

熱力学的制約条件を考慮した
土の回転硬化型超弾性塑性モデルの開発

*Development of a rotational hardening hyperelasto-plasticity model
considering thermodynamics restrictions for soils*

15WA002 中村 圭太

指導教員 准教授 菊本 統

論文要旨

土は応力誘導異方性、時間依存性、構造の劣化、風化など様々な特性を持つ材料であるが、その中でも応力誘導異方性は、場所・条件を選ばず変形により常に発達するため、構成則により土の挙動を精緻に表現するには考慮すべき必須事項である。本研究では、この(1) 土の応力誘導異方性に加え、(2) 熱力学的に整合性があるか、(3) 有限変形理論に容易に拡張可能かの3点に焦点を当て、構成則の構築を試みる。具体的には、まず最新の有限変形理論を微小変形理論のもと再解釈し、有限変形理論に容易に拡張可能な微小変形モデルの枠組みを構築する。次に、熱力学的制約条件を考慮した超弾性塑性モデルを定式化し、最終的に土の応力誘導異方性を考慮しうる硬化則を導く。以上の定式化手法に則り、本稿は以下のような構成となっている。

第1章では、これまでの土の応力誘導異方性の表現手法や最新の客観応力速度の選択を必要としない誘導異方性を考慮しうる有限変形理論、またそれに整合した微小変形理論について述べるとともに、本研究の目的である熱力学的制約条件を考慮した土の回転硬化型超弾性塑性モデルの理論的枠組みについて言及する。

第2章では、本研究で用いる超弾性構成則に基づいた塑性論(超弾性塑性論)について述べる。具体的には、(1) Helmholtz 自由エネルギー (Helmholtz free energy) の定義から、Clausius-Duhem の不等式を用いた超弾性構成則の導出法、(2) 熱力学的制約条件である散逸不等式の非負性を考慮した超弾性塑性モデルの定式化手法を取り扱う。また、最大塑性散逸の原理を用いた熱力学的制約条件を自動的に満足する関連塑性流れ則 (associative plastic flow rule) の導出法についても言及する。超弾性構成則を基盤とする本定式化手法は、陰的応力積分法であるリターンマッピング (return mapping) を効果的に利用できる点が利点として挙げられる。そこで、完全陰解法であるクローゼストポイント法 (closest point method) の定式化手法とその力学的背景を述べる。有限要素法などに本応力積分アルゴリズムを適用する際は、全体の非線形方程式において Newton-Raphson 法本来の2次収束を得るために、全体の剛性マトリクスは整合接線係数を用いて算出する必要がある。整合接線係数の導出法は(1) 解析的に整合接線係数を導く手法と(2) 数値的に近似解を得る手法の2種類について言及する。

第3章では、土の弾性構成則について述べる。これまで微小変形モデルにおいて広く用いられてきた重弾性構成則は、(1) 弾性変形の際にエネルギーの散逸が生じること、(2) 公称ひずみを用いているため有限変形には適用できないこと、(3) 応力と弾性ひずみが一対一の対応関係ではないため、Return mapping などの陰的応力積分法を効果的に適用できないなどの問題点があるため、現在ではこれらの問題を解決しうる超弾性構成則を用いた定式化が主流となりつつある。そこでこれらの重弾性構成則の問題点について再度整理するとともに、それらの問題点を解消しうる超弾性構成則の有用性について述べる。既存の超弾性構成則は(1) 弾性テンソルが不定となる、(2) 弾性体積ひずみの等値線が交差する、(3) 想定していない限界応力比が存在するなどの問題点があり、土の応力誘導異方性を考慮するなどの主軸が回転するような複雑な問題には適用が難しい。そこで、これらの問題点を克服した新たな超弾性構成則を提案する。提案する超弾性構成則の自由エネルギー関数は、既往の超弾性構成則の問題点が解決されるだけでなく、既往の超弾性構成則では得るのが困難であった補足エネルギー関数 (complementary energy function) も容易に得ることができる。本超弾性構成則の妥当性検証については、実験によって得られた弾性体積ひずみ、および弾性偏差ひずみの等値線との定性的な比較によって行う。

第4章では、Armstrong-Frederick の移動硬化則を参考にした回転硬化型超弾性塑性モデルを提案する。この際、Armstrong-Frederick の移動硬化則を基盤として Helmholtz 自由エネルギー関数 (Helmholtz free energy function) を定義し、塑性散逸の非負性 (熱力学的制約条件) を満足する形で降伏関数 (yield function) および塑性流れ則 (plastic flow rule) が定式化される。土の応力誘導異方性の表現には回転硬化則を用いて降伏関数を原点周りに回転する手法がこれまでも多く用いられてきた。しかし、回転軸は無次元であるため、それと仕事に関して共役なひずみを規定することができず、Armstrong-Frederick の移動硬化則を適用することが難しい。そこで本定式化では、移動硬化で通常用いられる背応力 (back stress) を用いて等方硬化則、回転硬化則の両者を同時に考慮する手法を提案し用いることでこれを克服する。本章では、その具体的な新たな自由エネルギー関数を提案する。提案する自由エネルギー関数を用いれば、等方硬化については Cam-clay モデルで用いられる圧密降伏応力と塑性体積ひずみの関係と同等の関係式が得られ、回転硬化については Armstrong-Frederick の移動硬化則と同様の性質が得られる。また、提案モデルのリターンマッピング法の定式化をするとともに、本応力積分アルゴリズムに整合した整合接線係数の導出法についても述べる。提案モデルの検証では、等方圧縮解析、ひずみ制御および応力制御による繰り返し単純せん断解析を実施し、応力経路や定式化したリターンマッピング法のパフォーマンスについて検証を行うとともに、整合接線係数の適用により、全体の非線形方程式において Newton-Raphson 法本来の2次収束が得られることを確認する。

目次

第 1 章	背景と目的	11
第 2 章	超弾性塑性論	15
2.1	応力とひずみの定義	15
2.2	超弾性塑性論の概要	17
2.2.1	自由エネルギー関数	17
2.2.2	散逸不等式	17
2.3	塑性散逸最大の原理 (Principle of maximum dissipation)	19
2.4	弾塑性係数 (Elasto-plastic tangent modulus)	20
2.5	リターンマッピング (Return-mapping)	21
2.5.1	Elastic predictor	21
2.5.2	Loading condition	22
2.5.3	Plastic corrector	22
2.5.4	リターンマッピングの力学的背景	24
2.6	整合接線係数 (Consistent tangent modulus)	26
2.6.1	解析的導出法	27
2.6.2	数値計算による算定法	29
2.7	古典モデルへの適用例	30
2.7.1	プログラムコード	30
2.7.2	一次元弾完全塑性モデル	30
2.7.3	一次元等方硬化型弾塑性モデル	35
2.7.4	一次元移動硬化型弾塑性モデル	39
第 3 章	土の弾性構成則	48
3.1	亜弾性構成則 (Hypoelastic model)	48
3.1.1	体積弾性係数とせん断弾性係数	48
3.1.2	弾性接線係数 (elastic tangent modulus)	50

3.1.3	力学的特性	50
3.2	超弾性構成則 (Hyperelastic model)	52
3.2.1	既存の超弾性構成則	53
3.2.2	新しい超弾性構成則	56
第 4 章	土の弾塑性構成則	65
4.1	既存の等方硬化モデル	65
4.2	回転硬化を表現する降伏関数	67
4.2.1	Sekiguchi and Ohta (1977) モデル	68
4.2.2	Dafalias (1986a) モデル	70
4.3	超弾性塑性論に基づいた回転硬化型弾塑性モデル	73
4.3.1	背応力の定義	73
4.3.2	超弾性塑性論に基づいた定式化	74
4.3.3	等方・回転硬化則	76
4.3.4	弾塑性係数	80
4.3.5	リターンマッピング	82
4.3.6	整合接線係数	84
4.3.7	下負荷面モデルの適用	87
4.3.8	数値計算例	88
第 5 章	結論	94

記号表

変数

$\mathbf{1}$	2 階の対称恒等テンソル (second-order symmetric identity tensor)
I	4 階の対称恒等テンソル (fourth-order symmetric identity tensor)
$\mathcal{D} \left(= I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$	偏差投射テンソル (Deviatoric projection tensor)
σ	コーシー応力 (Cauchy tensor)
$p (= \text{tr} \sigma / 3)$	平均応力 (mean stress)
$\mathbf{s} (= \sigma - p \mathbf{1})$	偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor)
$q \left(= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \right)$	偏差応力 (deviatoric stress)
ε	微小ひずみテンソル (deviatoric strain tensor)
$\varepsilon_v (= \text{tr} \varepsilon)$	体積ひずみ (volumetric strain)
$\mathbf{e} \left(= \varepsilon - \varepsilon_v \frac{\mathbf{1}}{3} \right)$	偏差ひずみテンソル (deviatoric strain tensor)
$\varepsilon_s \left(= \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e} : \mathbf{e}} \right)$	偏差ひずみ (deviatoric strain)
ψ	Helmholtz 自由エネルギー (Helmholtz free energy)

ϕ	負のギブス自由エネルギー、補足 Helmholtz 自由エネルギー (negative Gibbs free energy, complementary Helmholtz free energy)
γ	塑性乗数 (plastic multiplier)
f	降伏関数 (yield function)
e	間隙比 (void ratio)
v	比体積 (specific volume)

上付き・下付き文字、記号

e	弾性 (elastic)
p	塑性 (plastic)
p _e	塑性部分のうちの移動硬化に関する部分
p _i	塑性部分のうちのエネルギー散逸部分
vol(x_{ij})	$x_{kk}\delta_{ij}/3$
dev(x_{ij})	$x_{ij} - \text{vol}(x_{ij})$
$\nabla F(\mathbf{x})$	$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$
$\nabla^2 F(\mathbf{x})$	$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}$

プログラムコード

本稿では適宜プログラムコードの実装例を紹介するが、ここでは、それらのプログラムコードで用いる汎用コードについて述べる。用いるプログラミング言語は Julia (<https://julialang.org>) とし、バージョンは以下の通りである。

```
julia> versioninfo()
Julia Version 0.6.1
Commit 0d7248e (2017-10-24 22:15 UTC)
Platform Info:
  OS: macOS (x86_64-apple-darwin14.5.0)
  CPU: Intel(R) Core(TM) i7-6567U CPU @ 3.30GHz
  WORD_SIZE: 64
  BLAS: libopenblas (USE64BITINT DYNAMIC_ARCH NO_AFFINITY Haswell)
  LAPACK: libopenblas64_
  LIBM: libopenlibm
  LLVM: libLLVM-3.9.1 (ORCJIT, skylake)
```

また、数値計算の効率化のため以下のパッケージを利用する（各パッケージの使い方については URL 参照）。

- ForwardDiff.jl: <https://github.com/JuliaDiff/ForwardDiff.jl>
- PyPlot.jl: <https://github.com/JuliaPy/PyPlot.jl>
- Tensors.jl: <https://github.com/KristofferC/Tensors.jl>

用いるパッケージのバージョンは以下の通りである。

```
julia> Pkg.status()
3 required packages:
 - ForwardDiff          0.6.0
 - PyPlot               2.3.2
 - Tensors              0.7.3
20 additional packages:
 - BinDeps              0.7.0
 - ColorTypes          0.6.6
 - Colors               0.8.2
```

```
using ForwardDiff
using Tensors

# First-order derivatives of `f(x::Real)::Real`
∇(f, x::Real) = ForwardDiff.derivative(f, x)

# Second-order derivatives of `f(x::Real)::Real`
∇2(f, x::Real) = ∇(x -> ∇(f, x), x)

# Gradients of `f(x::SymmetricTensor{2}::Real)` and
# Jacobians of `f(x::SymmetricTensor{2}::SymmetricTensor{2})`
∇(f, x::SymmetricTensor{2}) = gradient(f, x)

# Hessians of `f(x::SymmetricTensor{2}::Real)`
∇2(f, x::SymmetricTensor{2}) = hessian(f, x)
```

ソースコード 0.1: automatic_differentiation_functions.jl

```
- CommonSubexpressions      0.0.1
- Compat                    0.34.0
- Conda                     0.7.0
- DiffResults               0.0.1
- DiffRules                 0.0.1
- FixedPointNumbers        0.4.3
- JSON                      0.15.2
- LaTeXStrings              0.3.0
- MacroTools                0.4.0
- NaNMath                   0.2.6
- PyCall                    1.15.0
- Reexport                  0.0.3
- SHA                       0.5.2
- SIMD                      0.2.0
- SpecialFunctions          0.3.4
- StaticArrays              0.6.4
- URIParser                 0.2.0
```

`ForwardDiff.jl` は自動微分 (automatic differentiation) を行うためのパッケージである。自動微分は数値計算において偏導関数の値を求める手法の一つであり、厳密解が少ない計算量で求めることができることから、数式微分 (Symbolic differentiation) や数値微分 (Numerical differentiation) と比べても非常に効果的な手法である。

本稿ではこの自動微分をより便利に用いることができるように、コード [0.1](#) に示されるような関数を定義する。これを用いれば、例えばスカラー変数に対する関数の微分は以下のように計算できる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
∇² (generic function with 2 methods)

julia> f(x) = 3x^2 + 2x + 3
f (generic function with 1 method)

julia> ∇(f, 3) # f'(x) = 6x + 2
20

julia> ∇²(f, 3) # f''(x) = 6
6
```

また、2階の対称テンソルに対する微分は以下のように実行できる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
∇² (generic function with 2 methods)

julia> σ = rand(SymmetricTensor{2,3})
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
 0.625164  0.283068  0.861113
 0.283068  0.831067  0.825232
 0.861113  0.825232  0.0308983

julia> mean_stress(σ) = trace(σ) / 3
mean_stress (generic function with 1 method)

julia> ∇(mean_stress, σ) #  $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = 1/3$ 
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
 0.333333  0.0  0.0
 0.0  0.333333  0.0
 0.0  0.0  0.333333
```

Jacobian は以下の計算で確認できる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
∇² (generic function with 2 methods)

julia> σ = rand(SymmetricTensor{2,3})
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
 0.662861  0.184788  0.897239
 0.184788  0.602744  0.797117
 0.897239  0.797117  0.225647

julia> I_sym = ∇(x -> x, σ); #  $\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = I$ 

julia> I_sym ⊠ σ ≈ σ # I : σ = σ
true
```

ここで、 $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ は 4 階の対称恒等テンソル (fourth-order symmetric identity tensor) である。最後に Hessian については、次の計算で確認できる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
```

```
∇2 (generic function with 2 methods)
```

```
julia> σ = rand(SymmetricTensor{2,3})
```

```
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
```

```
 0.741512  0.357842  0.947159
```

```
 0.357842  0.607877  0.780085
```

```
 0.947159  0.780085  0.759744
```

```
julia> g(x) = x ⊠ x # g(σ) = σ : σ
```

```
g (generic function with 1 method)
```

```
julia> ∇2(g, σ) ≈ 2Isym #  $\frac{\partial^2 g(\sigma)}{\partial \sigma \partial \sigma} = 2I$ 
```

```
true
```

第1章

背景と目的

土の応力-ひずみ関係を記述する構成則は、Cam-clay モデル (Schofield and Wroth, 1968)、修正 Cam-clay モデル (Burland, 1965; Roscoe and Burland, 1968) などに代表されるように、等方性を仮定したモデルを基盤として発展してきた。しかし、土は過去の応力履歴の影響を強く受ける材料であるため、地震などによる繰り返し载荷を受けた地盤の変形・破壊挙動を精度良く予測するには、応力誘導異方性 (stress-induced anisotropy) を適切に考慮しなければならない。図 1.1 は、Zergoun and Vaid (1994) による非排水繰り返し载荷を受けた粘土の応力経路と応力-ひずみ関係であるが、等方性を仮定した構成則 (例えば修正 Cam-clay モデル) では明らかに表現出来ない応力経路を示している。特に、繰り返しせん断によるサイクリックモビリティは地震による地盤の液状化挙動を評価する上で特筆すべき重要な挙動であると言える。

弾塑性構成則における誘導異方性の表現には、金属の分野では通常、Prager (1955)、Prager (1956)、Ziegler (1959)、Armstrong and Frederick (1966) などの古典モデルにあるように、背応力 (back stress) を用いて降伏面の移動を記述する移動硬化則 (kinematic

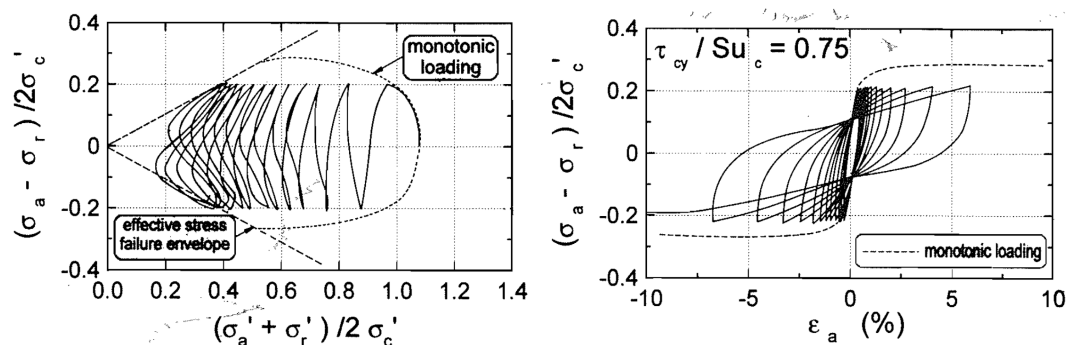


図 1.1: 非排水繰り返し载荷を受けた粘土の応力経路と応力-ひずみ関係 (Zergoun and Vaid, 1994)

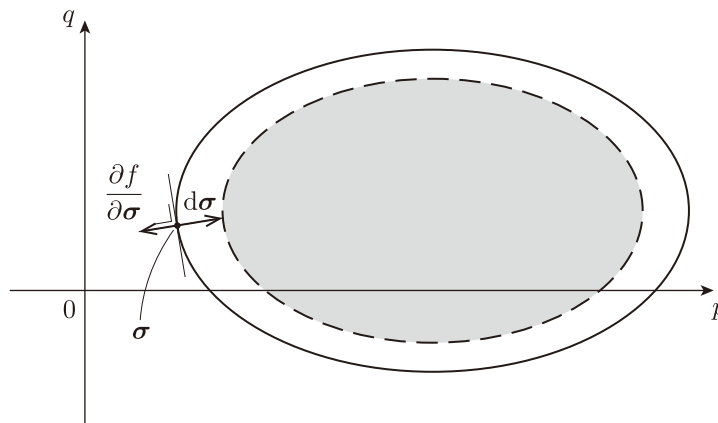


図 1.2: 土材料における移動硬化則の不合理性

hardening) が用いられる。一方、移動硬化則の土への適用を考えると土の硬化・軟化は塑性体積ひずみが支配的であるため、降伏面が一度原点から外れると応力を原点に戻そうとした際、塑性流れ則 (plastic flow rule) より降伏面は縮小する (図 1.2)。図の整合条件から分かるように、著しい軟化 (降伏面の縮小) をきたしながら応力を原点に戻すことが出来ないため、移動硬化則の土への適用は適切でないことがわかる。このような問題点を解消する手法として、例えば Bounding surface モデル (Dafalias, 1986b) を用いる方法がある。Rouainia and Muir Wood (2000)、Gajo and Muir Wood (2001) は、境界面モデルを基盤とした移動硬化則を用いて、土の応力誘導異方性を表現している。他の手法としては、降伏面を原点周りに回転させる回転硬化則 (rotational hardening law) を用いる手法がある。本手法は、大きく分けて修正 Cam-clay モデルのような楕円型の降伏関数を用いるもの (Hashiguchi, 1979; Dafalias, 1986a; Hashiguchi and Chen, 1998; Dafalias et al., 2006) と、より弾性域の小さい降伏関数を用いるもの (Manzari and Dafalias, 1997; Gajo and Wood, 1999; Gajo and Muir Wood, 1999; Pestana and Whittle, 1999; Taiebat and Dafalias, 2008; Wang et al., 2014) があり、後者は一般的に砂の挙動を表現する際によく用いられ、Bounding surface モデル (Dafalias, 1986b) と併用されることが多い。

土などの非可逆的変形、すなわち塑性変形が生じる材料では、構成則において応力とひずみの速度関係を記述するのが一般的である。そのため、土の場合も弾性構成則、硬化則両者において速度型で定式化する亜弾性塑性 (hypoelasto-plasticity) モデルが広く用いられてきた。しかし、亜弾性構成則を用いた構成則は例えば (1) 応力と弾性ひずみが一对一の対応関係にならない、(2) 任意の応力サイクルにおいてエネルギーが保存されず、エネルギーの発生または散逸が生じるなどの欠点を有することが知られており、弾性変形は可逆的な変形であるという仮定に矛盾する。応力と弾性ひずみが一对一の対応関係でないため、リターンマッピングのような陰的応力積分法の適用も困難となる。

一方、これらの問題点を解消しうる定式化手法として超弾性構成則を基盤とした塑性論 (hyperelasto-plasticity) がある。本定式化手法では、自由エネルギー関数の定義から散逸不等式を満足する形で構成則を得る手続きがなされることが多い。このような熱力学的制約条件を考慮することは必ずしも必要ではないが、定式化の際の一つの指針となり、また、熱力学的に不整合な構成則を避けることができる。

さて、近年では地盤の大変形挙動を力学的に合理的に扱うために、有限変形理論に則った研究もなされている (Borja and Tamagnini, 1998; Meschke and Liu, 1999; Yamakawa et al., 2010; Nakamura and Kikumoto, 2016)。そのため、構成則の微小変形理論から有限変形理論への拡張を想定すれば、上述した亜弾性構成則もしくは超弾性構成則に基づいた定式化手法は、微小変形理論だけでなく有限変形理論においても一貫して記述可能な定式化手法が望ましい。有限変形理論の枠組みは大きく分けて (1) 変形速度の加算分解を仮定した亜弾性構成則に基づいた定式化と (2) 変形勾配テンソルの乗算分解を仮定した超弾性構成則に基づいた定式化があるが、(1) では選択する客観応力速度によっては明らかに不合理な挙動を示す (Nagtegaal and De Jong, 1982) などの問題点があることから、客観応力速度の選択を必要としない (2) に基づいた定式化が現在は最も有力となっている。

このような客観応力速度の選択に伴う問題は、材料の異方性を考慮する際にも重要となってくる。微小変形理論においては、移動硬化則もしくは回転硬化則を適用する際に関連した内部変数 (移動硬化では背応力、回転硬化では降伏関数の回転軸) の発展則を与えるのが方法が最もポピュラーな手法であるが、これらのモデルを有限変形理論に拡張する際には、常に客観応力速度の選択が要求され、用いる客観応力速度によっては不合理な挙動を示すなどの問題が同様に生じる (Haupt and Tsakmakis, 1986; de Souza Neto et al., 2011)。

以上のような客観応力速度の選択は、内部応力変数を発展則を用いて速度型で記述した際には避けられず、問題解決には超弾性構成則と同様にポテンシャル関数を用いて、内部応力変数を表現することが必須といえる。Lion (2000) により提案された有限変形理論に基づく移動硬化の表現は本議論に則ったものであり、塑性変形勾配テンソルを (1) 移動硬化に関する部分と (2) 塑性散逸に関する部分にさらに乗算分解し、(2) に流れ則を定義する定式化がなされる。この時、背応力は仕事に関して共役なひずみとポテンシャル関数を用いて一対一で関係づけることで、背応力の客観応力速度の選択を必要としない。微小変形理論の枠組みで再解釈すれば、塑性ひずみを移動硬化に関する部分と塑性散逸に関する部分に加算分解することと同義であり、定式化においては Armstrong–Frederick の移動硬化則 (Armstrong and Frederick, 1966) を表現できることから、力学的背景が明瞭であり近年注目されている。本定式化手法の適用性については、Dettmer and Reese (2004)、Vladimirov et al. (2008)、Henann and Anand (2009) が議論している。

以上より、土の誘導異方性を考慮する際の定式化手法としては、超弾性構成則を基盤と

した枠組みで、Armstrong–Frederick の移動硬化則 (Armstrong and Frederick, 1966) を用いて異方性を考慮する手法が、有限変形理論への拡張を鑑みても最も合理的な手法であるが、そのような構成則を提案した例は千田ら (2013) によるモデルのみである。また、千田ら (2013) によるモデルでは熱力学的制約条件については考慮されていない。そこで本研究では、熱力学的制約条件を満足し、Armstrong–Frederick の移動硬化則を基盤とした土の回転硬化型超弾性塑性モデルの開発を目的とする。

第2章

超弾性塑性論

近年、超弾性構成則を基盤とし自由エネルギー関数の定義から散逸不等式を満足する形で構成則を得る超弾性塑性論は、構成則を構築する枠組みとして広く受け入れられている。本枠組みは、(1) 熱力学的に整合性のある構成則が構築できること、(2) 変形勾配テンソルの乗算分解を仮定した有限変形理論 (Simo, 1998; Simo and Hughes, 2006) にも理論的飛躍なしに適用できること、(3) 応力計算の際にリターンマッピングを用いることで高精度の解を高効率に得られることから微小変形の枠組みにおいても有用な定式化手法である。

そこで本章では、超弾性塑性論の枠組みに則った弾塑性構成則の定式化手法を述べるとともに、リターンマッピングアルゴリズムの適用法やその力学的背景、整合接線係数の導出法について取り扱う。なお、Houlsby (1981)、Collins and Muhunthan (2003)、Houlsby and Puzrin (2007) などにより、より詳細に熱力学的定式化を行う研究 (Hyperplasticity) もなされているが、本研究はあくまで超弾性塑性論 (Hyperelasto-plasticity) の枠組みで定式化を行う。

応力とひずみは、土質力学の慣用として圧縮を正としている。

2.1 応力とひずみの定義

着目している物体 (連続体) の基準配置を $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ とする ($1 \leq n_{\text{dim}} \leq 3$ は空間の次元を示す)。物体の境界を $\partial\mathcal{B}$ と定義すれば、閉領域 $\bar{\mathcal{B}}$ は以下のように表される。

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B} \quad (2.1)$$

次に、時間間隔 $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$ を定義し、変位場 \mathbf{u} は以下のような写像とする。

$$\mathbf{u} : \bar{\mathcal{B}} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \quad (2.2)$$

以降、 $\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{B}}$ かつ $t \in [0, T]$ のもとで、変位を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と書く。変位 \mathbf{u} を用いれば微小ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は以下のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} = -\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (2.3)$$

2階の対称テンソルを $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ と書けば、微小ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}$ と仕事に関して共役な応力であるコーシー応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$ である。

微小変形理論においては、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、それらの体積成分と偏差成分に以下のように加算分解可能である。

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{vol}(\boldsymbol{\sigma}) + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = p\mathbf{1} + \mathbf{s} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{vol}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_v \frac{\mathbf{1}}{3} + \mathbf{e} \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathbf{1}$ は2階の恒等テンソルである。vol と dev は以下のように定義される。

$$\text{vol}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{1}}{3} \quad (2.6)$$

$$\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \text{vol}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.7)$$

また、偏差応力 q と偏差ひずみ ε_s は以下のように定義される。

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e} : \mathbf{e}} \quad (2.9)$$

体積成分と偏差成分は互いに直交する^{*1} ため、応力とひずみが共軸であると仮定すれば以下が成り立つ^{*2}。

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \text{vol}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{vol}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) = p\varepsilon_v + q\varepsilon_s \quad (2.10)$$

微小変形理論のもと、全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は弾性部分と塑性部分に以下のように加算分解可能であると仮定する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.11)$$

*1 互いの内積はゼロとなる。

$$\text{vol}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \text{vol}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$$

*2 応力とひずみが共軸である ($\mathbf{s}/\|\mathbf{s}\| = \mathbf{e}/\|\mathbf{e}\|$) と仮定し、 $\mathbf{n} = \mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$ ($\|\mathbf{n}\| = 1$) とおけば、

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} q \mathbf{n}, \quad \mathbf{e} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_s \mathbf{n}$$

