\mu}{r^2} \tag{2.33}$$

が得られる。

2.7.2　一般解の導出

常微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F_{\delta\delta} + \mu F_{\delta} - rF + P = 0$$

のように与えられる。まず $P = 0$ の場合を解くこととする。解を $F = Ae^{\lambda\delta}$ と推測して、ただし A 未知の係数である。これを上記の微分方程式に代入すると λ に関する二次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \mu\lambda - r = 0$$

が得られる。λ について解くと

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

となる。ルートが二つがあるので、$F(\delta)$ は

$$F(\delta) = A_1 e^{-X\delta} + A_2 e^{-Y\delta}$$

となり、ただし、

$$X = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$Y = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

であり、A_1、A_2 はまだ未知の係数であり、境界条件によって求められる。以上のことから、$P \neq 0$ の場合における常微分方程式の一般解 $F'(\delta)$ は上記の一般解足す特殊解 F_P、つまり、

$$F'(\delta) = F_p + F(\delta)$$

となる。

第 3 章

最適政府支出

本稿では政府支出、財政持続可能性及び割引国債評価についてトレード・オフ理論のフレームワークで議論し、最適政府支出レベルの閉じた解を得た。我々は、政府支出の使途を社会保障費として捉え、そこからもたらされる所得移転効果を政府支出のベネフィットと考える。一方、現行所得税率の下で財政維持できない場合、所得税率を上昇させる税負担コストと、累積債務の一部は償還しない破綻リスクもコストとして考えた。これらのベネフィットとコストとのトレード・オフ関係から最適政府支出の存在を理論上で示した。比較静学を行った結果、モデルの性質は直感に合うものとなり、妥当なパラメータの下で求めた最適政府支出対 GDP 比率が日本の現状とかなり近い結果となった。最後に、本稿で再確認された重要な性質は、政府はつねにサープラスを確保する必要がなく、例えば日本のように財政赤字になっているにもかかわらず、まだ持続不可能までとはいえないのである。

3.1　初めに

政府支出は 1 会計年度内に公共部門が行う一切の支出を指し、多種多様なものが含まれる。例えば、公共事業、防衛費、社会保障と公債の償還費等が挙げられる。これまで、景気減速・後退時の日本の景気対策といえば、公共事業が主流であったが、従来型の公共事業では、生活に必要なインフラ整備の意味はあっても、需要を喚起する効果は昔ほどではないといわれている。これに対し、社会保障に副次的な経済の下支え効果があるとすれば、政府当局はこの点を考慮に入れて将来の社会保障支出の多寡を検討すべきだという論点は徐々に主流になってきた。

社会保障はよく「セーフティーネット（安全網）」だといわれるが、経済にかかわるさまざまな役割がある。社会保障の機能としては、主として、(1) 人生のリスクに対応し、国民生活の安定を実現する「生活安定・向上機能」、(2) 社会全体で、低所得者の生活を支

える「所得再分配機能」、(3) 経済変動の国民生活への影響を緩和し、経済成長を支える「経済安定機能」及び (4) 社会保障関連の産業と職業を作り出し、社会全体の所得を増やす「雇用や産業創出機能」等が挙げられる。近年の日本では社会保障の分野で多くの雇用が生み出されており、そうした面からローカルのみならずグローバル経済の活性化が期待されている。このような社会保障の機能により、私たちは社会生活を営んでいく上でのリスクを恐れず、日常生活を送ることができるとともに、人それぞれの様々な目標に挑むことができ、それがひいては社会全体の活力につながっていくような好循環が期待される。逆にいえば、社会保障が不安定となれば、将来の生活への不安感から、例えば、必要以上に貯蓄をするために消費を抑制する等の行動をとることによって経済に悪影響が及ぼされる等、社会の活力が低下する恐れがある。

日本の年金・医療・介護は、これまでの急速な高齢化に対し、最大限の対応をしてきた。給付水準は概ね先進諸国並み、医療については世界第 1 位の評価を受けている。今後の高齢化は先進国では最も速く進行する見込みであり、高齢者数の増大によって現在の年金・医療・介護のサービス水準を維持するだけでも、税金投入を毎年 1 兆円以上増加させる必要があるといわれている。この財源を確保できなければ、社会保障制度の維持が困難になるであろう。一体改革では、この高齢化に対応するための財源を確保し、制度の維持を図るが、改革の具体策としてはまだまだ議論のところにある。

社会保障の安定財源を確保することが重要だというのはいうまでもないが、高齢化、失業保険等により社会保障給付が大きく伸びてしまう現行制度のままでは、今後、給付増によって累積される国の債務を減らすために再び大幅な国民負担増を求める「いたちごっこ」となってしまう恐れがある。実証研究の多くは社会保障と経済成長には負の相関、つまり、社会保障の規模が大きくなると、経済成長にマイナスの効果があるとしている。例えば、日本の場合、古川・高川・植村 [3] の研究は、社会保障の規模を測る指標の一つである国民負担率と経済成長率の間には負の相関がみられ、また、同様な関係が、国民負担率と貯蓄率、資本ストック率にも見られるを示した。よって、社会保障のベネフィットには限界があり、潜在的なコストがあることは示唆される。

従い、社会保障に関わるこのトレード・オフを如何にバランスさせるかは日本政策当局にとっての急務である。本稿では、政府支出がもたらす様々なメリットと潜在的なコストとのトレード・オフを考慮しながらモデルを構築し、最適な政府支出水準を明らかにするように試みた。本稿の構成について、まず次の節で財政支出に関する先行研究を紹介する。そして、3.3 節で本稿モデルを紹介する。次に、3.4 節でモデルの比較静学を示し、最適政府支出の性質をまとめ、割引債の評価への応用を考える。最後は結論で本稿モデルの要点をまとめる。また、本文に書かれていない数式の展開や導出等に関しては補論にまとめられる。

3.2　先行研究

政府支出が与えられた場合、政府のファイナンス方法は人々の消費行動に対して影響を与えないことはリカード=バローの等価定理として周知される。リカードは、財政赤字になると、不足分を公債を発行して補足するような経済を考える。また、公債の負担は将来世代にかかる税によって償還されなければならないと想定する。この場合、公債の市場利子率と民間資金の預貯金利子率が同じであれば、生涯所得は変わらない。なぜかというと、人々は将来の増税を見越して現在の消費を減少するであろう。そうすると、現在世代は税負担と同じ効果を節約という形で受けているわけであり、将来世代の負担が重くなるということはない。バロー [7][8] はリカードが提唱したこの考え方をさらに発展させた。バローにより、国家の歳入を租税で賄うか、公債で賄うかは、それぞれの場合における予算制約式を解くことによって現在から将来への負担転嫁が起こるかどうかを見ることができる。実際に解いてみると、前者と後者で予算制約式は一致するので、公債発行は経済に中立的だという結論が得られた。また、遺産を考慮しながら世代を超えたモデルを再度構築した結果、公債の負担転嫁が将来世代に及ばないことも示された。しかし、彼らの議論では、あくまで政府支出が与えられたものであり、政府支出の最適水準を議論する余地がなかった。一方、国債の評価においては信用リスクを実際に考慮しているのに対し、彼らはクレジット・イベントについても考慮されていない。クレジット・イベントが考慮されないことによって彼らの論文で議論された財政の持続可能性は実は不十分だと考えられる。

政府支出のベネフィットを合理化するために、政府支出には乗数効果があると主張するものがあるが、それには限界があると我々が考える。例えば、政府が公共投資として、橋を作ることを考えよう。そして、橋を作る建設業者に資金を払ったとする。ここでの問題は、その資金をどのように調達するか、そして資金調達の方法は経済にどのように影響を与えるかということになる。仮に、政府が資金を調達するために国債を発行し、中央銀行がその国債を買って貨幣を印刷したとしたら、世の中に回っている貨幣が増え、生産物（橋）も増えたこととなるが、この問題の本質は財政政策ではなく、金融政策になってしまう。一方、政府が建設業者に払った資金を別のだれかから税金という形で調達したこととし、さらに建設業者に対する支出には乗数効果があると仮定すると、税金で取られた人たちにとっては同じマイナスの乗数効果をつけないとおかしいので、乗数効果のネット効果はゼロと考えるのは自然である。さらに時間軸で見ても、これらの税金はすぐ取られるか、あるいは将来取られるかに依存しなく、現在価値で見ると同じであろう。以上により、財政政策は経済に中立的だという結論が直感的に導かれる。政府支出のメリットを解釈するために他の理由を考えなければならない。

政府が発行した国債は外国政府に買われたの場合において、国債を約束されたように償還しないと財政破綻になってしまう。外国または IMF のような国債仲介機関が介入することにより、政府支出を削減したり（緊縮財政）、所得税率を上昇させたりして財政立て直しを迫られることがある。例えば、周知のように、ギリシャが 2010 年頃に経験した財政危機はこのような状況が起こった。もちろん国の財政が破綻するような事態が滅多にないが、万が一それが起こると、いろいろな施策が余儀なくされるので、世界中において自国の信用を失い、グローバル資本市場にアクセスできなくなって自国経済に対して悪い影響をもたらすことが想定できるであろう。外国政府が自国債を持つ場合に、自国政府のバランスシートを企業の資産負債との関係に倣って、Gray[19] がソブリン債バージョンのマートンモデルを構築した。彼らが政府のバランスシートにおける資産と負債との相対関係からソブリンの信用リスクを推定することができた。マクロ経済への応用においては重要なステップとなるから意義が大きいと考えられる。

最適資本構成に関する先行研究の中に、Leland[26] のモデルの貢献は大きい。彼は、企業の倒産閾値は経営者が株主資本を最大化するように内生的に決めると仮定したうえで、負債の節税効果と倒産コストからのトレード・オフから、企業の市場価値（既存株主の資本価値）を最大化するような最適な借入額の存在を理論上で示した。同じ数学的構造の下で、仮に政府支出を社債のクーポンとして捉え、社会全体の福祉を企業市場価値として捉え、それを最大化するような政府支出水準の存在も示唆される。だが、国債は主に自国民が持っている日本のような場合に、「債権者」と「株主」をなかなか区分しにくく、マートンタイプの社債評価モデルのフレームワークを直接に応用することは困難であり、更なる工夫をしなければならない。その際に重要なのは、政府支出に関わるメリットとデメリットをどのようにとらえるかということである。例えば、財政破綻のコストについて検証した先行研究には、Borensztein[12] や English[14] 等がある。

本稿では、政府支出のメリットとして、乗数効果ではなく、所得再分配効果というように考える一方、政府支出にかかる潜在的コストとしては、財政再建による増税負担と国債の一部が償還不能となる破綻リスクを想定し、トレード・オフ型モデルを構築する。モデル導出の詳細について次の 3.3 節から説明する。

