

分 数 の 概 念 の 指 導

内藤寛之*・円福寺恭司**・渡辺信博***・村山 靖4*・
池田敏和5*・浜 泰一6*・保坂 正7*・樋口禎一8*

Teaching the Concept of Fractions

Hiroyuki NAITO*, Yasushi ENPUKUJI**, Nobuhiro WATANABE***
Yasushi MURAYAMA4*, Toshikazu IKEDA5*, Yasukazu HAMA6*
Tadashi HOSAKA7*, Teiichi HIGUCHI8*

I. 研究主題

小学校における分数の概念の指導の実践的研究

II. 研究のねらい

分数は小学校算数科における重点教材の一つであり、児童にとっても、指導者にとっても、難教材の一つである。例えば、高学年の児童に分数計算についての問題を与えると、他の数範囲の計算問題の通過率よりは若干落ちるが、形式的な計算の結果を求めることは意外にできる。しかし、次のような質問に答えることは大変苦手である。

- 同分母分数の加法・減法では、なぜ分子だけ加減すればよいのか。
- 異分母分数の加法・減法では、なぜ分母を揃えるのか。
- なぜ、分数×整数では分子に整数を掛け、分数÷整数では分母に整数を掛けるのか。
- 分数×分数では、なぜ分子どうし分母どうしを掛ければよいのか。
- 分数÷分数では、なぜ被除数に除数の逆数を掛ければよいのか。

つまり、上辺の知識や形式的な技能は身につけているが、それらを支える意味の理解がなされていないということである。上記の質問は、全て第3学年に導入され第5学年までに指導される、次の分数の意味と、計算のきまり（四則計算の法則及び性質）に基づいた説明を要求するものである。

* 横浜市立並木第三小学校 (Namiki Daisan Primary School)

** 川崎市立高津高校 (Takatsu Senior High School)

*** 県立相模田名高校 (Sagami Tana Senior High School)

4* 横浜市立野庭中学校 (Noba Junior High School)

5* 数学教育教室 (Dept. of Mathematics Education)

6* 県立希望ヶ丘高校 (Kibougaoka Senior High School)

7* 横浜市立西本郷中学校 (Nisihongou Senior High School)

8* 数学教室 (Dept. of Mathematics)

a/b は、①全体(1)を b 等分したものの a 個分を表す。 $(a \leq b)$ [分割分数]

② $1/b$ を単位にしたとき、その a 倍を表す。 [量分数]

③ a の b に対する割合を表す。 [割合分数]

④ $a \div b$ の商を表す。 [商分数]

これらの意味の理解が十分でない児童は、つまずきも多くなり、分数は難しい、嫌いだということになってしまうのである。

そこで、児童が分数の概念を理解するのに、どんな困難な点があるのかを究明し、指導の改善を図ることをねらいに研究を進めた。

Ⅲ. 研究の方法

分数の概念を理解するのに、児童にとってどんな難しさがあるのかを探り、それらの指導についての考えをまとめる。特に、第4学年の分数の意味指導について、実践・考察をする。

Ⅳ. 研究の内容

(1) 分数の概念理解の難しさ

児童が分数の概念を理解するには、整数や小数との違いから起こる次の3つの障害を乗り越えなくてはならない。

・記数法の違いがあること ・同値分数が無数にあること ・割合の概念を含んでいること

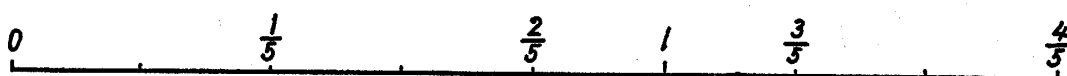
①記数法の違いがあること

十進位取り記数法により表記する整数・小数と異なり、分数は分母と分子の2整数の順序対により表記する。このことが大きな障害となって、子供たちを分数嫌いにさせている。歴史的に見ても、分数を用いる場面の1つ、量の測定において端数部分を数で表す場合に、古代人は新しい単位を作り、分数を用いることを避けていたと考えられる。例えば、ft. と in., 16. と oz. などがそれである。また、古代エジプトでは、単位分数のみを用いて全ての分数をその和で表していた事実も例として挙げられる。このことは、分母のみに着目すれば数の大きさが分かるという単位分数の簡便さを、古代エジプト人が感じていたからだろうということが推測でき、裏を返せば、分母と分子の両方を考えなければ数の大きさが分からない分数は難しいということを示していると考えられる。