を得る。

2.2 超弾性塑性論の概要

2.2.1 自由エネルギー関数

超弾性塑性論の枠組みでは、熱力学的状態量を示す量の一つとして、Helmholtz 自由エネルギー (Helmholtz free energy)^{*3}がよく用いられる。これは、物質が内部にもつエネルギー U のうち、仕事に変化するエネルギーを指し、以下のように定義される^{*4}。

$$\psi = U - s\theta \quad (2.12)$$

ここで、 s はエントロピー、 θ は絶対温度を示す。

弾性ひずみ $\varepsilon^e \in \mathbb{S}$ と物体の硬化・軟化を特徴付けるひずみ内部変数群のベクトル $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ を用いて、Helmholtz 自由エネルギーを以下のように定義する。

$$\psi = W(\varepsilon^e) + \mathcal{H}(\xi) \quad (2.13)$$

式 (2.13) では、簡単のため弾性と硬化・軟化に連成はないものとしている。

2.2.2 散逸不等式

式 (2.13) で定義した自由エネルギー ψ は、物体の内部に保存されているエネルギーであるため、その変化率 $\dot{\psi}$ は外部より受けた仕事率 ($\sigma : \dot{\varepsilon}$) と次式のような関係が成立しなければならない。

$$\dot{\psi} \leq \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (2.14)$$

式 (2.14) は、「外部から受けた仕事以上のエネルギーは貯留されない」という、ごく自然な不等式であり、Clausius-Duhem の不等式とも呼ばれる。外部の仕事率 $\sigma : \dot{\varepsilon}$ 全てが物体内部にエネルギーとして貯留される場合、すなわち等号が成り立つ場合は弾性的に物体が変形しており、等号が成り立たない場合は、塑性変形によるエネルギーの散逸が生じたものと考えることができる。

^{*3} 他のエネルギー関数としては、Gibbs 自由エネルギー (Gibbs free energy) もよく用いられる。Gibbs 自由エネルギーは、Helmholtz 自由エネルギーをルジャンドル変換して導いたものであるため補足 Helmholtz 自由エネルギーと呼ばれることもある。

^{*4} (負の) Gibbs 自由エネルギー ϕ はルジャンドル変換を用いて以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma : \varepsilon - \psi \\ &= \sigma : \varepsilon - U + s\theta \end{aligned}$$

式 (2.13) を式 (2.14) に代入すると散逸関数 \mathcal{D} の具体形が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} \\ &= \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi}\end{aligned}\quad (2.15)$$

物体の硬化・軟化は塑性変形によって生じると仮定すれば、固体が弾性変形をする場合は以下が成り立つ。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

このとき、 $\mathcal{D} = 0$ が満足されなければならないため、式 (2.15) の第1項より次式が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.18)$$

式 (2.18) は超弾性構成則と呼ばれ、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ とが一对一で対応づけられる。超弾性構成則は (1) 弾性変形の際にエネルギーの散逸が生じないことが保証されること、(2) 後述する Return mapping のような陰的応力積分法を効果的に適用できることが、亜弾性構成則と比較した際の主な利点である。

物体の硬化・軟化を特徴付けるひずみ内部変数 ξ と仕事に関して共役な応力内部変数を $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ と定義すれば、式 (2.15) より次式が得られる。

$$\boldsymbol{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \quad (2.19)$$

式 (2.18), (2.19) を式 (2.15) に代入すれば、最終的に以下のような散逸関数が導かれる。

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\xi} \geq 0 \quad (2.20)$$

式 (2.20) は塑性仕事率と同義であり、熱力学的制約条件を考慮した構成則を構築する際には、塑性ひずみの発展則が本式を満足するように与えられなければならないことを示している。すなわち、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ と $\dot{\xi}$ の発展則を

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{m}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \quad (2.21)$$

$$\dot{\xi} = \dot{\gamma} \boldsymbol{m}_q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \quad (2.22)$$

のように定義したとき、以下が満足されなければならない。

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{m}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m}_q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})) \geq 0 \quad (2.23)$$

次節では、上式を自動的に満たしうる関連流れ則 (associative flow rule) について述べる。

2.3 塑性散逸最大の原理 (Principle of maximum dissipation)

塑性散逸最大の原理は、塑性ひずみの発展則、すなわち塑性流れ則を取り扱う際の重要な指針として、多くの弾塑性モデルにおいて用いられている。固体が塑性散逸最大の原理に従って変形するという熱力学的制約条件は、式 (2.20) より厳しい条件であり、(1) 関連流れ則、(2) Kuhn–Tucker 条件 (載荷・負荷条件)、(3) 弾性域の凸性の3点が自動的に導かれる。ここでは、式 (2.20) を出発点とし、塑性散逸最大の原理を適用することで上記の中で特に重要な関連流れ則、Kuhn–Tucker 条件の2点が導かれることを示す。

以降、簡潔さのため次のような表記を用いる。

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\sigma}, q) \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0}) \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{E}^P = (\boldsymbol{\varepsilon}^P, \xi) \quad (2.26)$$

今、与えられた塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ と硬化・軟化を特徴つけるひずみ内部変数の速度 $\dot{\xi}$ に対して、降伏条件を満たしうる共役な応力内部変数をそれぞれ $\boldsymbol{\tau}$ と p とし、 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\tau}, p)$ と定義すれば、式 (2.20) より次式が得られる。

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{T}; \dot{\boldsymbol{E}}^P) = \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + p \cdot \dot{\xi} = \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^P \quad (2.27)$$

ここで、塑性散逸最大の原理に従えば、実際の応力内部変数 $\boldsymbol{\Sigma}$ は上式の散逸関数 \mathcal{D} を最大にする。次に、 \boldsymbol{T} によって定義づけられる以下のような弾性域 \mathbb{E} を仮定する。

$$\mathbb{E} = \{\boldsymbol{T} \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_\varepsilon} \mid f(\boldsymbol{T}) \leq 0\} \quad (2.28)$$

ここで、 f は降伏関数である。前述したように、実際の応力内部変数 $\boldsymbol{\Sigma}$ は式 (2.27) を最大にする応力 $\boldsymbol{\Sigma} = \arg \max_{\boldsymbol{T} \in \mathbb{E}} \mathcal{D}(\boldsymbol{T}; \dot{\boldsymbol{E}}^P)$ であるから、

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\Sigma}; \dot{\boldsymbol{E}}^P) = \max_{\boldsymbol{T} \in \mathbb{E}} \mathcal{D}(\boldsymbol{T}; \dot{\boldsymbol{E}}^P) \quad (2.29)$$

となる。

式 (2.29) は、束縛条件 $f(\boldsymbol{T}) \leq 0$ のもとで、 $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}; \dot{\boldsymbol{E}}^P)$ が最大値となる応力 $\boldsymbol{\Sigma}$ を求める問題に他ならない。そこで、ラグランジュの未定乗数法を用いて

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{T}, \bar{\gamma}) = \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^P - \bar{\gamma} f(\boldsymbol{T}) \quad (2.30)$$

を定義すれば、ひずみ内部変数の発展則

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma}, \dot{\gamma})}{\partial \boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{E}}^P - \dot{\gamma} \nabla f(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \quad (2.31)$$

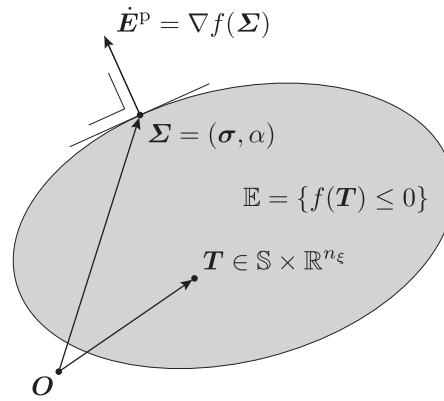


図 2.1: 塑性散逸最大の原理

と、Kuhn–Tucker 条件

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\Sigma) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\Sigma) = 0 \tag{2.32}$$

が導かれる。ここで、 $\dot{\gamma}$ は塑性乗数 (plastic multiplier) と呼ばれる。以上より、塑性ひずみ ϵ^P とひずみ内部変数 ξ の発展則、すなわち流れ則は以下のように表される。

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\gamma} m_\sigma(\sigma, q) = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} \tag{2.33}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\gamma} m_q(\sigma, q) = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial q} \tag{2.34}$$

式 (2.33)、(2.34) より、ひずみ内部変数の速度 \dot{E}^P の方向が降伏関数 $f(\Sigma)$ に対して直角であり「関連流れ則 (associative flow rule)」と呼ばれる (図 2.1)。本関連流れ則は以下のように一般化して書くこともできる。

$$\dot{E}^P = \dot{\gamma} m \tag{2.35}$$

ここで、以下を用いている。

$$m = m(\Sigma) = (m_\sigma(\Sigma), m_q(\Sigma)) \tag{2.36}$$

2.4 弾塑性係数 (Elasto-plastic tangent modulus)

上式を用いれば、内部応力変数 Σ の速度は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} &= G \cdot (\dot{E} - \dot{E}^P) \\ &= G \cdot (\dot{E} - \dot{\gamma} m) \end{aligned} \tag{2.37}$$

ここで、以下を用いている。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \nabla^2 W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla^2 \mathcal{H} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

整合条件 $\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\Sigma}) = 0$ を用いれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \nabla f \cdot \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \\ &= \nabla f \cdot \mathbf{G} \cdot (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\gamma} \mathbf{m}) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

ゆえに、塑性乗数 $\dot{\gamma}$ は以下のように表される。

$$\dot{\gamma} = \frac{\nabla f \cdot \mathbf{G}}{\nabla f \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.40)$$

よって、次式のような弾塑性係数を得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \left(\mathbf{G} - \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \otimes \nabla f \cdot \mathbf{G}}{\nabla f \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.41)$$

2.5 リターンマッピング (Return-mapping)

弾塑性変形などの非可逆的変形を記述する構成式は、応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ とひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を関係付ける形で定式化される。このような構成則を数値解析に適用する際は、前進オイラー法 (陽解法) を用いて速度型のまま陽的に応力積分がなされる手法があるが、この手法では増分ステップを大きく取ると厳密解から逸脱する場合がある。また、増分ステップの取り方に一意性がなく、どの程度ステップを細かくすれば良いかなどの議論が生じるため、信頼性のある数値計算を行うには陰解法による応力積分が望ましい。

[Simo and Taylor \(1986\)](#) は、与えられたひずみ増分に対して、一度弾性的に変形が生じるとして仮の応力状態を算定し、それから塑性変形を生じさせ応力を降伏面上まで緩和させるリターマッピング法を提案した。本手法は、生じた弾性ひずみから厳密な応力を算出する必要があるため、古典的な定式化手法である亜弾性塑性論は適しておらず、超弾性塑性論に基づいて定式化されるのが合理的である。

ここでは、Return-mapping 法でも特に主流であるクローゼストポイント法 (closest point method) を紹介する。

2.5.1 Elastic predictor

前述したように、リターンマッピング法では与えられたひずみ増分 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ に対して変形が弾性的に生じるとして、試行応力状態 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$ 、 \mathbf{q}^{tr} を算出する。塑性変形が生じない場合、試

行ひずみ内部変数は以下のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p, tr}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\text{tr}} = \boldsymbol{\xi}_n \quad (2.43)$$

ここで、下付き n は時間ステップを示す。上式を用いれば、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e, tr}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p, tr}} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

となるから、試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$ 、 $\boldsymbol{q}^{\text{tr}}$ は以下のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} = \nabla^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e, tr}}) \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{q}^{\text{tr}} = -\nabla^2 \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}^{\text{tr}}) \quad (2.46)$$

2.5.2 Loading condition

載荷・負荷判定には降伏関数を用いるが、与える各変数の値は trial elastic state で算出したものを用いる。すなわち、降伏関数が $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ の形で定義された場合、試行降伏関数は

$$f^{\text{tr}} = f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \boldsymbol{q}^{\text{tr}}) \quad (2.47)$$

のように得られる。試行降伏関数が $f^{\text{tr}} \leq 0$ の場合、各変数は trial elastic state における値をもって更新される。

$$\text{IF } f^{\text{tr}} \leq 0, \quad \text{THEN } (\cdot)_{n+1} = (\cdot)^{\text{tr}} \quad (2.48)$$

一方、 $f^{\text{tr}} > 0$ の場合は塑性変形が生じているため、次節に示すように応力を緩和させて降伏面上に引き戻す必要がある。

2.5.3 Plastic corrector

ひずみ内部変数 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ 、および $\boldsymbol{\xi}$ の発展則に後退オイラー法を適用すれば次式を得る。

$$\boldsymbol{E}_{n+1}^{\text{p}} - \boldsymbol{E}_n^{\text{p}} = \boldsymbol{E}_{n+1}^{\text{p}} - \boldsymbol{E}_n^{\text{p, tr}} = \Delta\gamma \boldsymbol{m} \quad (2.49)$$

塑性流れ則の残差 \boldsymbol{R} は以下のように表される。

$$\boldsymbol{R}_{n+1} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \Delta\gamma) = \boldsymbol{E}_{n+1}^{\text{p}} - \boldsymbol{E}_n^{\text{p, tr}} - \Delta\gamma \boldsymbol{m}_{n+1} \quad (2.50)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$ を解くために上式を線形化すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(k+1)} &= \mathbf{R}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \right|^{(k)} : d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\gamma} \right|^{(k)} d\Delta\gamma^{(k)} \\ &= \mathbf{R}^{(k)} - \left([\mathbf{G}^{(k)}]^{-1} + \Delta\gamma \nabla \mathbf{m}^{(k)} \right) : d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} - \mathbf{m}^{(k)} d\Delta\gamma^{(k)} \\ &= \mathbf{R}^{(k)} - [\bar{\mathbf{G}}^{(k)}]^{-1} : d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} - \mathbf{m}^{(k)} d\Delta\gamma^{(k)} = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.51)$$

ここで、下付き $n+1$ は簡潔さのため省略している。また、上式では以下を定義し用いている。

$$\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}^{-1} + \Delta\gamma \nabla \mathbf{m})^{-1} \quad (2.52)$$

整合条件 $f(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1})$ より、

$$\begin{aligned}f^{(k+1)} &= f^{(k)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \right|^{(k)} : d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} \\ &= f^{(k)} + \nabla f^{(k)} : d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = 0\end{aligned}\quad (2.53)$$

を得るから、 $d\Delta\gamma$ と $d\boldsymbol{\Sigma}$ について解けば次式を得る。

$$d\Delta\gamma^{(k)} = \frac{f^{(k)} + \nabla f^{(k)} : \bar{\mathbf{G}}^{(k)} : \mathbf{R}^{(k)}}{\nabla f^{(k)} : \bar{\mathbf{G}}^{(k)} : \mathbf{m}^{(k)}} \quad (2.54)$$

$$d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = \bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{R}^{(k)} - \mathbf{m}^{(k)} d\Delta\gamma^{(k)}) \quad (2.55)$$

上式を用いれば、以下のように繰り返し計算を更新できる。

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Sigma}^{(k)} + d\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} \quad (2.56)$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + d\Delta\gamma^{(k)} \quad (2.57)$$

以上の手続きは、次に述べる非線形方程式の問題に帰着される。

今、満たすべき方程式と変数をそれぞれ以下のように定義する。

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\Sigma}, \Delta\gamma) \\ f(\boldsymbol{\Sigma}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \{\boldsymbol{\Sigma}, \Delta\gamma\} \quad (2.58)$$

本非線形方程式 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ を数値的に解くために Newton-Raphson 法を適用すれば次式を得る。

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

$\delta \mathbf{x}$ について解けば

$$\delta \mathbf{x} = - \left[\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) \quad (2.60)$$

を得る。ここで、Jacobian 行列 J の具体形は以下のように示される。

$$J = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{G}}^{-1} & -\mathbf{m} \\ \nabla f & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

ゆえに、次式のような δx の具体形を得る。

$$\begin{aligned} \delta x &= -J^{-1} \cdot \mathbf{r}(x) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{m} \\ -\nabla f & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ f(\boldsymbol{\Sigma}) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} - \frac{\bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m} \otimes \nabla f : \bar{\mathbf{G}}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} & -\frac{\bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} \\ \frac{\nabla f : \bar{\mathbf{G}}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} & \frac{1}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\Sigma}, \Delta\gamma) \\ f(\boldsymbol{\Sigma}) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{G}} : \left(\mathbf{R} - \mathbf{m} \frac{f + \nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{R}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} \right) \\ \frac{f + \nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{R}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

上式は、式 (2.54)、(2.55) と一致することが確認できる。なお、ここでは以下の関係式を用いている。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

2.5.4 リターンマッピングの力学的背景

Helmholtz 自由エネルギーの補足エネルギー (complementary energy) ϕ をルジャンドル変換を用いて以下のように定義する。

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{q} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \psi(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(\boldsymbol{\sigma}), \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})) \quad (2.64)$$

ここで、 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ と $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ はそれぞれ式 (2.18) と (2.19) の逆関係である。式 (2.64) より、以下の関係が得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.66)$$

Armero and Pérez-Foguet (2002) を参考にして関数

$$\varphi(\boldsymbol{\Sigma}; \mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}^{\text{p, tr}}) = \phi(\boldsymbol{\Sigma}) - \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}^{\text{p, tr}}) \quad (2.67)$$

を定義すれば、前述したクローゼストポイント法 (closest point method) は関数 φ を最小にする応力 Σ を求める変分問題に帰着される。

$$\Sigma_{n+1} = \arg \min_{\Sigma \in \mathbb{E}} \varphi(\Sigma) \quad (2.68)$$

実際に、制約条件 $f = 0$ のもとラグランジュ未定乗数法を適用すれば、

$$\mathcal{L}(\Sigma, \bar{\gamma}) = \varphi(\Sigma) - \Sigma \cdot (E_{n+1} - E^{p, \text{tr}}) + \bar{\gamma} f(\Sigma) \quad (2.69)$$

より、関連流れ則を用いた場合の陰的塑性発展則 (2.49)

$$\frac{\mathcal{L}(\Sigma_{n+1}, \Delta\gamma)}{\partial \sigma} = -E^p + E^{p, \text{tr}} + \Delta\gamma \nabla f(\Sigma_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

と Kuhn–Tucker 条件

$$\Delta\gamma \geq 0, \quad f(\Sigma_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma f(\Sigma_{n+1}) = 0 \quad (2.71)$$

を得る。

以上の議論を簡単な構成則に適用しその性質について考える。Helmholtz 自由エネルギー ψ とその補足エネルギー ϕ がそれぞれ以下のように表されたとする。

$$\psi(\varepsilon^e, \xi) = W(\varepsilon^e) + \mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbb{C} : \varepsilon^e + \frac{1}{2} \xi : \mathbb{D} : \xi \quad (2.72)$$

$$\phi(\sigma, q) = \tilde{W}(\sigma) + \tilde{\mathcal{H}}(q) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{C}^{-1} : \sigma + \frac{1}{2} q : \mathbb{D}^{-1} : q \quad (2.73)$$

ここで、 \mathbb{C} 、 \mathbb{D} は材料定数で4階の対称テンソルであり、 \tilde{W} 、 $\tilde{\mathcal{H}}$ はそれぞれ W 、 \mathcal{H} の補足エネルギーである。式 (2.38) に示すように以下が成り立つ。

$$\nabla^2 W(\varepsilon^e) = \mathbb{C}, \quad \nabla^2 \mathcal{H}(\xi) = \mathbb{D} \quad (2.74)$$

$$\nabla^2 \tilde{W}(\sigma) = \mathbb{C}^{-1}, \quad \nabla^2 \tilde{\mathcal{H}}(q) = \mathbb{D}^{-1} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \nabla^2 W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla^2 \mathcal{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{D} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

式 (2.72) を式 (2.67) に適用すれば、closest point projection は以下のような変分問題に帰着される。

$$\begin{aligned} & (\sigma_{n+1}, q_{n+1}) \\ & = \arg \min_{(\sigma, q) \in \mathbb{E}} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma - \sigma^{\text{tr}}) : \mathbb{C}^{-1} : (\sigma - \sigma^{\text{tr}}) + \frac{1}{2} (q - q^{\text{tr}}) : \mathbb{D}^{-1} : (q - q^{\text{tr}}) - \phi(\sigma^{\text{tr}}, q^{\text{tr}}) \right\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

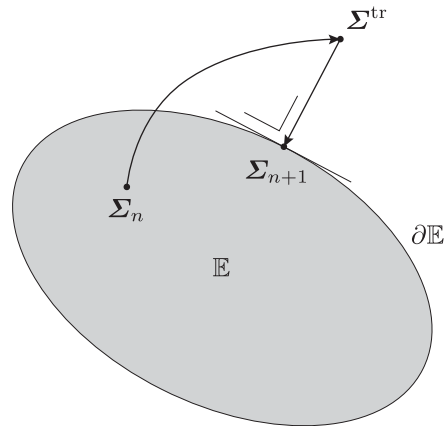


図 2.2: クローゼストポイント法 (closest point method) の概念図

これを制約条件 $f = 0$ のもとラグランジュ未定乗数法で解けば、

$$\mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}) + \Delta\gamma \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

$$\mathbb{D}^{-1} : (\boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}^{\text{tr}}) + \Delta\gamma \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \right|_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.79)$$

を得るから、以下のように一般化される。

$$\mathbf{G} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}^{\text{tr}}) + \Delta\gamma \nabla f(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.80)$$

上式より、closest point projection の幾何学的特性として、解 $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1})$ は、試行値 $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{tr}} = (\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \boldsymbol{q}^{\text{tr}})$ から降伏面 $\partial\mathbb{E}$ へ投影された点であるが、この際 \mathbf{G} を計量として最も近い点 (closest point) に投影 (projection) される (図 2.2)。

2.6 整合接線係数 (Consistent tangent modulus)

前節で述べたリターンマッピング法を用いる場合、接線係数の扱いには注意が必要となる。節 2.4 で述べた接線係数は、応力速度とひずみ速度に関する接線係数であり、リターンマッピングのような陰的応力積分法に整合した接線係数ではない。

例えば、有限要素法を用いて初期値・境界値問題を解く際に、精度良い解を得るために Newton-Raphson 法による繰り返し計算を行う場合について考える。Newton-Raphson 法では図 2.3 に示すように、与えた荷重 F_{n+1} に対して変位 $\Delta u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1}^{(k)} - u_n$ が算出され、その変位 $\Delta u_{n+1}^{(k)}$ から求めたひずみ $\Delta \varepsilon_{n+1}^{(k)}$ を用いて、構成則を満足するように応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ を計算する。応力は常に既知点 u_n からの変位を用いて積分されるため、その接線 $\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{n+1}^k$ は、応力速度とひずみ速度に関する接線係数 (2.41) とは一般に異なる。そのため、

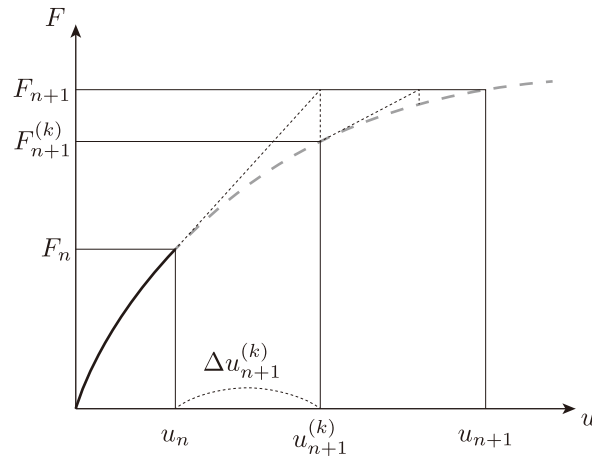


図 2.3: Newton-Raphson 法

式 (2.41) を全体剛性マトリクスに用いた場合、Newton-Raphson 法本来の 2 次収束を得ることが出来ない。Newton-Raphson 法の 2 次収束を得るには、以降で述べるリターンマッピングアルゴリズムに整合した整合接線係数 (Consistent tangent modulus) を用いなければならない。

整合接線係数を求めるには、大きく分けて (1) 解析的に整合接線係数を導く手法と (2) 数値的に近似解を得る手法の 2 種類がある。(1) は構成則が複雑な際には煩雑な式展開が要求されるが厳密な整合接線係数が得られる。一方、(2) は (1) に比べて比較的容易に整合接線係数を得ることが可能であるが、計算速度や精度の観点から (1) に劣る場合がある。

2.6.1 解析的導出法

まず、整合接線係数を解析的に導出する手法 (Hughes and Pister, 1978; Simo and Ortiz, 1985; Simo, 1998; Simo and Hughes, 2006) について述べる。

超弾性構成則 (2.18) を微分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} d\sigma &= \nabla^2 W : d\varepsilon^e \\ &= \nabla^2 W : (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \end{aligned} \quad (2.81)$$

一方、式 (2.19) を微分すれば \mathbf{q} については以下のように表される。

$$d\mathbf{q} = -\nabla^2 \mathcal{H} \cdot d\xi \quad (2.82)$$

ゆえに、 Σ を使ってまとめれば、

$$d\Sigma = \mathbf{G} \cdot (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}^p) \quad (2.83)$$

を得る。リターンマッピング法では、塑性ひずみ E^P の発展則は式 (2.49) と表されるから、これを微分すれば次式を得る。

$$dE^P = \Delta\gamma \nabla \mathbf{m} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} + d\Delta\gamma \mathbf{m} \quad (2.84)$$

式 (2.84) を (2.83) に代入すれば、リターンマッピング法に整合した応力増分式が得られる。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Sigma} &= (\mathbf{G}^{-1} + \Delta\gamma \nabla \mathbf{m})^{-1} \cdot (dE - d\Delta\gamma \mathbf{m}) \\ &= \bar{\mathbf{G}} \cdot (dE - d\Delta\gamma \mathbf{m}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

式 (2.85) を用いて、適用条件 $df(\boldsymbol{\Sigma})$ を考えれば

$$\begin{aligned} df &= \nabla f \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \nabla f \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot (dE - d\Delta\gamma \mathbf{m}) = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

$d\Delta\gamma$ は以下のように表される。

$$d\Delta\gamma = \frac{\nabla f \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot dE}{\nabla f \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m}} \quad (2.87)$$

よって、上式を式 (2.85) に代入すれば、整合接線係数は以下のように表される。

$$d\boldsymbol{\Sigma} = \left(\bar{\mathbf{G}} - \frac{\bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m} \otimes \nabla f \cdot \bar{\mathbf{G}}}{\nabla f \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m}} \right) \cdot dE \quad (2.88)$$

整合接線係数 (2.88) の特徴として、 $\Delta\gamma = 0$ の時 $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$ となるから、整合接線係数は弾塑性係数 (2.41) に一致する。すなわち、図 2.3 における時刻 t_n において両者は等しい。

整合接線係数は以上のような手続きを行えば、解析的に導出可能であるが、リターンマッピングを行う際の Newton–Raphson 法で用いるヤコビアン行列 \mathbf{J} を用いると、より簡単に求めることができる Ortiz and Martin (1989); Borja et al. (2003)。

リターンマッピングアルゴリズムにより導かれた方程式を Newton–Raphson 法により解く際は、節 2.5.3 で述べたように、未知数 \mathbf{x} と満たすべき方程式 \mathbf{r} の両者を設定する必要がある。ここではさらに、リターンマッピングの際に固定する変数群を \mathbf{z} として以下のように定義する。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

上式を用いれば、満たすべき方程式 \mathbf{r} は以下のような形式で書くことができる。

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E^P - E_n^{P, \text{tr}} - \Delta\gamma \mathbf{m} \\ f \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

次に、 \mathbf{r} の全微分を考えれば次式を得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right|_x + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right|_z \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right|_x + \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.91)$$

ここで、 \mathbf{J} はリターンマッピングの際のヤコビアン行列と一致する。さらに、

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{E}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}\quad (2.92)$$

を用いれば、式 (2.91) より整合接線係数は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{11} \\ &= \left(\mathbf{J}^{-1} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right|_x \right)_{11} \\ &= -(\mathbf{J}^{-1})_{11} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{E}} \\ &= -(\mathbf{J}^{-1})_{11} \\ &= \bar{\mathbf{G}} - \frac{\bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m} \otimes \nabla f : \bar{\mathbf{G}}}{\nabla f : \bar{\mathbf{G}} : \mathbf{m}}\end{aligned}\quad (2.93)$$