3.3　モデル

政府支出と所得との関係に焦点を当てるために、本稿では国民経済計算における固定資本減耗と生産・輸入品に課される間接税等*[1]を考えなくモデルを簡単化する*[2]。また、税引き前所得は確率過程であり、外生的に与えられる。これにより、政府支出は国民総所得に影響を与えるかどうかについて議論の対象外となる。では、より具体的に、GDP を δ とし、次のプロセス

$$d\delta/\delta = \mu dt + \sigma dz^Q \tag{3.1}$$

に従うとする。ただし、 $\mu \equiv \mu_\delta - \sigma\theta$ であり、 $\mu_\delta, \sigma, \theta$ は定数で、それぞれ GDP の期待成長率、GDP 成長率の標準偏差とリスクの市場価格と捉え、dz^Q はリスク中立測度で測る一次元標準ブラウン運動である。つまり、GDP は幾何ブラウン運動に従っている。

無裁定条件を使うことから、マーケットには安全資産の存在を仮定する必要がある。安全資産の金利の期間構造はフラットでその収益率は定数で r とする*[3]。これにより、GDP の資産価値はリスク中立測度で測る将来の所得フローのリスクフリーレートで割り引いた現在価値の合計で評価できる。また、δ は対数正規分布に従っている性質を利用し、t 時点におけるこの資産価値を V_t と記号し、

$$\begin{aligned} V_t \equiv & \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)} \delta_s ds \right] \\ = & \frac{\delta_t}{r-\mu} \end{aligned} \tag{3.2}$$

のように求められる。ただし、割引現在価値の合計が発散しないために、制約条件として $r - \mu > 0$ を仮定する。上式を見ればわかるように、所得の資産価値 V_t はリスクフリーレート r、ボラティリティσ とリスクの市場価格 θ の減少関数である一方、現時点の GDP レベル δ_t と GDP の期待成長率 μ_δ の増加関数となっている。各パラメータは定数であるため、GDP の資産価値 V も GDP と同じ幾何ブラウン運動に従っていることが分かる。

*[1] よく知られているように、欧州各国の税が付加価値税等間接税中心の税体系となっているのに対し、日本や米国の税体系が、所得税や法人税等のいわゆる直接税を中心としたものである。本稿のモデルでは日本の財政問題に注目しながら、議論を簡単にするために、税収の源泉は所得税のみを考える。そして、累進税率も無視し、所得税率は一律に定数で $\tau \in (0,1)$ で表す。

*[2] 国内総生産は雇用者報酬、営業余剰・混合所得、固定資本減耗と生産・輸入に課される税の合計という関係により、本稿では固定資本減耗と生産・輸入に課される税を考えないので、本稿で扱う所得は雇用者報酬と営業余剰・混合所得の合計とし、GDP と見なしてもよろしい。

*[3] 安全資産は、破綻の可能性がほぼないような国債等で予め将来の収益が確定されている資産のことを一般的に指しているが、本稿では、国債にも債務不履行のリスクがあると考えるので、国債は安全資産ではなくなる。本稿でいう安全資産は具体的に何を指しているかという質問に対してはっきりした回答が将来の課題としたい。特にこだわりがない限り、現在においては、グローバルマーケットにおいて格付けの高い国債、あるいは「金」、「土地」等のインフレや金融危機に強い資産、さらに人的資源等も考えられる。

時間が連続で、裁定取引が存在しない限り、このペイアウトのある所得の資産価値 V を原資産とするペイアウトのある派生証券の価値 $F(V,t)$ は以下の偏微分方程式を満足することがよく知られている。具体的に、偏微分方程式は

$$(1/2)\sigma^2 V^2 F_{VV} + \mu V F_V + F_t - rF + P(t) = 0 \tag{3.3}$$

のようになる。ただし、派生証券の価値 F の添え字は偏微分を表しており、$P(t)$ は t 時点における派生証券のペイアウトである。ここで指摘しておくべき重要な点は、本稿モデルでは、派生証券の価値とペイアウトとも時間に依存するため、時間 t に依存しない先行研究の結果は直接に適用できないということである。だが、後に示すように、本稿における設定では、(3.3) 式には閉じた解を求めることができた。

日本政府の一般会計歳出では、社会保障関係費、防衛費と文教及び科学振興関係費等が大きな割合を占めている。社会保障支出は経済を活性化することが期待され、アベノミクスの下でこれからの社会保障費をさらに増加させる見込みである。従い、本稿では社会保障費による所得移転（再分配) 効果に注目する。一時的に税収が政府支出をカバーできない場合には、政府が割引国債を発行して不足資金を調達する。財政赤字の連続発生につれて債務が累積されていくこととなる。その一方、政府が資金余剰（サープラス）の場合に、負債を返すように考えるのは一般的である。現行所得税率が与えられた場合、当期時点から見込める税収の現在価値の合計が現在における政府支出の現在価値の合計と累積債務の返還を穴埋めすることができなくなると、政府が財政改革をせざるを得ないと考える。財政改革においては、本稿では極端なケースを考える。まずは発行された国債の一部をデフォルトさせ、そして、今後の財政再建をするために、社会保障費を全部カットするほか、所得税率も上げることを想定する。

以上の議論により、経済の状態を二つのステージに分けて考えるべきである。まず、第 1 ステージを添え字 s(Sustainable) とつけ、このステージにおいては、政府が現行の所得税率の下で財政を運営するほか、社会保障関係費用が毎期 g で成長することを考える[*4]。それで、途中に財政赤字によって累積債務残高が増えたり、あるいは所得のレベルが下がったりすることによって累積債務残高を返せなくなる場合、この経済が破綻し、言い換えるとこの経済は財政改革という第 2 ステージ（d ステージ）に入る。ただし、第 2 ステージを特に断りがなければ添え字 d(Default) を付けることとする。続いて、この経済に係る各請求権の価値について議論する。

[*4] 社会保障費が成長する理由としてよくあげられるのは高齢化問題である。高齢化問題は比較的に長い期間にわたる問題であるので、高齢化になるスピードは比較的に短い期間で見ると定数だと考えられる。社会保障費は高齢化のスピードに比例すると想定すれば、社会保障費の成長率も定数となる。もちろん、社会保障費用の成長率をコントロール変数とする場合、現在の最適政府支出水準を今後の期待成長率 g によって変えることができる。

まず所得に対する請求権 V_t を二つのステージにおける現在価値で分けて解く。PDE(3.3) 式の解は Feynman-Kac フォーミュラで書けることに注意すると、第 1 ステージにおける所得の資産価値は

$$V_{s,t} = \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^{t_B} e^{-r(s-t)} \delta_s ds \right] \tag{3.4}$$

のように表すことができる。ただし、t_B は政府が財政政策を切り替える最適なタイミングと定義するが、現時点 $(t < t_B)$ にはわからない確率変数である。微分方程式を解くには、解の形を推測するのは一般的である。しかし、社会保障費のペイオフは時間とともに成長することを仮定したので、偏微分方程式を解くには難しくなるであろう。幸いであるが、Leland[26] と似ている形の解がある。我々は s ステージにおける総所得 GDP に対する請求権の関数形を

$$V_{s,t} = V_t - V_{B,t} \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X}$$

と考える。ただし、

$$X = \frac{1}{\sigma^2} \left[\mu - g - (1/2)\sigma^2 + \sqrt{(\mu - g - (1/2)\sigma^2)^2 + 2\sigma^2(r-g)} \right]$$

である。また、$V_{B,t}$ は t 時点における財政改革を行う所得の資産価値の閾値であるが、本稿モデルでは先行研究と異なり、派生証券のペイアウト（例えば、政府支出）が時間とともに増加することを仮定したため、偏微分方程式を解くために $V_{B,t}$ もカレンダータイム t に依存するように設定する必要がある。また後で説明するが、政府支出の現在価値の合計が発散しないために、我々は $r - g > 0$ を設けるので、X は正の値となっている。補論で示されているが、閾値が時間の関数と設定された $V_{s,t}$ は偏微分方程式を満足することが確認できる。そして、総所得 GDP に対する請求権価値 V_t が $V_{B,t}$ になると、この経済が d ステージに入り、s ステージにおける所得に対する請求権がゼロとなることがわかる。つまり、次の境界条件

$$V_{s,t} = \begin{cases} V_t, & \text{as} \quad V_t \to \infty \\ 0, & \text{at} \quad V_t = V_{B,t} \end{cases} \tag{3.5}$$

を満たす。一方、財政改革後における所得の資産価値の現在価値は

$$\begin{aligned} V_{d,t} =& \mathbb{E}_t^Q \left[\int_{t_B}^{\infty} e^{-r(s-t)} \delta_s ds \right] \\ =& V_{B,t} \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \end{aligned} \tag{3.6}$$

である。ここですぐ分かるであろうが、二つのステージにおける所得に対する請求権の価値の合計は V_t となる。そして、$V = V_{B,t_B}$ の時、$V_{s,t_B} = 0$、 $V_{d,t_B} = V_{B,t_B}$ が確認できる。

次に政府支出の請求権価値について議論する。本稿モデルでは財政改革を行わない限り、政府支出はすべて社会保障に使われると考える。そして、政府が現時点において G を支出し、今後 g で成長するように仮定する。ある時点にもし税収が政府支出に足りなかったら、政府が割引国債を発行して資金を調達する。仮に V_t が閾値 $V_{B,t}$ に達したら、政府が社会保障をやめ、所得税率を上げる。このような社会保障に対する請求権の価値を F_G と記号し、解は

$$\begin{aligned} F_G(V_t) =& \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^{t_B} e^{-(r-g)(s-t)} G ds \right] \\ =& \frac{Ge^{gt}}{r-g} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

のように考える。社会保障費の関数形は次のような境界条件

$$F_G = \begin{cases} \frac{G_t}{r-g}, & \text{as} \quad V_t \to \infty \\ 0, & \text{at} \quad V_t = V_{B,t} \end{cases} \tag{3.8}$$

を満たす一方、偏微分方程式も満足することが確認できる。ただし、政府支出の現在価値の合計が発散しないために、制約条件として $r - g > 0$ と置く。そこで、社会保障の諸効果を所得移転効果と呼び、その度合いについては政府支出と比例して ηG_t で表す。そこで、政府は現行財政政策が維持できる間においてのみ社会保障へ支出することに留意すると、所得移転効果 (Government Benefit) は

$$GB = \frac{\eta Ge^{gt}}{r-g} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \right] \tag{3.9}$$

