ピタゴラスの定理の教材化に関する考察
－数学的探求と数学的価値の視点から－

佐　藤　潔　人*　　馬　場　　裕**

要　約

ピタゴラスの定理は，数と図形，図形と計量を結びつける数学における基本となる定理の一つである．定理の発見，証明からフェルマーの最終定理の解決に至るまで人類の文化とともに歩んできた定理といっても過言ではない．ピタゴラスの定理の背景には幅広い数学文化が存在する．本研究では，数学的探求と数学的価値の視点からピタゴラスの定理の教材化について考察する．中学校第３学年で取り上げられるピタゴラスの定理は，当該学年のみならず高等学校まで見渡した学習を考えたとき，さまざまな領域や内容と関連してくる．ピタゴラスの定理と他の領域や内容との関連性を重視したとき，どのような教材化の可能性があるのか，また，教材化の可能性にどのような意味合いが生じるのか数学的探求と数学的価値の視点から考察を行った．考察を通してそれぞれに独立に理解していた事柄が関連した事柄となって現れてくるというよさが得られるということ．その結果，数学が発明されてきた過程を追体験することとなり，数学に有用性を感じたり意義を見出したりしていく機会になり得るものと考えた．

キーワード：　ピタゴラスの定理　三平方の定理　数学的探求　数学的価値　拡張　有用性

１．はじめに
（１）研究の目的と背景

ピタゴラスの定理（三平方の定理）は，数と図形，図形と計量を結びつける数学における基本となる定理の一つである．ピタゴラスの定理は直角三角形における各辺の平方の関係を示したものであるが，そこから派生した多くの内容がある．平行線とは一体どのようなものかという問いから非ユークリッド幾何が生まれたように，ピタゴラスの定理から派生してきた内容もまた豊富である．

ピタゴラスの定理に関する内容を詳しく記した『ピタゴラスの定理』（大矢，2001）にもあるように，ピタゴラスの定理は，人の歴史と共に歩み続けてきた定理であるといっても過言ではない．それはこの定理の応用の広さと古今東西で 200 を超えるというこの定理の証明の多さからも指摘することができる．

ピタゴラスの定理は，中学校第３学年で初めて扱われる．中学校学習指導要領解説では「指導に当たっては，ただ単に様々な図形の性質を証明することの延長として三平方の定理を扱うのではなく，直角三角形の３辺の長さの関係としてその美しさに触れられるような工夫と配慮が望まれる」とある．

ピタゴラスの定理の合わせ持つ「よさ」（数学的価値）を自分が感じる「よさ」として感じるにはどのように教材を扱えばいいのか．そのためには，定理の合わせ持つ内容が一つ一つ独立に内容が増えるのではなく，関連した内容となって現れるようになってはじめて感じられるものになると考える．そこでは，問いがつながる活動，数学的探求が欠かせない．以上のことは，中学校第３学年に限ったことではなく，ピタゴラスの定理に関する内容と領域が増える高等学校の学習でこそ必要ともいえる．

本研究では，数学的探求と数学的価値の視点からピタゴラスの定理の教材化に関する考察をおこなうことを目的とする．

*　川崎市立古川小学校（神奈川）
**　横浜国立大学教育人間科学部

（2）研究の方法

研究の方法は，以下の通りである．ピタゴラスの定理の合わせ持つ内容を互いに関連した内容として生徒が感じられるような教材化とその扱いはどうあったらいいのか．その教材の価値付けはどのように行ったらいいのか．数学的探求と数学的価値の視点から教材化の視点を設定する．そして，定理を数との関連，定理の逆の直接証明，定理の拡張の方向での教材化を試み，考察を行う．

２．数学的探求と数学的価値

数学的探求については明確な定義がなされているわけではなく，中学校学習指導要領解説(2008)では，「4 課題学習とその位置付け」の中で「主体的な追求」とされている．数学的探求の可能性として，飯島(2008)が示すように，数学の教授･学習におけるテクノロジーの役割を利用したり，清水(1998)の「実験を数学学習の方法論」として用いたり，関口(2002)，小松(2011)は，探求活動に位置付けられた証明の教授･学習の必要性に関して述べている．

