ＵＣＳＭＰによる1990年度夏期講習会の報告

池田　敏和*

A Report of UCSMP
1990　Summer Institute

Toshhikazu IKEDA

要約

ＵＣＳＭＰ（シカゴ大学学校数学プロジェクト；The University of Chicago School Mathematics Project）は，1983年，数学的リテラシーの育成に向けての大衆の広く理解された必要性にこたえて，Amoco Foundationの６年にわたる資金の提供によって設立された。UCSMPにおける中高等学校段階では，７学年から１２学年までの６年間にわたる数学に関して実行可能で効果的な教材の開発と教科書作成に従事してきた。第２回目のこの会議は，ＵＣＳＭＰの教科書をより広範囲に普及させることを目的に，ザルマン・ウイシスキン（Ｚ．Ｕｓｉｓｋｉｎ）教授を指導者として全米を中心に約30名の大学教授，指導主事，中学・高校教師を対象に２週間にわたって開催された。本稿では，１．教科書作成の動機　２．教科書の特徴　３．カリキュラム開発の過程
４．教科書の内容　５．応用とモデリングの系列　について順をおって述べることにする。

１．教科書作成の動機

このＵＣＳＭＰの教科書は，大きく２つの問題点を改善することに重点をおいている。

(1)　高校を卒業する段階で，生徒は十分な数学を学んでいないこと。

　①　多くの生徒は，大学や仕事や日常生活の中で成功するのに必要な背景となる数学

*数学科教育教室（Dept. of Mathematics Education)

が欠けていること。

② 数学の技能を身につけている生徒にさえ，数学を十分に応用することが導入されていないこと。

③ 生徒は，答える前に幾らかの考えが必要な疑問や問題を考える経験が少ないこと。

④ 実社会や次の学校で有効な数学の重要性を理解することなしに，多くの生徒はあまりにも早く数学の勉強を終えてしまうこと。

(2) 学校数学のカリキュラムは，数学やその応用の中での変化から取り残されていること。

① 最近の数学のカリキュラムは，今日の電卓やコンピュータを考慮にいれていないこと。

② 中高等学校で成功している生徒は，微積分の準備はするが，彼らが大学で出会うであろう他の数学の準備をしていないこと。

③ 統計的な考え方は新聞から調査研究まで至るところで見受けられるが，高等学校の数学のカリキュラムの中にはほとんど見受けられないこと。

④ コンピュータ科学の出現によって，その背景となる離散数学の重要さが増加したこと。

⑤ 数学は今や物理・化学の内外で応用されているが，これらの応用は教科書の中にほとんど出てこないこと。

⑥ 見積りと概算の技能は，算数から数学のすべての領域の中で重要であること。

また，生徒は教科書を読むことができないため，学校外で数学を学ぶ準備ができていないことが広く認めらている。このため，教科書の特色を変える必要がある。

また，ＵＣＳＭＰによってデザインされたカリキュラムは，最近のＳＩＭＳ (The Underachieving Curriculum, A National Report on the Second International Mathematics Study, Stipes Publishing Company, C.Mcknight 他, 1987) の報告や，スタンダード (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, 1989) に従ったものである。

2．教科書の特徴

1での問題点をふまえて，ＵＣＳＭＰの教科書では次の5つの点に重点がおかれた。

(1) 広範囲にわたる内容：幾何と離散数学はすべての科目に設けられ，統計は代数と関数の中へ統合された。また，概念の歴史や最近の数学の発展とその応用は，科目の一部として含まれている。

(2) 教科書を読むことと問題解決：すべての科目に読むこととそれをカバーするための質問が含まれている。授業の中で教科書を各自で読み，その質問，問題等を教師がどのようにするかという討議があった。読む際に，どういうことが大切になるかについても，研究発表があった。また，問題解決の質問も同様にすべての科目に読むことの応用として含まれている。技能と同様に，問題解決も練習によって上達するという考えが背景になっている。

