数学的問題解決方略の指導に関する研究　IV
—学力要因と解法過程の関連性に着目して—

石田　淳一*

Studies on Teaching of Mathematical Problem-Solving Strategies　IV

Junichi ISHIDA

1．研究の意図・目的

問題解決方略の指導は，子どもの問題解決力を伸ばすのに有効であることが先行研究（Kantowski, 1977; Goldberg, 1978; Lee, 1978）から示されている。しかし，方略の指導が学力の異なる子どもにどのような影響を及ぼしているかについては十分に明らかにされてはいない。方略の指導は全体として子どもの成績の向上に寄与するが，学力の異なる子どもを対象にその影響を検討した研究は少ないようである。

例えば，平成元年度に実施された日米共通調査に含まれた「おはじきの数」問題の結果の分析からは，明示的な方略指導を行っている学校の子供はそうでない学校の子供よりも「一般化」問題の成績および解き方の多様性に関して優れていることが示された。それは，実験群に「表を作る」や「きまりの式を作る」などの方略の使用が多かったためである。しかし，実験群でも一般化できる子どもはほぼ半数にすぎなかった（石田，1991）。これは方略指導が個に対応しきれていないことの一端を示している。Ishida (1990) は，学力要因に着目して，問題解決方略の指導効果について検討した。8週間にわたる問題解決方略の指導により，上位，中位，下位のいずれの学力レベルでも子どもの解決計画の得点の向上が見られた。しかし，解決計画を質的にみると学力レベル間に差異が見られ，下位群の子どもには効率的な方法が少なかった。この結果は，方略指導は学力の異なる子供に異なる影響を及ぼしていることを示している。例えば，パタン発見方略の指導を取り上げても，パタンを見つけて，それをどのように利用するかに関しては学力の異なる子供の解決行動に差異が見られるのである（石田，1990）。子どもの解法過程の質的相違については，算数の学力要因に関係していると考えられる。

方略指導が「一般化」問題の解決過程に及ぼす影響の全体的な分析（石田，1991）からは，同一の「おはじきの数」問題を用いて，「一般化」問題の解法過程が学力の異なる子ど

*数学科教育教室・横浜国立大学教育学部

もでどのように異なるのかを明らかにすることが課題として残された。これは，すべての子どもに問題解決方略を解決のための手だてとして与えることを強調してきた方略指導のあり方を見直す上で意味があろう。なぜなら，方略を用いて一応の答えを求めた後に，その解き方を一般化するなどの解法の改善に向かえない子どもが学力下位群を中心に多く見られることが予想されるからである。算数の学力要因を考慮して，「一般化」問題の問題解法過程を検討することは，個に応じた指導，とりわけ算数学力の低い子供の成績をさらに向上させるための手がかりを与えてくれるだろう。

この研究の目的は，問題解決方略の指導を長期間受けた６学年の子供を対象にして，学力レベルの異なる子供の「一般化」問題の解法過程の違いを明らかにすることである。

２．研究方法

(1)　調査対象児

調査対象は，愛知県額田郡のＫ小学校６学年の子ども130人であった。Ｋ小学校の子どもは調査実施時点で，すでに４年間，問題解決方略の指導を受けている。Ｋ小では，算数の年間指導計画の中に「絵や図をかいて」，「表を作る」，「パタンを見つけて」，「整理したリストを作る」，「逆向きに考えて」，「試行錯誤」，「簡単な場合を考える」の７つの方略を位置づけて１学年から学年段階に応じて指導している。これらの方略の指導は，原則として通常の算数の教科書の内容指導とともに行われる。さらに，年間ほぼ２０時間，方略の獲得および応用に焦点化された授業が行われている。

５学年の３学期に実施されたCRT学力テストの結果に基づき，130人の子どもが学力上位，中位，下位の３群に分けられた。偏差値による全国評定が４と５の者を学力上位，評定３の者を学力中位，評定１と２の者を学力低位とした。その結果，学力上位群は42人，中位群は36人，下位群は52人となった。