ここで、 $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{E}}$ は恒等テンソルであることを用いた。以上より、リターンマッピングを数値計算に適用する際、未知数 \mathbf{x} 、固定変数 \mathbf{z} 、満足すべき方程式 $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ を上述した形式で用いれば、整合接線係数はヤコビアン行列の逆行列 \mathbf{J}^{-1} の部分行列 (1,1) を取り出すだけで良いことがわかる。なお、 $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ を上述した形式で用いなくても、同様の手続きを行えば、容易に整合接線係数は得られる。

2.6.2 数値計算による算定法

前節で述べたように、整合接線係数を解析的に導く手法では降伏関数の2次偏微分を含み、構成則が複雑な場合は煩雑な式展開が要求される。そこで [Miehe \(1996\)](#) は、数値的に近似解を算定する手法を提案した。

リターンマッピングにより、ひずみ増分 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ に対して応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})$ が得られたとする。そこからさらに、摂動ひずみ増分

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \epsilon \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j (\epsilon \ll \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\|)\quad (2.94)$$

を加えたひずみ増分 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}$ を与えて、再びリターンマッピングにより新たな応力

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon})\quad (2.95)$$

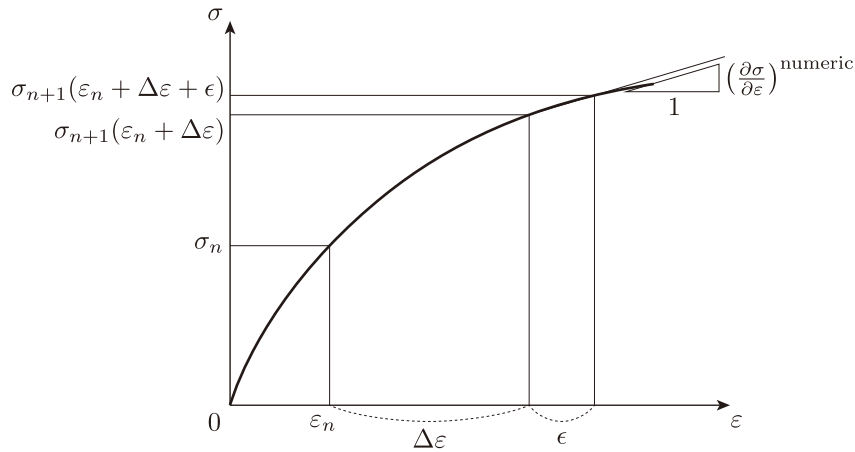


図 2.4: 数値計算による整合接線係数の算定法

を計算する (図 2.4)。これにより、整合接線係数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\right)_{ijkl}^{\text{numeric}} = \frac{\sigma_{n+1,ij}(\epsilon_n + \Delta \epsilon + \epsilon) - \sigma_{n+1,ij}(\epsilon_n + \Delta \epsilon)}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (2.96)$$

2.7 古典モデルへの適用例

2.7.1 プログラムコード

本節では適宜プログラムコードの実装例を紹介するが、それに伴い応力経路を出力するためのソースコード 2.1 を用いる。

2.7.2 一次元弾完全塑性モデル

超弾性塑性論に基づいた定式化

図 2.5 のような弾塑性モデルを考え、以下のような降伏関数を定義する。

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2.97)$$

ここで、 σ_y は降伏応力である。

自由エネルギー関数を以下のように定義する。

$$\psi = \psi(\epsilon^e) = \frac{1}{2}E(\epsilon^e)^2 \quad (2.98)$$

ここで、 E はバネのヤング率 (Young's modulus) を示す。塑性散逸式 \mathcal{D} は

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sigma \dot{\epsilon} - \dot{\psi} \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e}\right) \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (2.99)$$

```

using PyPlot

"""
    simulate_stress_path(f::Function, Δε::Real, vars::Real...; steps::Int = 100)

* `f`: Function to update variables `vars` of a constitutive model
* `Δε`: Increment of strain in a simulation
* `vars`: Variables in the order of stress `σ`, strain `ε` and others.
* `steps`: The number of steps for the simulation.
"""
function simulate_stress_path(
    f::Function,
    Δε::Real,
    vars::Real...;
    steps::Int = 100
)
    σ, ε = vars
    σ_vec = Float64[σ]
    ε_vec = Float64[ε]
    dε = Δε / steps
    for i in 1:steps
        vars = f(dε, vars...)
        σ, ε = vars
        push!(σ_vec, σ)
        push!(ε_vec, ε)
    end
    plot(ε_vec, σ_vec)
    xlabel(L"strain $\varepsilon$")
    ylabel(L"stress $\sigma$")
    return vars
end

```

ソースコード 2.1: simulate_stress_path.jl

となるから、超弾性構成則は

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \quad (2.100)$$

となり、最終的に散逸不等式は以下のように得られる。

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon}^p \geq 0 \quad (2.101)$$

今、関連流れ則を仮定すれば塑性ひずみ ε^p の発展則は

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.102)$$

として得られ、散逸不等式に代入することで、散逸不等式の非負性が満足されることがわ

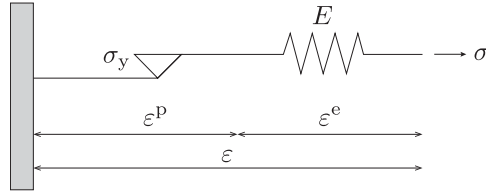


図 2.5: 弾完全塑性体のレオロジーモデル

かる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= \sigma \dot{\epsilon}^p \\
 &= \sigma \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \\
 &= \sigma \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \\
 &= \dot{\gamma} |\sigma| \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

ここで、 sign は以下のように定義される関数である。

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{if } \sigma > 0 \\ -1 & \text{if } \sigma < 0 \end{cases} \tag{2.104}$$

速度型定式化

適用条件 $\dot{f} = 0$ より

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \\
 &= \text{sign}(\sigma) \nabla^2 \psi(\epsilon^e) \dot{\epsilon}^e \\
 &= \text{sign}(\sigma) E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\
 &= \text{sign}(\sigma) E(\dot{\epsilon} - \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

となるから、塑性乗数 $\dot{\gamma}$ は以下のように表される。

$$\dot{\gamma} = \dot{\epsilon} \text{sign}(\sigma) \tag{2.106}$$

$(\text{sign}(\sigma))^2 = 1$ であることに注意すれば、

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \underbrace{E\dot{\epsilon}}_{\text{elastic predictor}} - \underbrace{(\text{sign}(\sigma))^2 E\dot{\epsilon}}_{\text{plastic corrector}} = 0 \tag{2.107}$$

となり、完全塑性の挙動が表現されていることがわかる。

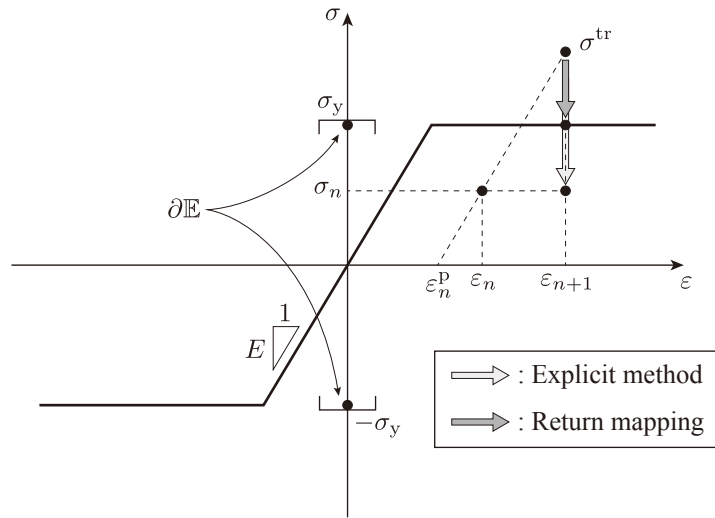


図 2.6: 陽解法とリターンマッピングにおける Plastic corrector の違い弾完全塑性モデル

前進オイラー法などの陽解法を用いる場合は上式を元にひずみ増分から応力増分を求め、逐次足し合わせて応力とひずみの更新を行う^{*5}。しかしながら、図 2.6 から分かるように、ひずみ増分が大きく応力が弾性域から降伏面を大きく超えるような場合、著しい誤差が生じる。

リターンマッピング

試行弾性状態における各変数の値は以下のように算出される。

$$\varepsilon^{p, tr} = \varepsilon_n^p \tag{2.108}$$

$$\sigma^{tr} = \nabla\psi(\varepsilon^{e, tr}) = \nabla\psi(\varepsilon - \varepsilon^{p, tr}) = \nabla\psi(\varepsilon - \varepsilon_n^p) \tag{2.109}$$

これらの試行値をもとに試行降伏関数を算出し、

$$f^{tr} = f(\sigma^{tr}) \tag{2.110}$$

$f^{tr} \leq 0$ の時は、試行値をそのまま更新値に、 $f^{tr} > 0$ の時は以降に示すように応力を緩和させ、降伏面上に応力を引き戻す。

満たすべき方程式を以下のように設定する。

$$R = \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p - \Delta\gamma \text{sign}(\sigma) \tag{2.111}$$

$$f = f(\sigma_{n+1}) \tag{2.112}$$

^{*5} 応力増分を求める方法としては、与えられたひずみ増分に対して応力増分を計算する場合、式 (2.107) より、一度 elastic predictor により応力を算定し、降伏面内にあった場合はそのままその応力を更新値として使い、降伏面外にあった場合は plastic predictor を行うという手順を踏めば良い。

上式は、未知数 $\sigma, \Delta\gamma$ に対して線形の方程式であるから、解は以下のように即座に求まる。すなわち、

$$R_{n+1} = R^{\text{tr}} - E^{-1} \Delta\sigma - \Delta\gamma \text{sign}(\sigma^{\text{tr}}) = 0 \quad (2.113)$$

$$f_{n+1} = f^{\text{tr}} + \text{sign}(\sigma^{\text{tr}}) \Delta\sigma = 0 \quad (2.114)$$

とした上で、 $R^{\text{tr}} = 0$ 、 $\Delta\sigma = \sigma_{n+1} - \sigma^{\text{tr}}$ に注意すれば、 $\Delta\gamma$ は以下のように得られる。

$$\Delta\gamma = \frac{f^{\text{tr}}}{E} \quad (2.115)$$

よって、 σ_{n+1} は

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma^{\text{tr}} - \Delta\gamma E \text{sign}(\sigma^{\text{tr}}) \\ &= \underbrace{\sigma^{\text{tr}}}_{\text{elastic predictor}} - \underbrace{f^{\text{tr}} \text{sign}(\sigma^{\text{tr}})}_{\text{plastic corrector}} \\ &= \text{sign}(\sigma^{\text{tr}}) \sigma_y \end{aligned} \quad (2.116)$$

となる。

プログラムコードへの実装

コード 2.2 に本構成則の実装例を示す。コード 2.1 を用いれば、以下のように応力経路を計算することが可能である。

```
julia> include("simulate_stress_path.jl")
simulate_stress_path

julia> include("perfect_plasticity_1d.jl")
return_mapping (generic function with 1 method)

julia> σ = 0.0; ε = 0.0; Δε = 0.4;

julia> simulate_stress_path(explicit_method, Δε, σ, ε);

julia> simulate_stress_path(return_mapping, Δε, σ, ε);

julia> savefig("perfect_plasticity_1d.pdf")
```

本計算を行った際の計算結果を図 2.7 に示す。図における青線が陽解法、オレンジ線がリターンマッピングによるプロットで、コード 2.1 にあるようにステップ数は 100 としている。図からも分かるように、陽解法では数値計算に誤差が生じており、リターンマッピングでは厳密解を得ていることが分かる。陽解法ではステップ数を小さくするとより誤差

```

const E = 100
const σ_y = 10

f(σ) = abs(σ) - σ_y # Yield function

function explicit_method(dε, σ, ε)
    dσ = E * dε # elastic predictor
    σ_tr = σ + dσ
    if f(σ_tr) > 0
        dσ = dσ - (sign(σ))^2 * E * dε # plastic corrector
    end
    return σ + dσ, ε + dε
end

function return_mapping(Δε, σ, ε)
    σ_tr = σ + E * Δε # elastic predictor
    if f(σ_tr) > 0
        σ = sign(σ_tr) * σ_y # plastic corrector
    else
        σ = σ_tr
    end
    return σ, ε + Δε
end

```

ソースコード 2.2: perfect_plasticity_1d.jl

が大きくなり、ステップ数を大きくすればリターマッピングによる解、すなわち厳密解に近く。

2.7.3 一次元等方硬化型弾塑性モデル

簡単な硬化型弾塑性モデルとして以下のような降伏関数を定義する。

$$f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y - h) \quad (2.117)$$

ここで、 h は応力の次元を持った硬化変数である。次に、自由エネルギーは、弾性部分 W と硬化部分 \mathcal{H} に分解できるとして、以下のように定義する。

$$\psi(\varepsilon^e, \xi) = W(\varepsilon^e) + \mathcal{H}(\xi) \quad (2.118)$$

ここで、 ξ は応力 h に共役なひずみ内部変数である。 $W(\varepsilon^e)$ と $\mathcal{H}(\xi)$ の具体形は以下のように定義する。

$$W(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} E (\varepsilon^e)^2 \quad (2.119)$$

$$\mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{2} H \xi^2 \quad (2.120)$$

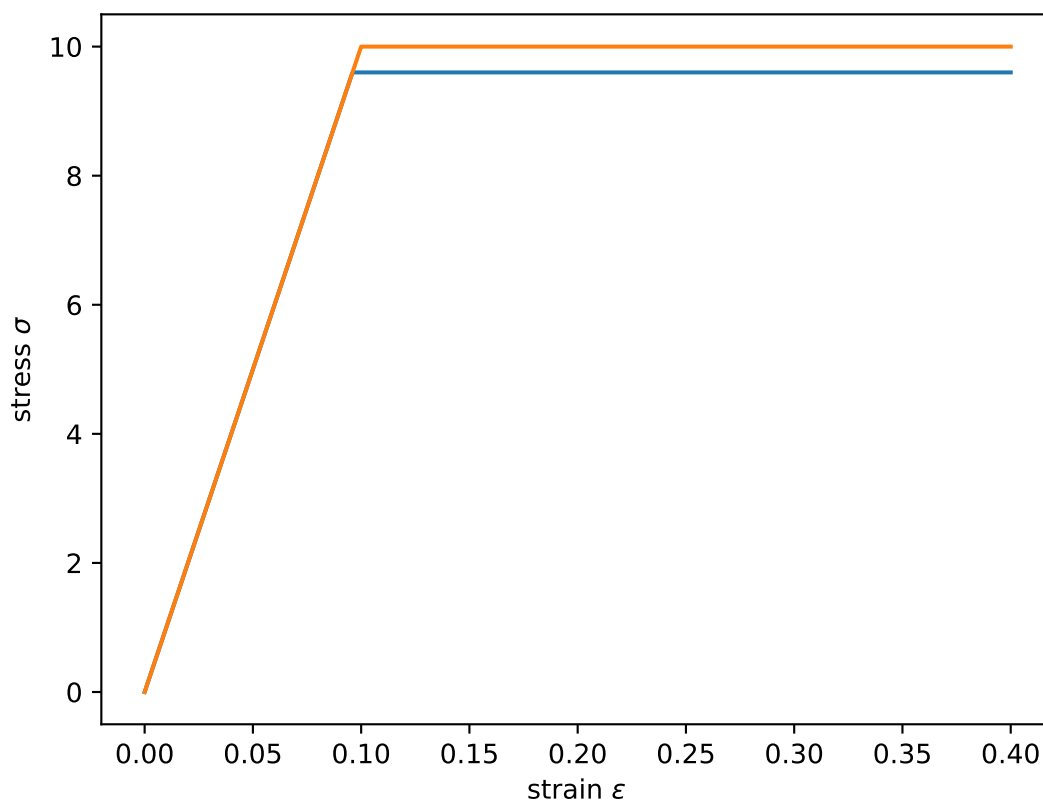


図 2.7: 一次元弾完全塑性モデルの計算例 (青: 陽解法、オレンジ: リターンマッピング)

ここで、 H は材料パラメータである。塑性散逸式 \mathcal{D} は

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \dot{\varepsilon}^P - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \dot{\xi}\end{aligned}\quad (2.121)$$

と表されるから、超弾性構成則

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \quad (2.122)$$

と h と ξ の関係

$$h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \quad (2.123)$$

を用いれば、最終的に散逸不等式は以下のように導かれる。

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon}^P + h \dot{\xi} \quad (2.124)$$

上式の散逸不等式を満足する内部変数の発展則として関連流れ則を以下のように定義する。

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad (2.125)$$

$$\dot{\xi} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial h} = \dot{\gamma} \quad (2.126)$$

実際に確認すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sigma \dot{\varepsilon}^P + h \dot{\xi} \\ &= \dot{\gamma} (|\sigma| + h) \\ &= \dot{\gamma} (f + \sigma_y) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

より、 $\dot{\gamma} f \geq 0$ であることを考慮すれば塑性散逸の非負性が満足されていることがわかる。

速度型定式化

適用条件 $\dot{f} = 0$ より

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial h} \dot{h} \\ &= \text{sign}(\sigma) E (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)) - H \dot{\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

が得られるから、塑性乗数 $\dot{\gamma}$ は以下のように表される。

$$\dot{\gamma} = \frac{\text{sign}(\sigma) E}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.129)$$

ゆえに、弾塑性係数は次式のように表される。

$$\dot{\sigma} = \underbrace{E \dot{\varepsilon}}_{\text{elastic predictor}} - \underbrace{\frac{E^2}{E + H} \dot{\varepsilon}}_{\text{plastic corrector}} = \frac{EH}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.130)$$

リターンマッピング

試行弾性状態における各変数の値は以下のように算出される。

$$\varepsilon^{P, \text{tr}} = \varepsilon_n^P \quad (2.131)$$

$$\xi^{\text{tr}} = \xi_n \quad (2.132)$$

$$\sigma^{\text{tr}} = \nabla \psi(\varepsilon^{e, \text{tr}}) = \nabla \psi(\varepsilon - \varepsilon^{P, \text{tr}}) = \nabla \psi(\varepsilon - \varepsilon_n^P) \quad (2.133)$$

$$h^{\text{tr}} = -\nabla \mathcal{H}(\xi^{\text{tr}}) = -\nabla \mathcal{H}(\xi_n) \quad (2.134)$$

これらの試行値をもとに試行降伏関数を算出し、

$$f^{\text{tr}} = f(\sigma^{\text{tr}}, h^{\text{tr}}) \quad (2.135)$$

プログラムコードへの実装

コード 2.3 に本構成則の実装例を示す。コード 2.1 を用いれば、以下のように応力経路を計算することが可能である。

```
julia> include("simulate_stress_path.jl")
simulate_stress_path

julia> include("hardening_plasticity_1d.jl")
return_mapping (generic function with 1 method)

julia> σ = 0.0; ε = 0.0; h = 0.0; Δε = 0.4;

julia> simulate_stress_path(explicit_method, Δε, σ, ε, h);

julia> simulate_stress_path(return_mapping, Δε, σ, ε, h);

julia> savefig("hardening_plasticity_1d.pdf")
```

本計算を行った際の計算結果を図 2.9 に示す。なお、コード 2.1 にあるようにステップ数は 100 としている。

2.7.4 一次元移動硬化型弾塑性モデル

ここでは、移動硬化モデルとして Armstrong–Frederick の移動硬化モデル (Armstrong and Frederick, 1966) を用いる。このモデルのレオロジーモデルは、図 2.10 に示す。図より、Armstrong–Frederick の移動硬化モデルでは、塑性ひずみ ε^P をさらに、弾性部分 ε^{Pe} と非弾性部分 ε^{Pi} に加算分解される。

$$\varepsilon^P = \varepsilon^{Pe} + \varepsilon^{Pi} \quad (2.145)$$

図 2.10 の ε^{Pi} に当たる部分は、ダッシュポットであり塑性乗数 $\dot{\gamma}$ に従って擬似的な粘性挙動を示し、移動硬化がやがて飽和する挙動を表現可能にする。

次に、降伏関数として次式を定義する。

$$f(\sigma) = |\sigma - \chi| - \sigma_y \quad (2.146)$$

ここで、 χ は背応力 (back stress) である。自由エネルギーを以下のように弾性部分と回転硬化部分に分解する。

$$\psi(\varepsilon^e, \varepsilon^{Pe}) = W(\varepsilon^e) + \mathcal{K}(\varepsilon^{Pe}) \quad (2.147)$$

```

const E = 100
const H = 25
const σ_y = 10

f(σ, h) = abs(σ) - (σ_y - h) # Yield function

function explicit_method(dε, σ, ε, h)
    # elastic predictor
    dσ = E * dε
    dh = 0.0
    σ_tr = σ + dσ
    h_tr = h + dh
    if f(σ_tr, h_tr) > 0
        # plastic corrector
        dσ = dσ - E^2 / (E + H) * dε
        dh = dh - H * E / (E + H) * sign(σ) * dε
    end
    return σ + dσ, ε + dε, h + dh
end

function return_mapping(Δε, σ, ε, h)
    # elastic predictor
    σ_tr = σ + E * Δε
    h_tr = h
    f_tr = f(σ_tr, h_tr)
    if f_tr > 0
        # plastic corrector
        Δγ = f_tr / (E + H)
        σ = σ_tr - Δγ * E * sign(σ)
        h = h_tr - Δγ * H
    else
        σ = σ_tr
        h = h_tr
    end
    return σ, ε + Δε, h
end

```

ソースコード 2.3: hardening_plasticity_1d.jl

ここで、

$$W(\varepsilon^e) = \frac{1}{2}E(\varepsilon^e)^2 \quad (2.148)$$

$$\mathcal{K}(\varepsilon^{Pe}) = \frac{1}{2}c(\varepsilon^{Pe})^2 \quad (2.149)$$

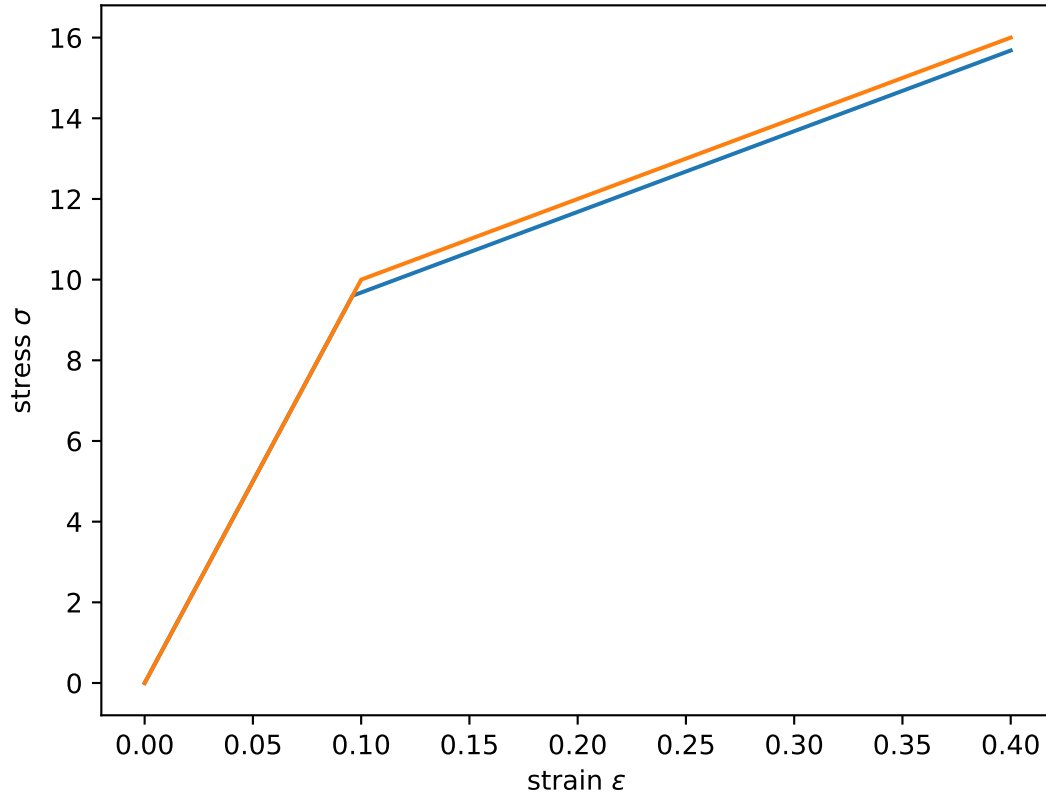


図 2.9: 一次元等方硬化型弾塑性モデルの計算例 (青: 陽解法、オレンジ: リターンマッピング)

である。塑性散逸式 \mathcal{D} は

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \quad (2.150)$$

$$= \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \right) \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varepsilon^{Pe}} \right) \dot{\varepsilon}^P + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varepsilon^{Pi}} \dot{\varepsilon}^{Pi} \quad (2.151)$$

と表されるから、超弾性構成則

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \quad (2.152)$$

と χ と ε^{Pe} の関係

$$\chi = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varepsilon^{Pe}} = c \varepsilon^{Pe} \quad (2.153)$$

を用いれば、最終的に散逸不等式は以下のように表される。

$$\mathcal{D} = (\sigma - \chi) \dot{\varepsilon}^P + \chi \dot{\varepsilon}^{Pi} \geq 0 \quad (2.154)$$

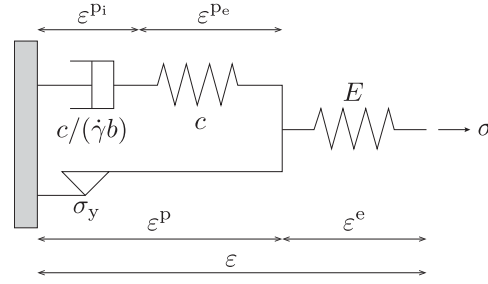


図 2.10: Armstrong-Frederick の移動硬化レオロジーモデル

上式の散逸不等式を満足する内部変数の発展則として以下を定義する。

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (2.155)$$

$$\dot{\epsilon}^{Pi} = \dot{\gamma} \frac{b}{c} \chi \quad (2.156)$$

実際にこれらの発展則を散逸不等式に代入すれば、

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} \left((\sigma - \chi) \text{sign}(\sigma - \chi) + \frac{b}{c} \chi^2 \right) \geq 0 \quad (2.157)$$

となり、塑性散逸の非負性が満足されることがわかる。

式 (2.153) より背応力の微分を取れば

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= c \dot{\epsilon}^{Pe} \\ &= c(\dot{\epsilon}^P - \dot{\epsilon}^{Pi}) \\ &= \dot{\gamma} b \left(\frac{c}{b} \text{sign}(\sigma - \chi) - \chi \right) \end{aligned} \quad (2.158)$$

となるから、 $\chi = c/b$ となった時に背応力 χ の移動が飽和することがわかる。Armstrong-Frederick 移動硬化則における塑性ひずみ-背応力関係を図 2.11 に示す。

速度型定式化

適用条件 \dot{f} より、

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} \\ &= \text{sign}(\sigma - \chi) (\dot{\sigma} - \dot{\chi}) \\ &= \text{sign}(\sigma - \chi) (E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^P) - c(\dot{\epsilon}^P - \dot{\epsilon}^{Pi})) \\ &= \text{sign}(\sigma - \chi) E \dot{\epsilon} - \dot{\gamma} (E + c - \text{sign}(\sigma - \chi) b \chi) = 0 \end{aligned} \quad (2.159)$$

が得られるから、塑性乗数 $\dot{\gamma}$ は以下のように表される。

$$\dot{\gamma} = \frac{\text{sign}(\sigma - \chi) E}{E + c - \text{sign}(\sigma - \chi) b \chi} \dot{\epsilon} \quad (2.160)$$