となる。所得再分配効果あるいは所得移転効果という概念に関しては、補論で効用アプローチを用いて説明する。

財政改革までに累積された国債の現在価値の期待値を $F_D(V_t)$ と記号し、これは政府支出と税収の差の現在価値の合計で、

$$\begin{aligned} F_D(V_t) =& \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^{t_B} e^{-(r-g)(s-t)} G ds \right] - \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^{t_B} e^{-r(s-t)} \tau \delta_s ds \right] \\ =& \frac{G_t}{r-g} - \tau V_t - \left[\frac{G_t}{r-g} - \tau V_{B,t} \right] \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \end{aligned} \tag{3.10}$$

となる。すでに述べたように、現在の所得税率で累積国債発行残高を返せなくなったら、一部の国債は償却不能になってしまうことを想定した。そして、この償却不能額は累積国債残高に比例すると考える。つまり、発行残高の $\alpha \in [0, 1]$ 分が償却不能となる。この累積債務の償還できない部分はコスト (Default Cost) と捉え、その現在価値を $DC(V_t)$ と

記号し、

$$DC(V_t) = \mathbb{E}_t^Q \left[\int_t^{t_B} e^{-r(s-t)} \alpha (G_s - \tau \delta_s) ds \right]$$

$$= \frac{\alpha G_t}{r-g} - \alpha \tau V_t - \alpha \left[\frac{G_t}{r-g} - \tau V_{B,t} \right] \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \quad (3.11)$$

と書ける。s ステージにおける民間部門の福祉について、我々は税引き後所得に対する請求権価値と社会保障費に対する請求権価値の合計から、国債の償還不能額の現在価値の期待値を除いたものと考える。つまり、s ステージにおける民間部門（添え字を P：Private Sector とする）が享受できる福祉を $V_{P,s,t}$ と記し、

$$V_{P,s,t} = (1-\tau) V_{s,t} + GB(V_t) - DC(V_t)$$

$$= (1 - \tau + \alpha \tau) V_t + \frac{(\eta - \alpha) G_t}{r-g} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \right] - (1 - \tau + \alpha \tau) V_{B,t} \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \quad (3.12)$$

となる。

政府の財政再建時において、累積された債務を返済するために増税する。ここでは現行の所得税率を τ から $\tau_d > \tau$ に上げることを考える。また、本稿の設定により、2 ステージにおいては極端であるが社会保障支出をやめることとなるので、そこで財政改革後の民間部門の所得に対する請求権の現在価値 $V_{P,d,t}$ は税引き後所得に対する請求権の現在価値となり、

$$V_{P,d,t} = (1 - \tau_d) V_{d,t} = (1 - \tau_d) V_{B,t} \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \quad (3.13)$$

と表す。

以上から、民間部門の福祉は二つのステージで享受できる福祉の合計となる。言い換えると、税引き後所得と社会保障に対する請求権の価値から累積国債の償還不能分を除いたものである。つまり、数式で書くと

$$V_{P,t} = V_{P,s,t} + V_{P,d,t}$$

$$= (1 - \tau + \alpha \tau) V_t + \frac{(\eta - \alpha) G_t}{r-g} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \right] - (\tau_d - \tau + \alpha \tau) V_{B,t} \left(\frac{V_t}{V_{B,t}} \right)^{-X} \quad (3.14)$$

のように表すことができる。

3.3.1　最適財政改革タイミングと最適政府支出

累積債務残高が増えると、財政破綻のリスクが高まることにより、国債のデフォルトコストと税負担の現在価値が増え、民間部門の福祉が下がることになる。また、遺産、相続

等を考えない場合、国債を発行することは実は現役世代が得し、将来世代の税負担が増加するという論点もある。いずれの考え方にしても、累積債務残高の増加は望ましくないと考えるのは自然である。従い、本稿では政府は累積国債残高を最小化して民間の福祉の最大化を図ると考える。これによって財政改革における所得の資産価値の閾値 $V_{B,t}$ が次のように決められる。つまり、

$$\min_{V_{B,t}} F_D(V_t) \tag{3.15}$$

のように表す。目的関数 $F_D(V_t)$ を V_t で微分し、V_t を $V_{B,t}$ と置き換えて結果をゼロと置くと最適な $V_{B,t}$ を求めることができる。求められた閾値は

$$V^*_{B,t} = \frac{Ge^{gt}}{\tau(r-g)}\frac{X}{X+1} \tag{3.16}$$

となる。ここでも確認できるが、財政改革の閾値も政府支出の成長率とともに g で成長することが分かる。Leland[26] ではコンソル債を考える場合、企業の倒産閾値は定数であるのに対し、本稿モデルでは社債のクーポンに対応する政府支出は成長するので、閾値も同じ比率で成長することは直感的にも合うのであろう。これで、最適な $V^*_{B,t}$ を各請求権に代入することにより、最適な財政改革における資産価値の閾値の下での各請求権の価値が求まる。例えば、財政改革までの財政サープラスの現在価値の合計の期待値を $F_{SP}(V_t)$ と記号して、

$$\begin{aligned} F_{SP}(V_t; V^*_{B,t}) =& \mathbb{E}^Q_t\left[\int_t^{t_B} e^{-r(s-t)}\tau\delta_s ds\right] - \mathbb{E}^Q_t\left[\int_t^{t_B} e^{-(r-g)(s-t)}Gds\right] \\ =& \tau V_t - \frac{G_t}{r-g} - \left(\tau V^*_{B,t} - \frac{G_t}{r-g}\right)\left(\frac{V_t}{V^*_{B,t}}\right)^{-X} \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。

財政改革における所得に対する資産価値の閾値 $V^*_{B,t}$ を (3.16) 式のように求められた。続いて、閾値がこのように与えられた場合、民間の福祉を最大化するために現時点 $t=0$ における政府支出がどのように決まるかを見る。民間部門の福祉を表す (3.14) 式を見ると、最適政府支出レベルを決める際に G から影響を受ける部分のみを考えればよいので、目的関数は

$$v(G) = \frac{(\eta-\alpha)G}{r-g}\left[1-\left(\frac{V}{V^*_B}\right)^{-X}\right] - (\tau_d - \tau + \alpha\tau)V^*_B\left(\frac{V}{V^*_B}\right)^{-X} \tag{3.18}$$

とする。そして、ソーシャル・プランナーの最適化問題は最適政府支出レベル

$$G^* = \arg\max_G v(G) \tag{3.19}$$

を決めることである。

3.4　モデルの性質と応用

この節では数値例を使ってモデルの性質を確認し、さらに、割引債評価への応用も検討する。まず初期値を設定する。観察できる経済変数については、モデルにおける数学的制約を守った上でできる限り日本の現状に近い数値を使っている。表 3.1 は初期パラメータを示している。例えば、近年の日本 GDP は大体 500 兆円前後であるため、本稿モデルでは基準値として $\delta = 500$ のように設定した。また、現在の政策の下で、経済成長率と金利も 2% 程度に誘導しているので、今後の期待値としてそれぞれ 1.8% と 2% と設定している。GDP 成長率のボラティリティも平成 27 年度までの 22 年間にわたる成長率の標準偏差であり、政府支出の成長率もこの 22 年間の平均値を取る。本稿では所得税以外の税収を考えていないため、実際の所得税対 GDP 比率よりも高めに 15% に設定しており、財政改革後には所得税率は 20% にした。リスクの市場価格は相対的リスク回避度（CRRA；2〜4 にあるといわれる）かけるリスクとなることから、ここで CRRA を 2.5 にすると $\theta = 0.4$ が得られる。他のパラメータの基準値もできるだけ妥当性を持つように置くことにした。

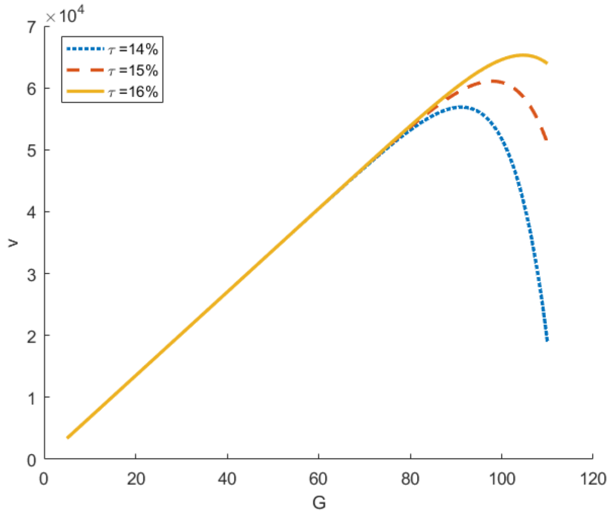
表 3.1　パラメータの基準値

パラメータ定義	論文記号	初期値
GDP	δ	500
実質安全資産収益率	r	2.0%
GDPの期待成長率	μ_δ	1.8%
GDP成長率の標準偏差	σ	1.6%
リスクの市場価格	θ	0.04
現行所得税率	τ	15.0%
財政改革所得税率	τ_d	20.0%
国債破綻コスト	α	30.0%
所得移転効果	η	3
政府支出成長率	g	1.6%

3.4.1　最適政府支出レベル

本稿で与えられた所得移転効果と政府支出との簡単な線形関係の下で、政府支出を増やすと、所得移転効果が大きくなるので、そこから民間部門が享受できるベネフィットも大きくなる。一方、政府支出をさらに増やすと、財政が持続できないリスクが高くなり、財

図 3.1　所得税率と最適政府支出



政改革をせざる得なくなる可能性が高くなってそこから生じる予想コストの分は社会保障からのメリットと相殺してしまう。さらに適正な政府支出水準を上回ると、コストの限界増加分がベネフィットのそれより大きくなる。民間福祉を示す目的関数は政府支出の凹関数となることが図 3.1 で示されている。また、所得税率が異なる三つの曲線をプロットしている。総所得 GDP が与えられた場合には、現行の所得税率が高ければ高いほど、財政的余裕が生じて社会保障（所得移転）効果というベネフィットをもたらすために社会保障費をより多くすべきである。異なる所得税率から求められた最適政府支出水準は大体 90 〜110 の範囲にあることも示されている。

GDP の成長率のボラティリティは大体安定しているので、それほど大きく変動しない。図 3.2 は目的関数を政府支出の関数として三つのボラティリティで描いた。すでに示したように、ボラティリティが高まることによって所得に対する請求権の価値 V が下がり、リスクは財政持続不可能の方向へ働く。これにより、財政改革からもたらされるコストを抑えるため政府支出を減らすことが見られる。