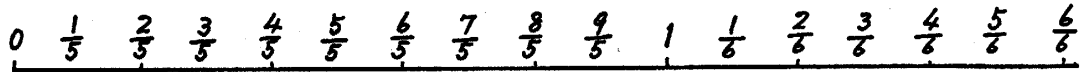
「4年・分数」の学習前の児童に、「数直線(図-1)の目盛りの上に、 $1/5$, $2/5$, $3/5$,



(図-1)



(図-2)



(図-3)

4/5 を書きなさい。」と出題したところ、(図-2)、(図-3) の誤答があった。

(図-2) は $1/5$ の意味が分かっていないし、(図-3) はさらに、十進数と混同していると考えられる。これらのつまずきは、計算問題にも表れてくる。例えば、 $1 - 1/4 = 9/4$ や $1 - 1/4 = 1/6$ や $1 - 1/4 = 0/4$ などの誤答である。

以上のようなことから、1 と考える量があって、それを b 等分したものの a 個分を表すという分数の意味を理解させるためには、単位分数の意味をしっかりと押さえ、1 との関係や十進数との共通点と差異を明確にすることが大切であることが分かる。また、このことについては、仮分数を帯分数に、帯分数を仮分数に直す学習場面でも再度強調すべき内容となる。

この分数の意味指導では、具体物を操作して量を分数で表したり、数直線上に分数を位置づけたりすることを通して指導されることが多いのだが、その際、等分するという意味から、子供たちの関心が操作の正確さに向けられる傾向が強い。勿論、正確に操作することも大切なことではあるが、例えば、 $2/3$ を考えるとき、 $1/2 < 2/3 < 1$ や $1/2 < 2/3 < 3/4$ と考えるような、分数の大小関係に関する数に対する感覚を養うことが大切だと考える。この感覚は、紙を等分したり、フリーハンドで図を描いたり、計算の結果を見積もったりするときに生きて働くものである。

$200 + 300 = 500$	(100 が 2 個と 3 個)
$20 + 30 = 50$	(10 が 2 個と 3 個)
$2 + 3 = 5$	(1 が 2 個と 3 個)
$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$	($\frac{1}{5}$ が 2 個と 3 個)
$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} < 1$	($\frac{1}{6}$ が 2 個と 3 個)
$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7} < 1$	($\frac{1}{7}$ が 2 個と 3 個)

(図-4)

同分母分数の加法減法においても、ただ分母はそのままにして分子どうしを計算すればよいということ指導するのではなく、(図-4) のように見させ、単位の考えを用いれば、みな $2 + 3$ と見られること、みな単位の大きさが異なるので、和の大きさも異なることを指導していく。

②同値分数が無数にあること

分数には大きさの等しい数の表記の仕方が無限にある。このことは、初めに同分母の仮分数と帯

分数について学習する。次に異分母の同値分数について大小・相等関係を学習していく。十進数と違って同値分数が無数に存在すること、それらを表記するには、 $(a \times n)/(b \times n)$ 、 $(n \neq 0)$ を用いればよいということをお教えしようとすれば、これもまた子供たちを分数嫌いにする原因となる。つまり、同値分数を用いることの必然性のある具体的場面での導入が必要となる。第5学年で学習する異分母分数の加法・減法では、単位の異なる数どうしはそのまま足したり引いたりできないことから、同値分数を用いる必然性はでてくる。ところが、第4学年では、ただ数直線や図などの観察から同値分数を見つけ出させるような指導になりがちで、児童にとっては受け身の学習になってしまうことが多い。そこで、1つのものを等分した後、改めて3等分に直す方法を考えるような場面で、同値分数の

存在に気付かせ、それから数直線を使って同値分数を見つけ出す操作に入る。このような展開の指導をすることによって、同値分数を学習する必然性が出てくると考える。

③分数が割合の概念を含んでいること

a/b は、全体 (1) を b 等分したものの a 個分を表すという分数の意味を最初に指導する。そのときから既に割合の概念が含まれている。つまり、 a/b は 1 に対する割合であるから、1 と見るものの量が変われば a/b に当たる量も変わる。いつも 1 と見るものに留意して、その大きさを考えなければならないのである。例えば、数直線上に (図-5) のように $1/3$ 、 $2/3$ を位置つけた子供は、2 を 1 と見たときの割合 $1/3$ 、 $2/3$ を考えてしまっているのである。