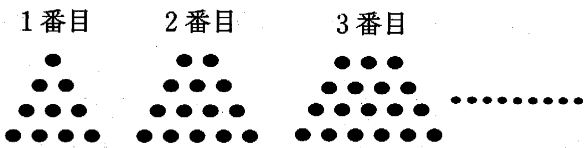
(2)　調査問題と手続き

「一般化」問題の解法過程における方略の用い方を調べることを目的に日米共通調査問題で用いられた「おはじきの数」問題を使用した。これは，伴って変わる２つの数量に着目して，項数が大きくなったときに数量関係を正しく捉えて一般化できるかどうかを調べることにあった。調査問題は平成元年７月に，調査時間15分で実施された。

（調査問題）

「おはじきの数」問題

問題　おはじきを，下の図のように１番目，２番目，３番目……とならべていきます。



問１　４番目にならべるおはじきは，全部で何個になりますか，できるだけいろいろな考え方で求めましょう。

問２　16番目にならべるおはじきの数を求める考え方と式を書きなさい。

問３　100番目にならべるおはじきの数を求める式を書きなさい。

(3) 分析の視点

以下の４つの視点から３つの学力群の比較を行う。

1）問１から問３までの正答率の比較

2）問１における解法タイプの多様性の比較

3）問１，問２，問３の解法タイプの使用頻度の比較

4）解法過程の類型の比較

(4) 解法タイプとエラータイプ

「おはじきの数」問題の分析（石田，1991）から以下のような解法タイプとエラータイプが特定されている。

1）解法タイプ

A：おはじきの図をかく。

B：段ごとのおはじきの数の増え方に着目する。

C：項数（番号）が１つ変わるたびにおはじきが４つ増えることに着目して，変わらない部分と変わる部分に分けた式を作る。主な解き方として，１番目のおはじきの個数を10個として，増加分をそれに加えるものがある。

C'：４つずつ増えるパタンに着目して，前項に４を加えることにより個数を求める。

D：図形の求積公式（平行四辺形，台形）を利用する。

E：表を作る

F：その他。

2）エラータイプ

主なエラータイプは下記の通りである。

GC：10を基にするが，項数ｎのときに増加分を求めるのに４をｎ倍する。以下の表ではＣの誤答に該当する。

S：変化量４を求める項数倍する。

R：求める項数が既知の項数のＸ倍であるときに，既知の項の総数をＸ倍する。

W：無答。

３．研究の結果

(1) 正答率

学力上位群，中位群，下位群の問１から問３までの正答率は表１および図１に示されている。カイ２乗検定を行った結果，問２と問３において学力間に有意差が見られた（それぞれ，$\chi^2=6.01$, $p < .05$; $\chi^2=10.42$, $p < .01$）。

表１　３群の問１，問２，問３の正答率

	問１	問２	問３
上位群	100%	78.6%	61.9%
中位群	100%	66.7%	47.2%
下位群	98.1%	50.0%	26.9%

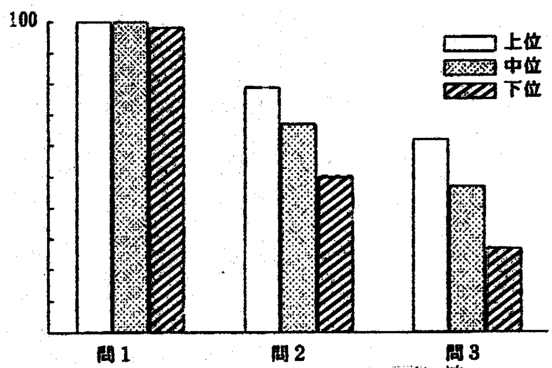


図１　３群間の正答率の比較

(2) 問1における解法タイプの多様性

問1では子供にできるだけ多くの考えを記すように要求し，4つの解答欄を設けた。前述の解法タイプに基づいて，平均解法タイプ数を求めた。その結果は表2に示されている。

表2　問1の平均解法タイプ数

	平均	SD	人数
上位群	3.19	0.66	42
中位群	2.94	0.71	36
下位群	2.56	0.72	52

学力上位群，中位群，下位群の平均解法タイプ数について平均の差をF検定した。その結果，3群間の平均値に有意差が見られた（$F=9.65$, $p<.01$）。さらに多重比較を行った結果，中位群と下位群の間に有意差（$HSD=0.36$, $p<.05$）が見られた。

(3) 問1の解法タイプの使用頻度

問1の解法タイプの多様性に関連して3群間の主たるちがいがどこにあるのかを探ることにしよう。表3および図2に3群の問1における解法タイプの使用頻度の割合が示されている。