図 3.2　GDP 成長率のボラティリティと最適政府支出

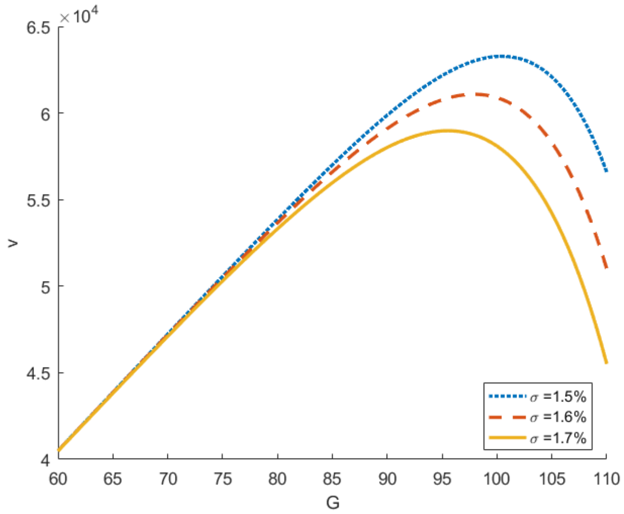
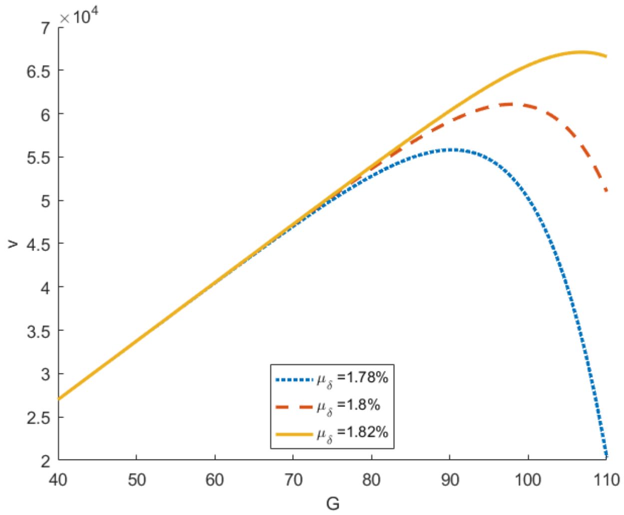


図 3.3　GDP の期待成長率と最適政府支出



一方、GDP の期待成長率が民間福祉に対する影響が大きい。μ_δ が僅かに高くなれば、所得の現在価値は大きく増加し、目的関数は上方にシフトするほか、財政的な余裕が生じることにより、社会保障費をより多く増やすことができる。破綻確率の低下と税収の割引現在価値の合計の増加による最適政府支出の増加から成るこの二つの効果が合わせると、民間福祉が大幅に上昇することは図 3.3 から分かる。

ソーシャルプランナーの目的関数は政府支出の凹関数になっていることから、最適政府支出が存在することはすでに示された通りである。そして、目的関数 (3.18) 式を政府支

出 G で微分して、結果を 0 と置いて G を解くと閉じた解が得られ、それは

$$
\begin{aligned}
G^* =&(r-g)\tau V\left[\frac{X+1}{X}\right]\left[\frac{\tau(\eta-\alpha)}{X\tau_d - X\tau - \alpha\tau + \eta\tau + X\eta\tau}\right]^{1/X} \\
=&\left[\frac{(r-g)\tau\delta}{r-\mu}\right]\left[\frac{X+1}{X}\right]\left[\frac{\tau(\eta-\alpha)}{X\tau_d - X\tau - \alpha\tau + \eta\tau + X\eta\tau}\right]^{1/X} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

のようである。これにより、最適政府支出レベルをより分かりやすく示すことができる。例えば、図 3.4 から分かるように、政府支出の成長率が高ければ高いほど、最適政府支出レベルを少なくすべきである。一方、安全資産収益率が現在最適政府支出に対する影響は g と μ の大小関係に依存するのであるが、もし $g<\mu$ の場合、安全資産収益率が上がると、将来政府支出より将来税収のほうがより割り引かれるので、それをバランスさせるために現在の政府支出を控えるべきである。$g>\mu$ の場合、逆になり、安全資産収益率が上がると、将来の税収より将来の政府支出のほうがより割り引かれることから、現在の政府支出を少し増やしてもよいということになる。

図 3.4　最適政府支出レベルと r と g との関係

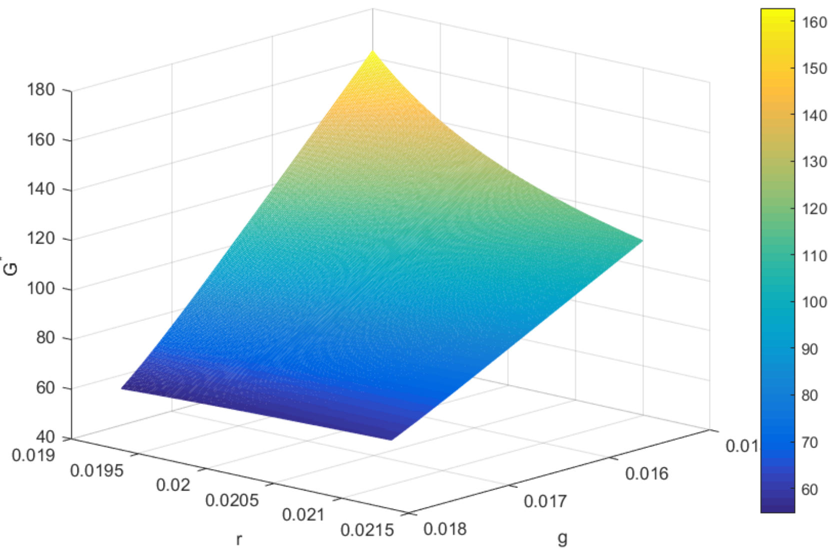
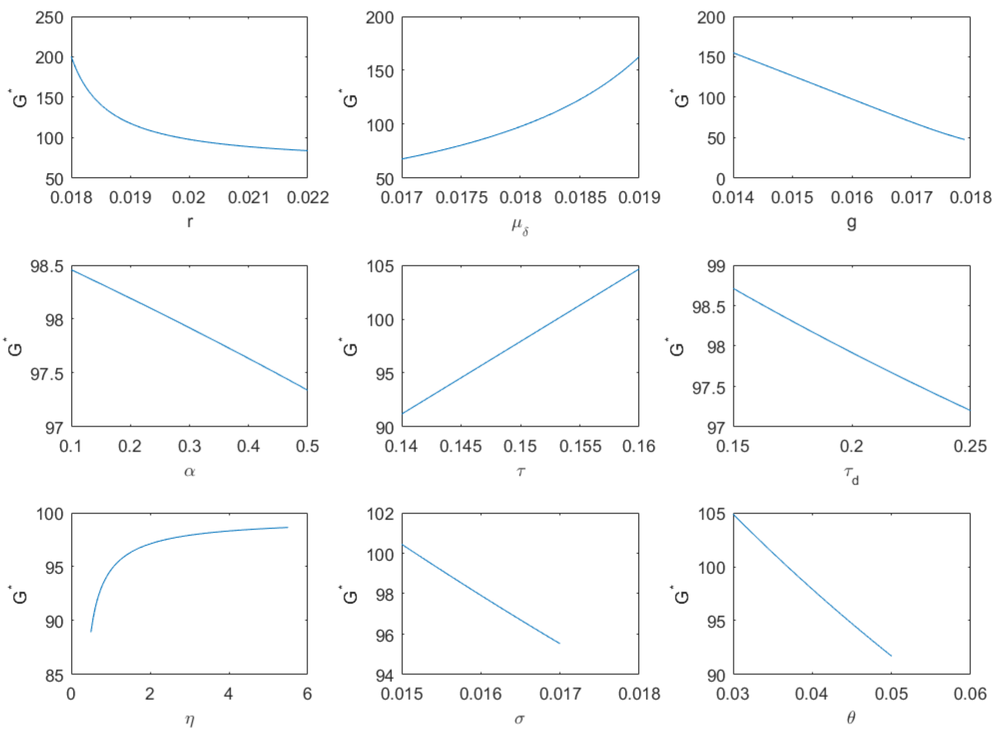


図 3.5 は最適政府支出はそれぞれのパラメータからどのような影響を受けるかを示したものである。このような比較静学から最適政府支出の性質をより分かりやすく見ることができる。図 3.5 にあるすべての縦軸は最適政府支出レベルであり、横軸では各パラメータを変化させる。GDP の期待成長率やボラティリティ等の最適政府支出に対する影響をすでに紹介したが、見て分かるように、他のパラメータが最適政府支出に与える影響も直感に合う。ここで政府支出のベネフィット、つまり所得再分配効果 η について特に注目した

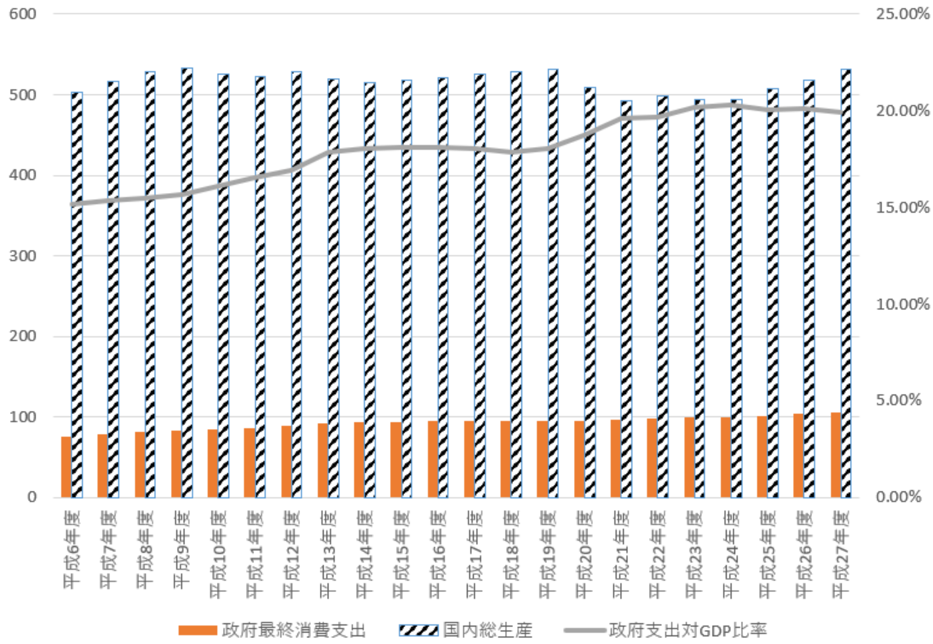
い。トレード・オフモデルに新しく導入したこの所得再分配効果について実際に測ることは簡単ではなく、このパラメータを恣意的に高めていくと、政府支出を増やすべきだという結果になるのではないかと考えがちであるが、実はそうでもない。仮に η が小さいと、政府支出を低くすべきであり、これも当たり前だと考える。しかし、η はあるゾーンに入ると（ここでは大体 2 ぐらい）、最適政府支出は収束する傾向が見られる。補論でも示されるが、実は所得移転効果 η が発散すると、G^* は収束することが確認できる。