ビショップ(2011)の数学的文化化では，算数，数学教育を文化の立場から眺望している．そこでは，数学に対する有用性や意義を実感していくための数学的探求の内容や方法が述べられている．ビショップは，数学的探究(mathematical inquiry)を探求(investigation)と解釈している．探求は課題解決と同じく学習の発展的部分である．探求には二つの相があり，一つ目が，数学的概念が探索され，分析され，開発される際の創造的，発明的な相，実験に相当する．二つ目が，活動の報告を書く相．ふりかえりと実験記録の書き上げに相当するとしている．（同，p.192）その中でまず範例としてあげられているのがピタゴラスの定理である．

ピタゴラスの定理自体，またその関連事項に十分に数学的価値が存在するが，生徒が数学的探求によってその数学的価値に触れたり，発見していくことによって定理にあった数学的価値が自分のものとして感じられるようになると考える．

以上のことから，数学的探求は，生徒自らの働きかけがあり，ふりかえりを通していくつかの内容や領域がつなぎ合わされていく活動ということができる．

数とピタゴラスの定理に関する教材をビショップの範例をもとに具体的に考察を行っていく．

３．数とピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理は，ギリシャ時代から単に直角三角形における面積の関係に限定されるものではなかった．無理数の発見にもつながったように，$x^2+y^2=z^2$ における x，y，z の整数解を求めることにすでに関心が向けられていた．数とピタゴラスの定理，整数解の問題は，ピタゴラスの定理が持つ豊かな内容の一つとして欠かせない．

$x^2+y^2=z^2$ が整数解を持つか，持たないかの問いに関連して，整数の様々な性質にふれることができる．

ビショップは，数学的探求を行う際，生徒にふさわしい探求の入り口が必要として，ピタゴラス数の三数の積が 60 の倍数になる問題を範例として取り上げている．

（1）60 の倍数，ピタゴラス数をみる

以下，探求活動の範例として提示されているものに証明を与え，教材化の意味合いを考察していきたい．

> ピタゴラス数を一組取り上げよ．その三数をすべて掛け合わせると結果は 60 の倍数となる．これは真であるか．常に成り立つか．それはなぜか．　（ビショップ，2011，p.192）

結論から述べると，これは真であり常に成り立つ．

$a^2+b^2=c^2$ を成り立たせる自然数の組，ピタゴラス数（a，b，c）において，その積 abc が 60 の倍数になっているということである．

なお，この範例に対する証明はいくつか考えられるが，筆者なりに剰余系・背理法を用いて考えてみる．

60 を素因数分解すると，$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ となる．つまり，ピタゴラス数の積が 4 の倍数× 3 の倍数× 5 の倍数になっていれば，60 の倍数になっているといえる．証明の方針は，平方数をそれぞれ 3，4，5 の剰余系で考え，その和を示し，背理法を使って，3，4，5 の倍数になっていることを示していく．

（ⅰ）3 の倍数になっていることを示す．
平方数を 3 の剰余系で考える．
$a = 3s, 3s \pm 1 \quad b = 3t, 3t \pm 1$ とすると（s, t は任意の自然数）
$a^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$，$b^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$
同様に，$c = 3k, 3k \pm 1$ とすると，（k は任意の自然数）　$c^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$
a も b も 3 の倍数でないとすると，
$a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$ となり矛盾．よって，a, b どちらかが 3 の倍数でなくてはならない．
（ⅱ）4 の倍数になっていることを示す．
平方数を 4 の剰余系で考える．
$a = 4s, 4s \pm 1, 4s \pm 2$
$b = 4t, 4t \pm 1, 4t \pm 2$ とすると，
$a^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$，$b^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$
同様に，$c = 4k, 4k \pm 1, 4k \pm 2$ とすると，
$c^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$
a も b も 4 の倍数でないとすると，
$a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$ となる場合が生じ矛盾．
よって，a, b どちらかが 4 の倍数でなくてはならない．
（ⅲ）5 の倍数になっていることを示す．
平方数を 5 の剰余系で考える．
$a = 5s, 5s \pm 1, 5s \pm 2$
$b = 5t, 5t \pm 1, 5t \pm 2$ とすると，
$a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$，$b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$
同様に，$c = 5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$ とすると，
$c^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$
a も b も 5 の倍数でないとすると，
$a^2 + b^2 \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$ となる．この場合 c が 5 の倍数であること以外で矛盾が生じる．よって，a, b, c のどれかが 5 の倍数でなくてはならない．