問1では，A，C'，Eの3つ方法が3群に共通に多く用いられた。しかし，これらは一般化が容易な方法ではない。一般化が容易な方法であるB，C，Dについてみると，3群間のちがいがCの使用頻度に見られた。頻度の高い順に上位群，中位群，下位群であった。Bについては，中位群や下位群ではCと同程度の使用頻度であった。上位群では，CがBよりも多く用いられた。3群ともにDの使用頻度は低かった。

表3　問1の解法タイプの3群間の比較

	A	B	C	C'	D	E	F
上位群	81.0	33.3	52.4	66.7	7.1	66.7	11.9
中位群	77.8	36.1	38.9	61.1	11.1	63.9	5.6
下位群	73.1	26.9	25.0	57.7	3.8	65.4	3.8

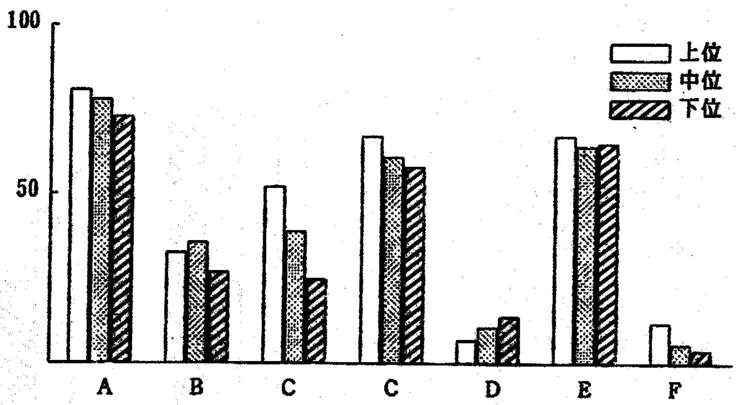


図2　問1の解法タイプの使用頻度の比較

(4) 問2と問3の解法タイプの使用頻度

問2，問3における3群の解法タイプの使用頻度の割合をまとめたのが表4と表5である。問2では，Cについて問1と同様に，上位，中位，下位の3群間に使用頻度のちがいが見られた。Eは，上位群に比べて中位群や下位群に多く見られた。C'やWは下位群が上位群や中位群よりも多かった。問3でも，Cについて3群間に使用頻度のちがいが見られた。下位群ではWが最も高い頻度を占めた。また，下位群のRの割合も他の2群よりも高かった。

表4 問2の解法タイプの3群間の比較

	A	B	C	C'	D	E	F	S	R	W
上位群	0.0	26.2 (2.4)	40.5 (7.1)	4.8 (2.4)	4.8 (2.4)	16.7	0.0	0.0	0.0	7.1
中位群	2.8	22.2 (2.8)	30.6 (2.8)	5.6 (2.8)	0.0	25.0 (11.1)	0.0	0.0	2.8	11.1
下位群	1.9	15.4 (1.9)	15.4 (3.8)	13.5 (5.8)	1.9	23.1 (5.8)	5.8 (5.8)	1.9	3.8	17.3

注：数値は%，( )内は解法タイプの誤答の割合

表5 問3の解法タイプの3群間の比較

	A	B	C	C'	D	E	F	S	R	W
上位群	0.0	21.4 (2.4)	47.6 (7.1)	0.0	4.8 (2.4)	2.4 (2.4)	0.0	2.4	2.4	19.0
中位群	0.0	22.2 (5.6)	38.9 (8.3)	0.0	0.0	0.0	4.8 (4.8)	5.6	5.6	22.2
下位群	0.0	17.3 (5.7)	23.1 (9.6)	0.0	1.9	0.0	3.8 (3.8)	1.9	15.4	36.5