(3) 応用：技能を実世界へ応用できなければ，技能だけもっていてもあまり効果がない。

今日数学を使用しているすべての人は，電卓を役に立つものだと認めているので，電卓はその使用が授業で扱うことはもちろんのこととなっている。さらに，電卓はテストでも許されるべきであろう。また，コンピュータは第５科目において重要な部分であり，グラフィカル電卓は，６科目においてもちろんのこととなっている。

(4) 理解の４側面：いろいろなアルゴリズムをいかに，いつ使うかといった技能の理解，原理と数学的関係の理解，遭遇するすべての考えを用いることについての理解，数学的概念の表し方の理解を強調する。
（ＳＰＵＲ；Skills，Properties，Uses，Representations）

(5) 指導の型：生徒があとで応用できるように繰り返し学習する形式（スパイラル方式）を取る。すべての科目に，前の科目の教材の復習を設ける。

７－１２学年までの教科書は次の通りである。

７学年	：Transition Mathematics
８学年	：UCSMP Algebra
９学年	：UCSMP Geometry
10学年	：UCSMP Advanced Algebra
11学年	：Function, Statistics and Trigonometry with Computers(FST)
12学年	：Precalculus and Discrete Mathematics(PDM)

従来では，11学年：Precalculus, 12学年：Applied Calculus で，微積中心であったが，コンピュータの発達とともに，選択となった。また，小学校の間に Transition Math. を終えて，７—11までに PDM までを終え，12学年で Calculus に入るといった案もある。

３．カリキュラム開発の過程

ＵＣＳＭＰによって使用されたカリキュラム開発の過程は，主に４つの段階がある。計画，実験授業，形成的評価，総括的評価の４段階である。

(1) 計画：計画は，名高い教授によって構成された国家諮問委員会の相談の中で発展し，さらにそれを教師，学校管理職，数学の指導主事によって修正された総括的目標によって始められた。また著者も厳選された。

(2) 実験授業：教材は，著者あるいは著者の代理によって最初に指導され，そのあとでもとの著者あるいは編集者によって改善される。

(3) 形成的評価：教材は普通の教師によって指導され，その結果は独立に評価される。教師とプロジェクトスタッフは定期的に会合を設け，２回目の改訂に備えられる。

(4) 総括的評価：総括的評価は，国家範囲での研究であり，結果は公に利用される。ＵＣＳＭＰの会議は，教科書を使っている教師や使おうと思っている教師がＵＣＳＭＰのスタッフと考えを分かち合えるように毎年秋に開かれる。

４．教科書の内容

(1)　TRANSITION MATHEMATICS

この科目は，算数の応用（applied arithmetic），代数の前段階（pre-algebra），幾何の前段階（pre-geometry）の３つのテーマからなる。電卓の使用によって，もっと多くの問題を考えることが可能になる。

代数への移行は，詳しくは変数の３つの使用を調べることによってなされる。すなわち，パターンの一般化として，式の中での略語として，文章の中での未知数としてである。変数は，数直線上や座標平面上で表され，基本的な代数の技能が導入される。

代数の得意な生徒でも，しばしば幾何は苦手なものである。幾何に得意になるには，多くの幾何の知識が必要である。よって，幾何は，算数や測定や代数と関連づけて強調されるべきである。

時間数は，年間平均185時間（週約５時間）の予定で，各章は次の通りである。

第１章：十進記数法（Decimal Notation）
第２章：大きい数と小さい数（Large and Small Numbers）
第３章：測定（Measurement）
第４章：変数の使用（Uses of Variables）
第５章：加法へと導くパターン（Patterns Leading to Addition）
第６章：問題解決ストラテジー（Problem-Solving Strategies）
第７章：減法へと導くパターン（Patterns Leading to Subtraction）
第８章：表示（Displays）
第９章：乗法へと導くパターン（Patterns Leading to Multiplication）
第10章：さらに進んだ乗法のパターン（More Multiplication Patterns）
第11章：除法へと導くパターン（Patterns Leading to Division）
第12章：演算の組合せ（Combining Operations）
第13章：測定の公式と実数（Measurement Formulas and Real Numbers）

Transition Mathematics において特に興味をもったことは，教科書の内容の多くが実世界と関連して書かれていることである。特に，見積り・概算を取り扱った内容が多く含まれていた。例を１，２示そう。