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より，ピタゴラス数（a, b, c）において，その積 abc が 60 の倍数になっているということがいえる．

なお，シェルピンスキー(1993)は，「すべてのピタゴラス三角形について，３辺のうち少なくとも１つが n で割り切れるような自然数は n は,1, 2, 3，4，5 のいずれかにかぎられる」と述べている．

以上の範例に関連して生徒の活動の場面を考えたとき，実際にピタゴラス数を見つけ出して確かめる方向がある．$(a, b, c) = (3, 4, 5), (5, 12, 13)$，$(15, 8, 17)$，$(7, 24, 25)$･･･，証明までいかなくとも，ピタゴラス数を知り求めていく過程の試行錯誤，その結果を他の人に説明していく活動が数学的探求となる．

証明を目指した活動を考えたとき，ピタゴラス数を求める一般式の利用が考えられる．ピタゴラス数を求める式に関して次の式が知られている．この一般式ですべてのピタゴラス数を表すことができる．さらにピタゴラス数であればこの一般式を満たす．

２つの異なる自然数 m, n で，m, n は互いに素，$m > n$ とすると

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases} \quad \cdots①$$

この３数（a, b, c）を掛け合わせるので，

$$abc = (m^2 - n^2)\,2mn(m^2 + n^2) \quad \cdots②$$

つまり，②の式が 60 の倍数になっていることを証明すればよい．

前出の 60 の倍数になる証明でも利用した自然数の剰余による分類を利用して，

3 の倍数になっていることを示すときは，

$$\begin{cases} m = 3s, 3s + 1, 3s + 2 \\ n = 3t, 3t + 1, 3t + 2 \end{cases}$$

と分類して，②の式に代入して m, n が，すべての場合で 3 の倍数になっていることを確かめる．

例えば，m, n どちらかが，$3s, 3t$ ならば，②の式の $2mn$ から，3 の倍数になっていることを確かめられる．
$m = 3s + 1$，$n = 3t + 2$ などの場合であれば，②の式の $m^2 - n^2$ から

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (3s + 1)^2 - (3t + 2)^2 \\ &= (9s^2 + 6s + 1) - (9t^2 + 12t + 4) \\ &= 3(3s^2 + 2s - 3t^2 - 4t - 1) \end{aligned}$$

$m^2 - n^2$ が 3 の倍数であれば，abc の積は 3 の倍数となる．このようにして，式変形を通して②の式に m, n の剰余によって分類された式を代入して，式の変形を通して，すべて 3 の倍数になることを示していく．

同様に，4 の倍数になっていることを示すときは，②の式の $2mn$ の部分に着目して示していく．

5の倍数になっていることを示すときは,

$$\begin{cases} m = 5s,\ 5s+1,\ 5s+2,\ 5s+3,\ 5s+4 \\ n = 5t,\ 5t+1,\ 5t+2,\ 5t+3,\ 5t+4 \end{cases}$$

と分類して②の式に代入し，式変形を通してm, nが，すべての場合で5の倍数になっていることを確かめる．

以上のように，3の倍数，4の倍数，5の倍数になることを，式変形によって確かめていき，②の式が60の倍数になることを証明していくことができる．

（２）60の倍数になる範例と数学的探求

ピタゴラス数の三数の積が，60の倍数になることを示す活動を通してピタゴラス数の性質，整数の性質を探求できる．つまり，ピタゴラス数の内容の豊富さに60の倍数という切り口からふれることができるといえる．