図 3.5　最適政府支出の性質



以上のことから、最初に設定された基準値から計算した最適政府支出レベルは約 95 であり、対 GDP（基準値は 500）比率は 19% となる。図 3.6 は内閣府が作成した国民経済計算から国内総生産（GDP）と政府最終消費支出および政府支出対 GDP 比率をグラフにしたものである。縦棒の目盛線は左軸で、線グラフの目盛線は右軸に対応する。平成 6 年度から平成 27 年度にかける 22 年間において、GDP が上下変動していたが、それに対し、政府支出が明らかに安定的に成長してきた。この 22 年間にわたる政府支出対 GDP 比率の平均値は 18% であり、最近時点のデータは約 20% まで登り、アベノミクス政策の下でさらに上がるとも予想される。実際のデータと比べてみると、本稿モデルで計算された最適政府支出対 GDP 比率が観察されたものとかなり近い結果が得られた。

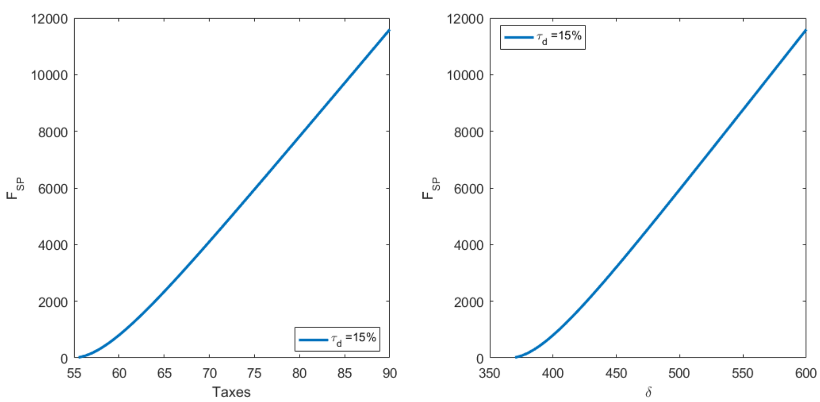
図 3.6　時系列データ



3.4.2　財政赤字と持続可能性

本稿モデルで再確認された一つ重要な性質は、最適な財政改革における閾値 V_B^* が決められた場合、政府はつねに財政余剰を保つ必要がないことである。言い換えると、当期財政赤字が発生しても現在の財政政策（所得税率等）を維持する余裕がある。サープラスの価値（t 時点からのサープラスの現在価値の合計）を税収の関数として示しているのは図 3.7 の左である。

図 3.7　税収、GDP、財政赤字及びサープラスの価値



見れば分かる通り、税収が多ければ多いほど、サープラスの資産価値は上がる。当然な

がら、図 3.7 の右で示したように、所得税率が与えられた場合、GDP が高ければ高いほど、税収が増え、サープラスの資産価値も上がる。ただ、ここで注意してもらいたいのは、この数値計算は政府支出を 90 に設定している場合に描かれているものである。税収を表す横軸の最大値は 90 ということは、財政赤字がすでに発生している状態を表している。しかし、サープラスの価値がまだ正の値となるということは、財政赤字でありながらも、現在の債務を将来に返せるように見込み、現行の財政政策をそのまま維持しても問題ないということである。また、財政改革を行うべきな時における総所得 GDP の閾値（つまり、サープラスの価値が 0 になる場合における δ）を δ_B と記号し、これは

$$\delta_B = (r - \mu)V_B^*$$

のように計算できる。仮に現在の GDP は 500 として、δ_B との「距離」が分かる。この距離は、財政改革を行わざるを得ない可能性も示しているのである。例えば、現在所得税率は 15% の場合、経済的なショックによって GDP が 500 兆円から 26% 下がって 370 兆円くらいになると、現在の財政政策が維持できなくなって財政改革を余儀なくされることとなる。

3.4.3　財政改革の実確率

GDP が幾何ブラウン運動に従うことを仮定したことによって閾値 δ_B に到達する確率を求めることができる。また、所得の資産価値の定義とパラメータの諸仮定により、V_t と δ_t は同じ幾何ブラウン運動に従うことが分かる。我々は V_t と $V_{B,t}$ との相対関係から財政改革が起きる実確率を計算する。まず、新し変数 y を

$$y_t = \ln(V_t) - \ln(V_{B,t}) \tag{3.21}$$

のように定義する。y のプロセスを求めるために、まず上式の右にある二項のプロセスを確認する。伊藤定理を応用すると、

$$d\ln(V) = \left(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz$$

となり、一方

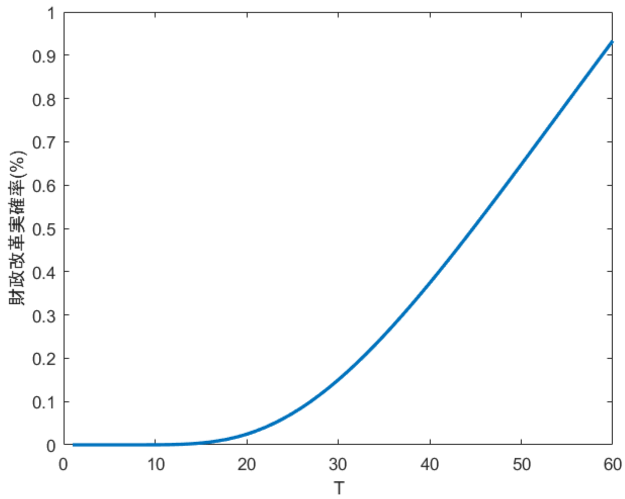
$$d\ln(V_B) = gdt$$

が分かる。以上により、y のドリフト項は $\mu_y \equiv \mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma^2 - g$ である。そして、現時点を $t = 0$ と考え、財政改革時点は t_B、期間 T 以内に財政改革（破綻）を行う確率は

$$\mathbb{P}\{t_B \leq T|\mathcal{F}_t\} = N\left(\frac{-y - \mu_y T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{-2\mu_y\sigma^{-2}y} N\left(\frac{-y + \mu_y T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.22}$$

と知られている。ただし、$N(\cdot)$ は正規累積分布関数であり、$\mathcal{F}_t$ は t 時点において入手できる情報である。図 3.8 は財政改革の実確率と期間 T との関係を示している。

図 3.8 財政改革（破綻）実確率と期間との関係



現在日本の場合、満期が一番長いのは 40 年債であるが、仮に満期が 60 年であっても、これから 60 年の内に財政改革を行う確率は縦軸に対応するところは 1% 未満となっている。ここで前の節と同じように、現在の所得は 500、政府支出は 90 で計算しているので、政府支出が税収を上回っている赤字財政状態にある。言い換えると、現在財政赤字になっている状態にもかかわらず、まだ長い期間のうちに財政破綻の確率がとても低いことが表されている。

3.4.4 割引債の評価

GDP は確率 $\mathbb{Q}$ の下でも幾何ブラウン運動に従うこととなるので、GDP の資産価値が閾値 δ_B に到達するリスク中立確率を求めることができる。繰り返しになるが、所得の資産価値の定義とパラメータの諸仮定により、V_t と δ_t は同じ幾何ブラウン運動に従うことが分かる。V_t と $V_{B,t}$ との相対関係から財政改革に関するリスク中立確率 $\mathbb{Q}$ を計算することができ、それを用いて V の派生証券（割引国債）をプライシングすることができる。ここで、新し変数 z を

$$z_t = \ln(V_t) - \ln(V_{B,t}) \tag{3.23}$$

のように定義する。リスク中立測度の下で伊藤定理を応用すると、

$$d\ln(V) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz^Q$$

となり、また

$$d\ln(V_B) = gdt$$

が分かる。以上により、z のドリフト項は $\mu_z \equiv r - \frac{1}{2}\sigma^2 - g$ である。そして、現時点を $t=0$ として、財政改革のタイミングは t_B、期間 T の内財政改革（破綻）するリスク中立確率は

$$\mathbb{Q}\{t_B \leq T|\mathcal{F}_t\} = N\left(\frac{-z-\mu_z T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{-2\mu_z\sigma^{-2}z}N\left(\frac{-z+\mu_z T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.24}$$

と知られている。ただし、$N(\cdot)$ は正規累積分布関数であり、$\mathcal{F}_t$ は t 時点における情報を示す。

財政改革に関するリスク中立確率が求められたことにより、異なる残存期間を持つ割引債の評価に応用することができる。もちろん、債券価格に関わるリスクについては、金利のリスク、流動性リスクや信用リスク等があげられるが、本稿では安全資産収益率が外生的に与えられた他、流動性リスクも考えないので、債券リスクについては我々が定義した信用リスクのみで測ることとなる。発行された公債が償還される前に財政改革が起きた場合、満期 T において α 分は償還不能と考えることから、このような破綻コストを調整した異なる残存期間の債券価格と金利の期間構造（単位は Basis point になっている）は図 3.9 で示されている。ただし、割引債の額面は 100 とし、価値を $D(T)$ と記し、

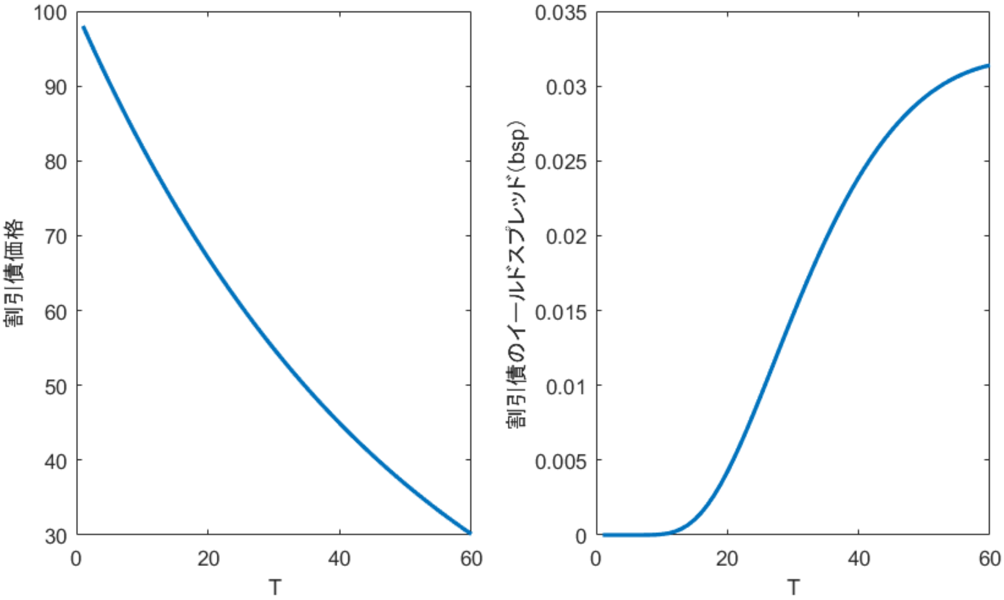
$$\begin{aligned} D(T) =& e^{-rT}[100 \times (1-\mathbb{Q}(t_B \leq T)) + (1-\alpha) \times 100 \times \mathbb{Q}(t_B \leq T)] \\ =& 100e^{-rT}(1-\alpha\mathbb{Q}(t_B \leq T)) \end{aligned} \tag{3.25}$$