注：数値は%，( )内は解法タイプの誤答の割合

(5) 解法過程の類型

すでに「おはじきの数」問題の結果の分析（石田，1991）により，問1から問3の解法タイプに基づく解法過程として，次の6類型が見いだされている。

類型1：問1に一般性のある方法が含まれ，それを問2，問3に適用する。

類型2：問1に一般性のある方法がなく，問2には問1で用いた一般性のない方法を適用する。

類型3：問1に一般性のある方法がないが，問2で一般性のある方法を考える。

類型4：問1に一般性のある方法が含まれているが，問2でそれを用いない。問1で用いた一般性のない方法を適用する場合が多い。

類型5：問1に一般性のある方法がなく，問2，問3では無答である。

類型６：その他。

表６に３群の各類型の割合がまとめてある。また，図３は表６を図表現したものである。主要な類型として類型１，類型２，類型４があった。類型１では３群間にちがいが見られ，割合の高い順に上位群，中位群，下位群であった。類型２や類型４では割合の高い順に，下位群，中位群，上位群であった。上位群の主な類型は類型１であった。中位群や下位群は，特に下位群に顕緒であるが，おおまかに類型１，類型２，類型４の３つのグループに子どもが分かれた。

表６　３群の解法過程類型の比較

	類型１	類型２	類型３	類型４	類型５	類型６
上位群	61.9%	9.5%	7.1%	16.7%	0.0%	4.8%
中位群	41.7%	19.4%	2.8%	22.2%	5.6%	8.3%
下位群	28.8%	25.0%	3.8%	25.0%	11.5%	5.8%

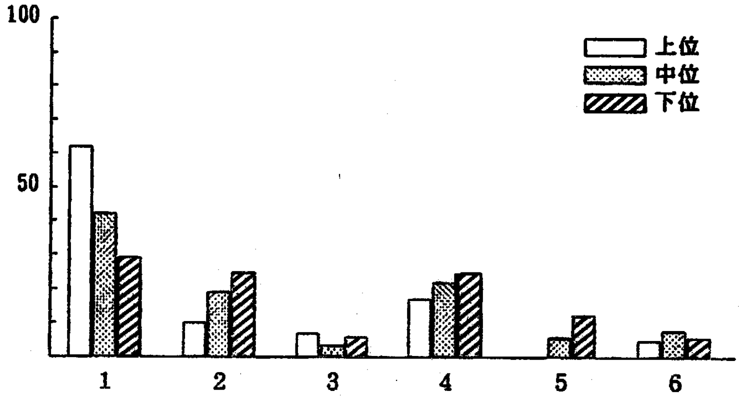


図３　３群の解法過程類型の比較

表６は，正誤を含めてどのような解法過程類型をとるかについて分析したものであるが、表７は，３群の問３まで正答した子どもの度数を示す。これにより，一般化できる子どもの割合がどの類型に多いかがわかる。

表７　３群の各類型における全問正答の度数

	類型１	類型２	類型３	類型４	類型５	類型６
上位群	19(26)	1(4)	1(3)	4(7)	0(0)	1(2)
中位群	11(15)	1(7)	1(1)	0(8)	0(2)	3(3)
下位群	11(15)	0(13)	1(2)	1(13)	0(6)	0(3)

注：ａ（ｂ）はｂ人中ａ人が正答であることを示す

上位，中位，下位の３群ともに，問３まで正答する場合は類型１に多かった。ただし，

上位群を含めて正答率は100%でなかった。中位群と下位群に多かった類型2や類型4では問3まで正答できない子どもが多かった。

さらに，類型1，類型2，類型4について一般化できないケースをみることにする。

類型1に見られた誤答は，式の数値を一般的によむことが適切にできなかったための間違いと言える。次のような誤答事例が多かった。

・問2でBやCにより正答しても，問3でそれを正しく適用できない。あるいは問3で無答である。

・問1でCやDで正答しているが，問2，問3でそれを正しく適用できない。

次に中位群や下位群に多く見られた類型2や類型4についてみよう。

類型2に属する中位群や下位群では，問2では問1で用いたEを選択する子どもが多かった(中位群で84.7%，下位群で64.3%)。問3ではEを選択せずに，一般性のある式を考案しようとして失敗することが多かった。中位群の66.7%はSやR，Wによる誤答であり，下位群の全員がW，R，GCによる誤答であった。

類型4の中位群や下位群の子どもは，問1の方法に一般性のあるBやC，Dが含まれていたが，それらを選択しなかった。問2では，問1で用いたEやC'，新たに考案したRやS，あるいは無答であった。実際，下位群の類型4に属する13人のうち，Cを含む子どもは8人，Bを含む子どもが5人であった。しかし，これらの子どもはBやCを選ばずに，Eを用いた子どもが4人，RまたはSが4人，Wが4人であった。これは，一般性のある式を評価できなかったためである。類型4の上位群の子どもは，他の2群よりも問3までの正答の割合が高かった(57.1%)。これは，表から式を作れる子どもが多かったからである。