(図-5)

このように、分数には学習しだしたときから、その背後に割合の概念が含まれていることが、分数を理解しにくい原因の 1 つとなっている。

そこで、第 3 学年の分数指導において、例えば、 $1/3\text{m}$ と 2m の $1/3$ や 3m の $1/3$ との違いについて、具体的操作を通して理解を図るなど、量と割合の両方に用いられる分数をしっかりと押さえる必要があると考える。

(2) 4 年「分数の大きさ」について

本学年では、分数の記数法を十分に理解させること、分数を数直線上に位置づけさせ整数も分数で表せること、同分子分数の大小関係や同値分数の存在に気付かせることがねらいとなる。分数の記数法をしっかりと理解させる、つまり、 $a/b = (1/b) \times a$ と考え 1 よりも大きい数も分数で表すことができるようにさせるためには、子供自らが単位分数に着目して、ある量を分数で表すようにする問題場面を考える必要がある。また、そこで求めた分数を具体的操作に振り返って考え直してみたり、整数と比較したりして数直線上に正しく位置づけさせることも展開に組み入れるようにする。

V. 第 4 学年の実践例

(1) 単元名 分数の大きさ

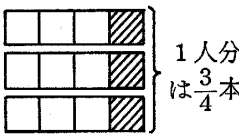
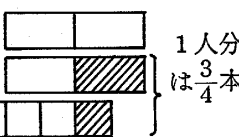
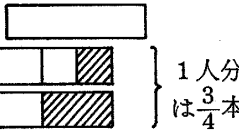
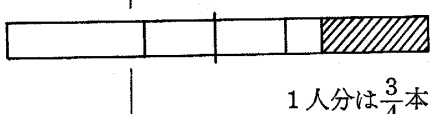
(2) 指導計画 (6 時間扱い)

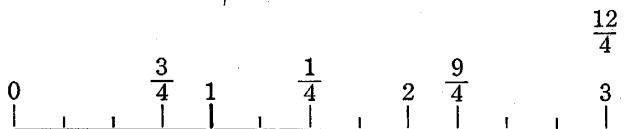
- | | |
|---------------|-----------|
| ① 真分数・仮分数・帯分数 | 1 時間 (本時) |
| ② 分数と整数の関係 | 1 時間 |
| ③ 帯分数と仮分数の関係 | 1 時間 |
| ④ 分数の大小・相等関係 | 2 時間 |
| ⑤ 練習 | 1 時間 |

(3) 本時目標

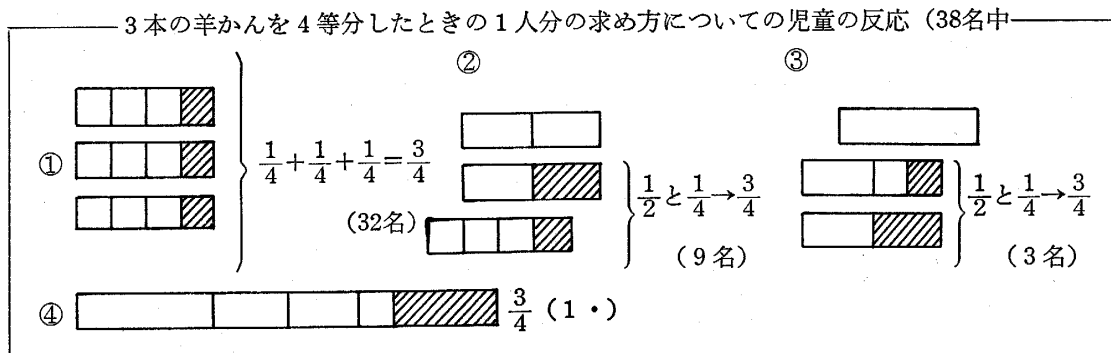
分数 a/b は、単位分数 $1/b$ をもとに、その a 個分を表す数であることを理解し、分数の範囲を拡張する。