実際の活動においては，ピタゴラス数を求める式(３-(１)-①式)を生徒に知らせる場面が必要となる．さらに，3の倍数，4の倍数，5の倍数になることの証明では「互いに素」という整数についての見方，偶数と奇数，整数の剰余系を用いた分類も必要になる．この教材では，ピタゴラスの定理と整数の性質の内容の関連性が生じている．

以上のような活動の他に，一つ一つ，ピタゴラス数を求めることから，ピタゴラス数を求める式を立式し，一般化してピタゴラス数の性質を分析する方法もある（注１）．生徒が公式に当てはめてピタゴラス数を求めるだけでなく，具体的にピタゴラス数をつくりながら結果をもとに方法をお互いに吟味しあう活動は，60の倍数の範例に付随した探求活動になり得る．

ピタゴラス数を求めながら，一般式を探求する一つの方法として以下の方法がある．

まず，$a^2 + b^2 = c^2$ から

$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

さらに，$c - a = 1$のとき，$(c+a)$が平方数になる自然数を求めることを通して，(a, b, c)を定めていくことができるが，一歩進めて，

$c + a = b^2$ として，以下の式となる．

$$c = \frac{b^2+1}{2},\qquad a = \frac{b^2-1}{2}$$

この他，任意の整数から一般式を求めていく方法は，ファン・デル・ヴェルデン（2006）にいく通りかの方法が示されている．

（３）60の倍数になる範例と数学的価値

この一連の教材は，ピタゴラスの定理の $a^2 + b^2 = c^2$ の式に表れる平方数の関係と整数の性質が関連してくるものとなっている．ピタゴラスの定理を仲介として数と式の内容がつながっていくところに数学的探求があり，数学的価値が新たに生じるとみることができる．それぞれの独立した内容がピタゴラスの定理の内容をもとに，関連付けられた内容となって新たな見方ができる．

ユークリッドの時代からピタゴラスの定理とそこから派生する数の性質の発見は，早い時期から着目されてきた．ピタゴラスの定理と数の関係，つまり，無理数，整数と整数の性質との関係はピタゴラスの定理が合わせ持つ文化的な背景とも言える．この豊かな背景があるからこそ数学的探求が成立する要件が満たされ，生徒に数学的価値が得られていく機会となり得るものと考える．

４．ピタゴラスの定理の逆に関する証明

ピタゴラスの定理の逆とは,以下の定理である．

> ３辺の長さがa, b, cの三角形で
> $a^2 + b^2 = c^2$ ならば，その三角形は長さcの辺を斜辺とする直角三角形である．

教科書の扱いでは，ピタゴラスの定理を知って定理の証明が扱われる．その後，ピタゴラスの定理の逆の証明が扱われる．現在，ピタゴラスの定理の逆の証明に関しては，現行７社の教科書とも間接証明(同一法)である．この命題の直接証明はないものだろうか．例えば，古藤 怜 上越教育大学名誉教授が直接証明を行っている．

（松沢，2006)，(注 ２)

以下，証明の概略を筆者なりに示す．

図１のようにABの延長線上に，BD = BCとなるような点Dをとる．また，AB上にBE = BCとなるような点Eをとる．

$a^2 + b^2 = c^2$ から $b^2 = c^2 - a^2$

$$= (c+a)(c-a)$$

これは，$b : (c-a) = (c+a) : b$ $\cdots$ ①

を意味している

△ ACE と△ ADC において

「２組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しい」よって，△ ACE ∽△ ADC．このことから，

$$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{BCD}$$

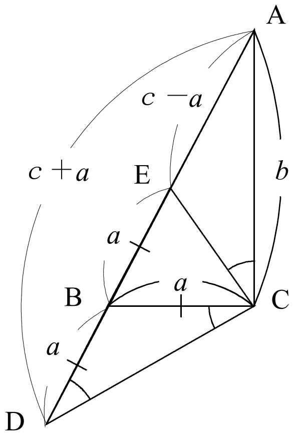

図　1
ピタゴラスの定理の逆を証明するときの図

これから，△ DCE が直角三角形になることを使って，∠ ACB ＝∠ R を導くことができる．

∠ ACB ＝∠ R となることは以下の通り，

$$\angle \mathrm{DBC} + \angle \mathrm{EBC} = 2\angle \mathrm{R}$$
$$2\angle \mathrm{ECB} + 2\angle \mathrm{BCD} = 2\angle \mathrm{R}$$
$$\angle \mathrm{ECB} + \angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{R}$$
$$\therefore \angle \mathrm{ECD} = \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{R}$$