さて，類型4の子どもの中には問2で表を選択する子どもが多かったので，ここで，問1に一般性のある方法と表が含まれる子どもが問2でどの方法を選択するかを調べてみよう。その結果は表8にまとめてある。一般性のある式を選択する子どもの割合は高い順に，上位群，中位群，下位群であった。しかし，上位群でも52.2%にすぎなかった。

表8 問1に表と一般性のある解法を含む子供が問2で選択する解法

	表	一般性のある式	その他の式（誤答を含む）	無答
上位群	4	12	5	2
中位群	2	6	5	0
下位群	4	5	5	3

注：数値は人数を示す

問1では，3群に共通して「表を作る」方略の使用が多かった。そこで，問1で表と式（C）の両方を考えた子どもの割合を見てみよう。このことから，表と式（C）の関連性への着目を調べられる。その結果は表9にまとめてある。これも，問1で表と式（C）をともに考える子どもの割合は全体的に低く，上位群でも46.4%にすぎなかった。しかし、

上位群と中位群，下位群の間にちがいがあるように思われる。

表9　問1で表と式（C）の両方を考えた子どもの割合

	上位群	中位群	下位群
表を考えた者の度数	28	23	34
表と式（C）を考えた者の度数	13	6	10
両方を考えた者の割合	46.4%	26.1%	29.4%

4．議論

結果の分析から，学力の異なる3群間に次のようなちがいが見られた。

1）問2，問3の正答率に関して3群間にちがいがみられ，高い順に上位群，中位群，下位群であった。

2)問1の解法タイプの多様性では，多様性のある順に上位群，中位群，下位群であった。主なちがいは問1に含まれるCの割合の相違であった。A，C'，Eは3群に共通に使用頻度が高かった。

3）解法過程類型でみると，類型1の割合は，高い方から上位群，中位群，下位群であった。類型2や類型4では割合が高い方から下位群，中位群，上位群であった。

4）問1で表と式（C）の両方の方法を考える子どもの割合は上位群に比べて，中位群や下位群では低かった。

これらの結果は，問題解決方略の指導を長期間受けてきた6学年の子どもを対象としているが，「一般化」問題の成績や問1の解法の多様性に学力要因が関係していることを示唆する。「おはじきの数」の問題において，問題解決方略の指導を受けている子どもでも，解法の多様性が必ずしもよりよい方法の発見，あるいは一般性の点から方法を評価することに結びつかないことが指摘されている(石田，1991)。本研究でも，これを追認することができた。そして，これらの様相が特に学力下位群の子どもに多く見られたのである。

問1の多様性に関連して，3群間の主なちがいがCの使用頻度にあった。これは，一般性のある方法への着眼における学力間のちがいを反映するかもしれない。3群ともに問1で共通にEが多かったのは，「表を作る」方略の指導により「おはじきの数」問題のような「変わり方」の問題の処理に際して，順に調べて変わり方のパタンを見つけ，それを表にすることができるようになっているためであろう。しかし，表の観察から構造を捉えた一般性のある式にできるかどうかは学力要因が関係していると考えられる。ただし，上位群でもBやDが少なかったことは，一般性のある解法に多様性があるわけではない。観点を変えてC以外の一般性のある方法を追求できる能力や態度を育てることが課題となろう。これには，方略指導が「変わり方」の問題では，表を作り変化に着目して式を作るという1つの典型的な解決手順を強調したことが影響していると考えられる。例えば，表から変化に着目して式を導いたら，今度は対応関係に着目して別の式を作る，そして，その意味を図形的に考察したり，図の観察から別の式を作ったりすることができる。

問1で表と式（C）の両方を考える子どもが上位群に比べて中位群や下位群に少なかったことは，中位群や下位群の子どもにとってパタンを利用して表を作ることは比較的容易であるが，その観察から式を作ることの困難性を示している。これは同時に表による解決を改善する文脈で一般性のある式を作ることが困難であることを意味するだろう。本研究の調査対象である子どもが受けてきた問題解決方略の指導では，主にその子どもなりに使える手だてを獲得させることがねらわれた。そのために，答えが求められることに重きが置かれ，答えが出た後にそれをよりよくすることの指導が不十分であったと考えられる。