(4) 本時の展開

教師の活動と意図	予悲される児童の反応	指導上の留意点
<p>1. 課題を提示し、把握させる。 「お祝いの会で羊かんを出そうと思います。 3本を□人に同じように分けて出すと、1人分、2人分、3人分、……の羊かんの大きさは、どれだけになるでしょう。」 ・□が4人のときは、どれだけになるでしょう。</p> <p>2. 3本の羊かんを4等分する方法を、具体的操作を通して考えさせる。 ・□が4人のときは、どれだけになるでしょう。テープを使って、まず1人分を求めましょう。</p>	<p>1-1. $3 \div 3 = 1$ 1人分は1本、2人分は2本、3人分は3本、……。</p> <p>1-2. $3 \div 3 = 1$ 1人分は1本、2人分も1本、3人分も1本、……。</p> <p>1-3. $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$, …… 1人分は3本、2人分は6本、3人分は9本、……。</p> <p>2-1.  1人分は $\frac{3}{4}$ 本</p> <p>2-2.  1人分は $\frac{3}{4}$ 本</p> <p>2-3.  1人分は $\frac{3}{4}$ 本</p> <p>2-4.  1人分は $\frac{3}{4}$ 本</p> <p>2-5. 目分量でやろうと試行錯誤している。</p> <p>3-1. 4等分しやすいように、3本を分けて考えた方、1と見たりしている。</p> <p>3-2. $\frac{1}{4}$ 本をもとにして、そのいくつ分であるかで</p>	<p>1-2. 1人分、2人分、……の意味を誤解している。各々の羊かんの大きさを求める問題ではないことを知らせる。</p> <p>1-3. 1人に3本ずつ配る場面ではなく、3本の羊かんを何等分かする場面であることを知らせる。</p> <p>2-1. 等分しやすい1本の場合に分けて考えていることを押さえる。</p> <p>2-2. 4等分しやすい2本と1本の場合に分けて考えていることを押さえ、$\frac{1}{2}$が$\frac{2}{4}$となることは具体的に$\frac{1}{4}$のテープの長さで気付かせる。</p> <p>2-3. 4等分は2等分したもの（2人分）をさらに2等分するという考えを用いていることを押さえる。$\frac{1}{2}$が$\frac{2}{4}$となることは具体的に$\frac{1}{4}$のテープの長さで気付かせる。</p> <p>2-4. 3本を4等分しやすい1と考えたことを押さえ、1人分の大きさは1本ずつにもどして考えさせる。</p> <p>2-5. 1人分が整数や単位分数にならないために難しいと考えられる。何本だったら簡単にできるかを問い、3-1や3-2に気付かせる。</p> <p>3-1. 分けられる本数を分解し、単純化して考えを進める考え方としてノートにまとめさせる。</p> <p>3-2. 分数の1つの意味としてノートにまとめさせる。</p>
<p>3. 単位分数$\frac{1}{4}$をもとにした1人分の大きさの求め方、表し方について理解させる。 ・4通りの求め方で、似て</p>		