のように計算し、イールドスプレッドは

$$YS(T) = -\frac{1}{T}\ln\left(1-\alpha\mathbb{Q}(t_B \leq T)\right) \tag{3.26}$$

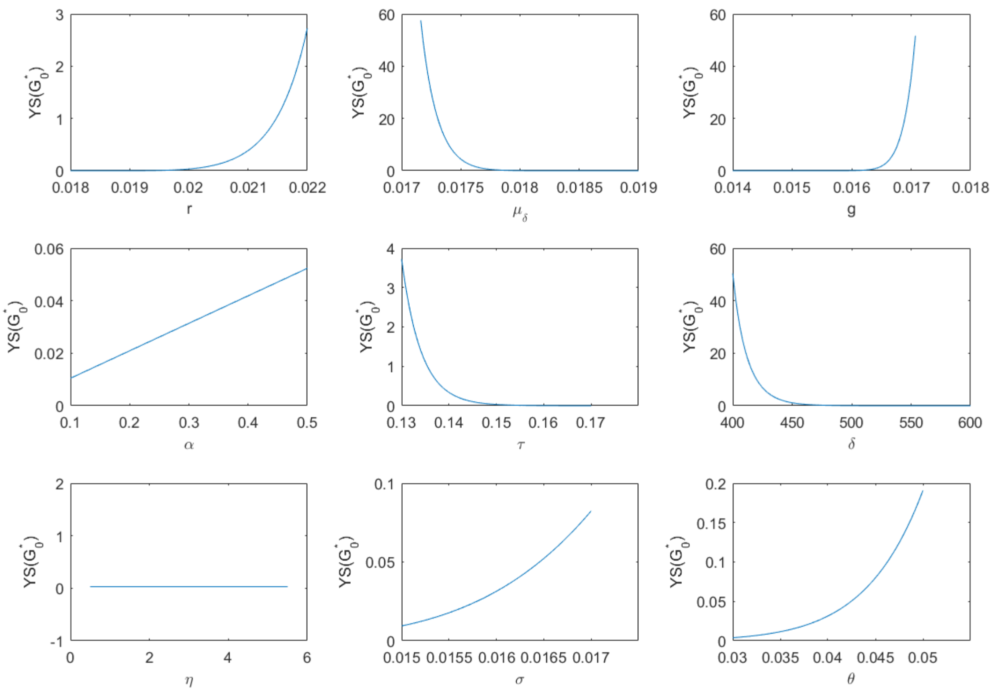
で計算される。$T \to 0$ の場合、$\mathbb{Q}(t_B < T) \to 0$ となるので、本稿で考える安全資産収益率は超短期債の利回りとして捉えることもできる。残存期間の長い債券ほど、価格が下がることと、金利の期間構造は順イールドになっていることも直感に合う。財政改革の発生確率が低いことからイールドスプレッドもかなり低い水準になっていることが数値計算上で分かる。また、イールドスプレッドの期間構造は短期では凸、長期では凹となっており、実際に観測された直近の期間構造と同一の形状となっている。本稿で用いられたパラメータの下では当面の財政赤字にもかかわらず、残存期間の長い割引国債のイールドスプレッドがそれほど高くなく、財政の状態はまだ持続可能だということも再確認できた。

図 3.9　割引債の価格とイールドスプレッドの期間構造



最後に、仮にある時点に政府支出が最適に決められたとしよう。この場合、イールドスプレッドはそれぞれのパラメータの変化に対してどの程度敏感に反応するかを調べてみる。特に断りがない限り、これはイールドスプレッドのストレステストと呼ぶ。イールドスプレッドのストレステストを示すのは図 3.10 である。

図 3.10　イールドスプレッドのストレステスト



見た通り、各パラメータのイールドスプレッドに対する影響の方向性について直感に合う。ただし、影響の度合いは異なる。例えば、イールドスプレッドに対して影響を大きく与えるものには GDP の水準 δ、GDP の期待成長率 μ_δ 及び政府支出の成長率 g がある[*5]。一方、政府支出がこのように与えられた場合、イールドスプレッドはここで議論されたトレード・オフアプローチに導入した所得移転効果 η に非感応的である。投資家にとって国債をプライシングする際、税収、政府支出や国債の回収率等に係るものを重視する一方、所得移転効果のような福祉厚生に関わる要因をそれほど注目しないという見方で自然ともいえる。ただし、政府支出は各パラメータの変動によって動的に最適化される場合において、所得移転効果は最適政府支出 G_t^* に影響を与えることを通し、国債の評価にも影響を与えることに留意すべきである。

[*5] ただし、これは正常なシナリオに限る話である。もし、財政が維持できなくなる寸前においては、破綻コスト α 等はイールドスプレッドに対して大きく影響するようになる。従い、正常なシナリオにおいては財政改革が経済に対する影響を過小評価する恐れがあるかもしれない。

3.5 結論

本稿では、Goldstein[16] のモデルを拡張し、最適政府支出の導出へ応用してみた。構造的なアプローチでトレード・オフ型モデルを用いて最適政府支出を議論する研究は筆者の知る限り存在しない。本稿の貢献は財政政策に関する学術的かつ実務的な議論に新しい視点を与えたことにある。

政府支出のメリットとしては貧富の格差を縮めることによってもたらされる所得移転効果と考え、デメリットとして財政赤字の際に国債を発行することによってもたらされる国債のデフォルトコストと潜在的な増税負担と考える。このようなトレード・オフ関係から最適な政府支出レベルが存在すると考え、モデルを構築した結果として、最適政府支出レベルの閉じた解を得た。そして、最適な財政改革における所得価値の閾値を導出することにより、現在の GDP レベルと財政改革を行わざるを得ない GDP の閾値との相対関係が求まった。これにより、我々が定義した財政改革の発生確率を求めることが可能となり、さらに割引債に対する評価とイールドスプレッドの期間構造に関する分析へ応用することもできた。

モデルの検証について、日本の場合において妥当だと考えられるパラメータを設定して計算した最適政府支出対 GDP 比率は 19% となっており、実際に観察された平成 27 年度までの 22 年間の平均値 18%、または直近の水準とほぼ同じ結果が得られた。モデルから得られた期間構造は短期では凸、長期では凹となっており、実際に観測された直近の期間構造と同一の形状となっている。債券評価の際に重要である金利リスクや流動性リスクについては考慮されていないことから、本稿のモデルで取り上げた財政改革リスクは上述の期間構造の形状の新たな説明要因となるといえる。最後に、本稿で再確認された重要な性質は、政府はつねにサープラスを確保する必要がなく、例えば日本のように財政赤字になっているにもかかわらず、まだ持続不可能までとはいえないのである。

残された課題は少なくない。第一に、日本の安全資産収益率は極めて低い水準にとどまっており、現状では政府支出の成長率より明らかに低い。本稿モデルでは政府支出の現在価値が発散しないために $r > g$ という制約条件が必要だが、今後金利が上昇する可能性があるものの、ほぼゼロ金利の下での現在の日本の財政問題を十分に扱うことができたとはいえない。第二に、本稿では実データを利用して日本以外の各国の財政問題を分析することは行っていない。第三に、マクロ経済学の分野で財政問題を議論する上で重要である総消費や総貯蓄等との関連性は扱うことができていない。これらの問題は今後の課題としたい。

3.6　補論

3.6.1　一般解の関数形について

本稿では、政府の生活保障支出は時間とともに増加することを仮定したので、偏微分方程式を満たすための整合性を保つには、閾値も時間に依存するように設定する必要がある。ここで社会保障支出の関数形について検証する。社会保障支出の関数形は

$$F_G(V_t, V_{B,t}, t) = \frac{Ge^{gt}}{r-g}\left[1 - \left(\frac{V_t}{V_B e^{gt}}\right)^{-X}\right]$$

で与えられる。そして、原資産の価値が閾値と同じ比率で変化すると、この請求権の価値も

$$\begin{aligned} F_G(V_{t+\Delta}, V_{B,t+\Delta}, t+\Delta) =& \frac{Ge^{g(t+\Delta)}}{r-g}\left[1 - \left(\frac{V_t e^{g\Delta}}{V_B e^{g(t+\Delta)}}\right)^{-X}\right] \\ =& \frac{V_{B,t+\Delta}}{V_{B,t}} F_G(V_t, V_{B,t}, t) \end{aligned} \tag{3.27}$$

のように、閾値と同じ比率で変化することとなる。解を偏微分方程式に代入して計算すると、各項は

$$\mu V F_V = \mu X \frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^X e^{Xgt}$$

$$(1/2)\sigma^2 V^2 F_{VV} = -(1/2)\sigma^2 X(X+1) \frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^X e^{Xgt}$$

$$F_t = g\frac{Ge^{gt}}{r-g} - g\frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^X e^{Xgt} - gX\frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^X e^{Xgt}$$

$$-rF = -r\frac{Ge^{gt}}{r-g} + r\frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^X e^{Xgt}$$

となる、社会保障支出の場合、偏微分方程式における請求権のペイアウトが Ge^{gt} となることに留意しながら、またペイアウト以外の項にある共通部分 $\frac{Ge^{gt}}{r-g} V^{-X} V_B^{X+1} e^{Xgt}$ に注意すると、次の式

$$(1/2)\sigma^2 X^2 + [(1/2)\sigma^2 - (\mu - g)]X - (r-g) = 0$$

を満たす X は偏微分方程式を成立させることが分かる。そこで

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mu - g - (1/2)\sigma^2 \pm \sqrt{(\mu - g - (1/2)\sigma^2)^2 + 2\sigma^2(r-g)}\right)$$