類型1の子どもの割合が上位群に多かったのは，簡単な問題でよりよい式を考え，それを利用して一般化をはかるという手続きの理解にすぐれていたからであろう。しかし，類型1の子どもすべての問3までの正答率が100%でなかったことは，小さな項数における一般性のある式を一般化すること自体必ずしも容易でないことを示している。

他方，類型2の子どもは中位群や下位群が上位群よりも多かった。この解法過程をとるのは問1や問2で一般性のある式を見いださなくても，表による方法で答えが確実に求められるからである。問3ではじめて求答式をつくるのは自然であるが，そのとき小さな項数のような簡単な問題にもどり，そこで構造を捉えた式をつくることができないのは問題であろう。小さい項数場面にもどれない行動については，一般性のある式の適用範囲が項数が大きい場合に限られ，その式が簡単な場合では適用できないと考えているのではないかという解釈 (Stacey,1989) がある。子どもの解法過程を答案の上から分析するとき問1にもどって考える子どもがほとんど見られなかった事実は，ステイシーの解釈を支持する証拠の1つになるだろう。

ところで，類型4のように一般性のある式が含まれていても，中位群や下位群の子どもはその式のもつ一般性を評価せずに，表による方法を選択する子どもが多かった。これは，多様な解き方に対する評価についても学力間にちがいがあることを示唆する。子どもによって「よい」解き方の意味が異なることが考えられる。ある子どもは，構造を捉えた一般性のある式が効率性の点で優れていると評価しても，別の子どもは表を作ることが答えを確実に求める方法であると考えるかもしれない。後者の子どもには，表の途中を省略して答えが出せる式のもつ「よさ」がむしろ不安なものとなっているのではないか。「表を作る」方略の限界を評価させるとともに，きまりの式を見いだした後にその式でよいわけを筋道立てて説明する妥当性の吟味をする場の充実をはかる必要がある。

5．指導への示唆

ある子どもは，類型1のように問1で簡単な場合で式を考え，それを問2，3に適用できる。他方で，項数の小さい場合でよりよい方法を考えることはせず，項数の大きい場合にはじめて効率的な方法を考えようとする子ども，あるいは，式のもつ一般性を評価できない子どももいる。全体的には方略指導は有効であったとはいえ，それが子ども1人1人に対応しきれていないことを示している。

問3までの正答で一般化できるかどうかを判断するとすれば，上位群，中位群，下位群ともに類型1の子どもに一般化できる子どもが多かった。これは，簡単な問題できまりの式をみつけて，それを複雑な問題に適用するという一般化の手続きの有効性を示している

かもしれない。このような手続きの理解とそれを確実に実行できるようにする指導が中位群や下位群の子どもには必要である。また，同じ学力群といっても解法過程のちがいは，その子どもの「一般化」問題における取り組みのちがい，さらには，解法の質的差異を反映していると考えられるから，その解決水準に対応して指導することが望ましいと思われる。

例えば，類型１の誤答した子どもには，式の数値の意味の把握を確実にすることや，式の妥当性の確かめの指導が大切であろう。類型２の子どもには，多様な方法を考えられるようにするとともに表から式，図から式を作ることができるようにする指導が大切であろう。類型４の子どもには式が一般的な関係を表現していることが理解でき，それを評価できるようにする指導が大切であろう。

引用文献

Goldberg, D. J. (1987). The effects of heuristic methods on the ability to write proofs in number theory. *Dissertation Abstracts International,* 35, 4989B.

Ishida, J. (1990) An Exploratory Study of the Effects of Explicit Teaching of Problem Solving Strategies on Japanese Sixth Graders. *Journal of Science Education in Japan,* Vol. 14(2), 96-109.

石田淳一 (1991) 日米共通調査による問題解決の研究—おはじきの数問題の分析—，三輪辰郎 (研究代表)「数学的問題解決に関する日米共同研究成果報告書」，73-96.

石田淳一 (1991) 数学的問題解決方略の指導に関する研究—「おはじきの数」問題を手がかりに—，日本数学教育学会誌第73回総会特集号，第73巻，p.96

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education,* 8, 163-180.

Lee, K. S. (1978). An exploratory study of fourth graders' heuristic problem solving behavior. *Dissertation Abstracts International,* 38, 4004A.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalizing Problems. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 20, 147-164.