例１．多く見積った方がいいか，少な目に見積った方がいいか答えよ。（１章３節）
　ア）パーテイーにおいて，バースデーケーキの大きさを見積るとき。
　イ）旅行において，どのくらいのお金を持っていくか見積るとき。
　ウ）重量制限のあるエレベーターにおいて，どのくらいの重さまで運べるか見積るとき。
　エ）数学の宿題をするのに，どのくらいの時間がかかるかを見積るとき。

例２．それぞれの州の人口の移り変わりの表から，一番人口の多い州，一番人口増加の割合が多い国などを概算する。（７章１節）

(2) UCSMP ALGEBRA

この科目は，電卓やコンピュータを用いることによって，統計，確率，幾何の重要な内容を含んでおり，伝統的な代数より広範囲にわたる内容がある。

応用，統計，幾何は，一次方程式や不等式といった代数を発展させたり，例証するために用いられる。算数の演算におけるモデルは，変数を含む表示や等式へと即座に拡張される。直線のグラフをかくことが最も重要視される。確率の概念は関数に表わすことによって勉強できる。指数の増大や放物線によって表される曲線関数は，科学や個人の財政の中での現代の応用の勉強から始められる。連立方程式や多項式や平方根は幾何の勉強と関連しており，応用によって動機づけされる。多項式の分母からなる有理関数のような巧妙に取り扱わなければならない技能は，ＵＣＳＭＰの系列の中では後のコースに延期する。

時間数は，年間平均191時間（週約５時間）の予定で，各章は次の通りである。

第１章：基礎概念（Basic Concepts）
第２章：代数における加法（Addition in Algebra）
第３章：代数における減法（Subtraction in Algebra）
第４章：代数における乗法（Multiplication in Algebra）
第５章：代数における除法（Division in Algebra）
第６章：一次方程式（Linear Sentences）
第７章：直線と距離（Lines and Distance）
第８章：傾きと直線（Slopes and Lines）
第９章：指数と累乗（Exponents and Powers）
第10章：多項式（Polynomials）
第11章：連立方程式（Systems）
第12章：放物線と二次方程式（Parabolas and Quadratic Equations）
第13章：関数（Functions）

ここで特に取り上げたいのは，第７章の直線と距離，第13章の関数といった単元が設けられていることである。第７章の距離のところでは，平方根が導入され，ピタゴラスの定理を使用する中で平方根の計算が一般化される。さらに，ピタゴラスの定理の拡張として，平面座標においての２点間の距離まで導入される。平方根の指導の流れと距離という概念についての一貫した流れがあるところに興味をもった。また，第13章の関数では，確率による関数，正接による関数といったいろいろな関数が，節として設けられている。また，電卓におけるファンクションキーの説明まで節として設けられている。

(3) UCSMP GEOMETRY

幾何は，ＵＣＳＭＰのカリキュラムでは，毎学年勉強できるように組まれている。しかし，UCSMP GEOMETRY は，１年間通して勉強できる唯一のコースである。

このコースにおける内容の順序は，多くの幾何の教科書に見られる順序といくらか逆に

なっている。面積や体積の考えを含んだ測定の考えは，1学期から2学期の前半にまたがって指導される。合同や相似の考えは，変換を通して発展していく。3次元の内容は，すべて指導される。線形や2次式を通して，前に勉強した代数の内容が要求される。

ここでの目標は，すべての生徒が，じょうずに証明をかくことができ，その他の数学の議論に強くなることである。命題をかくことと簡単な証明ができることが，教科書の最初の半分で強調される。次の半分で，座標による証明と間接証明が強調される。作図は，アルゴリズムとして述べられる。簡単な議論によって局所的に演繹する機会が，大局的な数学の体系が導入される前に与えられる。