となる。

また、s ステージにおける総所得 GDP に対する資産価値の関数形

$$F(V_t, V_{B,t}, t) = V_t - V_{B,t}\left(\frac{V_t}{V_{B,t}}\right)^{-X}$$

が偏微分方程式を満たしていることを以下のように確認する。まず、原資産である所得資産価値の変化率が $V_{t+\Delta} = V_t V_{B,t+\Delta}/V_{B,t}$ となることで、$t+\Delta$ におけるこの請求権価値は

$$\begin{aligned} F(V_{t+\Delta}, V_{B,t+\Delta}, t+\Delta) =& V_t \frac{V_{B,t+\Delta}}{V_{B,t}} - V_{B,t+\Delta}\left(\frac{V_t \frac{V_{B,t+\Delta}}{V_{B,t}}}{V_{B,t+\Delta}}\right)^{-X} \\ =& \left[V_t - V_{B,t}\left(\frac{V_t}{V_{B,t}}\right)^{-X}\right]\frac{V_{B,t+\Delta}}{V_{B,t}} \\ =& \frac{V_{B,t+\Delta}}{V_{B,t}} F(V_t, V_{B,t}, t) \end{aligned}$$

となる。時間の経過とともに、請求権の価値の変化率は倒産閾値の変化率が同じということから、この請求権の関数形は偏微分方程式においては整合的だということが分かる。

次に、今までの議論と同じように、$V_{B,t} = V_B e^{gt}$ と置き、推測した関数形を偏微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mu V F_V &= \mu V + \mu X V^{-X} V_B^{X+1} e^{(X+1)gt} \\ (1/2)\sigma^2 V^2 F_{VV} &= -(1/2)\sigma^2 X(X+1) V^{-X} V_B^{X+1} e^{(X+1)gt} \\ F_t &= -(X+1) g V^{-X} V_B^{X+1} e^{(X+1)gt} \\ -rF &= -rV + rV^{-X} V_B^{X+1} e^{(X+1)gt} \end{aligned}$$

となる。ここで考える請求権は所得が全部もらえるようなものなので、偏微分方程式におけるペイアウトが $\delta = (r-\mu)V$ となることに留意しながら、ペイアウト以外の項にある共通部分 $V^{-X} V_B^{X+1} e^{(X+1)gt}$ にも注意すると、次の式

$$(1/2)\sigma^2 X^2 + [(1/2)\sigma^2 - (\mu - g)]X - (r - g) = 0$$

を満たす X を求めればよいことが分かる。そこで

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mu - g - (1/2)\sigma^2 \pm \sqrt{(\mu - g - (1/2)\sigma^2)^2 + 2\sigma^2(r-g)}\right)$$

となり、社会保障支出を導出する場合における X と同じである。さらに、$V \gg V_{B,t}$ の場合、$F \to V$ である境界条件から、X が正の値であることが分かり、

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mu - g - (1/2)\sigma^2 + \sqrt{(\mu - g - (1/2)\sigma^2)^2 + 2\sigma^2(r-g)}\right)$$

となることが分かる。詳しいのは Leland[26] を参照してください。

3.6.2　所得移転効果

この節では政府支出に関する所得移転効果について説明する。まずこの経済においては、低所得者層 a と高所得者層 b の二グループがいるとする。社会的厚生関数は

$$U \equiv w'_a u(w_a(1-\tau)\delta + G) + w'_b u(w_b(1-\tau)\delta)$$

と定義されている。ただし、w' は二つの階層が社会的厚生関数におけるウエイトであり、w は経済全体の所得に対する各階層の割合である。政府は各階層に対する同じ所得税率で課税するが、低所得者層に対して生活保障費 G で支援している。これによって経済全体に与える所得増加分 x は次のような二つの効用を等しくなるようなものとして定義される。つまり、

$$x = \arg\left\{w'_a u(w_a(1-\tau)\delta + G) + w'_b u(w_b(1-\tau)\delta) = w'_a u(w_a(\delta + x)) + w'_b u(w_b(\delta + x))\right\}$$

を満たす x である。この所得増加効果 x を政府支出 G で割ったものを本稿では所得移転効果 η と呼ばれることとする。効用関数形とパラメータから影響を受けるが、η は 1 より大きい効果をもたらすことが確認できる。

続いて、数値計算例を挙げながら説明する。我々はここでは効用関数がべき乗関数

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}x^{\lambda}$$

となると考えよう。$\lambda < 1$ であれば、効用関数は x の単調増加凹関数となることが分かる。例えば、$\lambda = -1$ とする。低所得者が所得に対する割合は 0.2 高所得者層が所得に対する割合は 0.8 とする。現在の所得は 500、所得税率は 0.15、社会福祉効用関数に占めるウエイトは各半分と考える。これで計算された所得の増加分 x は 180 である。現在の税収は 75 となり、そして税収の全額を社会保障に使うと考えると、η は 2.4 となることが分かる。

図 3.11　所得移転効果のイメージ

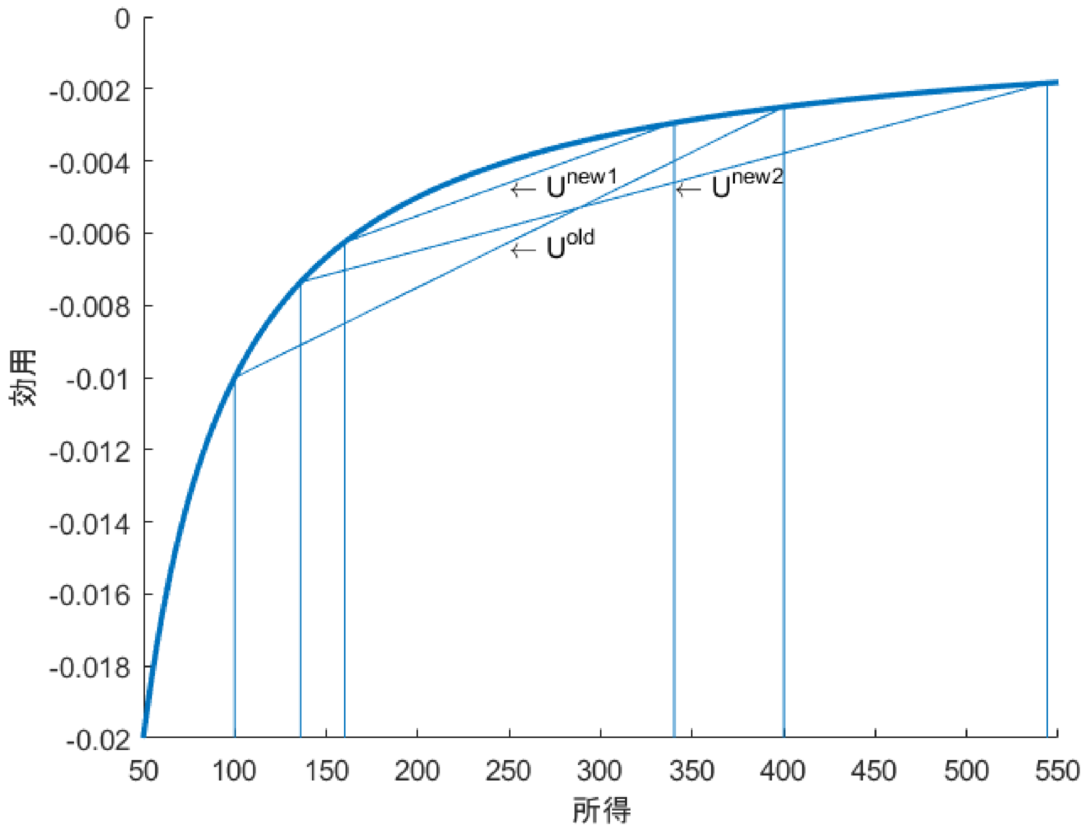


図 3.11 を見れば理解しやすいであろうが、最初に政府がない場合においては、社会福祉は U^{old} のところに位置していた。政府が税収を通じ、所得を再分配することにより、貧富の格差が縮めることによって社会福祉が U^{new1} まで上昇する。このような行動は社会全体の所得が増加した場合と同じ効果、つまり U^{new2} が得られることを示している。ただ注意すべきなのは、例えば $\lambda \in (0,1)$ の場合、所得移転効果は 1 より小さいこともありうる。

図 3.12　所得移転効果と最適政府支出

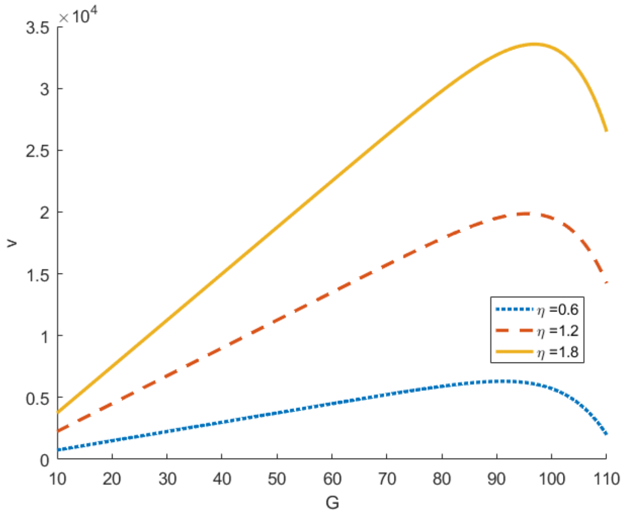


図 3.12 は所得移転効果が最適政府支出にどのような影響を与えるかを示したものである。直感のように、効果が小さければ小さいほど、政府が社会保障支出を減らすべきである。その一方、所得移転効果が大きくなっても、政府支出は 100 弱に留まることが分かる。これは (3.20) 式からも分かるが、所得移転効果が大きくなればなるほど、最適政府支出は発散するのではなく、

$$\lim_{\eta \to \infty} G^* = (r-g)\tau V \left(\frac{X+1}{X}\right)\left(\frac{1}{X+1}\right)^{1/X} \tag{3.28}$$

に収束することとなる。

結論

本論ではコーポレート・ファイナンス分野における最適資本構成問題とパブリック・ファイナンス分野における最適政府支出問題を統一されたトレード・オフ理論の枠組で分析した。