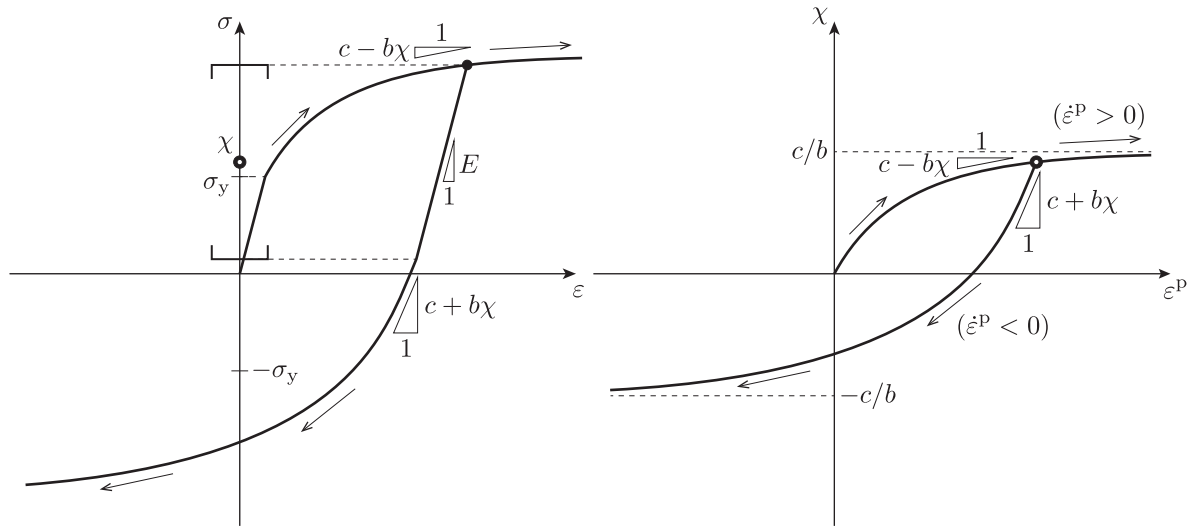


図 2.11: Armstrong–Frederick の移動硬化則における応力–ひずみ関係と背応力–塑性ひずみ関係

ゆえに、弾塑性係数は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}\text{sign}(\sigma - \chi)) \\ &= \left(E - \frac{E^2}{E + c - \text{sign}(\sigma - \chi) b\chi} \right) \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.161)$$

リターンマッピング

試行弾性状態における各変数の値は以下のように算出される。

$$\varepsilon^{P, \text{tr}} = \varepsilon_n^P \quad (2.162)$$

$$\varepsilon^{Pi, \text{tr}} = \varepsilon_n^{Pi} \quad (2.163)$$

$$\sigma^{\text{tr}} = \nabla W(\varepsilon^{e, \text{tr}}) = \nabla W(\varepsilon - \varepsilon^{P, \text{tr}}) = \nabla W(\varepsilon - \varepsilon_n^P) \quad (2.164)$$

$$\chi^{\text{tr}} = \nabla \mathcal{K}(\varepsilon^{Pe, \text{tr}}) = \nabla \mathcal{K}(\varepsilon^{P, \text{tr}} - \varepsilon^{Pi, \text{tr}}) = \nabla \mathcal{K}(\varepsilon_n^P - \varepsilon_n^{Pi}) \quad (2.165)$$

これらの試行値をもとに試行降伏関数を算出し、

$$f^{\text{tr}} = f(\sigma^{\text{tr}}, \chi^{\text{tr}}) \quad (2.166)$$

$f^{\text{tr}} \leq 0$ の時は、試行値をそのまま更新値に、 $f^{\text{tr}} > 0$ の時は以降に示すように応力を緩和させ、降伏面上に応力を引き戻す。

未知数および満足すべき方程式を以下のように設定する。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \chi \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^P - \varepsilon_n^P - \Delta\gamma\text{sign}(\sigma - \chi) \\ \varepsilon^{Pi} - \varepsilon_n^{Pi} - \Delta\gamma\frac{b}{c}\chi \\ f(\sigma, \chi) \end{Bmatrix} \quad (2.167)$$

本非線形方程式 $\mathbf{r} = 0$ を数値的に解くために、Newton–Raphson 法を適用すれば次式を得る。

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.168)$$

$\delta \mathbf{x}$ について解けば

$$\delta \mathbf{x} = - \left[\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) \quad (2.169)$$

を得る。ここで、Jacobian 行列 \mathbf{J} の具体形は以下のように表される。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -E^{-1} & 0 & -\text{sign}(\sigma - \chi) \\ -E^{-1} & -c^{-1} - \Delta\gamma \frac{b}{c} & -\frac{b}{c} \chi \\ \text{sign}(\sigma - \chi) & -\text{sign}(\sigma - \chi) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

$\delta \mathbf{x}$ は $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta \mathbf{x}^{(k)}$ により更新され、 $\|\mathbf{r}\| < \text{TOL}$ が満たされたとき求解完了となる。

プログラムコードへの実装

コード 2.4、2.5 に本構成則の実装例を示す。コード 2.1 を用いれば、以下のように応力経路を計算することが可能である。

```

julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
∇² (generic function with 2 methods)

julia> include("simulate_stress_path.jl")
simulate_stress_path

julia> include("kinematic_hardening_plasticity_1d.jl")
return_mapping (generic function with 1 method)

julia> σ = 0.0; ε = 0.0; χ = 0.0; Δε = 0.4;

julia> simulate_stress_path(explicit_method, Δε, σ, ε, χ);

julia> simulate_stress_path(return_mapping, Δε, σ, ε, χ);

julia> savefig("kinematic_hardening_plasticity_1d.pdf")

```

本計算を行った際の計算結果を図 2.12 に示す。なお、コード 2.1 にあるようにステップ数は 100 としている。

```
const TOL = 1e-12
const E = 100
const c = 25
const b = 10
const  $\sigma_y$  = 5

f( $\sigma$ ,  $\chi$ ) = abs( $\sigma$  -  $\chi$ ) -  $\sigma_y$  # Yield function

W( $\epsilon^e$ ) = 1/2 * E *  $\epsilon^e$ ^2 # Free energy for hyperelastic model
 $\hat{W}$ ( $\sigma$ ) = 1/2 * inv(E) *  $\sigma$ ^2 # Complementary energy for hyperelastic model
K( $\epsilon^p$ ) = 1/2 * c *  $\epsilon^p$ ^2 # Free energy for kinematic hardening law
 $\hat{K}$ ( $\chi$ ) = 1/2 * inv(c) *  $\chi$ ^2 # Complementary energy for kinematic hardening law

function explicit_method(d $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\chi$ )
    # elastic predictor
    d $\sigma$  = E * d $\epsilon$ 
    d $\chi$  = 0.0
     $\sigma_{tr}$  =  $\sigma$  + d $\sigma$ 
     $\chi_{tr}$  =  $\chi$  + d $\chi$ 
    if f( $\sigma_{tr}$ ,  $\chi_{tr}$ ) > 0
        # plastic corrector
        d $\gamma$  = sign( $\sigma$  -  $\chi$ ) * E / (E + c - sign( $\sigma$  -  $\chi$ ) * b *  $\chi$ ) * d $\epsilon$ 
        d $\sigma$  = d $\sigma$  - E * sign( $\sigma$  -  $\chi$ ) * d $\gamma$ 
        d $\chi$  = d $\chi$  + (c * sign( $\sigma$  -  $\chi$ ) - b *  $\chi$ ) * d $\gamma$ 
    end
    return  $\sigma$  + d $\sigma$ ,  $\epsilon$  + d $\epsilon$ ,  $\chi$  + d $\chi$ 
end
```

ソースコード 2.4: kinematic_hardening_plasticity_1d.jl (part1)

```
function return_mapping( $\Delta\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\chi$ )
    # elastic predictor
     $\epsilon^p_n = \epsilon - \nabla(\hat{W}, \sigma)$ 
     $\epsilon^{pi}_n = \epsilon^p_n - \nabla(\hat{K}, \chi)$ 
     $\epsilon += \Delta\epsilon$ 
     $\sigma = \nabla(W, \epsilon - \epsilon^p_n)$ 
     $\chi = \nabla(K, \epsilon^p_n - \epsilon^{pi}_n)$ 
    if  $f(\sigma, \chi) > 0$ 
        # plastic corrector
         $\Delta\gamma = 0.0$ 
        while true
             $\epsilon^p = \epsilon - \nabla(\hat{W}, \sigma)$ 
             $\epsilon^{pi} = \epsilon^p - \nabla(\hat{K}, \chi)$ 
             $r = [\epsilon^p - \epsilon^p_n - \Delta\gamma * \text{sign}(\sigma - \chi)$ 
                 $\epsilon^{pi} - \epsilon^{pi}_n - \Delta\gamma * b/c * \chi$ 
                 $f(\sigma, \chi)]$ 
            norm( $r$ ) < TOL && break
             $J = [-1/E \quad 0 \quad -\text{sign}(\sigma - \chi)$ 
                 $-1/E \quad -1/c - \Delta\gamma * b/c \quad -b/c * \chi$ 
                 $\text{sign}(\sigma - \chi) \quad -\text{sign}(\sigma - \chi) \quad 0]$ 
             $\delta x = -\text{inv}(J) * r$ 
             $\sigma += \delta x[1]$ 
             $\chi += \delta x[2]$ 
             $\Delta\gamma += \delta x[3]$ 
        end
    end
    return  $\sigma, \epsilon, \chi$ 
end
```

ソースコード 2.5: kinematic_hardening_plasticity_1d.jl (part2)

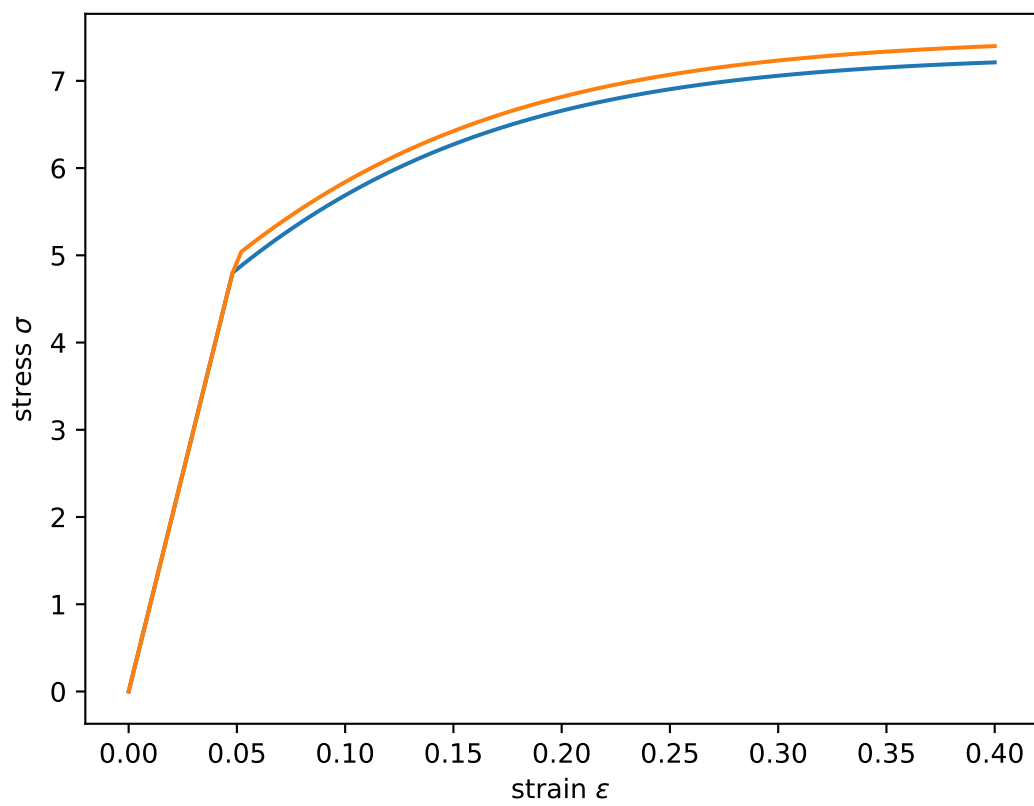


図 2.12: 一次元移動硬化型弾塑性モデルの計算例 (青: 陽解法、オレンジ: リターンマッピング)

第3章

土の弾性構成則

土の弾性構成則として古くから用いられてきたモデルは、速度型で応力-ひずみ関係が記述される亜弾性構成則である。土の亜弾性構成則は、等方圧縮挙動（膨潤線）を間隙比 e と拘束圧の対数表示 $\ln(p)$ を用いて整理し、それに整合する形で定式化されるのが一般的である。その中でも土の体積弾性係数 K に対して拘束圧依存性し、ポアソン比一定のもとフックの法則を適用することで弾性せん断係数を導く定式化 (Simpson, 1973) は、簡便さの点から広く用いられてきた。

しかしながら、(1) 速度型で記述される亜弾性構成則では弾性変形の際にエネルギーの散逸が生じること、(2) 公称ひずみを用いているため有限変形には適用できないこと、(3) 応力と弾性ひずみが一対一で対応しないため、Return mapping などの陰的応力積分法を効果的に適用できないなどの問題点があるため、現在ではこれらの問題を解決しうる超弾性構成則を用いた定式化が主流となりつつある。本節では、亜弾性構成則の問題点を再度整理するとともに、新たな超弾性構成則を提案する。

3.1 亜弾性構成則 (Hypoelastic model)

ここでは、Cam-clay 型のモデルで広く用いられている拘束圧依存型の体積弾性係数 K のもと、ポアソン比一定としてせん断弾性係数 μ を導出する亜弾性構成則 (Simpson, 1973) について述べる。土の亜弾性構成則では、一般に公称ひずみが用いられるため、真ひずみ ε と区別するために記号は e を用いる。

3.1.1 体積弾性係数とせん断弾性係数

土の体積弾性率 K とせん断弾性率 μ は、拘束圧 p に依存することが知られている。ここではまず、体積弾性率 K を土の等方圧密特性 (e - $\ln p$ 関係) に従って求める。

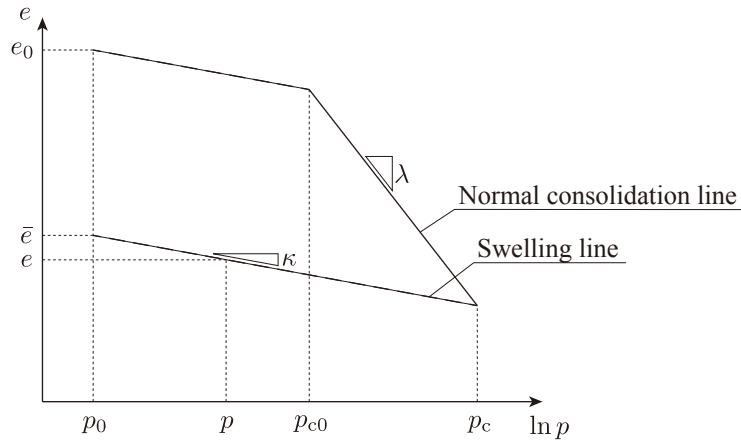


図 3.1: 土の等方圧密特性 ($e-\ln p$)

土の等方圧密特性を図 3.1 に示す。図より、弾性体積ひずみは以下のように表される。

$$\epsilon_v^e = -\frac{e - \bar{e}}{1 + e_0} \quad (3.1)$$

なお、ここでは $p = p_0$ 、 $e = e_0$ で $\epsilon_v^e = 0$ としている。図 3.1 における膨潤線 (Swelling line) は、

$$e - \bar{e} = -\kappa \ln \frac{p}{p_0} \quad (3.2)$$

と表されるから、式 (3.1)、(3.2) より、

$$\epsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (3.3)$$

を得る。式 (3.3) の微分を取れば、速度形式が以下のように得られる。

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \frac{\dot{p}}{p} \quad (3.4)$$

よって、体積弾性率 K は

$$K = \frac{\dot{p}}{\dot{\epsilon}_v^e} = \frac{1 + e_0}{\kappa} p \quad (3.5)$$

となる。Simpson (1973) は、ポアソン比 ν を一定としてフックの法則を適用することで、拘束圧依存型のせん断弾性係数 μ を導いた。

$$\mu = \frac{3(1 - \nu)}{2(1 + \nu)} K \quad (3.6)$$

3.1.2 弾性接線係数 (elastic tangent modulus)

ここでは、前節で導いた体積弾性係数 K (3.5) とせん断弾性係数 μ (3.6) を用いて、フックの法則から弾性接線係数 D^e を導出する。弾性ひずみテンソル増分 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ を以下のように体積成分 (volumetric component) と偏差成分 (deviatoric component) に分解する。

$$\dot{\epsilon}^e = \underbrace{\left(\text{tr}[\dot{\epsilon}^e] \frac{\mathbf{1}}{3}\right)}_{\text{volumetric}} + \underbrace{\left(\dot{\epsilon}^e - \text{tr}[\dot{\epsilon}^e] \frac{\mathbf{1}}{3}\right)}_{\text{deviatoric}} = \dot{\epsilon}_v^e \frac{\mathbf{1}}{3} + \dot{\epsilon}^e \quad (3.7)$$

フックの法則では、応力はひずみの体積成分と偏差成分の一次結合で表されるとしている。

$$\dot{\sigma} = K \dot{\epsilon}_v^e \mathbf{1} + 2\mu \dot{\epsilon}^e \quad (3.8)$$

式 (3.8) より、

$$\dot{p} = K \dot{\epsilon}_v^e, \quad \dot{s} = 2\mu \dot{\epsilon}^e, \quad \dot{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{s} : \dot{s}} = 3\mu \dot{\epsilon}_s^e \quad (3.9)$$

が成り立つ。弾性接線係数 D^e は式 (3.8) より以下のように表される。

$$\dot{\sigma} = D^e : \dot{\epsilon}^e, \quad D^e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (3.10)$$

ここで、 $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ は4階の対称恒等テンソル (fourth-order symmetric identity tensor) である。

3.1.3 力学的特性

弾性係数の初期間隙比依存性

体積弾性係数 K の定義 (3.5) から明らかなように、弾性係数 (3.10) は初期間隙比 e_0 に依存する。これは、図 3.2 に示すように同じ応力状態 (C) にあっても、土の強さが設定する初期間隙比 (A, B) によって異なることを意味しており、初期間隙比は如何ようにも設定できることから一般性を欠く。

非保存性

速度型で記述された重弾性構成則は一般的にエネルギーの散逸が生じるが、Zytnski et al. (1978) も述べているように上述した重弾性構成則もこの例外ではない。体積弾性係数 K とせん断弾性係数 μ は共に拘束圧 p に依存することから、形式的に以下のように書くことができる。

$$\dot{\epsilon}_v^e = \hat{K}(p) \dot{p}, \quad \dot{\epsilon}_s^e = \hat{\mu}(p) \dot{q} \quad (3.11)$$

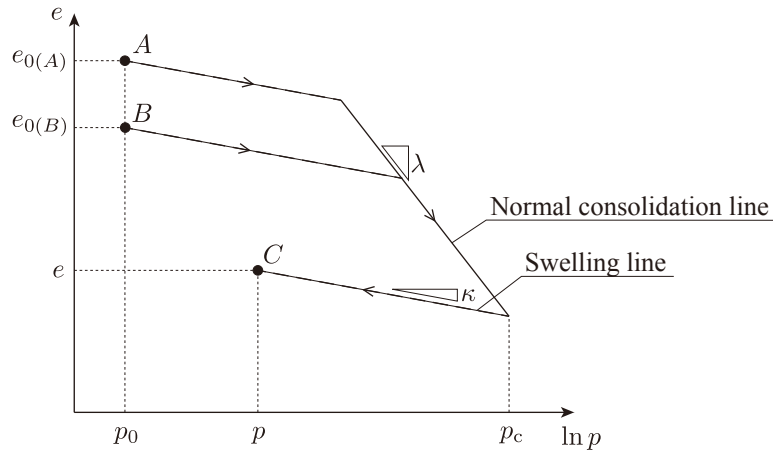


図 3.2: 亜弾性構成則 (Simpson, 1973) の初期間隙比依存性

ここで、 \hat{K} と $\hat{\mu}$ はそれぞれ K と μ に関連した関数である。今、図 3.3 に示すように p - q 平面上で応力経路 ABC と CDA を考え、それぞれ以下のように定義する。

$$q = f_{ABC}(p), \quad q = f_{CDA}(p) \quad (3.12)$$

このとき、経路 ABC で生じた弾性体積ひずみ ε_v^e と弾性せん断ひずみ ε_s^e はそれぞれ以下のように表される。

$$\varepsilon_{v(ABC)}^e = \int \dot{\varepsilon}_v^e = \int \hat{K}(p) dp \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{s(ABC)}^e = \int \dot{\varepsilon}_s^e = \int \hat{\mu}(p) f'_{ABC}(p) dp \quad (3.14)$$

同様にして、経路 CDA は

$$\varepsilon_{v(CDA)}^e = \int \dot{\varepsilon}_v^e = \int \hat{K}(p) dp \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{s(CDA)}^e = \int \dot{\varepsilon}_s^e = \int \hat{\mu}(p) f'_{CDA}(p) dp \quad (3.16)$$

となる。以上より、応力サイクル $ABCD$ を考えたとき、体積ひずみ ε_v^e については明らかに

$$\Delta \varepsilon_v^e = \varepsilon_{v(ABC)}^e + \varepsilon_{v(CDA)}^e = 0 \quad (3.17)$$

が言える。一方、偏差ひずみ ε_s^e については、経路 f_{ABC} と f_{CDA} に依存しているため保存性がない。

$$\Delta \varepsilon_s^e = \varepsilon_{s(ABC)}^e + \varepsilon_{s(CDA)}^e \neq 0 \quad (3.18)$$

以上より、本亜弾性モデルでは応力サイクルによって弾性偏差ひずみが生じ続けてしまい、物理的に不合理な結果となる。これは、応力 σ と弾性ひずみ ε^e が一対一で対応して

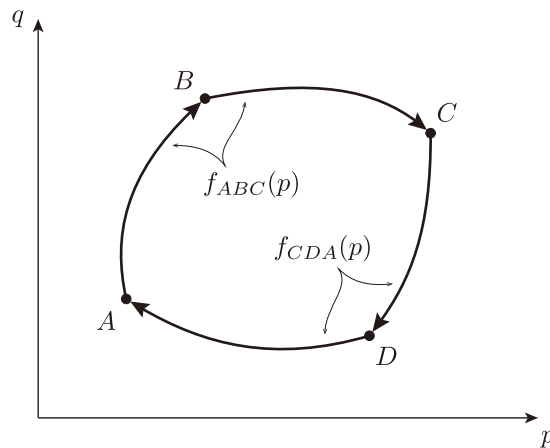


図 3.3: p - q 平面における応力サイクル

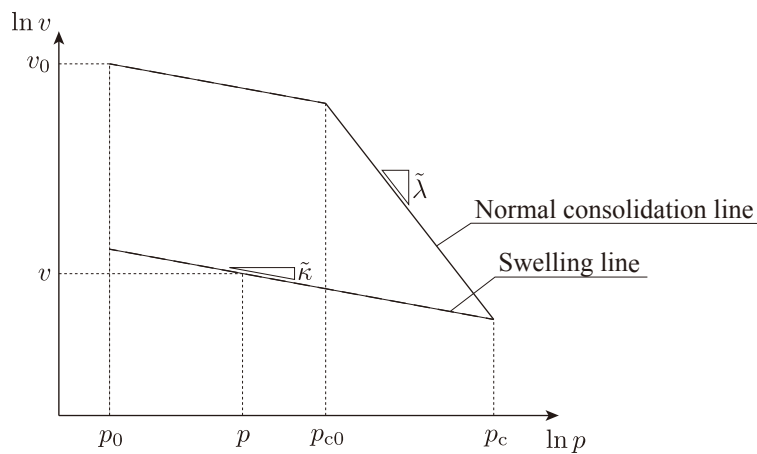


図 3.4: 土の等方圧密特性 ($\ln v$ - $\ln p$)

いないことに起因する。Zytynski et al. (1978) も述べているように、保存性のある弾性モデル、すなわち超弾性モデルを定式化するには、ポアソン比が一定ではなく変化するような構成則にする必要がある (節 3.2 参照)。

3.2 超弾性構成則 (Hyperelastic model)

Cam-clay 型のモデルで用いられる超弾性構成則は、 $\ln v$ - $\ln p$ 関係 (Hashiguchi, 1977; Butterfield, 1979; Hashiguchi, 1995) における膨潤線の挙動に整合するように拘束圧依存型の体積弾性係数を用いた定式化がなされる (図 3.4 参照)。また、せん断弾性係数においても、拘束圧依存を考慮することが実験結果をより精緻に表現可能であることが知られている。ここでは、既存の超弾性構成則を紹介し問題点を挙げるとともに、それを克服した新たな超弾性構成則を提案する。

3.2.1 既存の超弾性構成則

Houlsby (1985) は、以下のような土の拘束圧依存性を考慮した超弾性構成則を提案した。

$$W(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e) = \tilde{\kappa} p_{\text{ref}} \exp \Omega + \frac{3}{2} \mu (\varepsilon_s^e)^2 \quad (3.19)$$

ここで、

$$\Omega = \frac{\varepsilon_v^e}{\tilde{\kappa}}, \quad \mu = \alpha p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.20)$$

である。 $\tilde{\kappa}$ は $\ln v - \ln p$ 関係における膨潤線に整合したパラメータで、 α はせん断弾性係数の拘束圧依存に関するパラメータである。Borja et al. (1997) はこのモデルにせん断弾性係数に関する定数 μ_{ref} を新たに導入し、式 (3.20) における μ を以下のように修正した。

$$\mu = \mu_{\text{ref}} + \alpha p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.21)$$

式 (3.21) より、せん断弾性係数 μ は、定数項 μ_{ref} とパラメータ α を伴う変数項を含んでいる。 $\alpha = 0$ かつ $\mu_{\text{ref}} > 0$ の場合は、拘束圧依存の体積弾性係数と定数のせん断弾性係数の弾性則となり、 $\alpha > 0$ かつ $\mu_{\text{ref}} = 0$ の場合は、Houlsby (1985) の提案したモデル (3.20) に帰着する。

式 (3.19) を用いれば、平均応力 p と偏差応力 q は以下のように表される。

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_v^e} = p_{\text{ref}} \exp \Omega \left[1 + \frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}} (\varepsilon_s^e)^2 \right] \quad (3.22)$$

$$q = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_s^e} = 3\mu \varepsilon_s^e \quad (3.23)$$

また、不変量 p 、 q における弾性接線係数は以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_{\text{vs}}^e \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v^e \\ \dot{\varepsilon}_s^e \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{p}{\tilde{\kappa}} & \frac{3\alpha \varepsilon_s^e}{\tilde{\kappa}} p_{\text{ref}} \exp \Omega \\ \frac{3\alpha \varepsilon_s^e}{\tilde{\kappa}} p_{\text{ref}} \exp \Omega & 3\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v^e \\ \dot{\varepsilon}_s^e \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$\mu_{\text{ref}} = 0$ のとき、上式の接線係数 \mathbf{D}_{vs}^e の行列式をとれば、

$$\det(\mathbf{D}_{\text{vs}}^e) = \frac{3\alpha (p_{\text{ref}} \exp \Omega)^2}{\tilde{\kappa}} \left(1 - \frac{3\alpha (\varepsilon_s^e)^2}{2\kappa} \right) \quad (3.26)$$

となるため、 $\varepsilon_s^e = \sqrt{2\tilde{\kappa}/3\alpha}$ の時、弾性接線係数 \mathbf{D}_{vs}^e は不定となる。

一般ひずみ空間における表現

式 (3.19) を一般的なひずみ空間 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ で表現すると以下のように表される。

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \tilde{\kappa} p_{\text{ref}} \exp \Omega + \mu \boldsymbol{e}^e : \boldsymbol{e}^e \quad (3.27)$$

ゆえに、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= p_{\text{ref}} \exp \Omega \left[1 + \frac{\alpha}{\tilde{\kappa}} \boldsymbol{e}^e : \boldsymbol{e}^e \right] \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{e}^e \end{aligned} \quad (3.28)$$

弾性接線係数 \boldsymbol{D}^e は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^e &= \nabla^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= \frac{p}{\tilde{\kappa}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2\alpha p_{\text{ref}} \exp \Omega}{\tilde{\kappa}} (\boldsymbol{e}^e \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{e}^e) + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{D}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

と表される。ここで、 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ は Deviatoric projection tensor で以下のように定義される。