すなわち，これは∠ C が直角であるということを示している．

ピタゴラス数を求める際,用いた $b^2 = (c + a)(c - a)$ の式を，比の式に見立てて図形的な意味を求めたものが，古藤氏の直接証明につながるともいえる．①の式への変形は難易度があっても，変形した①の式自体の説明を求めていくことが探求活動につながる．また，$b^2 = (c + a)(c - a)$ の式や，①の式はピタゴラスの定理の証明において比を使った証明にも利用される．ピタゴラスの定理の証明における数学的探求に逆の証明の直接証明を位置づけることもできる．

５．ピタゴラスの定理の拡張

小見出しをピタゴラスの定理の拡張としたのは，以下の三つの方向を論ずるにあたって，一般化という用語よりも適切と考えたからである．

島田(1990)は「数学の中では，自然数から整数を作ること，それからまた有理数を作ることと，順次に数体系を作っていく過程は，数の拡張とはいうが，数の一般化とはいわないようである」と述べている．また，ポリア(1959)は，「一般化ということは，与えられた一組の対象の考察からそれを含むより大きな組の考察に移ることである」と述べている．一般化と拡張の用語使用については以上のような区別がなされているが，本研究では一貫して拡張という用語を用いることにする．

定理の拡張の研究では，清宮(1988)がある．清宮は，「ある図形の性質がわかれば，さらに，より一般的な図形の研究へと進むのがつねである．このようにして，ある定理を特別な場合として含む新しい定理が発見されると,この新定理を前の定理の拡張とよぶ」として，ピタゴラスの定理の拡張を例示している．

このピタゴラスの定理の拡張は，本研究での数学的探求と重なる部分が多い.拡張させていく際，直角三角形の各辺上の正方形を違う形に変えてみたり，一般の三角形における辺との関係をみていく流れは同じである．

本研究では，ピタゴラスの定理の拡張を数学的探求の入り口として三つの方向から考える．一つ目が，直角三角形から一般の三角形への拡張，二つ目が，ベキ指数への拡張，三つ目が，項数への拡張である．

（1）直角三角形から一般の三角形への拡張

一つ目の直角三角形から一般の三角形への拡張という方向では，まず余弦定理との関連があげられる．△ ABC において，頂点 B から辺 AC に垂線を下ろしてその交点を D とする．（図 ２）

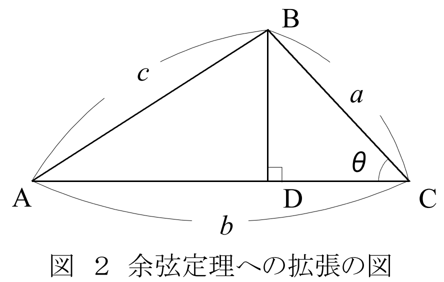

図　2　余弦定理への拡張の図

△ ABD と△ BCD が直角三角形になることから，ピタゴラスの定理を使って各辺の関係が示され，①式となる．

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot \mathrm{DC} \qquad \cdots ①$$

この活動は頂点 B から辺 AC に垂線を下ろすこ

とで，一般の三角形と直角三角形の関係が生じる．このことを利用して探求活動の入り口とすることができる．

この内容は，ユークリッド原論（中村他，1971）第 2 巻, 命題 12 と命題 13 の内容に関連してくる．

さらに，DC=$a\cdot\cos\theta$ とすれば，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\theta$$

と余弦定理となる．ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合とみることができる．

図形と計量の内容では $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ などとピタゴラスの定理を関連させることができる．