第一章「最適資本構成：株主有限責任ケース」では、EBIT ベースかつ低 EBIT 時に節税効果が失われる（補助金がない）トレード・オフ型モデルを構築した。EBIT から企業資産価値を内生的に導出したことにより、節税効果が失われる企業の資産価値の閾値を合理的に設定できた。多くの派生証券の比較静学はベーシックモデルと同じように直感的なものが得られたほか、最適負債比率はベーシックモデルより低く、EBIT の期待成長率の減少関数となり、事業リスクにベーシックモデルより非弾力的になっているような性質が見られた。低 EBIT 時に節税効果が失われる（補助金がない）現実により近いケースでは、実際に観測される低い負債比率を理論上で示唆したほか、事業収益の成長性が高い企業ほど時価ベースの負債比率が必ずしも高いわけではないことを示した。さらに、事業リスクの変化により、負債比率をさほど弾力的に変更する必要性はないことも示唆された。ただし、現実において、損失の繰り延べ等によって低 EBIT 時における節税効果は本章のベーシックモデルと拡張モデルの間にあると考えられる。今後の課題として次の三点のようにまとめられる。第一、負債の借換コストを考慮し、戦略的に借入額の増加または減少への拡張である。第二、パラメータが時間可変的になる場合を想定してモデルを拡張することである。第三、実証分析を行って本章モデルを検証することである。

第二章「最適資本構成：債権者保護付ケース」では、EBIT ベースかつ債権者保護付ケースでトレード・オフ型モデルを構築した。より具体的にいうと、企業が倒産するシナリオには、１）負債利子が支払えなくなる場合に企業が倒産するシナリオと、２）債券元本が保証できない場合に倒産になるシナリオである。モデルの比較静学の結果は直感的なものとなっている。本章では EBIT が算術ブラウン運動に従うことを仮定したが、モデルから導かれる最適負債比率は EBIT がマイナスにならないケースより高くならない。EBIT が負になる可能性のある企業や規模の不経済が働く企業を対象可能とした。倒産シナリオをより現実的に想定したことは本章モデルの新しい部分だと考えられる。特に、負

債利子が支払えなくなる場合に倒産になるシナリオは筆者が知っている限り、本研究が初めてだということに特筆したいと考える。ただ、EBIT が算術ブラウン運動に従う仮定が最適クーポンに与える純粋的な効果はまだ十分に検証されていない。実証分析も今後の課題としたいと考える。

第三章「最適政府支出」では、トレード・オフ理論のフレームワークで最適政府支出を closed-form で解いたほか、割引国債の評価、そしてイールドスプレッド・カーブの導出へ応用した。比較静学を行った結果、定性的に直感に合う。本章モデルで求められた最適政府支出対 GDP 比率は妥当なパラメータの下で観察されたものに近い。そして、イールド・カーブの形状も直近に観察されたものに近い。本章モデルでは金利リスク、流動性リスク等を考慮していないことから、信用リスクはイールド・カーブの形状に対する新たな説明要因となる。イールドスプレッドのストレステストを行った結果、イールドスプレッドは一部のパラメータ（例えば、現在の GDP 水準、GDP の期待成長率と政府支出の成長率）に影響を大きく受けている。また、Credit event に近い状態では、他のパラメータもイールドスプレッドに大きな影響を与えることを示唆する。課題について次の三点が挙げられる。まず、安全資産収益率は政府支出成長率より低い場合、本章モデルは十分に扱うことができたとはいえない。第二、日本以外の各国の財政問題を分析することは行っていない。第三、総消費や総貯蓄等との関連性等は扱うことができていない。以上の問題を今後の研究課題にしたいと考える。

最後に、三章のモデルに共通の部分をまとめたいと考える。まず、原資産の設定とそのプロセスを外生的に与える。次に、無裁定条件から各請求権が満足する微分方程式を導出し、ベネフィットとコストを明確的に定義する。続いて境界条件から各派生証券の価値を導出する。最後に、目的関数を設定して閾値と最適値を求める。

以上のモデル構築プロセスに従い、本論では統一されたトレード・オフ型モデルを使い、コーポレート・ファイナンス分野とパブリック・ファイナンス分野における最適化問題を解くことができることを示した。トレード・オフ理論の枠組みは柔軟性を持ちながら、今まで主に使われたコーポレート・ファイナンスにおける最適負債問題に限らず、さらに他の研究分野、あるいは実務においても応用できるのではないかと筆者が信じ、トレード・オフ理論の枠組みの更なる発展を期待する。

参考文献

[1] 岩村充、福澤恵二（1995)、「日本の企業経営における資本構成の意義と実際」、『証券アナリストジャーナル』。

[2] 西岡慎一、馬場直彦（2004)、「我が国企業の負債圧縮行動について」、『日本銀行ワーキングペーパーシリーズ』。

[3] 古川尚史、高川泉、植村修一（2000)、「国民負担率と経済成長」、『日本銀行調査統計局 Working Paper Series』。

[4] 佐々木寿記、鈴木健嗣、花枝英樹（2015)、「企業の資本構成と資金調達」、『経営財務研究』、第 35 巻。

[5] Athreya, K. B. and Lahiri, S. N., 2006, *Measure Theory and Probability Theory.* Springer.

[6] Baron, David P., 1975, *Firm Valuation, Corporate Taxes, and Default Risk.* The Journal of Finance, vol. 30, no. 5, pp. 1251-1264.

[7] Barro, R. J., 1974, *Are Government Bonds Net Wealth?* Journal of Political Economy, Vol. 82, No. 6, pp. 1095-1117.

[8] Barro, R. J., 1981, *Output Effects of Government Purchases.* Journal of Political Economy, 89(6): 1086-1121.

[9] Black, F., and Scholes, M., 1973, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* The Journal of Political Economy, 637-654.

[10] Black, Fischer, and Cox, John C., 1976, *Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions.* The Journal of Finance, Vol. 31, No. 2, pp. 351-367.

[11] Brennan, M. J., and Schwartz, E. S., 1978, *Corporate income taxes, valuation and the problem of optimal capital structure.* The Journal of Business, Vol. 51, No. 1, pp. 103-114.

[12] Borensztein, Eduardo and Panizza, Ugo, 2008, *The Costs of Sovereign Default.* IMF Working Paper.

[13] Duffie, Darrell and Lando, David, 2001, *Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information.* Econometrica, Vol. 69, No. 3, pp. 633-664.

[14] English, William B., 1996, *Understanding the Costs of Sovereign Default: American State Debts in the 1840's.* The American Economic Review, Vol. 86, No. 1, pp. 259-275.

[15] Fan, Hua, and Suresh M. Sundaresan, 2000, *Debt Valuation, Renegotiation, and Optimal Dividend Policy.* The Review of Financial Studies, vol. 13, no. 4, pp. 1057-1099.

[16] Goldstein, Robert, and Ju, Nengjiu, and Leland, H., 2001, *An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure.* Journal of Business.

[17] Graham, John R., 2000, *How Big Are the Tax Benefits of Debt?*, The Journal of Finance, Vol. 55, No. 5, pp. 1901-1941.

[18] Graham, John R., 2003, *Taxes and Corporate Finance: A Review*, The Review of Financial Studies, Vol. 16, No. 4, pp. 1075-1129.

[19] Gray, Dale F., and Merton, Robert C., and Bodie, Zvi, 2007, *Contingent Claims Approach to Measuring and Managing Sovereign Credit Risk.* Journal of Investment Management, Vol. 5, No. 4, pp. 5-28.

[20] Ingersoll, Jonathan E. Jr., 1986, *Theory of Financial Decision Making.* Yale University.

[21] Jensen, Michael C. and William H. Meckling, 1976, *Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure.* Journal of Financial Economics 3, pp. 305-360.

[22] Kijima, Masaaki, 2013, *Stochastic Processes with Applications to Finance.* CRC Press.

[23] Kim, E. Han, 1978, *A Mean-Variance Theory of Optimal Capital Structure and Corporate Debt Capacity.* Journal of Finance, 33, pp. 5-63.

[24] Kim, I. J., Ramaswamy, K., and Sandaresan, S., 1993, *Does Default Risk in Coupons Affect the Valuation of Corporate Bonds?: A Contingent Claims Model.* Financial Management, pp. 117-131.

[25] Kraus, Alan, and Litzenberger, Robert H., 1973, *A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage.* The Journal of Finance, Vol. 28, No. 4, pp. 911-922.

[26] Leland, H. E., 1994, *Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure.* Journal of Finance, 1213-1252.

[27] Leland, H. E., and Klaus Bjerre Toft, 1996, *Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads.* The Journal of

Finance, vol. 51, no. 3, pp. 987-1019.

[28] Leland, H. E., 1998, *Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure.* The Journal of Finance, 1213-1243

[29] Leland, Hayne E., 2007, *Financial Synergies and the Optimal Scope of the Firm: Implications for Mergers, Spinoffs, and Structured Finance.* The Journal of Finance, vol. 62, no. 2, pp. 765-807.

[30] Longstaff, Francis A., and Eduardo S. Schwartz, 1995, *A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt.* The Journal of Finance, vol. 50, no. 3, pp. 789-819.

[31] Mankiw, N. G., 2012, *Principles of Macroeconomics, 6E.* Cengage Learning.

[32] Merton, R. C., 1973, *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model,* Econometrica, 41(5), 867-887.

[33] Merton. R. C., 1973, *Theory of Rational Option Pricing.* The Bell Journal of Economics and Management Science, 141-183.

[34] Merton. R. C., 1974, *On The Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.* The Journal of Finance, 449-470.

[35] Miller, M. H., 1989, *The Modigliani-Miller Propositions After Thirty Years.* Journal of Applied Corporate Finance, Spring, 2:1, pp. 6-18.

[36] Modigliani, Franco, and Miller, Merton H., 1958, *The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment.* The American Economic Review, 261-297.

[37] Modigliani, Franco, and Miller, Merton H., 1963, *Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction.* The American Economic Review, 433-443.

[38] Myers, Stewart, 1977, *Determinants of Corporate Borrowing.* Journal of Financial Economics 5, pp. 147-175.

[39] Myers, Stewart C., 2001, *Capital Structure.* The Journal of Economic Perspectives, Vol.15, No. 2, pp. 81-102.

[40] O'Driscoll, Gerald P., Jr., 1977, *The Ricardian Nonequivalence Theorem.* Journal of Political Economy, Vol. 85, No.1, pp. 207-210.

[41] Pennacchi, G., 2007, *Theory of Asset Pricing.* Addison Wesley.

[42] Romer, D., 2012, *Advanced Macroeconomics.* McGraw-Hill.

[43] Scott, James H. Jr., 1976, *A Theory of Optimal Capital Structure.* Bell Journal of Economics, Vol. 7, No. 1, pp. 33-54.

[44] Turnbull, Stuart M., 1979, *Debt Capacity.* Journal of Finance 34, pp. 931-940.

[45] Vasicek, O. A., 1977, *An Equilibrium Characterization of the Term Structure,*

Journal of Financial Economics, 5(2), 177-188.