時間数は，年間平均206時間（週約6時間）の予定で，各章は次の通りである。

第1章：点と直線（Points and Lines）
第2章：定義と命題（Definitions and If-then Statements）
第3章：角と直線（Angles and Lines）
第4章：対称（Reflections）
第5章：多角形（Polygons）
第6章：変換と合同（Transformations and Congruence）
第7章：三角形の合同（Triangle Cogruence）
第8章：測定の公式（Measurement Formulas）
第9章：3次元の図形（Three-Dimensional Figures）
第10章：表面積と体積（Surface Areas and Volumes）
第11章：座標幾何（Coordinate Geometry）
第12章：相似（Similarity）
第13章：論理と間接的推論（Logic and Indirect Reasoning）
第14章：三角法とベクトル（Trigonometry and Vectors）
第15章：円に関した進んだ研究（Further Work with Circles）

ここでは，第6章の変換と合同のところで，ビリヤードの話が，第12章のところで，巨人の存在の話が，節として設けられている。

(4) UCSMP ADVANCED ALGEBRA

この教科書は，代数形式，1次方程式と2次方程式，累乗と平方根，これらの概念に基礎をおいた関数などによって，容易に取り組めることを強調している。対数関数，三角関数，多項式，その他の特別な関数も指導される。実世界の場面のモデルをつくるために，これらの形式や関数を使用することが主なテーマである。

幾何学的考え方は，テキストを通して統合される。測定においての関係は，代数的観点から分析される。変換は，グラフを分析するために使用される。一般に，グラフをかくことは，生徒のもっている幾何学的直観を利用するために強調される。

幾何の中にみられる数学的体系の概念が統合される。

コンピュータとの関連が，この科目でなされる。ＢＡＳＩＣプログラムとファンクショングラファー（グラフィカルソフト）の両方の使用が，概念の発達，問題の解決に適当であるならばどこでも含まれている。離散と連続の領域，アルゴリズムの勉強なども，コンピュータ時代に重要であるため，含まれている。

時間数は，年間平均215時間（週約６時間）の予定で，各章は次の通りである。

第１章　代数の言語（The Languuage of Algebra）
第２章　変化とグラフ（Variation and Graphs）
第３章　線形関係（Linear Relations）
第４章　行列（Matrices）
第５章　連立方程式（Systems）
第６章　放物線と２次方程式（Parabolas and Quadratic Equations）
第７章　関数（Functions）
第８章　累乗と累乗根（Powers and Roots）
第９章　指数と対数（Exponents and Logarithms）
第10章　三角法（Trigonometry）
第11章　多項式（Polynomials）
第12章　２次曲線（Quadratic Relations）
第13章　数列，組合せ，確率（Series, Combinations and Probability）
第14章　次元と空間（Dimensions and Space）

ここでの第５，６，７章は，Algebra の第11，12，13章と同じタイトルである。これは，同じ内容を繰り返し学習するというスパイラル形式を取っている。この３つの章で新しく学習する内容は，次の通りである。第５章の連立方程式では，２次関数や双曲線との連立方程式，逆行列による行列を用いた解法までを，第６章の放物線と２次方程式では，放物線の定義，放物線の平行移動，平方完成，複素数までを，第７章の関数では，ガウス記号による関数，４次関数，無理関数，対称な関数，逆関数までを新しく導入している。また，第11章の多項式では，BASIC を用いて多項方程式の解を近似したり，第14章の次元と空間では，フラクタル次元までを導入している点は興味深い。

(5)　FUNCTION, STATISTICS AND TRIGONOMETRY WITH COMPUTERS（FST）

この教科書は，データやグラフや等式によって表された数的な情報を表示したり，述べたり，変換したり，またそれを解釈したりすることを可能にする。このコースは統計的，代数的概念を統合している。例えば，等式ばかりでなく，あるデータについて変換することの効果を説明することが挙げられる。極限の直観的概念を発展させたり，関数によるその変換の勉強の中で微積分にもふれることができる。実世界の場面のモデルをつくるために関数や統計を用いることがこの教科書の主なテーマである。