また，直角三角形では各辺の長さにおける正方形の関係が示されたが，一般の三角形ではどうかという拡張の方向がある．

△ ABC において，図３のように AC,BC 上に平行四辺形をつくる．

PC=QR とし QR ∥ AK ∥ BL とすると，

▱ACDE ＋ ▱ BCFG ＝ ▱ ABLK

となるパップスの定理が知られている．他にも，各辺からの平行四辺形の作り方にも様々な条件がある．

直角三角形はそのままにして，正方形の形を相似な三角形や四角形に変えたり，円にしたりして（ヒポクラテスの定理），正方形から多角形の条件を変えて探求活動としていくことができる．この内容は，ユークリッド原論第 6 巻，命題 31 の内容に関連してくる．

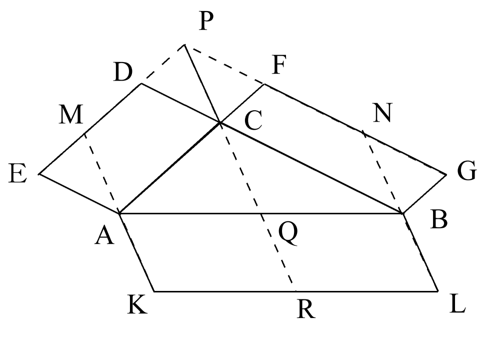

図 3　一般の三角形への拡張の図

また，長方形の各辺と対角線の関係はピタゴラスの定理で容易に関連付けられる．この長方形の対角線の交点を円の中心として長方形を円に内接させて長方形から一般四角形に変えていく流れも数学的探求になる．内接四角形と対角線の関係はプトレマイオスの定理となる.（アルトマン, 2012）

（2）ベキ指数（累乗の指数）への拡張

$a^2 + b^2 = c^2$ のベキ指数を変えたらどうなるか．２乗を３乗にしてみたら，４乗にしてみたら，５乗にしてみたら，･･･ n 乗にしてみたら，n 乗が，フェルマーの最終定理となる．その最終定理とは，$n \geqq 3$ に対して方程式

$$a^n + b^n = c^n$$

が正の整数解 a, b, c をもたないというものである．この予想は，1995 年にアンドリュー･ワイルズが証明し確かな定理となった.（Cipra，B. ,1996）（注 ３）

解決に至る半世紀以上も前に『数と図形』の中でフェルマーの最終定理に関して,ラーデマッヘルとテープリッツ（1989）が取り上げている．その第 13 章「ピタゴラス数とフェルマーの問題」で，$x^4 + y^4 = z^4$ に触れている．そしてこの式が，正の整数解を持たないことを証明している．この証明で用いられているのが，

$a = m^2 - n^2$ ，$b = 2mn$，$c = m^2 + n^2$

の式である．この式は既に，本稿３-（１）-①で取り上げているものである．

$x^4 + y^4 = z^4$ と $x^n + y^n = z^n$ の関連は，シルヴァーマン（2001）に，$p|n$ のとき $n = pm$ となり，さらに，n が素数の場合のワイルズに到る研究の流れが概観されている．

また，$a^2 + b^2 = w$ と平方数の和を平方数と限らなければ，また違った整数の世界も探求される．ピタゴラス数という縛りを解いたり不定方程式に関連づけていく方向も考えることができる．

本節で述べたことは，数学的探求そのものであると共に生徒が学ぶ価値があると考える．この定理でｎ＝４の場合の解決の仕方が生徒の手の届く範囲にあるものといえる．

（3）項数への拡張

項数への拡張は，ピタゴラスの定理の式である $a^2 + b^2 = c^2$ を，$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ としたとき，同じく正の整数解をもつのか，また，図形的にどのような意味を持つのかということが出発点となる．さらに，項数を増やした場合には，

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ や，ベキ指数と項数を増やした $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ の方向にも拡

張される．

$a^2+b^2+c^2=d^2$ は，図形的には空間図形への利用として，辺の長さがそれぞれ a，b，c の時の直方体の対角線 d と捉えられることは周知の通りである．