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.30)$$

弾性体積ひずみ、弾性偏差ひずみの等値線

次に、弾性体積ひずみ ε_v^e 、弾性偏差ひずみ ε_s^e の等値線を導出し、既存の超弾性構成則の性質について整理する。まず、 $\mu_{\text{ref}} > 0$ かつ $\alpha = 0$ の場合について考える。式 (3.22)、(3.23) より、弾性体積ひずみ ε_v^e 、弾性偏差ひずみ ε_s^e の等値線は以下のように容易に得られる。

$$p = p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.31)$$

$$q = 3\mu_{\text{ref}} \varepsilon_s^e \quad (3.32)$$

一方、 $\mu_{\text{ref}} = 0$ かつ $\alpha > 0$ の場合、

$$p = p_{\text{ref}} \exp \Omega \left[1 + \frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}} (\varepsilon_s^e)^2 \right] \quad (3.33)$$

$$q = 3\alpha \varepsilon_s^e p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.34)$$

であるから、弾性偏差ひずみ ε_s^e の等値線は、

$$q = \frac{3\alpha \varepsilon_s^e}{1 + \frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}} (\varepsilon_s^e)^2} p \quad (3.35)$$

のように得られる。一方、弾性偏差ひずみ $\varepsilon_s^e = 0$ の場合、すなわち弾性体積ひずみ ε_v^e の等値線と p 軸との交点を

$$p_i = p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.36)$$

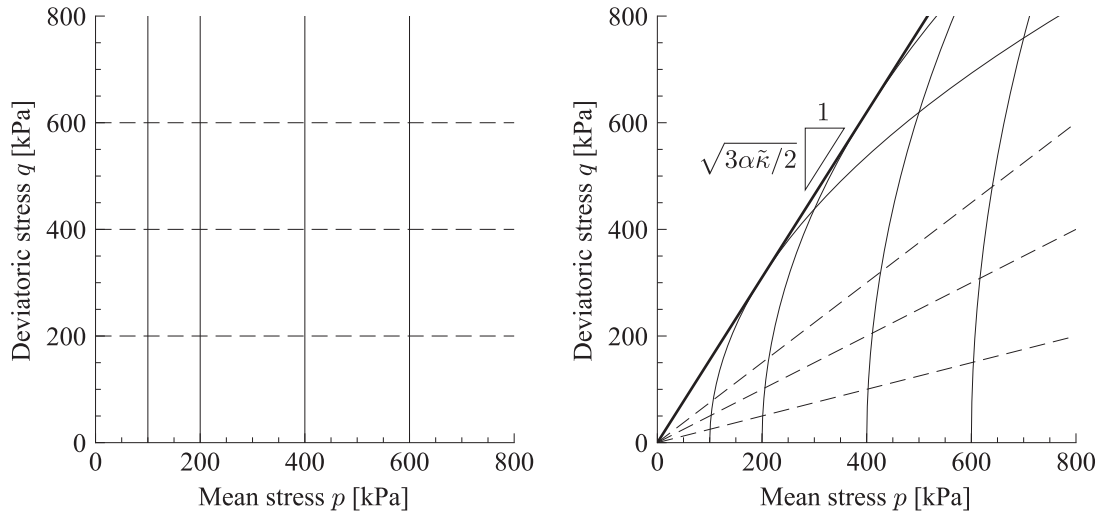


図 3.5: 既往モデル (Borja et al., 1997) における弾性体積ひずみ (実線) と弾性偏差ひずみ (破線) の等値線。(a) $\alpha = 0, \mu_{\text{ref}} = 6000 \text{ kPa}$; (b) $\alpha = 160, \mu_{\text{ref}} = 0 \text{ kPa}$

と定義すれば、式 (3.33)、(3.34) より、弾性体積ひずみ ε_v^e の等値線が以下のように得られる。

$$q = \sqrt{6\alpha\tilde{\kappa}p_i(p - p_i)} \quad (3.37)$$

以上の等値線を図 3.5 にまとめる。

式 (3.25) で述べたように、本超弾性構成則は $\mu_{\text{ref}} = 0$ かつ $\sqrt{2\tilde{\kappa}/3\alpha}$ のとき弾性接線係数が不定となる。これは、図 3.5 に示すように弾性体積ひずみ ε_v^e の等値線の最大の傾き $(q/p)_{\text{max}} = \sqrt{3\alpha\tilde{\kappa}/2}$ として現れる (Houlsby, 1985; Borja et al., 1997)。

パラメータ α の性質

$\varepsilon_s^e = 0$ 、すなわち応力が p 軸上にある場合について考える。 $\mu_{\text{ref}} = 0$ のとき、式 (3.25) よりポアソン比は

$$\nu = \frac{3 - 2\mu/K}{6 + 2\mu/K} = \frac{3 - 2\alpha\tilde{\kappa}}{6 + 2\alpha\tilde{\kappa}} \quad (3.38)$$

となる。上式より、パラメータ α の値によってはポアソン比 ν が負になることもあり、これは物理的に不合理であるため注意が必要である。すなわち、パラメータ α の値は以下の範囲を満足した方が良い。

$$\alpha < \frac{3}{2\tilde{\kappa}} \quad (3.39)$$

また、パラメータ α を定める際の一つの指標として、 ν と $\tilde{\kappa}$ の値を用いた次式が便利である。

$$\alpha = \frac{3 - 6\nu}{2\tilde{\kappa}(\nu + 1)} \quad (3.40)$$

プログラムコードへの実装

超弾性構成則 (3.27) のプログラムコードへの実装例をコード 3.1 に示す。コード 3.1 に示すように、応力 σ 、弾性接線係数 D^e を求めるための W の導関数を直接書くことも出来るが、コード 0.1 で示した自動微分 (automatic differentiation) を用いれば、より簡単にそれらを算出することができる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
```

```
∇2 (generic function with 2 methods)
```

```
julia> include("hyperelastic_old.jl")
```

```
∇2W (generic function with 1 method)
```

```
julia> εe = rand(SymmetricTensor{2,3}) * 0.1
```

```
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
```

```
 0.0363189  0.026131  0.0247503
 0.026131  0.051279  0.0736129
 0.0247503  0.0736129  0.0860343
```

```
julia> ∇W(εe) ≈ ∇(W, εe) # σ = ∇W
```

```
true
```

```
julia> ∇2W(εe) ≈ ∇2(W, εe) # De = ∇2W
```

```
true
```

3.2.2 新しい超弾性構成則

ここでは、前節で述べた超弾性構成則の弾性係数が不定となる問題点を解消した新たな超弾性構成則を提案する。超弾性ポテンシャル関数は以下のように定義される。

$$W(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e) = \tilde{\kappa} p_{\text{ref}} \exp \Omega + \frac{3}{2} \mu_{\text{ref}} (\varepsilon_s^e)^2 \quad (3.41)$$

ここで、

$$\Omega = \frac{\varepsilon_v^e}{\tilde{\kappa}} + \frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}} (\varepsilon_s^e)^2 \quad (3.42)$$

である。 p_{ref} は $\varepsilon_v^e = 0$ となる参照応力である。弾性せん断強さは定数部分 μ_{ref} とパラメータ α に依存する変数部分により制御される。 $\alpha = 0$ かつ $\mu_{\text{ref}} > 0$ のとき、モデルは拘束圧依存型の体積弾性係数および一定のせん断弾性係数となり、 $\alpha > 0$ かつ $\mu_{\text{ref}} = 0$ の

```

using Tensors

const δ = one(SymmetricTensor{2,3})
const Isym = one(SymmetricTensor{4,3})
const D = Isym - 1/3 * δ ⊗ δ

const κ = 0.01
const α = 40.0
const p_ref = 98.0
const μ_ref = 6000.0

function W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    expΩ = exp(εᵉᵛ / κ)
    μ = α * p_ref * expΩ
    return κ*p_ref*expΩ + μ*(eᵉ ⊠ eᵉ)
end

function ∇W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    expΩ = exp(εᵉᵛ / κ)
    μ = α * p_ref * expΩ
    return p_ref*expΩ*(1 + α/κ*(eᵉ ⊠ eᵉ)) * δ + 2μ * eᵉ
end

function ∇²W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    expΩ = exp(εᵉᵛ / κ)
    μ = α * p_ref * expΩ
    p = p_ref * expΩ * (1 + α/κ*(eᵉ ⊠ eᵉ))
    return p/κ * δ ⊗ δ +
           2α*p_ref*expΩ/κ*(eᵉ ⊗ δ + δ ⊗ eᵉ) +
           2μ * D
end

```

ソースコード 3.1: hyperelastic_old.jl

とき、超弾性ポテンシャル関数は [Houlsby et al. \(2005\)](#) により提案されたモデルに帰着する。

平均応力 p と偏差応力 q は、ポテンシャル関数をそれぞれ ε_v^e と ε_s^e で微分することに

より以下のように表される^{*6}。

$$p = p_{\text{ref}} \exp \Omega \quad (3.43)$$

$$q = 3(\alpha p_{\text{ref}} \exp \Omega + \mu_{\text{ref}}) \varepsilon_s^e = 3(\alpha p + \mu_{\text{ref}}) \varepsilon_s^e = 3\mu \varepsilon_s^e \quad (3.44)$$

ここで、

$$\mu = \alpha p + \mu_{\text{ref}} \quad (3.45)$$

とおいた。また、不変量 p 、 q における弾性接線係数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} &= \mathbf{D}_{\text{vs}}^e \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v^e \\ \dot{\varepsilon}_s^e \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \begin{bmatrix} p & 3\alpha p \varepsilon_s^e \\ 3\alpha p \varepsilon_s^e & 3(\tilde{\kappa}\mu + 3\alpha^2 p (\varepsilon_s^e)^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v^e \\ \dot{\varepsilon}_s^e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

上式より、等方応力状態 ($\varepsilon_s^e = 0$) を考えれば、せん断弾性係数は $\mu = \alpha p + \mu_{\text{ref}}$ のように拘束圧依存性を示す項 αp と定数項 μ_{ref} で記述される ($\alpha = 0$ のときはせん断に対して線形弾性)。

上式の接線係数 \mathbf{D}_{vs}^e の行列式をとれば

$$\det(\mathbf{D}_{\text{vs}}^e) = \frac{3p\mu}{\tilde{\kappa}} \quad (3.47)$$

となり、平均応力 p が正のとき弾性係数マトリクスの逆関数は常に存在する。

一般ひずみ空間における表現

式 (3.41)、(3.42) を一般的なひずみ空間 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ で表現すると以下のように表される。

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \tilde{\kappa} p_{\text{ref}} \exp \Omega + \mu_{\text{ref}} \mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e \quad (3.48)$$

ここで、

$$\Omega = \frac{\varepsilon_v^e}{\tilde{\kappa}} + \frac{\alpha}{\tilde{\kappa}} \mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e \quad (3.49)$$

である。ゆえに、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= (p_{\text{ref}} \exp \Omega) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}^e \end{aligned} \quad (3.50)$$

^{*6} 式 (3.43)、(3.44) を用いれば、弾性体積ひずみ ε_v^e および弾性偏差ひずみ ε_s^e を応力 $\boldsymbol{\sigma}$ だけの関数として以下のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^e &= \tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \frac{\alpha q^2}{6\mu^2} \\ \varepsilon_s^e &= \frac{q}{3\mu} \end{aligned}$$

弾性接線係数 D^e は

$$\begin{aligned} D^e &= \nabla^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= \frac{p}{\tilde{\kappa}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2\alpha p}{\tilde{\kappa}} (\boldsymbol{e}^e \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{e}^e + 2\alpha \boldsymbol{e}^e \otimes \boldsymbol{e}^e) + 2\mu \mathcal{D} \end{aligned} \quad (3.51)$$

のように表される。

弾性体積ひずみ、弾性偏差ひずみの等値線

まず弾性体積ひずみ ε_v^e の等値線を求める。等値線と p 軸上との交点を p_i とすれば式 (3.43) より、

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{ref}} \exp\left(\frac{\varepsilon_v^e}{\tilde{\kappa}}\right) \exp\left(\frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}}(\varepsilon_s^e)^2\right) \\ &= p_i \exp\left(\frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}}(\varepsilon_s^e)^2\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

を得るから、式 (3.44) を用いれば体積ひずみ ε_v^e の等値線は以下のように表される。

$$q = (\alpha p + \mu_{\text{ref}}) \sqrt{\frac{6\tilde{\kappa}}{\alpha} \ln \frac{p}{p_i}} \quad (3.53)$$

偏差ひずみ ε_s^e の等値線は、式 (3.44) より容易に求まり、 p - q 平面において、傾き $3\alpha\varepsilon_s^e$ 、切片 $3\mu_{\text{ref}}\varepsilon_s^e$ の直線となる。また、 $q = 0$ のとき $p = -\mu_{\text{ref}}/\alpha$ となることから、 ε_s^e の値によらず、常に点 $(p, q) = (-\mu_{\text{ref}}/\alpha, 0)$ を通る。以上より、弾性体積ひずみ ε_v^e および偏差ひずみ ε_s^e の等値線を図示すると図 3.6 のようになる。本コンター図は、Houlsby et al. (2005) でも取り上げられている Shaw and Brown (1988) の実験結果 (図 3.7) とよく一致する。

パラメータ α の性質

$\varepsilon_s^e = 0$ 、すなわち応力が p 軸上にある場合について考え、 μ_{ref} とすれば、式 (3.46) よりポアソン比 ν は以下のように表される。

$$\nu = \frac{3 - 2\mu/K}{6 + 2\mu/K} = \frac{3 - 2\alpha\tilde{\kappa}}{6 + 2\alpha\tilde{\kappa}} \quad (3.54)$$

よって、本モデルにおけるパラメータ α は Borja et al. (1997) によるモデルと同等の性質を有する (詳しくは節 3.2.1 参照)。

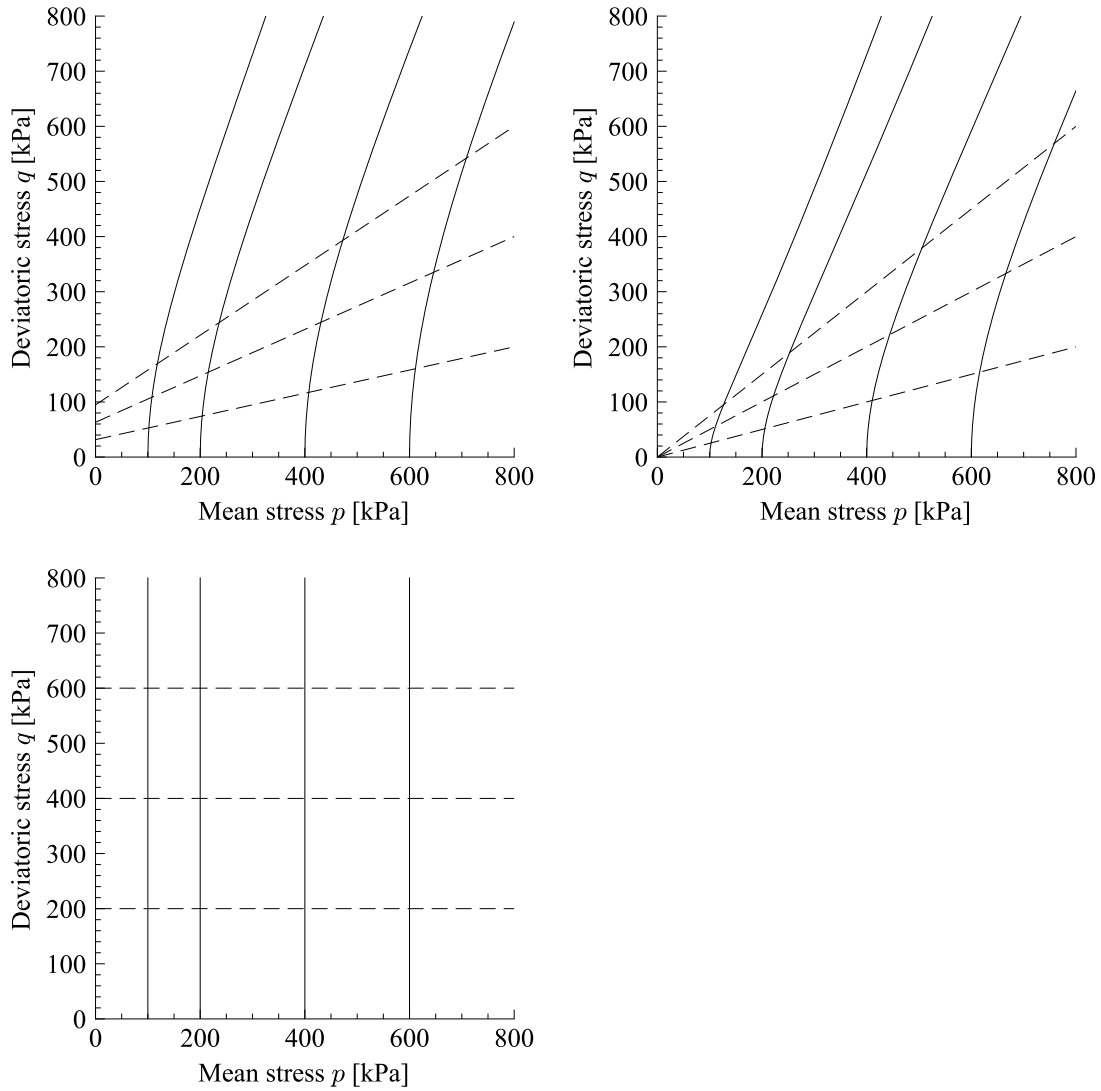


図 3.6: 提案モデル (3.41) における弾性体積ひずみ (実線) と弾性偏差ひずみ (破線) の等値線。(a) $\alpha = 40, \mu_{\text{ref}} = 6000$ kPa; (b) $\alpha = 40, \mu_{\text{ref}} = 0$ kPa; (c) $\alpha = 0, \mu_{\text{ref}} = 6000$ kPa

補足エネルギー関数 (Complementary energy function)

式 (3.48) をルジャンドル変換すれば、以下のような補足エネルギー関数が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e - W \\ &= \tilde{\kappa} p \left(\ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - 1 \right) + \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{4\mu} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$= \tilde{\kappa} p \left(\ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - 1 \right) + \frac{q^2}{6\mu} \quad (3.56)$$

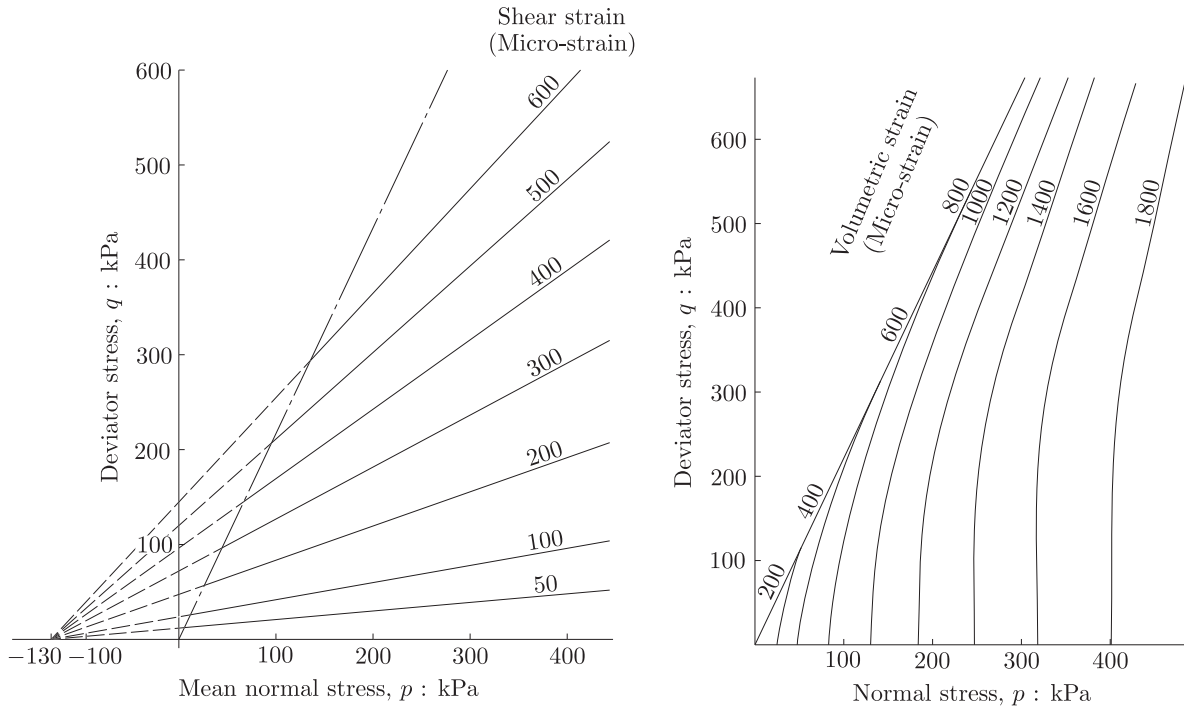


図 3.7: Shaw and Brown (1988) の実験による (a) 偏差ひずみと (b) 体積ひずみの等値線。

上式より、弾性ひずみ ϵ^e は

$$\begin{aligned} \epsilon^e &= \nabla \tilde{W}(\sigma) \\ &= \left(\tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \alpha \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{4\mu^2} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{\mathbf{s}}{2\mu} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$= \left(\tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \frac{\alpha q^2}{6\mu^2} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{\mathbf{s}}{2\mu} \quad (3.58)$$

ゆえに、弾性体積ひずみ ϵ_v^e は

$$\epsilon_v^e = \tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \alpha \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{4\mu^2} \quad (3.59)$$

$$= \tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \frac{\alpha q^2}{6\mu^2} \quad (3.60)$$

弾性偏差ひずみ ϵ_s^e は

$$\epsilon_s^e = \frac{q}{3\mu} \quad (3.61)$$

のように表される。一方、コンプライアンス接線係数 C^e は以下のように表される。

$$\begin{aligned} C^e &= \nabla^2 \tilde{W}(\sigma) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{\tilde{\kappa}}{p} + \alpha^2 \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{2\mu^3} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{\alpha}{6\mu^2} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{s}) + \frac{\mathcal{D}}{2\mu} \end{aligned} \quad (3.62)$$

プログラムコードへの実装

超弾性構成則 (3.48) とその補足エネルギー (3.56) のプログラムコードへの実装例をコード 3.2、3.3 に示す。節 3.2.1 と同様に、 W 、 G の導関数を直接書くことも出来るが、コード 0.1 で示した自動微分 (automatic differentiation) を用いれば、より簡単にそれらを算出することができる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
```

```
∇2 (generic function with 2 methods)
```

```
julia> include("hyperelastic_new.jl")
```

```
∇2 $\tilde{W}$  (generic function with 1 method)
```

```
julia>  $\epsilon^e = \text{rand}(\text{SymmetricTensor}\{2,3\}) * 0.1$ 
```

```
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
```

```
 0.0516464  0.0583319  0.000709337
 0.0583319  0.0776222  0.0058846
 0.000709337 0.0058846  0.0767304
```

```
julia>  $\nabla W(\epsilon^e) \approx \nabla(W, \epsilon^e) \# \sigma = \nabla W$ 
```

```
true
```

```
julia>  $\nabla^2 W(\epsilon^e) \approx \nabla^2(W, \epsilon^e) \# D^e = \nabla^2 W$ 
```

```
true
```

```
julia>  $\sigma = \nabla(W, \epsilon^e)$ 
```

```
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
```

```
-5380.7  67505.3  820.889
 67505.3  24680.0  6810.02
 820.889  6810.02  23648.0
```

```
julia>  $\nabla \tilde{W}(\sigma) \approx \nabla(\tilde{W}, \sigma) \# \epsilon^e = \nabla \tilde{W}$ 
```

```
true
```

```
julia>  $\nabla^2 \tilde{W}(\sigma) \approx \nabla^2(\tilde{W}, \sigma) \# C^e = \nabla^2 \tilde{W}$ 
```

```
true
```

```
julia>  $\sigma \boxtimes \epsilon^e \approx W(\epsilon^e) + \tilde{W}(\sigma)$ 
```

```
true
```

```

using Tensors

const δ = one(SymmetricTensor{2,3})
const Isym = one(SymmetricTensor{4,3})
const D = Isym - 1/3 * δ ⊗ δ

const κ = 0.01
const α = 40.0
const p_ref = 98.0
const μ_ref = 6000.0

function W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    Ω = εᵉᵛ/κ + α/κ*(eᵉ ⊠ eᵉ)
    return κ*p_ref*exp(Ω) + μ_ref*(eᵉ ⊠ eᵉ)
end

function ∇W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    Ω = εᵉᵛ/κ + α/κ*(eᵉ ⊠ eᵉ)
    p = p_ref * exp(Ω)
    μ = α*p + μ_ref
    return p*δ + 2μ*eᵉ
end

function ∇²W(εᵉ::SymmetricTensor{2,3})
    εᵉᵛ = trace(εᵉ)
    eᵉ = dev(εᵉ)
    Ω = εᵉᵛ/κ + α/κ*(eᵉ ⊠ eᵉ)
    p = p_ref * exp(Ω)
    μ = α*p + μ_ref
    return p/κ * δ ⊗ δ +
        2α*p/κ*(eᵉ ⊗ δ + δ ⊗ eᵉ + 2α * eᵉ ⊗ eᵉ) +
        2μ * D
end

```

ソースコード 3.2: hyperelastic_new.jl (part 1)

```

function  $\tilde{W}$  ( $\sigma::\text{SymmetricTensor}\{2,3\}$ )
    p = mean( $\sigma$ )
    s = dev( $\sigma$ )
     $\mu$  =  $\alpha * p + \mu\_ref$ 
    return  $\kappa * p * (\log(p/p\_ref) - 1) + s \cdot s / 4\mu$ 
end

function  $\nabla \tilde{W}$  ( $\sigma::\text{SymmetricTensor}\{2,3\}$ )
    p = mean( $\sigma$ )
    s = dev( $\sigma$ )
     $\mu$  =  $\alpha * p + \mu\_ref$ 
    return ( $\kappa * \log(p/p\_ref) - \alpha / 4\mu^2 * s \cdot s$ ) *  $\delta / 3 + s / 2\mu$ 
end

function  $\nabla^2 \tilde{W}$  ( $\sigma::\text{SymmetricTensor}\{2,3\}$ )
    p = mean( $\sigma$ )
    s = dev( $\sigma$ )
     $\mu$  =  $\alpha * p + \mu\_ref$ 
    return  $1/9 * (\kappa/p + \alpha^2 / 2\mu^3 * s \cdot s) * \delta \otimes \delta -$ 
            $\alpha / 6\mu^2 * (s \otimes \delta + \delta \otimes s) +$ 
            $D / 2\mu$ 
end

```

ソースコード 3.3: hyperelastic_new.jl (part 2)

第4章

土の弾塑性構成則

土をモデル化する上で最も重要な土固有のファクターは限界状態 (critical state) と言える。限界状態は土の種類によって決まり、実施する室内試験の種類に関わらず、土がせん断変形を受けた際に最終的に達する状態である。限界状態は通常「土の体積変化がなく、偏差ひずみのみが進行し続ける状態」と定義できるが、土は塑性ひずみが支配的であるため、本研究では「塑性体積ひずみの速度がゼロ ($\dot{\varepsilon}_v^p = 0$) である状態」を限界状態と定義する。

本章では既存の等方硬化モデル、誘導異方性を考慮したモデルを紹介するとともに、超弾性塑性論に基づいた新たなモデルを提案する。

4.1 既存の等方硬化モデル

土の等方モデルとして最も広く用いられている古典モデルは、[Schofield and Wroth \(1968\)](#) によって提案された Cam-clay モデル

$$f(\sigma, p_c) = \frac{q}{M} + p \ln \frac{p}{p_c} \quad (4.1)$$

を修正した修正 Cam-clay (Modified Cam-clay) モデル ([Burland, 1965](#); [Roscoe and Burland, 1968](#)) で降伏関数は以下のように表される。

$$f(\sigma, p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \quad (4.2)$$

ここで、 M は限界状態における応力比、 p_c は圧密降伏応力 (preconsolidation pressure) である。降伏関数を p - q 平面において図示すると図 4.1 のようになる。圧密降伏応力 p_c は等方硬化を特徴付ける応力変数であり、実験より観測される土の等方圧密特性に基づき、塑性体積ひずみ ε_v^p と関係付けられる。