コンピュータは，この教科書の全般に渡って，指導上の教具として使用される。ＢＡＳ

ＩＣプログラムやファンクショングラファーや統計パケッジに基づいた授業は，関数を視覚的に見たり，等式とそのグラフの関係を調べたり，実験をシミュレイトしたり，データの一般化や分析をしたり，極限の概念を発展させたりするのを助けてくれる。コンピュータによる説明は，必要ならいつでもクラスの中で役立てられることが期待される。クラスが必要なときにコンピュータ室に集まることができ，宿題で必要なときにすべての生徒がコンピュータを使えることが前提となっている。

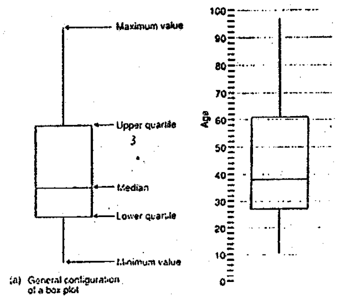
その他，生徒はさらに複雑なプロジェクトに取り組んだり，彼ら自身の調査におけるレポートをかくことが期待される。

各章は，次の通りである。

第１章：データの意味を理解すること（Making Sense of Data）
第２章：関数とモデル（Function and Models）
第３章：関数とグラフ（Functions and Graphs）
第４章：指数関数と対数関数（Exponential and Logarithmic Functions）
第５章：グラフ，等式，データの変換
（Transforming Graphs, Equations and Data）
第６章：三角関数（Trigonometric Functions）
第７章：行列と三角法（Matrices and Trigonometry）
第８章：三角関数のグラフ（Graphs of Circular Functions）
第９章：数え上げ（Counting）
第10章：確率と２項実験（Probability and Binomial Experiments）
第11章：正規分布（Normal Distributions）
第12章：数列と級数（Sequences and Series）
第13章：三角法の応用（Advanced Topics in Trigonometry）

この教科書でまず第１に興味を持ったのは，テキストにファンクショングラファーのソフトがついていることである。このソフトでは，１次関数，２次関数から，三角関数，極方程式まで，簡単にグラフに描くことができ，さらに座標の目盛りを自由に変えたり，１部分を拡大して見ることができ，操作が簡単で利用度が広いため，とても有効に感じられた。また，ソフトとほとんど同様の機能をもつグラフィカル電卓も使用されており，１人１台のコンピューターが使用できない場合には，とても有効であることと思う。また，方程式の解を求める際に，ＢＡＳＩＣとグラフィカルソフトを同時に用いるなど，コンピューターの取り扱い方について，いろいろな工夫がみられた。また統計に関しても，電卓が平均，標準偏差等を計算するだけでなく，分布をグラフィカルに表現するためにも用いられている。さらに，データを処理したり，解釈するときの有効な手段として，Box plot ※1や Steam-leaf ※2などの表現方法なども取り扱われている。全般的に，統計がかなりの割合で重視されていることがうかがえる。

※1



※2

1	2 3 4 5 7 9
2	4 4 5 6
3	
4	0 6
5	5
6	
7	
8	3
9	4

(6) PRECALCULUS AND DISCRETE MATHEMATICS (PDM)

Precalculusは，関数の分析，極限の概念，解析幾何，導関数と定積分の概念的な土台を含んでおり，多くの微積分のコースの中で知っておくべき背景となる理論を強調している。Discrete Mathematicsは，標準的な論理，自然数の性質，数学的帰納法，数列，組合せ，グラフ理論を含んでいる。また，前学年であまり強調されなかった巧妙に取り扱わなければならない代数や，数学的推論と証明の発展もある。

この科目では，生徒と教師が関数の性質を分析したり，三角恒等式を推測したり，極限を勉強したりするのに，グラフィカル電卓やコンピュータに慣れ親しんでいることが前提となっている。コンピュータプログラムも，論理，組合せ，微積分において概念を説明したり，数列や級数を勉強するために使用される。