ポリア(1964)が取り上げている次の問題を考えてみる．

「三 - 直角の頂点が O である四面体において, O で交わる３つの面の面積 A，B，C が分かっている．O に対する面の面積 D を求めよ．」

答えは，面積を(面積)^2，即ち

$$D^2=A^2+B^2+C^2$$

とする点にある．面積の平方を考えてみるという発想そのものに，数学的価値があり数学的探求そのものということができる．

$a^2+b^2+c^2=d^2$ という式には収まらなくなるが，直方体のそれぞれの面の対角線の長さをそれぞれ a, b, c としたときの直方体の対角線 d との関係や三 - 直角の頂点である四面体の高さや稜の長さとの関係など探求活動へつながる．

$a^2+b^2+c^2=d^2$ の自然数解であるが，自然数解は無数に存在する．自然数解は，$(a,b,c,d)=(1, 2, 2, 3)$，$(7, 4, 4, 9)$ などがある．（シェルピンスキー, 1993）

自然数解を得る式を用いてもよいが，a, b, c のうち必ず２数は偶数になるという入り口から数学的探求を始めてもいくつか求められる．

$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$ にも自然数解は存在する．これは「すべての自然数は４個の平方数の和で表せる」という四平方数定理から，順に自然数を表し平方数を求めていく探求の仕方が入り口となり得る．

$a^3+b^3=c^3$ の自然数解は存在しないが，

$a^3+b^3+c^3=d^3$ の自然数解は無限個，存在する．例として，

$3^3+4^3+5^3=6^3$，$1^3+6^3+8^3=9^3$，

などがある．

この話題は，ダンツィク(2007) で触れられている．$a^3+b^3=c^3$ は，自然数解は持たないが，$a^3+b^3+c^3=d^3$ が無限個の自然数解をもつという事実だけでも数学的探求になり得るものと考える．

$a^3+b^3+c^3=d^3$ の式を見たとき、図形的な意味を考えることも数学的価値がある．例えば，一辺の長さがそれぞれ a，b，c の立方体の体積を合わせると，一辺の長さが d の体積の立方体になるということがある．図形的な意味を考えることで，イメージをもって数をとらえ直すこともできる．

（４）ピタゴラスの定理における拡張と，数学的探求と数学的価値

ピタゴラスの定理における拡張の方向から教材化を見てきた. ピタゴラスの定理の拡張の方向が，さまざまな数学的探求の入り口として考えることができる．

一つ目として，一般の三角形への拡張．頂点から対辺へ垂線を引く方向，また，正方形の平方和から多角形の平方和への方向がある．さらに，三角比と関連付けていくことができる．二つ目として, ベキ指数への拡張. 指数を変える方向がある．三つ目として，項数への拡張．項数の変化の方向がある. ここでは数と図形との対比の方法もある. ベキ指数と項数の拡張でも整数値との関連のさせ方で新たな数学的探求の広がりとなる．

拡張の方向が具体的で，ある程度限定的な狭さに絞られると，その狭さが数学的探求の手立てとなり，探求を進める手立てが明確になる．また，その先の背景にどのような内容が関連してくるのか，ピタゴラスの定理の背景にあるような豊かな内容が用意されている必要がある．

数学的探求の結果のふりかえりでは，伝える相手がいる説明する活動が欠かせない．説明する活動では，簡潔さや正確さ，一貫性，また見通しが議論される. それぞれの捉えや考え方がつながり，それぞれ独立していた事柄が関連してくる．

説明する活動における気づきの共有が説明をよりよいものとし，証明や反証となり，数学が生み出される過程に立ち会う体験になると考える．

６．まとめ

本研究は，数学的探求と数学的価値の視点からピタゴラスの定理の教材化に関する考察を行った. 考察を通して, 以下のことが明らかになった．

一つ目が，ピタゴラスの定理を数学的探求と数学的価値の視点から教材化することで，今まで独

立に理解していた内容が，関連した事柄となる教材となりうるということ．

二つ目が，数学的探求の入り口のあり方が，探求の方法と範囲を明確にしていくということ．また，探求の道筋を想定することで，関連してくる内容が想定されるということ．

三つ目が，数学的探求における説明する活動が，数学が発明されてきた過程を追体験することとなり，数学に有用性を感じたり意義を見出していく機会になり得るだろうということである．