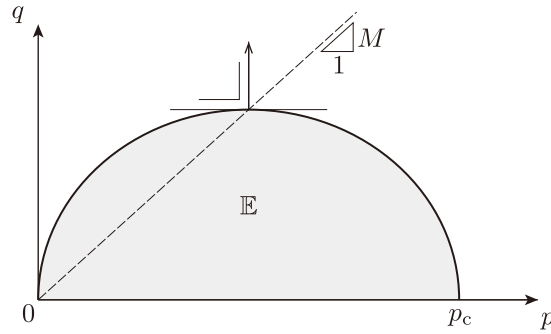


図 4.1: 修正 Cam-clay の降伏曲面

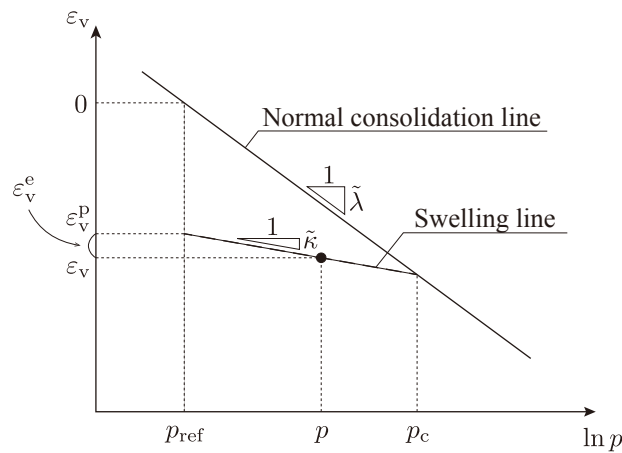


図 4.2: 土の等方圧密特性 ($\varepsilon_v - \ln p$)

図 4.2 のような $\varepsilon_v \left(= \ln \frac{v}{v_{ref}} \right) - \ln p$ 平面において、土の等方圧密特性を考えれば、土の圧密降伏応力 p_c は塑性体積ひずみ ε_v^P を用いて以下のように表される。

$$p_c = p_{ref} \exp \left(\frac{\varepsilon_v^P}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \right) \tag{4.3}$$

式 (4.3) は土の等方硬化則であり、修正 Cam-clay モデルでは土の硬化・軟化は塑性体積ひずみ ε_v^P に支配される。このことから、降伏面上の応力が $p-q$ 平面において限界状態線上に達すると、降伏関数の拡大・縮小が止まり、応力が変化せず塑性偏差ひずみ ε_s^P のみが増加し続ける。

次に、 $\varepsilon_v - \ln p$ 平面における限界状態線について考察する。限界状態においては応力比 $q/p = M$ となる。弾性モデルとして超弾性モデル (3.41) を用いれば、 $\mu_{ref} = 0$ としたとき弾性体積ひずみ ε_v^e は以下のように表される。

$$\varepsilon_v^e = \tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{ref}} - \frac{M^2}{6\alpha} \tag{4.4}$$

一方、圧密降伏応力 p_c は降伏関数 (4.2) より限界状態線上で $p_c = 2p$ のように表される

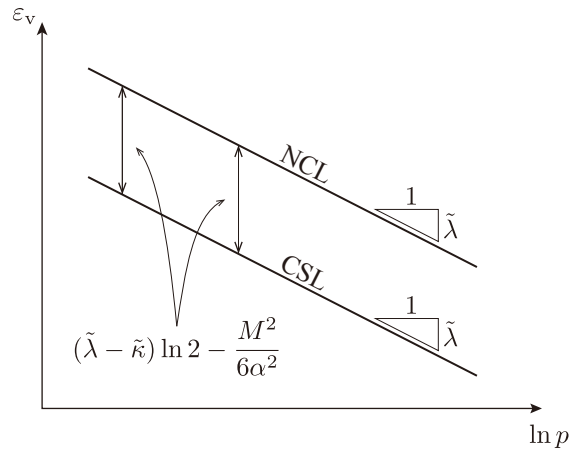


図 4.3: ε_v - $\ln p$ 関係における限界状態線 (CSL) の位置

から、塑性体積ひずみ ε_v^p は式 (4.3) より以下のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{2p}{p_{\text{ref}}} \\ &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

よって、次式のような限界状態における体積ひずみ ε_v を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \\ &= \tilde{\lambda} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - \frac{M^2}{6\alpha} \end{aligned} \quad (4.6)$$

これを図示すれば図 4.3 のようになる。図より、超弾性構成則を用いた場合は、亜弾性構成則を用いる場合に比べ、限界状態線は $M^2/(6\alpha^2)$ 分だけ上方に位置する。

4.2 回転硬化を表現しうる降伏関数

土は応力誘導異方性を強く呈する材料であり、その影響は無視しえない。土の応力誘導異方性を考慮する手法はいくつかあるが、回転硬化 (rotational hardening) により表現する方法は広く用いられてきた。ここでは、回転硬化を表現する際によく適用される [Sekiguchi and Ohta \(1977\)](#) と [Dafalias \(1986a\)](#) のモデルについて述べる。なお、他の降伏関数についての考察は [Taiebat and Dafalias \(2010\)](#) が詳しい。

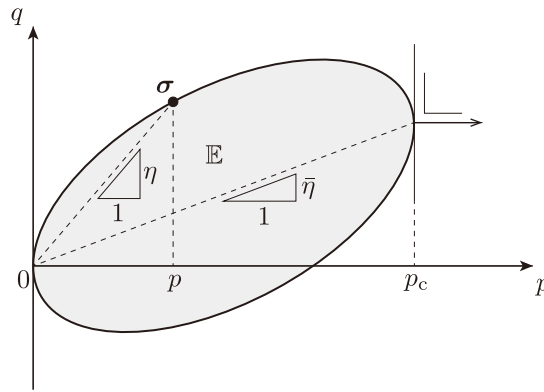


図 4.4: Sekiguchi and Ohta (1977) による降伏関数

4.2.1 Sekiguchi and Ohta (1977) モデル

降伏面を原点周りで回転させた降伏関数は、Sekiguchi and Ohta (1977) が初めて提案した。

$$f(\sigma, p_c, \bar{\eta}) = \frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2} + 1 - \frac{p_c}{p} \quad (4.7)$$

ここで、 $\eta = \text{dev}(\sigma)/p$ 、 $m = \sqrt{\frac{2}{3}}M$ である。 $\bar{\eta}$ は図 4.4 に示すように降伏関数の回転軸である^{*7}。

降伏関数 (4.7) より $\text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) = 0$ を解けば^{*8} 次式のような p - q 平面における限界状態線

^{*7} 図 4.4 における η 、 $\bar{\eta}$ はそれぞれ

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}\eta : \eta}, \quad \bar{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{\eta} : \bar{\eta}}$$

である。

^{*8} 降伏関数 (4.7) の p と η による微分はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p_c}{p^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} : \eta \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{p_c}{p} - \frac{2\eta : (\eta - \bar{\eta})}{m^2} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2} \end{aligned}$$

を得る。式 (4.7) より、圧密降伏応力 p_c は

$$p_c = p \left(\frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2} + 1 \right)$$

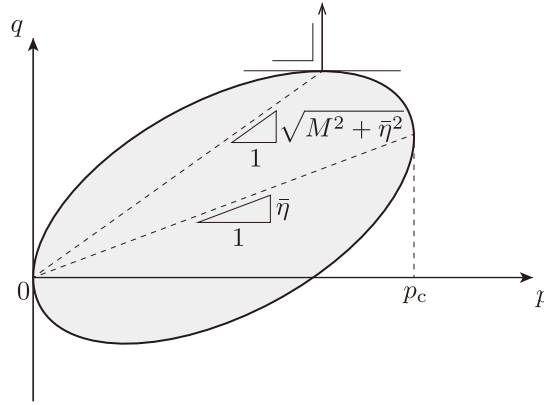


図 4.5: Sekiguchi and Ohta (1977) モデルにおける限界状態線 (p - q 平面)

η_{CSL} を得る。

$$\eta_{\text{CSL}} = \sqrt{M^2 + \bar{\eta}^2} \quad (4.8)$$

式 (4.8) は、限界状態線が回転軸 $\bar{\eta}$ と共に回転し一定ではないことを示している (図 4.5)。

次に、 ε_v - $\ln p$ 平面における限界状態線について考察する。式 (4.7) より、圧密降伏応力 p_c は

$$p_c = p \left(\frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2} + 1 \right) \quad (4.9)$$

と表されるから、等方便化則 (4.3) に代入し、限界状態において η と $\bar{\eta}$ は共軸であると仮定すれば、塑性体積ひずみ ε_v^p は以下のように表される⁹。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{\eta_{\text{CSL}} + \bar{\eta}}{\eta_{\text{CSL}}} \\ &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln D \end{aligned} \quad (4.10)$$

のように表されるから、最終的に降伏関数の応力による微分は以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\|\eta\|^2 - \|\bar{\eta}\|^2}{m^2} \right) \frac{1}{3} + \frac{1}{p} \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2}$$

⁹ η と $\bar{\eta}$ が共軸であるとき、塑性体積ひずみ ε_v^p は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p_c}{p_{\text{ref}}} \\ &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left[\frac{(\eta_{\text{CSL}} - \bar{\eta})^2}{M^2} + 1 \right] \end{aligned}$$

上式の第 2 項について、

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left[\frac{(\eta_{\text{CSL}} - \bar{\eta})^2}{M^2} + 1 \right] &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{2\bar{\eta}_{\text{CSL}}(\bar{\eta}_{\text{CSL}} - \bar{\eta})}{M^2} \\ &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{M^2}{\bar{\eta}_{\text{CSL}}(\bar{\eta}_{\text{CSL}} - \bar{\eta})} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} D(\bar{\eta}) &= \frac{\eta_{\text{CSL}} + \bar{\eta}}{\eta_{\text{CSL}}} \\ &= \frac{\sqrt{M^2 + \bar{\eta}^2} + \bar{\eta}}{\sqrt{M^2 + \bar{\eta}^2}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

とおいた。上式と式(4.4)を用いれば、限界状態における体積ひずみ ε_v は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \\ &= \tilde{\lambda} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - \frac{M^2}{6\alpha} - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln D \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\bar{\eta} \rightarrow \infty$ とすると $D(\bar{\eta}) \rightarrow 2$ になることから、式(4.12)においては

$$\lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \tilde{\lambda} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \frac{M^2}{6\alpha} \quad (4.13)$$

となる。このことから、回転軸 $\bar{\eta}$ の値が増加するにつれ、限界状態線は正規圧密線に徐々に近づき、超弾性構成則のパラメータ α と μ_{ref} (式(3.41)参照) によっては、一致もしくは上方にまで移動してしまうため注意が必要である。以上の限界状態線の議論をまとめたものを図4.6に示す。なお、図では簡単のため、超弾性構成則(3.41)のパラメータを $\alpha = 0$ 、 $\mu_{\text{ref}} > 0$ と設定している。

4.2.2 Dafalias (1986a) モデル

前述した Sekiguchi and Ohta (1977) モデルでは、降伏関数の回転に伴い、 p - q 平面における限界状態線が動くという問題点があった。Dafalias (1986a) はこの問題点を解消した以下のような降伏関数を提案した。

$$f(\sigma, p_c, \bar{\eta}) = \frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} + 1 - \frac{p_c}{p} \quad (4.14)$$

となるから、さらに第2項に注目して式展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{\eta_{\text{CSL}}(\bar{\eta}_{\text{CSL}} - \bar{\eta})} &= \frac{M^2}{\eta_{\text{CSL}}(\bar{\eta}_{\text{CSL}} - \bar{\eta})} \frac{\eta_{\text{CSL}} + \bar{\eta}}{\eta_{\text{CSL}} + \bar{\eta}} \\ &= \frac{\eta_{\text{CSL}} + \bar{\eta}}{\eta_{\text{CSL}}} \end{aligned}$$

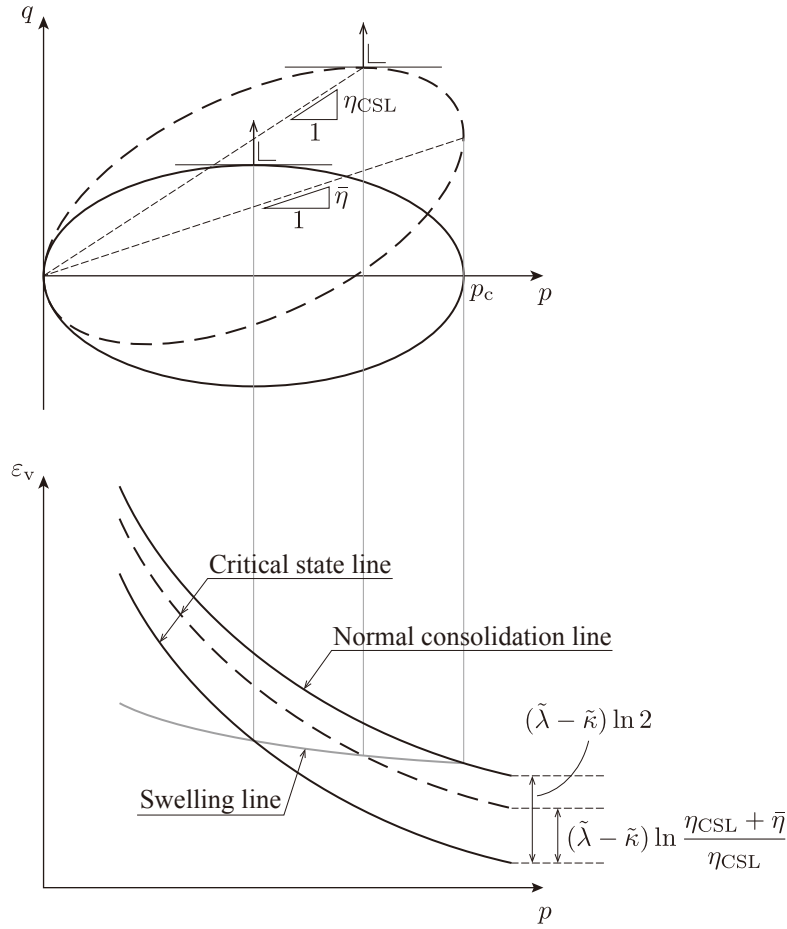


図 4.6: Sekiguchi and Ohta (1977) モデルにおける限界状態線 ($\alpha = 0, \mu_{\text{ref}} > 0$)

式 (4.14) より、 $\text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) = 0$ を解けば^{*10} $\eta_{\text{CSL}} = M$ となり、図 4.7 のように p - q 平面において限界状態線が一定であることが確認できる。回転軸 $\bar{\eta}$ は

$$\|\bar{\eta}\| < m \quad (\text{or } \bar{\eta} < M) \tag{4.15}$$

^{*10} 降伏関数 (4.14) の p と η による微分はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p_c}{p^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} : \eta \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{p_c}{p} - \frac{2\eta : (\eta - \bar{\eta})}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} \end{aligned}$$

を得る。式 (4.14) より、圧密降伏応力 p_c は

$$p_c = p \left(\frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} + 1 \right)$$

のように表されるから、最終的に降伏関数の応力による微分は以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\|\eta\|^2 - \|\bar{\eta}\|^2}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{2(\eta - \bar{\eta})}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2}$$

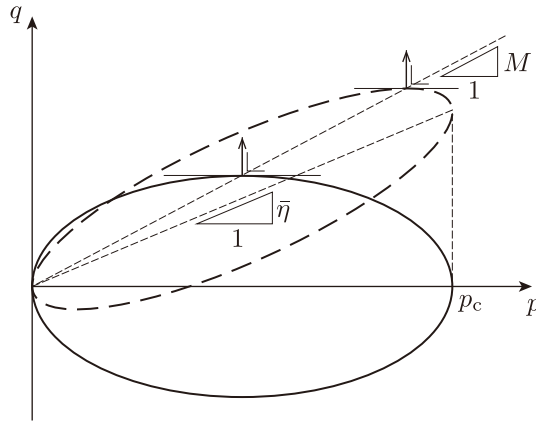


図 4.7: Dafalias (1986a) モデルにおける限界状態線 (p - q 平面)

を満足しなければならず、図 4.7 から分かるように、軸が限界状態線に近づくにつれ降伏関数の形状は徐々に扁平になる。

次に、 ε_v - $\ln p$ 平面における限界状態線について考察する。式 (4.14) より、圧密降伏応力 p_c は

$$p_c = p \left(\frac{\|\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2}{m^2 - \|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2} + 1 \right) \quad (4.16)$$

と表されるから、等方硬化則 (4.3) に代入し、限界状態において $\boldsymbol{\eta}$ と $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ は共軸であると仮定すれば、塑性体積ひずみ ε_v^p は以下のように表される。

$$\varepsilon_v^p = (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{M + \bar{\eta}}{M} \quad (4.17)$$

上式と式 (4.4) を用いれば、限界状態における体積ひずみ ε_v は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \\ &= \tilde{\lambda} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 - \frac{M^2}{6\alpha} - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{M + \bar{\eta}}{M} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\bar{\eta} \rightarrow M$ のとき $\frac{M + \bar{\eta}}{M} \rightarrow 2$ になることに注意すれば、式 (4.18) より次式を得る。

$$\lim_{\bar{\eta} \rightarrow M} \varepsilon_v = \tilde{\lambda} \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} - \frac{M^2}{6\alpha} \quad (4.19)$$

このことから、回転軸 $\bar{\eta}$ の値が M に近づくにつれ、限界状態線は正規圧密線に徐々に近づき、超弾性構成則のパラメータ α と μ_{ref} (式 (3.41) 参照) によっては、一致もしくは上方にまで移動してしまうため注意が必要である。以上の限界状態線の議論をまとめたものを図 4.8 に示す。なお、図では簡単のため、超弾性構成則 (3.41) のパラメータを $\alpha = 0$ 、 $\mu_{\text{ref}} > 0$ と設定している。

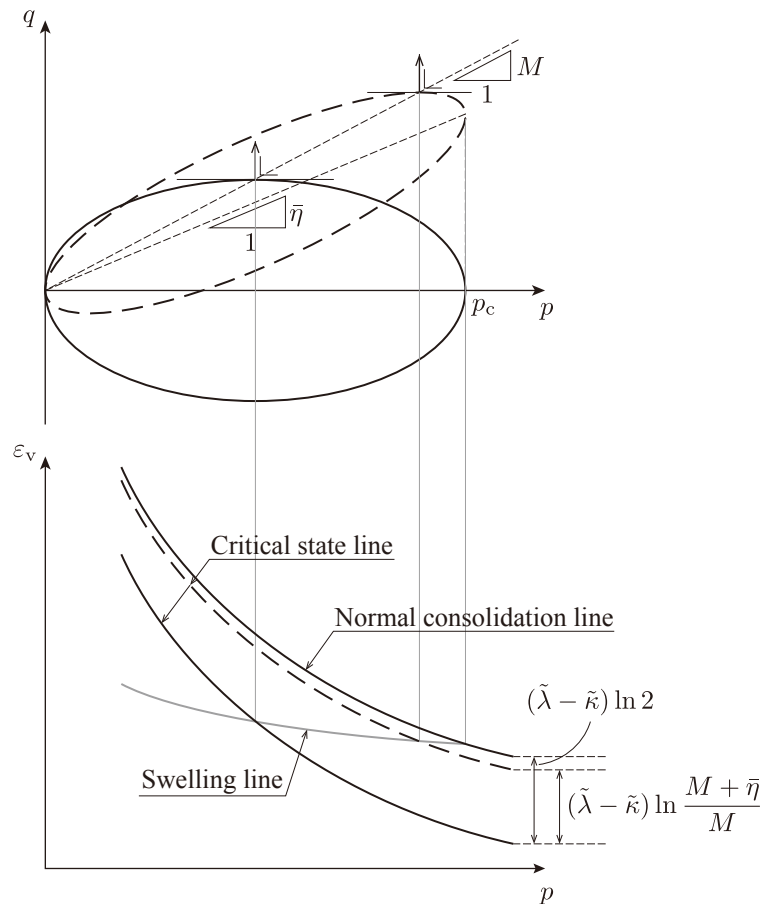


図 4.8: Dafalias (1986a) モデルにおける限界状態線 ($\alpha = 0$ 、 $\mu_{ref} > 0$)

4.3 超弾性塑性論に基づいた回転硬化型弾塑性モデル

本モデルでは、節 2.7.4 で取り扱った Armstrong and Frederick (1966) の移動硬化則を参考に超弾性塑性論に則った回転硬化型弾塑性モデルを定式化する。

4.3.1 背応力の定義

前述したように、土の応力誘導異方性を考慮するには、降伏面を原点周りに回転させる手法がよく用いられるが、この降伏面の中心点を背応力 χ と定義し、その構成則を適切に考慮すれば、等方硬化・回転硬化の両者を背応力 χ で表現することができる (図 4.9)。図 4.9 に示すように背応力 χ を定義した場合、等方硬化に関する応力変数 p_c 、回転硬化に関する変数 $\etā$ は背応力 χ を用いてそれぞれ以下のように表される。

$$p_c = 2\bar{p} = 2 \text{tr}(\chi)/3, \quad \etā = \text{dev}(\chi)/\bar{p} \tag{4.20}$$

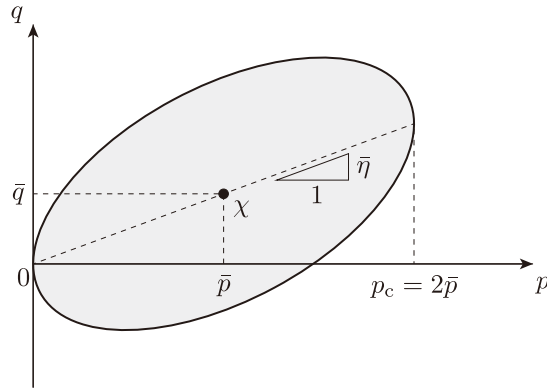


図 4.9: 提案モデルにおける背応力 χ の定義

本背応力を用いれば、Sekiguchi and Ohta (1977) による降伏関数 (4.7) は以下のように書き直すことができる。

$$f(\sigma, \chi) = \frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2} + 1 - \frac{2\bar{p}}{p} \quad (4.21)$$

また、同様にして Dafalias (1986a) による降伏関数 (4.14) は以下のように表される。

$$f(\sigma, \chi) = \frac{\|\eta - \bar{\eta}\|^2}{m^2 - \|\bar{\eta}\|^2} + 1 - \frac{2\bar{p}}{p} \quad (4.22)$$

本節で定式化する超弾性塑性論に則ったモデルでは、降伏関数 (4.21)、(4.22) の両者を用いることができるが、本研究では Dafalias (1986a) によるモデル (4.22) を採用する。

4.3.2 超弾性塑性論に基づいた定式化

次に、節 2.7.4 で取り扱った Armstrong and Frederick (1966) の移動硬化則を参考に、以下のような Helmholtz 自由エネルギーを定義する。

$$\psi(\varepsilon^e, \varepsilon^{Pe}) = W(\varepsilon^e) + \mathcal{H}(\varepsilon^{Pe}) \quad (4.23)$$

ここで、 W は超弾性、 \mathcal{H} は等方・回転硬化に関する自由エネルギーである。式 (4.23) より散逸関数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \\ &= \sigma : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varepsilon^{Pe}} : \dot{\varepsilon}^{Pe} \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \right) : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^P - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varepsilon^{Pe}} : \dot{\varepsilon}^{Pe} \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \right) : \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varepsilon^{Pe}} \right) : \dot{\varepsilon}^P + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varepsilon^{Pe}} : \dot{\varepsilon}^{Pi} \end{aligned} \quad (4.24)$$

上式より、次式のような超弾性構成則が導かれる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad (4.25)$$

また、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{Pe}$ と仕事に関して共役な応力変数として背応力 $\boldsymbol{\chi}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{\chi} = \nabla \mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Pe}) \quad (4.26)$$

ゆえに、散逸関数は最終的に以下のように表される。

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \boldsymbol{\chi} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{Pi} \quad (4.27)$$

散逸不等式 $\mathcal{D} \geq 0$ を満足する内部変数の発展則として以下を定義する。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (4.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{Pi} = \dot{\gamma} \frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\bar{m}} = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \quad (4.29)$$

ここで、 \bar{m} は正の材料パラメータで、後述するように降伏関数の回転軸の限界面を定義する。

式(4.28)、(4.29)が実際に散逸不等式 $\mathcal{D} \geq 0$ を満足するか確認する。降伏関数 f の応力 $\boldsymbol{\sigma}$ による微分を \mathbf{f} とおけば

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \mathbf{f}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\eta} \right) \frac{\mathbf{1}}{3} + \mathbf{f}_{\text{dev}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{f}_{\text{dev}} = \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (4.31)$$

としており、 $\text{tr}(\mathbf{f}_{\text{dev}}) = 0$ である。ゆえに、 $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \boldsymbol{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \boldsymbol{\sigma} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \mathbf{f}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\eta} \right) p + \mathbf{f}_{\text{dev}} : \mathbf{s} \\ &= p \frac{\partial f}{\partial p} \end{aligned} \quad (4.32)$$

と表される。一方、 $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \boldsymbol{\chi}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \boldsymbol{\chi} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \mathbf{f}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\eta} \right) \bar{p} + \mathbf{f}_{\text{dev}} : \bar{\mathbf{s}} \\ &= \bar{p} \left[\frac{\partial f}{\partial p} - \mathbf{f}_{\text{dev}} : (\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。降伏関数 (4.21)、(4.22) が

$$f = \frac{p}{2} f_{\text{dev}} : (\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) + 1 - p \frac{\partial f}{\partial p} \quad (4.34)$$

のように表されることと $\partial_p f = 2\bar{p}/p^2$ であることを用いれば、

$$\begin{aligned} f : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}) &= \frac{2\bar{p}}{p} \left[\frac{p}{2} f_{\text{dev}} : (\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) - \frac{p}{2} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p^2}{2\bar{p}} \frac{\partial f}{\partial p} \right] \\ &= \frac{2\bar{p}}{p} \left[\frac{p}{2} f_{\text{dev}} : (\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) + 1 - \frac{p}{2} \frac{\partial f}{\partial p} \right] \\ &= \frac{2\bar{p}}{p} \left(f + \frac{\bar{p}}{p} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

を得る。よって、Kuhn–Tucker 条件 $\dot{\gamma} f = 0$ を用いれば、上式より以下が導かれる。

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}) : \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|} \geq 0 \quad (4.36)$$

一方、 $\boldsymbol{\chi} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{Pi}$ に関しては、

$$\frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\bar{m}} : \boldsymbol{\chi} = \frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\bar{m}} : \bar{\boldsymbol{s}} \geq 0 \quad (4.37)$$

より、容易に $\dot{\gamma} \frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\bar{m}} : \boldsymbol{\chi}$ を得る。以上より、内部変数の発展則 (4.28)、(4.29) は、塑性散逸式 (4.27) の非負性を満足する。

4.3.3 等方・回転硬化則

ここでは、式 (4.23) における $\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Pe})$ の具体形を示し、等方・回転硬化則を定式化する。

図 2.5 を参考にすれば、 $\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Pe})$ は $W(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ と似た関数形であることが望ましい。そこで、本研究では等方・回転硬化則として \mathcal{H} の具体形を以下のように定義する。

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}_v^{Pe}, \boldsymbol{\varepsilon}_s^{Pe}) = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{2} p_{\text{ref}} \exp \Omega^P, \quad \Omega^P = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_v^{Pe}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} + \frac{3\beta\bar{m}}{2(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})} (\boldsymbol{\varepsilon}_s^{Pe})^2 \quad (4.38)$$

ここで、 β は回転軸の速度に関する材料パラメータ、 \bar{m} は後述する回転軸の限界面を決める材料パラメータである。式 (4.38) より、背応力の平均応力 \bar{p} と偏差応力 \bar{q} は以下のように表される。

$$\bar{p} = \frac{p_{\text{ref}}}{2} \exp \Omega^P \quad (4.39)$$

$$\bar{q} = \frac{3}{2} \beta \bar{m} p_{\text{ref}} \exp \Omega^P \boldsymbol{\varepsilon}_s^{Pe} = 3\beta \bar{m} \bar{p} \boldsymbol{\varepsilon}_s^{Pe} \quad (4.40)$$