各章は，次の通りである。

第１章：数学的議論 (Mathematical Arguments)
第２章：初等関数 (Elementary Functions)
第３章：一般的な関数の概念 (General Function Concepts)
第４章：整数と整式 (Integer and Polynomials)
第５章：数と関数 (Numbers and Functions)
第６章：三角恒等式と三角方程式
(Trigonometric Identities and Equations)
第７章：微積分における導関数 (The Derivative in Calculus)
第８章：漸化式と帰納法 (Recursion and Induction)
第９章：組合せ論 (Combinatorics)
第10章：グラフと回路 (Graphs and Circuits)
第11章：微積分における積分 (The Integral in Calculus)
第12章：ベクトル代数とベクトル幾何 (Vector Algebra and Geometry)
第13章：平面曲線と極座標 (Plane Curves and Polar Coordinates)
第14章：複素数 (Complex Numbers)

５．応用とモデリングの系列

ＵＣＳＭＰの教科書では，応用，モデリングがとても重要視されていることが伺える。

そこでここでは，応用，モデリングがどのような観点に従って教科書に組み込まれているかを述べていきたい。特に，次の３つの観点について述べていくことにする。

(1)　カリキュラムの中で使用されたモデルの種類
(2)　応用，モデリングにおいて使用された数学の内容
(3)　カリキュラムの中でのバランスのとれたアプローチ

(1)　カリキュラムの中で使用されたモデルの種類

ここでは，数学的モデルが実世界の場面にどのくらいまで同型であるかによって３つのタイプに分類されている。

①　同型なモデル

１番目の種類のモデルは全く正確なモデルである。これは，実際の場面と同型である。それらは，数えたり，繰り返したりすることに基づいているか，あるいは数学からの応用である。

例：複利，くじ引き（福引，抽選など），郵便料金，航空路のネットワーク

数学のこの種類の使用は，検証したり，見積ったり，他の種類のモデリングにあるような可能性のある疑問がないので，常にモデリングと考えることはできないが，他の場面への必要な基礎知識を提供するモデリングの重要なタイプである。

②　ほとんど同型なモデル（理論付け可能なモデル）

２番目の種類のモデルは，物理学への応用の中でしばし見られるほとんど正確で理論に基づいたモデルである。

例：蹴り挙げたフットボールの軌跡，オーブンによって熱したときの部屋の温度から200度までの温度変化，ある都市のある月の降水確率

これらの場合，その場面についての仮定から数学的モデルが演繹される。その仮定は，厳密には不可能であるその場面の正確さを仮定しているが，誤差，概算の必要性，統計のいろいろな可能性や他の要因によって，そのモデルは実際場面の唯一の近似であることがわかる。いくつかの間違いが存在してくることは知られているが，そのモデルを使うことによって得られた結果は，ある程度まで信頼することができる。この種類のモデルが，ＵＣＳＭＰのカリキュラムに最も多く含まれている。

③　印象的モデル（理論付けできないモデル）

３番目の種類のモデルは，印象的モデルである。モデルは実際場面に適しているように思われるが，そのモデルを裏付ける理論は何もない。

例：年ごとの水泳の世界記録は，一次関数で表すことができる。

印象的なモデルは，モデリングの過程を余儀なく考えさせるので，モデリングの最もよい例は何であるかといったことを包んでいる。しかし，生徒はあまりじょうずに予想することができないので，そのモデルを正確なものに考えすぎてしまう。よって，生徒にこれらの価値を確信させるのは難しい。ＵＣＳＭＰでは，生徒が別の種類のモデルを十分に経験するまでは，このようなモデルは指導時期を遅らせることにした。

(2)　応用，モデリングにおいて使用された数学の内容

①　演算決定

１段階においては，演算の使用を考えることが挙げられる。演算によって答えが出せるだけでなく，生徒に演算を使用する意味付けをしたり，ある演算が要求される場面を統合することは必要である。使用する意味について，減法では，例えば比較することが考えられる。体温の比較，面積の比較，時間の変化の計算，誤差の計算などである。除法では，割合が考えられる。速さ，人口密度，為替レートなどである。算数の演算を使用する意味は，Transition Mathematics のテーマである。さらに生徒はその考えを算数の中だけでなく，$x+y$，$x-y$，xy，x/y といった式の意味づけをするために，代数的に応用することが期待される。モデリングの最初の段階は，ある実際場面の特徴がある算数の演算とペアになっていることを理解することである。