今後の課題として，諸外国の数学の教科書でピタゴラスの定理を何学年で，どのように取り扱っているのかを数学的探求と数学的価値の視点から考察していきたい．その考察を通して，わが国においてピタゴラスの定理を指導する際に資することが見出せると考える．

（注 1）求めたピタゴラス数をグラフ化して分布の傾向を調べる方法もある．（細谷，2011）

（注 2）古藤氏については，本学会誌（95 巻 7 号，2013）にて「古藤 怜先生へのインタビュー」という特集がある．

（注 3）この文献の 11 ページに，志村五郎氏の写真とともに谷山・志村予想の話がある．氏は現在（2014 年 8 月）も『数学をいかに教えるか』（ちくま学芸文庫）という一般向けの書物を書き下ろされている．

謝辞

本稿をまとめるにあたっては，
橋本吉彦 横浜国立大学名誉教授に，懇篤な指導を頂いた．あらためて謝意を表する次第である．

引用・参考文献

アルトマン，B.，大矢建正訳（2012），数学の創造者－ユークリッド原論の数学－，丸善出版，pp．145 - 148．

ビショップ,A．J．, 湊三郎 訳（2011），数学的文化化，教育出版． 原著は次の通り Bishop,A．J．(1988)，Mathematical Enculturation, Kluwer Academic Publishers.

シェルピンスキー, B., 銀林浩訳（1993），ピタゴラスの三角形, 東京図書，pp.24 - 26，pp. 91 - 98.

Cipra , B.（1996）,What's Happening in the Mathematical Science 1995-1996, American Mathematical Society, Vol．3，pp．2 - 13．

ダンツィク,T．, 水谷淳 訳（2007），数は科学の言葉，日経BP社，pp. 243 - 244．

デービス，P.J.，ヘルシュ，R.（1986），数学的経験，森北出版，pp.281 - 287，pp.333 - 347.

細谷治夫（2011），ピタゴラスの三角形とその数理，共立出版，p.10.

飯島康之（2008），数学的探究における意思決定について，数学教育論文発表会論文集 41，pp.831-836.

小松孝太郎（2011），ラカトシュの可謬主義からみた数学的探究とその教育的意義：証明に焦点を当てて，科学教育研究 35（3），pp.272 - 286.

松沢要一（2006），こんな教材が「算数・数学好き」にした，東洋館出版社，p．157.

文部科学省（2008），中学校学習指導要領解説 数学編，教育出版，pp.140-142.

中村幸四郎他訳（1971），ユークリッド原論，共立出版，pp．46 - 47，pp.145 - 146.

大矢真一（2001）,ピタゴラスの定理,東海大学出版会.

ポリア，G., 柴垣和三雄, 金山靖夫訳（1964），数学の問題の発見的解き方 1, みすず書房，pp. 39 - 42.

ポリア，G.，柴垣和三雄訳（1959），帰納と類比，丸善出版，p.12.

ラーデマッヘル,H.，テープリッツ,O.,山崎三郎，鹿野健訳（1989，なお原著ドイツ語版は 1930 年に出版されている），数と図形，日本評論社，pp.118 - 128.

清宮俊雄（1988）, 改訂版 幾何学－発見的研究法－，科学新興新社，pp．46 - 54.

関口靖広（2002），探求的活動のための証明，数学教育論文発表会論文集 35，pp．181 - 184.

島田茂（1990）, 教師のための問題集, 共立出版, p. 58.

清水克彦（1998），数学的探究としての実験についての理論的検討，日本科学教育学会論文集 22，pp.261 - 262.

シルヴァーマン, J. H.,鈴木治郎訳（2001），はじめての数論,ピアソン･エデュケーション, pp. 350 - 351.

ファン･デル･ヴェルデン，B.L.，加藤文元，鈴木亮太郎訳（2006），古代文明の数学，日本評論社，pp．1-11.