また、不変量 \bar{p} 、 \bar{q} に基づく接線係数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} &= \mathbf{D}_{\text{vs}}^{\text{P}} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{v}}^{\text{Pe}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{s}}^{\text{Pe}} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \begin{bmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ \bar{q} & 3\beta\bar{m}((\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})\bar{p} + \bar{q}\varepsilon_{\text{s}}^{\text{Pe}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{v}}^{\text{Pe}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{s}}^{\text{Pe}} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\bar{p}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\eta} \\ \bar{\eta} & 3\beta\bar{m}(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) + \bar{\eta}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{v}}^{\text{Pe}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{s}}^{\text{Pe}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

一般ひずみ空間における表現

式 (4.38) を一般的なひずみ空間 ε^{Pe} で表現すると以下のように表される。

$$\mathcal{H}(\varepsilon^{\text{Pe}}) = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{2} p_{\text{ref}} \exp \Omega^{\text{P}}, \quad \Omega^{\text{P}} = \frac{\varepsilon_{\text{v}}^{\text{Pe}}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} + \frac{\beta\bar{m}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \mathbf{e}^{\text{Pe}} : \mathbf{e}^{\text{Pe}} \quad (4.42)$$

ゆえに、応力 χ は

$$\begin{aligned} \chi &= \nabla \mathcal{H}(\varepsilon^{\text{Pe}}) \\ &= \frac{p_{\text{ref}}}{2} \exp \Omega^{\text{P}} (\mathbf{1} + 2\beta\bar{m} \mathbf{e}^{\text{Pe}}) \\ &= \bar{p} (\mathbf{1} + 2\beta\bar{m} \mathbf{e}^{\text{Pe}}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

接線係数 \mathbf{D}^{P} は

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{P}} &= \nabla^2 \mathcal{H}(\varepsilon^{\text{Pe}}) \\ &= \left(\frac{\bar{p}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2\beta\bar{m}\bar{p}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} (\mathbf{e}^{\text{Pe}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}^{\text{Pe}} + 2\beta\bar{m} \mathbf{e}^{\text{Pe}} \otimes \mathbf{e}^{\text{Pe}}) + 2\beta\bar{m}\bar{p} \mathcal{D} \\ &= \frac{\bar{p}}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \bar{\eta} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{\eta} + \bar{\eta} \otimes \bar{\eta}) + 2\beta\bar{m}\bar{p} \mathcal{D} \end{aligned} \quad (4.44)$$

と表される。

補足エネルギー (Complementary energy)

式 (4.42) をルジャンドル変換すれば、以下のような補足エネルギー関数が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\chi) &= \chi : \varepsilon^{\text{Pe}} - \mathcal{H} \\ &= (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})\bar{p} \left(\ln \frac{2\bar{p}}{p_{\text{ref}}} - 1 \right) + \frac{\bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{s}}}{4\beta\bar{m}\bar{p}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

上式より、ひずみ ε^{Pe} は

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{Pe}} &= \nabla \tilde{\mathcal{H}}(\chi) \\ &= \frac{1}{3} \left[(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{2\bar{p}}{p_{\text{ref}}} - \frac{\bar{\eta} : \bar{\eta}}{4\beta\bar{m}} \right] \mathbf{1} + \frac{\bar{\eta}}{2\beta\bar{m}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

コンプライアンス接線係数 \mathbf{C}^P は

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^P &= \nabla^2 \tilde{\mathcal{H}}(\chi) \\ &= \frac{1}{9\bar{p}} \left[(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) + \frac{\bar{\eta} : \bar{\eta}}{2\beta\bar{m}} \right] \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{6\beta\bar{m}\bar{p}} (\bar{\eta} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{\eta}) + \frac{\mathcal{D}}{2\beta\bar{m}\bar{p}}\end{aligned}\quad (4.47)$$

のように表される。

等方硬化則

式 (4.28) より、塑性体積ひずみの非弾性部分 ε_V^{Pi} は常にゼロであるから、塑性体積ひずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_V^P = \varepsilon_V^{Pe} + \varepsilon_V^{Pi} = \varepsilon_V^{Pe} \quad (4.48)$$

ゆえに、純粋な等方変形を考えれば ($\varepsilon_S^{Pe} = 0$)、圧密降伏応力 p_c は以下のように塑性体積ひずみ ε_V^P で与えられる。

$$p_c = 2\bar{p} = p_{\text{ref}} \exp\left(\frac{\varepsilon_V^P}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}\right) \quad (4.49)$$

これは図 4.10 に示すように前述した修正 Cam-clay モデルにおける等方硬化則に一致する。

回転硬化則

式 (4.43) より、回転軸 $\bar{\eta}$ はひずみ ε^{Pe} を用いて以下のように与えられる。

$$\bar{\eta} = \frac{\text{dev}(\chi)}{\bar{p}} = 2\beta\bar{m}e^{Pe} \quad (4.50)$$

限界状態 ($\dot{\varepsilon}_V^P = 0$) では、式 (4.21) または (4.22) より、 \dot{e}^P は以下のように表される。

$$\dot{e}^P = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\|\eta - \bar{\eta}\|} \quad (4.51)$$

ゆえに、回転軸の速度 $\dot{\bar{\eta}}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\eta}} &= 2\beta\bar{m}(\dot{e}^P - \dot{e}^{Pi}) \\ &= 2\beta\dot{\gamma} \left(\bar{m} \frac{\eta - \bar{\eta}}{\|\eta - \bar{\eta}\|} - \bar{\eta} \right)\end{aligned}\quad (4.52)$$

ゆえに、回転軸 $\bar{\eta}$ は図 4.11 に示すように回転し、やがて飽和する。この性質は Hashiguchi and Chen (1998) により提案された回転硬化則と同様である。

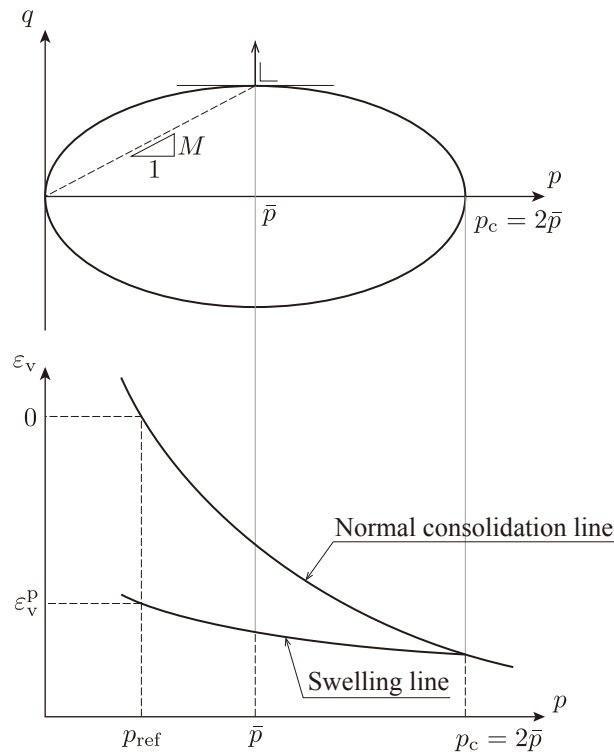


図 4.10: 提案モデルにおける等方硬化則

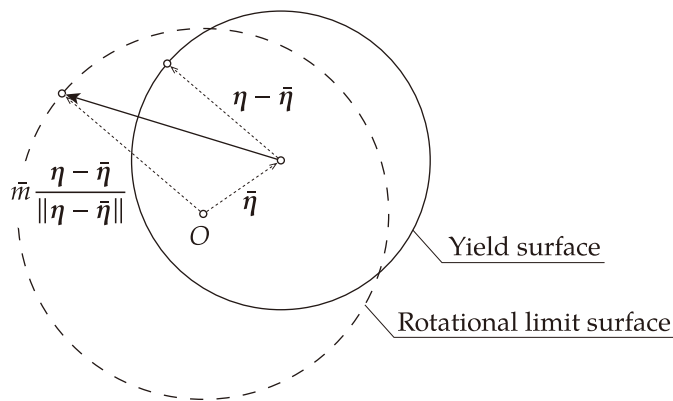


図 4.11: 提案モデルにおける回転硬化則

プログラムコードへの実装

硬化則 (4.42) とその補足エネルギー (4.45) のプログラムコードへの実装例をコード 4.1、4.2 に示す。また、コード 0.1 で示した自動微分 (automatic differentiation) を用いれば、以下のようにより簡単にそれらを算出することができる。

```
julia> include("automatic_differentiation_functions.jl")
∇² (generic function with 2 methods)
```



```

julia> include("hardening.jl")
∇²H̃ (generic function with 1 method)

julia> εᵖᵉ = rand(SymmetricTensor{2,3}) * 0.1
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
 0.0393974  0.0966253  0.0785266
 0.0966253  0.00408036 0.0622029
 0.0785266  0.0622029  0.0834627

julia> ∇H(εᵖᵉ) ≈ ∇(H, εᵖᵉ) # χ = ∇H
true

julia> ∇²H(εᵖᵉ) ≈ ∇²(H, εᵖᵉ) # Dᵖ = ∇²H
true

julia> χ = ∇(H, εᵖᵉ)
3×3 Tensors.SymmetricTensor{2,3,Float64,6}:
 4.83335e8  3.67476e9  2.98645e9
 3.67476e9 -8.59812e8  2.36564e9
 2.98645e9  2.36564e9  2.15918e9

julia> ∇H̃(χ) ≈ ∇(H̃, χ) # εᵖᵉ = ∇H̃
true

julia> ∇²H̃(χ) ≈ ∇²(H̃, χ) # Cᵖ = ∇²H̃
true

julia> χ ⊠ εᵖᵉ ≈ H(εᵖᵉ) + H̃(χ)
true

```

4.3.4 弾塑性係数

超弾性構成則および等方・回転硬化則より、応力 σ 、背応力 χ の速度はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \nabla^2 W : \dot{\epsilon}^e \\
 &= \nabla^2 W : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\
 &= \nabla^2 W : (\dot{\epsilon} - \dot{\gamma} N)
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi} &= \nabla^2 \mathcal{H} : \dot{\epsilon}^{pe} \\
 &= \nabla^2 \mathcal{H} : (\dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^{pi}) \\
 &= \nabla^2 \mathcal{H} : \dot{\gamma} (N - \bar{N})
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

```

using Tensors

const δ = one(SymmetricTensor{2,3})
const Isym = one(SymmetricTensor{4,3})
const D = Isym - 1/3 * δ ⊗ δ

const κ = 0.01
const λ = 0.1
const β = 40.0
const m̄ = 0.8
const p_ref = 98.0

function H(εpe::SymmetricTensor{2,3})
    εpev = trace(εpe)
    epe = dev(εpe)
    Ω = εpev/(λ-κ) + β*m̄/(λ-κ) * (epe ⊠ epe)
    return (λ-κ)/2 * p_ref * exp(Ω)
end

function ∇H(εpe::SymmetricTensor{2,3})
    εpev = trace(εpe)
    epe = dev(εpe)
    Ω = εpev/(λ-κ) + β*m̄/(λ-κ) * (epe ⊠ epe)
    p = p_ref / 2 * exp(Ω)
    return p * (δ + 2β*m̄*epe)
end

function ∇2H(εpe::SymmetricTensor{2,3})
    χ = ∇H(εpe)
    p = mean(χ)
    η = dev(χ) / p
    return p/(λ-κ)*(δ ⊗ δ + η ⊗ δ + δ ⊗ η + η ⊗ η) + 2β*m̄*p*D
end

```

ソースコード 4.1: hardening.jl (part 1)

整合条件 \dot{f} より、

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \chi} : \dot{\chi} \\
 &= \mathbf{f} : \nabla^2 W : (\dot{\epsilon} - \dot{\gamma} \mathbf{N}) + \bar{\mathbf{f}} : \nabla^2 \mathcal{H} : \dot{\gamma} (\mathbf{N} - \bar{\mathbf{N}}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

ここで、 $\partial_{\chi} f = \bar{\mathbf{f}}$ とおいた。ゆえに、塑性乗数 $\dot{\gamma}$ は以下のように表される。

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{f} : \nabla^2 W}{\mathbf{f} : \nabla^2 W : \mathbf{N} - \bar{\mathbf{f}} : \nabla^2 \mathcal{H} : (\mathbf{N} - \bar{\mathbf{N}})} : \dot{\epsilon} \tag{4.56}$$

```

function H̃(χ::SymmetricTensor{2,3})
    p = mean(χ)
    s = dev(χ)
    return (λ-κ)*p*(log(2p/p_ref) - 1) + s ⊠ s / (4β*m̄*p)
end

function ∇H̃(χ::SymmetricTensor{2,3})
    p = mean(χ)
    η = dev(χ) / p
    return ((λ-κ)*log(2p/p_ref) - η ⊠ η / (4β*m̄)) * δ/3 + η / (2β*m̄)
end

function ∇²H̃(χ::SymmetricTensor{2,3})
    p = mean(χ)
    η = dev(χ) / p
    return 1/9p * ((λ-κ) + η ⊠ η / (2β*m̄)) * δ ⊗ δ -
           1/(6β*m̄*p) * (η ⊗ δ + δ ⊗ η) +
           D / (2β*m̄*p)
end

```

ソースコード 4.2: hardening.jl (part 2)

よって、次式のような弾塑性係数を得る。

$$\dot{\sigma} = \left[\nabla^2 W - \frac{\nabla^2 W : N \otimes f : \nabla^2 W}{f : \nabla^2 W : N - \bar{f} : \nabla^2 \mathcal{H} : (N - \bar{N})} \right] : \dot{\varepsilon} \quad (4.57)$$

4.3.5 リターンマッピング

ここでは、提案モデルにおけるリターンマッピング法を定式化する。リターンマッピングには、クローゼストポイント法 (closest point method) を用いる。

Elastic predictor

与えられたひずみ増分 $\Delta \varepsilon$ に対して弾性変形のみが生じる (freezing plastic flow) と仮定すれば以下を得る。

$$\varepsilon^{p, \text{tr}} = \varepsilon_n^p \quad (4.58)$$

$$\varepsilon^{p_i, \text{tr}} = \varepsilon_n^{p_i} \quad (4.59)$$

このとき、 σ^{tr} は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{tr}} &= \nabla W(\varepsilon^{e, \text{tr}}) \\ &= \nabla W(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{p, \text{tr}}) \\ &= \nabla W(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \end{aligned} \quad (4.60)$$

一方、 χ^{tr} は次式となる。

$$\begin{aligned}\chi^{\text{tr}} &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pe, tr}}) \\ &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{P, tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pi, tr}}) \\ &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{P}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Pi}})\end{aligned}\quad (4.61)$$

これら試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$ 、 χ^{tr} を用いれば、試行降伏関数が以下のように得られる。

$$f^{\text{tr}} = f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}, \chi^{\text{tr}}) \quad (4.62)$$

$f^{\text{tr}} \leq 0$ の際は、試行弾性状態における各変数の値がそのまま更新値となる。

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)^{\text{tr}} \quad (4.63)$$

一方、 $f^{\text{tr}} > 0$ のときは、塑性変形が生じているため、後述する Plastic corrector により応力を緩和させ、降伏面上に引き戻す必要がある。

Plastic corrector

クローゼストポイント法 (closest point method) では、塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{P}}$ の発展則 (4.28) と塑性ひずみの非弾性部分 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pi}}$ の発展則 (4.29) に後退オイラー法が適用される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \Delta\gamma \mathbf{N} \quad (4.64)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{Pi}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Pi}} = \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}} \quad (4.65)$$

ゆえに、リターンマッピングにおける未知数 \boldsymbol{x} と満足すべき方程式 \boldsymbol{r} は以下のように設定される。

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\chi} \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{P}} - \Delta\gamma \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{Pi}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Pi}} - \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}} \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

本非線型方程式 $\boldsymbol{r} = 0$ を数値的に解くために Newton-Raphson 法を適用する。

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_k) + \frac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \delta \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad (4.67)$$

$\delta \boldsymbol{x}$ について解けば

$$\delta \boldsymbol{x}_k = - \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}} \right] \cdot \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_k) = -\boldsymbol{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_k) \quad (4.68)$$

を得る。 \mathbf{x}_{k+1} は $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k$ により更新され、 $r < \text{TOL}$ が満足すれば求解完了となる。Jacobian 行列 J の具体形は以下のように表される。

$$J = - \begin{bmatrix} \nabla^2 W + \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} & \Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}}{\partial \chi} & N \\ \nabla^2 W & \nabla^2 \mathcal{H} + \Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}}{\partial \chi} & \bar{N} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \frac{\partial f}{\partial \chi} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

4.3.6 整合接線係数

ここでは、前節で定式化したリターンマッピング法に整合した整合接線係数を解析的に導出する。

超弾性構成則 (4.25) を微分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} d\sigma &= \nabla^2 W : d\epsilon^e \\ &= \nabla^2 W : (d\epsilon - d\epsilon^p) \end{aligned} \quad (4.70)$$

一方、等方・回転硬化則 (4.26) を微分すれば背応力 χ については以下のように表される。

$$\begin{aligned} d\chi &= \nabla^2 \mathcal{H} : d\epsilon^p \\ &= \nabla^2 \mathcal{H} : (d\epsilon^p - d\epsilon^{pi}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

式 (4.64)、(4.65) を微分すればそれぞれ以下のように表される。

$$d\epsilon^p = \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} : d\sigma + \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} : d\chi + d\Delta\gamma N \quad (4.72)$$

$$d\epsilon^{pi} = \Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}}{\partial \chi} : d\chi + d\Delta\gamma \bar{N} \quad (4.73)$$

式 (4.72) を式 (4.70) に代入すれば次式を得る。

$$\Xi^{-1} : d\sigma + \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} : d\chi = d\epsilon - d\Delta\gamma N \quad (4.74)$$

ここで、

$$\Xi = \left[\nabla^2 \tilde{W} + \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} \right]^{-1} \quad (4.75)$$

とおいた。一方、式 (4.72)、式 (4.73) を式 (4.71) に代入すれば

$$\Xi^{p-1} : d\chi - \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} : d\sigma = d\Delta\gamma (N - \bar{N}) \quad (4.76)$$

を得る。ここで、

$$\mathbf{\Xi}^p = \left[\nabla^2 \tilde{\mathcal{H}} + \Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}}{\partial \chi} - \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} \right]^{-1} \quad (4.77)$$

とおいた。式 (4.76) を式展開すれば

$$\Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} : d\chi - \Delta\gamma^2 \frac{\partial N}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : \frac{\partial N}{\partial \sigma} : d\sigma = d\Delta\gamma \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : (N - \bar{N}) \quad (4.78)$$

を得るから、式 (4.74) に代入すれば、リターンマッピング法に整合した応力増分式が以下のように導かれる。

$$d\sigma = \bar{\mathbf{\Xi}} : (d\epsilon - d\Delta\gamma \mathcal{N}) \quad (4.79)$$

ここで、以下を用いている。

$$\bar{\mathbf{\Xi}} = \left[\mathbf{\Xi}^{-1} + \Delta\gamma^2 \frac{\partial N}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : \frac{\partial N}{\partial \sigma} \right]^{-1} \quad (4.80)$$

$$\mathcal{N} = N + \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : (N - \bar{N}) \quad (4.81)$$

式 (4.79) を (4.76) に代入すれば次式を得る。

$$d\chi = \mathbf{\Xi}^p : \left[\Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : (d\epsilon - d\Delta\gamma \mathcal{N}) + d\Delta\gamma (N - \bar{N}) \right] \quad (4.82)$$

式 (4.79)、(4.82) を整合条件 $df = 0$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \chi} : d\chi \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : (d\epsilon - d\Delta\gamma \mathcal{N}) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : \left[\Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : (d\epsilon - d\Delta\gamma \mathcal{N}) + d\Delta\gamma (N - \bar{N}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

となるから、塑性乗数 $d\Delta\gamma$ は以下のように表される。

$$d\Delta\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : \mathcal{N} + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \chi} : \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : \mathcal{N} - \frac{\partial f}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : (N - \bar{N})} : d\epsilon \quad (4.84)$$

よって、上式を式 (4.79) に代入すれば、最終的に以下のような整合接線係数を得る。

$$d\sigma = \left[\bar{\mathbf{\Xi}} - \bar{\mathbf{\Xi}} : \mathcal{N} \otimes \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : \mathcal{N} + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \chi} : \frac{\partial N}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{\Xi}} : \mathcal{N} - \frac{\partial f}{\partial \chi} : \mathbf{\Xi}^p : (N - \bar{N})} \right] : d\epsilon \quad (4.85)$$

上式の整合接線係数 \bar{D}^{ep} は、 $\Delta\gamma \rightarrow 0$ のとき、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow \nabla^2 W$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}} \rightarrow \nabla^2 \mathcal{H}$ 、 $\mathcal{N} \rightarrow N$ であることに注意すれば、

$$\bar{D}^{\text{ep}} \rightarrow \nabla^2 W - \frac{\nabla^2 W : N \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \nabla^2 W}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \nabla^2 W : N - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} : \nabla^2 \mathcal{H} : (N - \bar{N})} \quad (4.86)$$

となり、速度型の弾塑性接線係数 (4.57) に一致する。

上述した解析的に整合接線係数を導く方法は、煩雑な式展開が要求され、さらに構成則が複雑になった際は導出がより困難となる。一方で、節 2.6.1 で述べたリターンマッピングの際のヤコビアン行列 J を援用する手法を用いれば容易に導くことが可能である。

リターンマッピングの際に未知数としたベクトル \boldsymbol{x} は、与えられたひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ に対して算出される変数群であるため、以下のように書き直すことができる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.87)$$

満足すべき方程式群、すなわち残差ベクトル \boldsymbol{r} は

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad (4.88)$$

と書くことができるため、その全微分を用いれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_x + \left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}} + J \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.89)$$

ゆえに、 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ について解けば

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right\} = -\boldsymbol{A} \cdot \left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_x = - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{31} + \boldsymbol{A}_{32} \end{array} \right\} \quad (4.90)$$

を得る。ここで、 $\boldsymbol{A} = J^{-1}$ とおいた。また、 $\left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_x$ については以下を用いた。

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_x = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.91)$$

よって、 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ の1成分 $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ が求めるべき整合接線係数であり、前述した手法に比べ非常に容易に得ることができる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}) \quad (4.92)$$

なお、ヤコビアン行列 J はリターンマッピングにおける収束計算が完了した時のものを用いるため、 J^{-1} の存在は保障される。

4.3.7 下負荷面モデルの適用

ここでは、提案モデルに下負荷面 (Hashiguchi and Ueno, 1977) の概念を適用する方法について述べる。降伏関数 (4.22) に下負荷面を適用すれば以下のような降伏関数を得る。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}, R) = \frac{\|\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2}{m^2 - \|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2} + 1 - \frac{2R\bar{p}}{p} \quad (4.93)$$

ここで、 $1/R$ は過圧密比を示す。

R の発展則は形式的に以下のように表される。

$$\dot{R} = U(R)\|\boldsymbol{\varepsilon}^p\| = U(R)\dot{\gamma} \quad (4.94)$$

ここで、関数 $U(R)$ は R に関して単調に減少する関数で以下を満足する必要がある。

$$U(0) = \infty, \quad U(R) > 0 \text{ for } 0 < R < 1, \quad U(1) = 0 \quad (4.95)$$

最も単純な $U(R)$ の具体形として次式が提案されている (Hashiguchi, 1989)。

$$U(R) = -u \ln R \quad (4.96)$$

しかし、上式を用いた場合、式 (4.94) は解析的に積分を行うことができない。そこで、本研究では Hashiguchi (2009) によって提案された以下の関数を用いる。

$$U(R) = u \cot\left(\frac{\pi R}{2}\right) \quad (4.97)$$

上式は、式 (4.94) のもと以下のように解析的に積分可能である。

$$R = \frac{\pi}{2} \cos^{-1} \left[\cos\left(\frac{\pi R_n}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi u}{2} \Delta\gamma\right) \right] \quad (4.98)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{2}{\pi u} \ln \frac{\cos\left(\frac{\pi R_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi R}{2}\right)} \quad (4.99)$$

解析的に積分可能なことで、数値解析の安定性が増すだけでなく、リターンマッピングの際には、式が増えることがなく、下負荷面を適用していない場合と同様の形式で Plastic corrector が実行可能となる。

リターンマッピングの試行弾性状態における R は以下となる。

$$R^{\text{tr}} = R_n \quad (4.100)$$

この試行値を用いて試行降伏関数を算出する。

$$f^{\text{tr}} = f(\sigma^{\text{tr}}, \chi^{\text{tr}}, R^{\text{tr}}) \quad (4.101)$$

$f^{\text{tr}} \leq 0$ の場合は R 以外の変数は、試行値がそのまま更新値となる。一方、 R は降伏関数 $f(\sigma, \chi, R) = 0$ が満足するように R を算出する。一方、 $f^{\text{tr}} > 0$ の時は、通常のリターンマッピングと同様に Plastic corrector を実施し、繰り返し計算における各ステップの R については、上述したように塑性乗数増分 $\Delta\gamma^{(k+1)}$ より厳密に $R^{(k+1)}$ が求まる。

4.3.8 数値計算例

ここでは、前節までに述べた回転硬化型弾塑性モデルの数値計算例を示す。

等方圧密解析

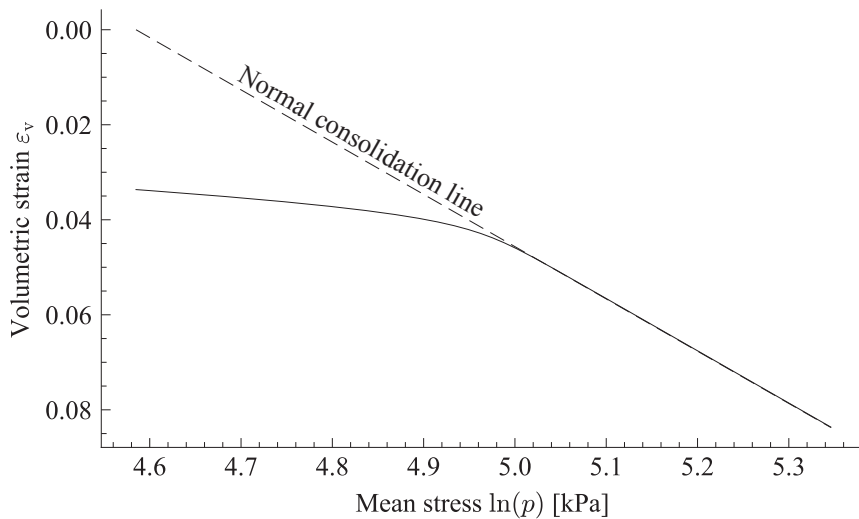
等方圧密解析を行い節 4.3.3 で示した等方硬化則が正しく得られるか確認する。解析では、初期状態を $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 98 \text{ kPa}$ として、等方的に圧縮し体積ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_v = 0.05$ を与える。用いたパラメータは表 4.1 に示す。図 4.12 に等方圧密解析における体積ひずみ ε_v -平均応力 $\ln p$ 関係を示す。図より、節 4.3.3 で述べたように Cam-clay モデル (Schofield and Wroth, 1968)、もしくは修正 Cam-clay モデル (Burland, 1965; Roscoe and Burland, 1968) で通常用いられる硬化則 (4.3) と同様の正規圧密線 (Normal consolidation line) が得られることがわかる。

ひずみ制御繰り返し単純せん断解析

ここでは、ひずみ制御による繰り返し単純せん断シミュレーションを行う。初期状態を $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 350 \text{ kPa}$ として、ひずみ増分 $\varepsilon_{12} = \pm 0.008$ を総ステップ数 120 と 1200 のもと均等に与える (3 サイクル)。解析で用いたパラメータは表 4.1 において $u = 0.96$ としている。図 4.13 に、過圧密比 OCR を $\text{OCR} = 1, 2, 5$ とした際の応力経路と偏差応力 q -偏差ひずみ ε_s 関係を示す。図より、過圧密比が小さい時は偏差応力 q が急激に低下し、剛性が低くなり、過圧密比が大きい時は偏差応力 q があまり低下せず、弾性的な挙動を示す。また図 4.13 より、リターンマッピングの際のステップ数を 30 とした際も、300 ステップ数と遜色ない結果が得られている。