次の段階は，代数形式の使用を考えることである。重要な線形形式は，一次結合と単調増加（減少）である。この観点にたつと，傾きが重要になる。

$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ は，減法と除法の組合せであり，その応用は，比較の減法と割合の除法の組合せである。このように，変化の割合は，その式における自然な解釈となる。２次方程式の応用は，面積や配列から起こり，その他は加速度から起こる。これらは，乗法，除法の使用にさかのぼることができる。これらは，全く新しい使用例ではないと思われるかもしれないが，ＵＣＳＭＰのカリキュラムでは幅広く起こってくる使用例を統合することを強調している。

②　関数

１年目は等式で，２年目以降はそれに相当する関数によって勉強することがよいであろう。生徒は，Algebra において１次式，２次式，指数による式の使用を見てきている。代数から関数への移行は，Advanced Algebra においてなされる。独立変数，従属変数と最大値，最小値などの関係に関心がおかれる。対数や三角法による式は，生徒の解釈と使用のために勉強されるが，ほとんどの関数の勉強やその関数によるモデリングは，Functions and Statistics with Computers (FST) まで延期される。

Advanced Algebra と FST において，古典的なモデリングが始まる。ある場面がある。それは，自動的に既習の関数のひとつへと導かれる以前見たことのあるタイプであろうか。もし違うなら，どのようなモデルが最も適しているだろうか。そのモデルを選ぶとき，何が密接に関係してくるだろうか。

③　確率・統計

確率，統計は，このカリキュラムの中の他の内容によって統合されている。それらは，Advanced Algebra で20%，FST で50%構成している。最初の統計の使用は，自然な疑問から起こる。非常に多くの，あるいは首尾一貫しないデータがあるとき，データを述べるのに，何をなすことができるか。一つの答として，数によってデータを手短かに述べることができる。（すなわち，統計によって）二つ目の答として，最も適した関数を見つけることが挙げられる。このように統計は，確率的な場面において変数が変化するときや，あるいは繰り返しの測定があるときにおいてデータが多すぎるときなどに使用される。例えば，

2点を通る直線をかいたり決定するときに，確率を用いる必要はない。しかし，対応する部分が同一直線上に並んでいないn個の点を通る直線が欲しいときは，データが多すぎることになる。

さらに進んだ統計の使用は，2番目の疑問から生じる。ある特別なモデルが適切であることをどのようにすれば知ることができるだろうか。例えばn個の点が与えらえたとき，その場面の理にかなった命題として，ある直線が最も適切であることをどのようにして知ることができるであろうか。相互関係と仮説検定が，そのような疑問に答えるための2つの技能である。このカリキュラムでは，カイ2乗のような1次の相互関係や単純な検定が挙げられる。

④ 幾何

幾何は，このカリキュラムにおいて重要な側面である。第9学年が土台となっており，他の全ての学年で勉強される。教師は，ユークリッドールジャンドルーヒルベルトーバーコフーSMSGへと仮定された流れに基づいたユークリッド幾何学のある意味で厳密な論理的取り扱いを期待しているため，米国においては幾何の応用においてある特別なカリキュラム上の問題がある。また，幾何学的モデルは代数的モデルより異なった考察から生じるという方法論的問題がある。

3つの一般的な特徴によって，幾何を応用するためのカリキュラムが開発される。まず最初は，幾何学的変換の勉強である。数学的実在物として，物理的あるいは視覚的物体を考えることを可能にできるように，変換は円や多角形の共通部分や和集合ばかりでなく，すべての図形に応用できる。例えば，巨人が存在するかどうかの疑問は，幾何学的に相似な人が持っているであろう性質を考えることによって検討することができる。

2番目は，物体がなぜそのように形づくられたかを尋ねてみることである。例えば，円は与えられた点から与えられた距離（地震や爆発の影響を考えることによって）にある点の集合といった伝統的な方法によって与えるだけでなく，一定の幅の特別な曲線（車輪における応用）や，一定な曲率による曲線（固定して曲がった位置において自転車の車輪を進めることによって生じる道）や，多くの3次元の図形の断面図（みかんをスライスにしたり，ボトルや缶のあき口にみられる）や，無限の回転や対称変換による図（ドアのハンドルをデザインするとき）などによる点の集合によっても与えられる。教育学的現象学のフロイデンタールの観念は，カリキュラムのそれぞれの内容で我々がやってきた分析の観点を述べている。そしてその分析は，幾何において最も簡単に見ることができる。我々は，例えば円の概念のすべての明示をカバーすることを期待することはできないが，その分析は標準的なものよりより幅広い種類の応用を含むことを手助けしてくれる。

応用においての3番目は，驚くほどの「よりどころ」から生じる。すなわち定義されていない用語や公準からの幾何学が厳密に発展してきたことである。米国の高等学校の幾何の授業は，最初の日は，点，直線，平面などの定義されていない用語の討論から始まる。その伝統的な授業においては，すべての用語を定義することができないので，定義されていない用語は必要な弱点として見られるし，すべての命題を証明することができないので，公準は用語に相当する必要なものとしてすぐに導入される。我々のアプローチは，全く異

なった展望からではなく，同じ概念を統合することにある。世界の中では，点や直線の異なった概念が存在する。小さい子やコンピュータやテレビのスクリーンは，点をドットとしてみなす。点はまた，理想の位置であったり，順序づけられた対であったり，重心であったり，ネットワークの結び目であったりする。このように，我々はある幾何学的用語を定義できない。なぜなら，そうすることはそれらの応用の広さを妨げることになるからである。我々が勉強していることによって，ある特別な種類の点や直線を同定していこうとする理由から，我々は公準を選んでいるのである。このように，定義されていない用語によって，幾何学的な考えの応用が増加する。

(3) カリキュラムの中でのバランスのとれたアプローチ

すでにいろいろな内容がいっぱいで，実際にどれかの内容を取り除く必要さえあるカリキュラムの中へ，応用をどのように入れていくことができるであろうか。ＵＣＳＭＰにおいては，これが鍵となる問いである。というのは，ある小さなグループの熱狂者によるクラスにではなく，ＵＣＳＭＰは数学の指導や学習の主要な流れに影響を与えようとしてきたからである。米国では，教師や学校は自由に教えたい内容を教えることが可能である。50州の２，３の州では別であるが。

数学教育の歴史を振り返ってみると，焦点の狭いカリキュラムは続かないであろうことがわかる。1960年代のカリキュラムでは，純粋数学の内容が強調され，1970年代のカリキュラムでは，基礎基本が重要視された。最近，何人かの人は，すべての内容に具体性をもたせることを強調している。この考えは，心理学者の観点にあまりにも依存しすぎている感じがする。これらの観点は，費やした時間に相当するものだが，あまりに心理学者の観点に依存しているため，数学を歪んだ形で表している。かといって我々は，応用数学者の観点に焦点があまりに狭く組織されるという間違いは避けたく思っている。このようなことから，ほとんどすべての内容は，４つの次元の中でアプローチされている。

① 技能ーアルゴリズムの次元：アルゴリズムの選択を通していかに解答をえるか（紙と鉛筆の技能から，ファンクショングラファーなどのコンピュータソフトの使用まで）といったことから，アルゴリズムを比較することまでを含む。

② 性質ー数学的補強の次元：性質を同定することから証明をかくことまでを含む。

③ 使用ー応用の次元(この論文で強調している次元)：数学への簡単な１段階の応用や変換から，さらに複雑な手順の応用やモデル化までを含む。

④ 表現ーメタファアーの次元：具体的な教材の使用から，グラフの分析，また最終的には概念の新しい表現を発明することまでを含む。

数学の授業の中で，日々の経験を標準的な部分としたこのような我々の応用のケースは，それらの重要性や動機づけ可能な性質ばかりでなく，深く豊富な数学的概念の理解へとつながる応用への貢献に基礎をおいている。

ＵＣＳＭＰ

Department of Education
The University of Chicago
5835 South Kimbark Avenue
Chicago, IL 60637

(312) 702-9770
FAX (312) 702-6486

Director : Zalman Usiskin
Co-Director : Sharon L. Senk