Parameter and symbol	Value
Reference mean stress p_{ref}	98.0 kPa
Elastic shear modulus μ_{ref}	6000.0 kPa
Elastic volumetric–deviatoric coupling parameter α	40.0
Elastic compressibility index $\tilde{\kappa}$	0.01
Elastoplastic compressibility index $\tilde{\lambda}$	0.11
Critical state stress ratio M	1.1
Stress ratio of rotational limit surface \bar{M}	1.0
Evolution parameter of subloading surface u	600.0
Parameter of anisotropy β	18.0

表 4.1: 等方圧密解析で用いた材料パラメータ

図 4.12: 等方圧密解析における ε_v - $\ln p$ 関係

応力制御繰り返し単純せん断解析

ここでは、[Borja et al. \(2001\)](#) を参考にして、応力制御による繰り返し単純せん断シミュレーションを行う。 $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ のもと、以下に示すような逆問題 $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ を考える。

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \zeta \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (4.102)$$

ここで、 $\zeta \gg 0$ は解析パラメータ、 $\boldsymbol{\sigma}^*$ は与える応力である。パラメータ ζ は、条件 $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ を満足するような十分大きな値である必要があり、本解析では $\zeta = 10^8$ kPa を

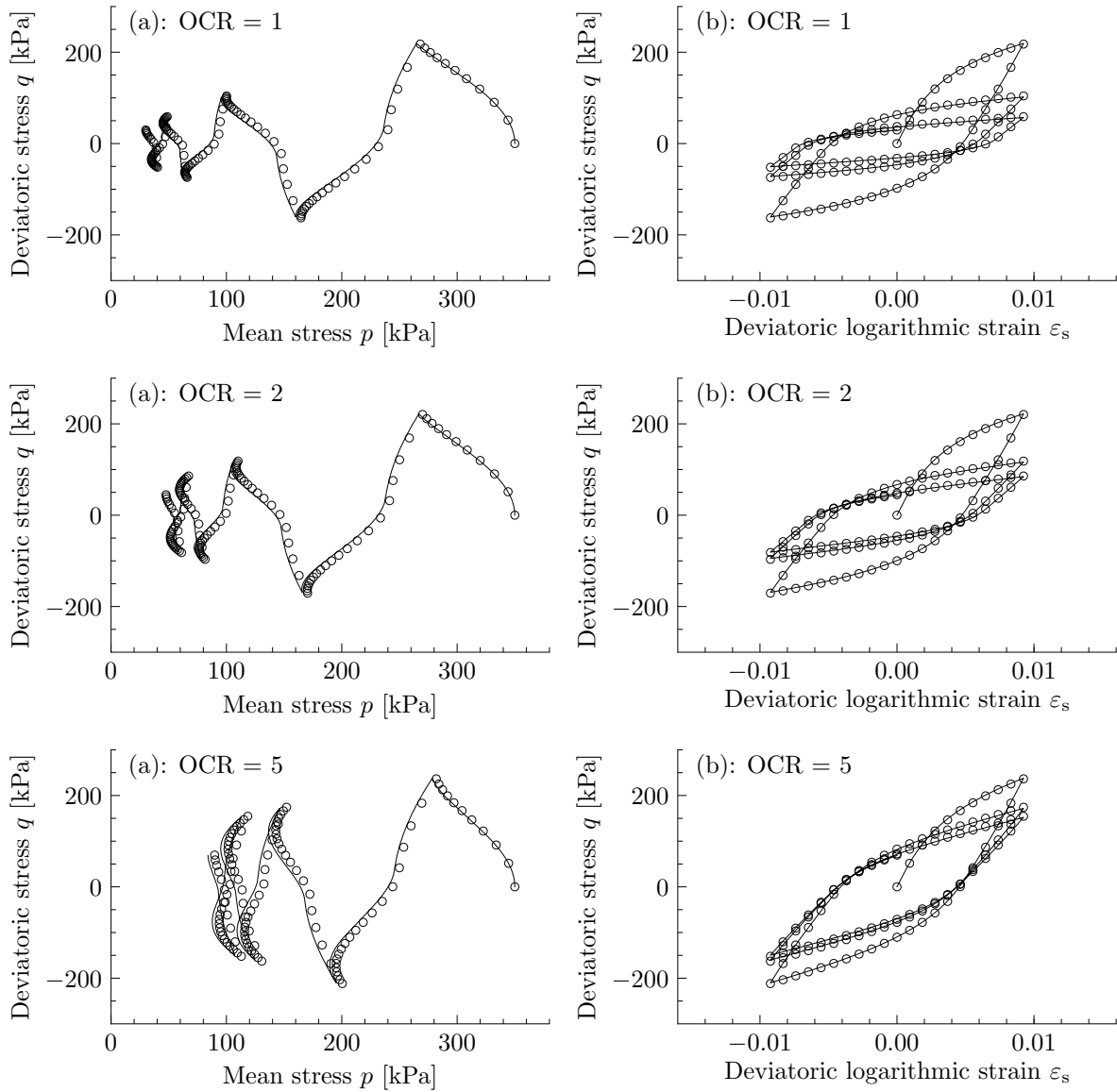


図 4.13: OCR = 1, 2, 5 の際のひずみ制御による繰り返し単純せん断シミュレーションの (a) 応力経路と (b) 偏差応力 q -偏差ひずみ ε_s 関係 (ライン: 1200 steps、プロット: 120 steps)

用いる。非線形問題 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ は、Newton-Raphson 法を用いて数値的に解を得ることが出来る。

$$d\varepsilon^{(k)} = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\varepsilon^{(k)})}{\partial \varepsilon} \right]^{-1} \cdot \mathbf{R}^{(k)} \quad (4.103)$$

ここで、

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\varepsilon^{(k)})}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \sigma(\varepsilon^{(k)})}{\partial \varepsilon} - \zeta \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (4.104)$$

であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ によって更新される。 $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ は、Newton-Raphson 法本来の2次収束を得るには、整合接線係数（節 4.3.6 参照）を用いる必要がある。ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は $\|\mathbf{R}\| < \text{TOL}$ が満足されるまで更新される。なお、本研究では $\text{TOL} = 10^{-9}$ を用いる。

初期状態を $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 350 \text{ kPa}$ として、応力増分 $\sigma_{12}^* = \pm 40 \text{ kPa}$ を総ステップ数 360 と 3600 のもと均等に与える（9 サイクル）。解析で用いたパラメータは表 4.1 において $u = 0.96$ としている。図 4.14 に、過圧密比 OCR を $\text{OCR} = 1, 2, 5$ とした際の応力経路と偏差応力 q -偏差ひずみ ε_s 関係を示す。図の応力経路より、 $\text{OCR} = 1$ のとき、平均応力 p は繰り返し载荷に伴い徐々に低下し、最終的にサイクリックモビリティが生じている。また、偏差応力 q -偏差ひずみ ε_s 関係においては、サイクリックモビリティの発生に伴い、大きな偏差ひずみが生じている。これらの挙動は、過圧密比 OCR の増加に伴い徐々に観測できなくなり、 $\text{OCR} = 5$ のときは、サイクリックモビリティが生じず、偏差ひずみの値も小さい。また図 4.14 より、リターンマッピングの際のステップ数を 90 とした際も、900 ステップ数と遜色ない結果が得られている。

図 4.15 に、90、450、900 ステップ解析の最終载荷での繰り返し計算の収束速度を示す。図より、リターンマッピングにおける局所的な繰り返し計算と全体繰り返し計算の両者において Newton-Raphson 法の2次収束を得ていることがわかる。

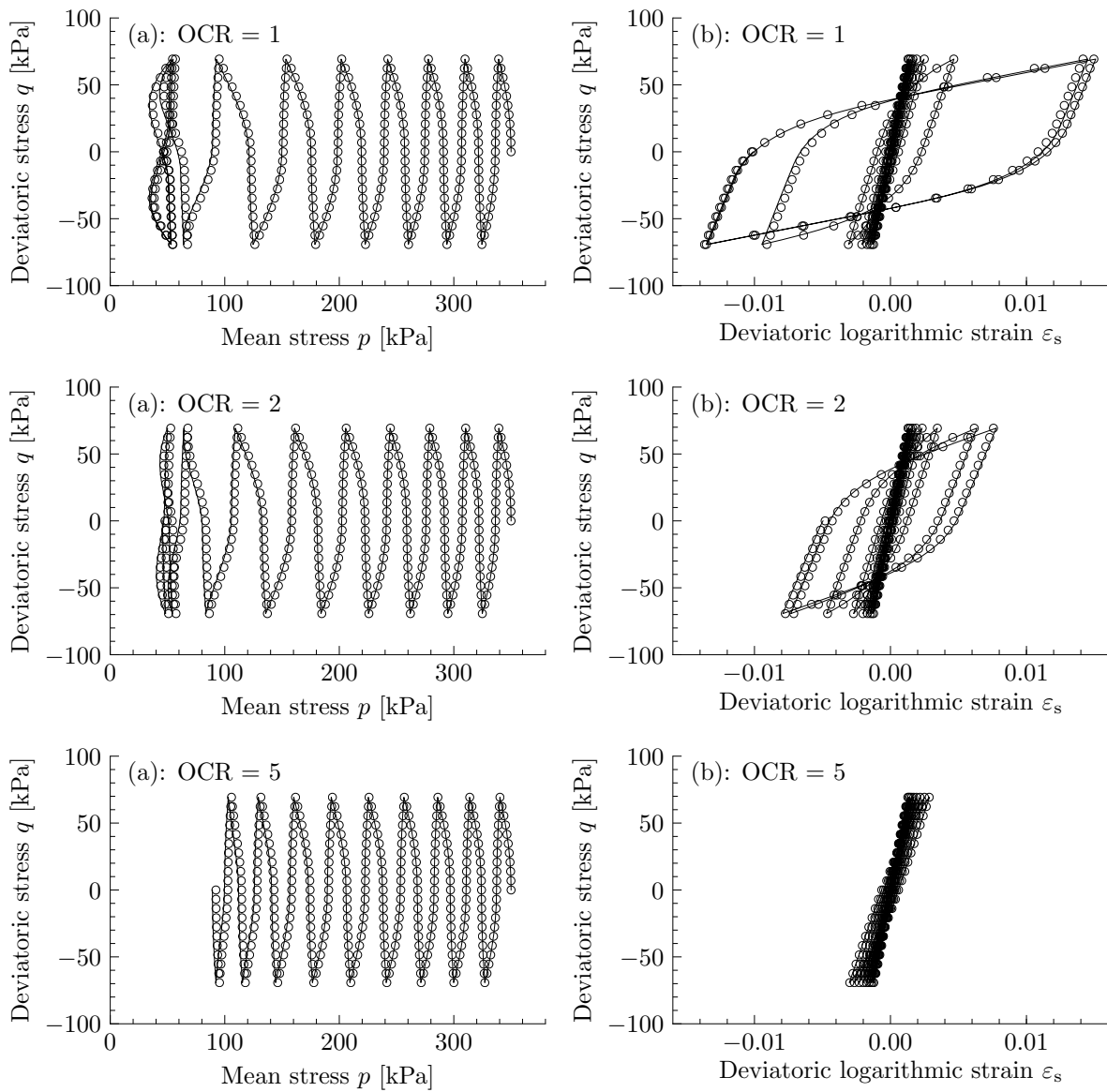


図4.14: OCR = 1, 2, 5 の際の応力制御による繰り返し単純せん断シミュレーションの (a) 応力経路と (b) 偏差応力 q -偏差ひずみ ϵ_s 関係 (ライン: 900 steps、プロット: 90 steps)

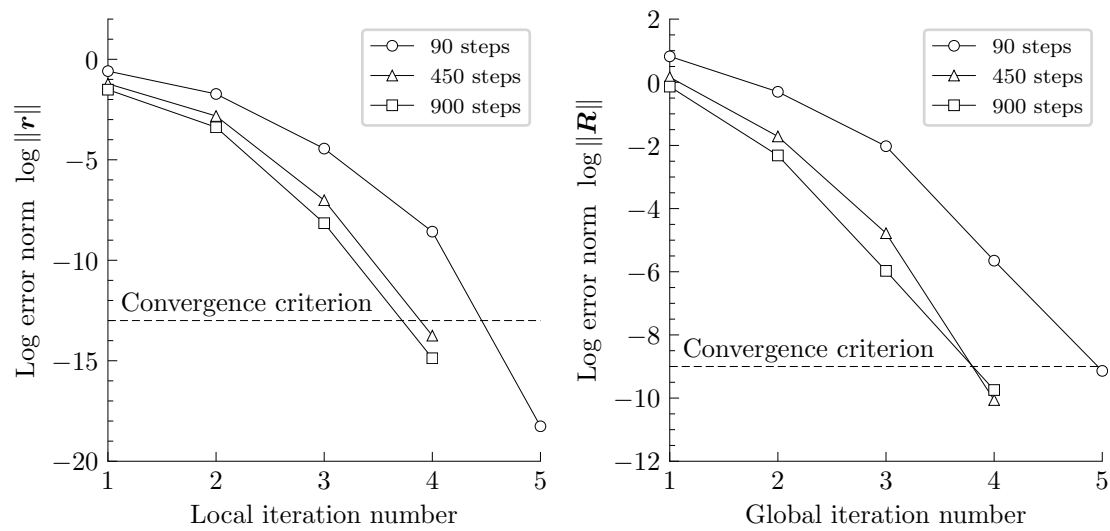


図 4.15: 90、450、900 ステップ応力制御による繰り返し単純せん断シミュレーションの最終載荷での繰り返し計算の収束速度

第5章

結論

本稿では、地震などの繰り返し载荷を受けた地盤の挙動を表現する際に重要な土の応力誘導異方性を表現するために、熱力学的制約条件を満足した超弾性塑性理論に基づく回転硬化型弾塑性モデルを提案した。本定式化では、Armstrong–Frederick の移動硬化則 (Armstrong and Frederick, 1966) を参考にして、塑性体積ひずみ ϵ^P をさらに、弾性部分 ϵ^{Pe} と非弾性部分 ϵ^{Pi} に加算分解した。弾性部分 ϵ^{Pe} はさらに背応力 χ と関係付けられ、その平均応力 \bar{p} は等方硬化則、応力比 $\bar{\eta}$ は回転硬化則を記述する。これにより、提案モデルは熱力学的制約条件（塑性散逸が非負）を満足する形で定式化された。

新たな超弾性構成則として、Houlsby et al. (2005) により提案された超弾性構成則を修正したモデルを提案した。具体的には、せん断弾性係数に対して拘束圧依存だけでなく、定数部分 μ_{ref} も考慮することで、より土の弾性挙動を柔軟に表現することが可能になった。本超弾性構成則は、(1) これまで広く用いられてきた超弾性構成則 Borja et al. (1997) の問題点であった弾性接線係数が不定となる問題が解消される、(2) 補足エネルギー関数 (complementary energy function) を導くことができ、Helmholtz 自由エネルギーによる応力–弾性ひずみ関係の逆関係 $\epsilon^e(\sigma)$ が得られるなどの利点を有する。

等方硬化および回転硬化を記述する背応力 χ と塑性ひずみの弾性部分 ϵ^{Pe} の関係を Armstrong–Frederick の移動硬化則 (Armstrong and Frederick, 1966) に整合する形^{*11} で定式化した。これにより、提案した等方・回転硬化則は、力学的背景が明瞭であるだけでなく、超弾性構成則の利点をそのまま受け継いでいる。提案した等方・回転硬化則の特徴として、等方硬化則については従来から広く用いられている Cam-clay モデル (Schofield and Wroth, 1968) や修正 Cam-clay モデル (Burland, 1965; Roscoe and Burland, 1968) の等方硬化則 (4.3) と同等の形式で得られた。回転硬化則については、その回転方向が

^{*11} χ – ϵ^{Pe} 関係が超弾性構成則、すなわち σ – ϵ^e 関係と同等の性質を持つ。これは、Armstrong–Frederick の移動硬化則のレオロジーモデル (図 2.10) より明らかである。

Hashiguchi and Chen (1998) によって提案された回転硬化則と一致した。

提案モデルの応力積分法として、リターンマッピングによる陰的応力積分法を定式化した。また、定式化したリターンマッピング法に整合する接線係数（整合接線係数）を解析的に導出した。導出では、リターンマッピングの際に用いるヤコビアン行列 J を用いて、より簡単に整合接線係数を得る手法についても紹介した。

提案モデルを用いて (1) 等方圧密解析、(2) ひずみ制御による繰り返し単純せん断解析、(3) 応力制御による繰り返し単純せん断解析を行った。(1) では、従来から広く用いられている Cam-clay モデル (Schofield and Wroth, 1968) や修正 Cam-clay モデル (Burland, 1965; Roscoe and Burland, 1968) で用いられている等方硬化則 (4.3) と同等の結果が得られることを確認した。(2) では、過圧密比が高くなるにつれ土の剛性が大きくなり、繰り返しせん断時の偏差応力 q の低下が小さくなるなどの土の典型的な特徴を提案モデルが定性的によく捉えることがわかった。また、リターンマッピングの性能の検証として、ステップ数を変えて解析を行い、ステップ数を粗くしてもステップ数が細かいものと遜色ない結果が得られることを確認した。(3) では、繰り返し载荷により徐々に平均応力 p が低下し、やがてサイクリックモビリティが生じ、偏差ひずみが大きく発生する様子を提案モデルが表現可能であることを確認した。また、過圧密比を大きくした際はサイクリックモビリティが発生しないという土の典型的な傾向も確認できた。リターンマッピングの性能検証では、ステップ数を粗くしても高精度で解が得られること、整合接線係数を用いることで、全体の繰り返し計算において Newton-Raphson 法本来の 2 次収束が得られることが確認できた。

本稿で提案した回転硬化型の超弾性塑性モデルは、Lion (2000) による塑性変形勾配テンソルをさらに乗算分解する有限変形理論に整合した形で定式化がなされているため、有限変形理論への拡張の際には客観応力速度の選択を必要としないという利点を有する。

参考文献

- Armero, F., Pérez-Foguet, A., 2002. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity—part i: The variational structure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2), 297–329.
- Armstrong, P. J., Frederick, C., 1966. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. CEBG Report RD/B/N, 731.
- Borja, R. I., Lin, C.-H., Montáns, F. J., 2001. Cam-clay plasticity, part iv: Implicit integration of anisotropic bounding surface model with nonlinear hyperelasticity and ellipsoidal loading function. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190 (26), 3293–3323.
- Borja, R. I., Sama, K. M., Sanz, P. F., 2003. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (9), 1227–1258.
- Borja, R. I., Tamagnini, C., 1998. Cam-clay plasticity part iii: Extension of the infinitesimal model to include finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 155 (1-2), 73–95.
- Borja, R. I., Tamagnini, C., Amorosi, A., 1997. Coupling plasticity and energy-conserving elasticity models for clays. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering* 123 (10), 948–957.
- Burland, J., 1965. The yielding and dilatation of clay. *Géotechnique* 15, 211–214.
- Butterfield, R., 1979. A natural compression law for soils (an advance on $e-\log p'$). *Géotechnique* 29 (4), 469–480.
- Collins, I., Muhunthan, B., 2003. On the relationship between stress–dilatancy, anisotropy, and plastic dissipation for granular materials. *Géotechnique* 53 (7), 611–618.
- Dafalias, Y. F., 1986a. An anisotropic critical state soil plasticity model. *Mechanics Research Communications* 13 (6), 341–347.

- Dafalias, Y. F., 1986b. Bounding surface plasticity. i: Mathematical foundation and hypoplasticity. *Journal of Engineering Mechanics* 112 (9), 966–987.
- Dafalias, Y. F., Manzari, M. T., Papadimitriou, A. G., 2006. Saniclay: simple anisotropic clay plasticity model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 30 (12), 1231–1257.
- de Souza Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R., 2011. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons.
- Dettmer, W., Reese, S., 2004. On the theoretical and numerical modelling of armstrong–frederick kinematic hardening in the finite strain regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (1), 87–116.
- Gajo, A., Muir Wood, D., 1999. A kinematic hardening constitutive model for sands: the multiaxial formulation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 23 (9), 925–965.
- Gajo, A., Muir Wood, D., 2001. A new approach to anisotropic, bounding surface plasticity: general formulation and simulations of natural and reconstituted clay behaviour. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 25 (3), 207–241.
- Gajo, A., Wood, M., 1999. Severn–trent sand: a kinematic-hardening constitutive model: the q–p formulation. *Géotechnique* 49 (5), 595–614.
- Hashiguchi, K., 1977. Elasto-plastic constitutive laws of granular materials, constitutive equations of soils. *Proc. Spec. Session 9 of 9th Int. ICSMFE*, 73–82.
- Hashiguchi, K., 1979. Constitutive equations of granular media with an anisotropic hardening. In: *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech.*, Aachen. AA Balkema, Rotterdam. pp. 438–439.
- Hashiguchi, K., 1989. Subloading surface model in unconventional plasticity. *International Journal of Solids and Structures* 25 (8), 917–945.
- Hashiguchi, K., 1995. On the linear relations of v – $\ln p$ and $\ln v$ – $\ln p$ for isotropic consolidation of soils. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 19 (5), 367–376.
- Hashiguchi, K., 2009. *Elastoplasticity theory*. Vol. 42. Springer.
- Hashiguchi, K., Chen, Z.-P., 1998. Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 22 (3), 197–227.
- Hashiguchi, K., Ueno, M., 1977. Elasto-plastic constitutive laws of granular materials. In: Murayama, S., Schofield, A. (Eds.), *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th*

- Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9). Tokyo, pp. 73–82.
- Haupt, P., Tsakmakis, C., 1986. On kinematic hardening and large plastic deformations. *International Journal of Plasticity* 2 (3), 279–293.
- Henann, D. L., Anand, L., 2009. A large deformation theory for rate-dependent elastic–plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening. *International Journal of Plasticity* 25 (10), 1833–1878.
- Houlsby, G. T., 1981. Study of plasticity theories and their applicability to soils. Ph.D. thesis, University of Cambridge.
- Houlsby, G. T., 1985. The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays. *Computers and Geotechnics* 1 (1), 3–13.
- Houlsby, G. T., Amorosi, A., Rojas, E., 2005. Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique* 55 (5), 383–392.
- Houlsby, G. T., Puzrin, A. M., 2007. Principles of hyperplasticity: an approach to plasticity theory based on thermodynamic principles. Springer Science & Business Media.
- Hughes, T. J., Pister, K. S., 1978. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Computers & Structures* 8 (3-4), 391–397.
- Lion, A., 2000. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity* 16 (5), 469–494.
- Manzari, M. T., Dafalias, Y. F., 1997. A critical state two-surface plasticity model for sands. *Geotechnique* 47 (2), 255–272.
- Meschke, G., Liu, W., 1999. A re-formulation of the exponential algorithm for finite strain plasticity in terms of cauchy stresses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 173 (1-2), 167–187.
- Miehe, C., 1996. Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 134 (3-4), 223–240.
- Nagtegaal, J., De Jong, J., 1982. Some aspects of non-isotropic work-hardening in finite strain plasticity. In: Lee, E., Mallet, R. (Eds.), *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and computation*. Division of applied mechanics, Stanford Univ. and Dept. of engineering & mechanics, Rensselaer polytechnic institute, pp. 65–102.
- Nakamura, K., Kikumoto, M., 2016. A finite strain elastoplastic constitutive model for unsaturated soils incorporating mechanisms of compaction and hydraulic collapse.

- In: E3S Web of Conferences. Vol. 9. EDP Sciences, p. 17001.
- Ortiz, M., Martin, J. B., 1989. Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: A unification of concepts. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28 (8), 1839–1853.
- Pestana, J. M., Whittle, A. J., 1999. Formulation of a unified constitutive model for clays and sands. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 23 (12), 1215–1243.
- Prager, W., 1955. The theory of plasticity: a survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169 (1), 41–57.
- Prager, W., 1956. A new methods of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *J. Appl. Mech.(ASME)* 23, 493–496.
- Roscoe, K., Burland, J., 1968. On the generalized stress–strain behaviour of wet clay. In: Heyman, J., Leckie, F. (Eds.), *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, London, England, pp. 535–609.
- Rouainia, M., Muir Wood, D., 2000. A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure. *Géotechnique* 50 (2), 153–164.
- Schofield, A., Wroth, P., 1968. *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill London.
- Sekiguchi, H., Ohta, H., 1977. Induced anisotropy and its time dependence in clays. In: *Constitutive Equations of Soils (Proc. Spec. Session 9, 9th ICSFME)*. Tokyo, Japan, pp. 229–238.
- Shaw, P., Brown, S., 1988. Behaviour of dry granular materials under repeated load biaxial and triaxial stress conditions. *Géotechnique* 38 (4), 627–634.
- Simo, J. C., 1998. Numerical analysis and simulation of plasticity. *Handbook of numerical analysis* 6, 183–499.
- Simo, J. C., Hughes, T. J., 2006. *Computational inelasticity*. Vol. 7. Springer Science & Business Media.
- Simo, J. C., Ortiz, M., 1985. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 49 (2), 221–245.
- Simo, J. C., Taylor, R. L., 1986. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (3), 649–670.
- Simpson, B., 1973. *Finite elements applied to problems of plane strain deformation in soils*. Ph.D. thesis, University of Cambridge.
- Taiebat, M., Dafalias, Y. F., 2008. Sanisand: Simple anisotropic sand plasticity model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*

- 32 (8), 915–948.
- Taiebat, M., Dafalias, Y. F., 2010. Simple yield surface expressions appropriate for soil plasticity. *International Journal of Geomechanics* 10 (4), 161–169.
- Vladimirov, I. N., Pietryga, M. P., Reese, S., 2008. On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback—comparison of time integration algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (1), 1–28.
- Wang, R., Zhang, J.-M., Wang, G., 2014. A unified plasticity model for large post-liquefaction shear deformation of sand. *Computers and Geotechnics* 59, 54–66.
- Yamakawa, Y., Hashiguchi, K., Ikeda, K., 2010. Implicit stress-update algorithm for isotropic cam-clay model based on the subloading surface concept at finite strains. *International Journal of Plasticity* 26 (5), 634–658.
- Zergoun, M., Vaid, Y., 1994. Effective stress response of clay to undrained cyclic loading. *Canadian Geotechnical Journal* 31 (5), 714–727.
- Ziegler, H., 1959. A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied mathematics* 17 (1), 55–65.
- Zytynski, M., Randolph, M., Nova, R., Wroth, C., 1978. On modelling the unloading-reloading behaviour of soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 2 (1), 87–93.
- 千田 大, 山川 優樹, 橋口 公一, 池田 清宏, 2013. 塑性変形勾配テンソルの乗算分解による有限変形・異方性回転硬化下負荷面 cam-clay モデル. *土木学会論文集 A2 (応用力学)* 69 (2), I_255–I_266.

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導して下さった菊本統准教授に深く感謝致します。特に、先生のお部屋に研究のご相談に伺った際は、ご多忙であるにも関わらずいつも快く了承して下さいました。終始好奇心の赴くまま研究を進めていた私ですが、いつも私自身のやりたいテーマを優先して考えて下さり、道が逸れそうになったときは適切なアドバイスを頂いたことで、研究を楽しく、そして効率的に進めることが出来ました。ここに感謝の意を表すとともに、心より御礼申し上げます。

小長井先生、早野先生には、ゼミの際に鋭いご指摘やアドバイスを頂き、研究が一層刺激的なものとなりました。ここに、深く感謝致します。

東北大学大学院工学研究科土木工学専攻の山川優樹先生には、構成則の定式化にあたってご助言を頂いただけでなく、有限変形理論について様々な相談に乗って頂きました。心より感謝しております。

研究室の皆様には、日々の生活の相談に乗って頂いただけでなく、研究に関する議論の中で多くのヒントを頂きました。ここに感謝の意を表します。

最後になりましたが、長年の私の研究活動を経済面だけでなく、精神面からも支えてくれた父に心より感謝します。