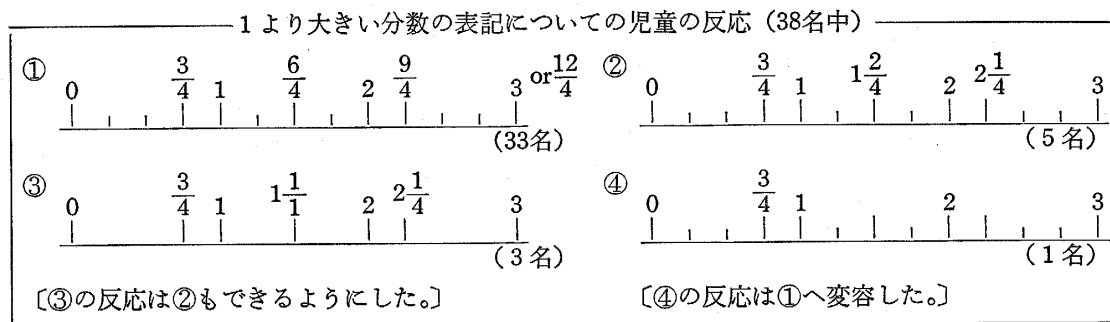
<p>いるところはどんなところでしょう。</p>	<p>1人分を求めている。</p>	
<p>4. 単位分数$\frac{1}{4}$をもとにして、1よりも大きい分数の存在と表し方を理解させる。</p> <p>・3本を4等分したときの1人分、2人分、3人分、……の大きさを、数直線上に記し、その大きさを分数で表しましょう。</p>	<p>4-1.</p>  <p>4-2. (数直線上に) $\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $2\frac{1}{4}$と記す。</p> <p>4-3. (数直線上に) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$と記す。</p> <p>4-4. 2人分、3人分の位置は分かるが、数字で表記することができない。</p>	<p>4-1. 分数の意味と、それを1を越えても適用していったことの2点を押さえ、ノートにまとめさせる。</p> <p>4-2. 帯分数という分数の表記の仕方があることを知らせる。また、$\frac{1}{4}$が何個分あるかを問い、既習の分数の表記の仕方から$\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$と表記することを類推させる。</p> <p>4-3. 2人分、3人分は$\frac{1}{4}$が何個分あるかを問い、既習の分数の表記の仕方から$\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$と表記することを類推させる。</p> <p>4-4. 1を越える分数はないと考え、書けないと考えられる。$\frac{1}{4}$が何個分あるかを問い、既習の分数の表記の仕方から$\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$と表記することを類推させる。</p>
<p>5. 単位分数をもとにして、1より大きい分数を数直線上に表す練習をさせる。</p> <p>・□が5人のときは、どれだけになるでしょう。1人分、2人分、3人分、……の大きさを数直線上に記し、その大きさを分数で表しましょう。</p>	<p>5-1. (数直線上に) $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, $(\frac{15}{5})$を位置づける。</p> <p>5-2. (数直線上に) $\frac{3}{5}$, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{4}{5}$, $2\frac{2}{5}$を位置づける。</p> <p>5-3. 数直線上に2人分、3人分、4人分、……が位置づけられない。</p>	<p>5-2. 帯分数の表記の仕方が分かっている。仮分数の表記の仕方も考えさせる。</p> <p>5-3. 1人分の大きさはどれだけかを問い、$\frac{3}{5}$と分かれば、1人分、2人分、3人分、……は$\frac{1}{5}$が何個分あるかを問い仮分数の表記の仕方を指導する。1人分の大きさが分からなければ、3本を5等分する方法から指導する。</p>

(5) 実践記録の概略



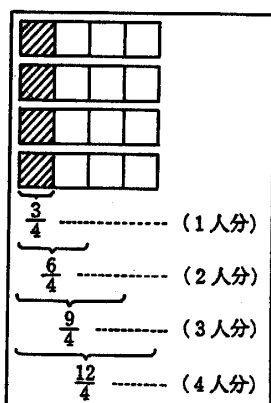
——前略——

- T. (上記の①～④を採り上げて) 4通りの求め方で似ているところは、どんなところですか。
- C. $\frac{1}{4}$ 本がいくつ分あるかで答えを出している。
- C. $\frac{1}{4}$ が3つ分あるから $\frac{3}{4}$ にしている。
- T. どれも $\frac{1}{4}$ 本を単位と考えて、それがいくつ分あるかで1人分を表していますね。
「 $\frac{1}{4}$ が3個分で $\frac{3}{4}$ 」こういう考えが分数では大切なので、ノートにまとめておきましょう。
- T. 分けるときに使った考え方で似ているところはありませんか。
- C. ①と②は1本ずつや2本と1本に分けて、4等分している。その方が簡単に4等分できる。
- C. ④も3本では4等分しにくいから、つなげて考えている。
- T. そうですね。4等分しやすいように3本を $(1+1+1)$ 本や $(2+1)$ 本や1と見て4等分していますね。等分しやすいように分けられる数を簡単にしているね。こういう考え方は今でも使っているね。
- C. 割り算
- T. $36 \div 3$ は $30 \div 3$ と $6 \div 3$ に分けて考えて計算したでしょ。」等分しやすいように分けられる数を簡単にして考える」という考え方を使っていたんだね。これもノートにまとめておきましょう。
- T. では最初の問題にもどって、3本を4人に同じように分けて出すと、1人分、2人分、3人分、……の羊かんの大きさは、どれだけになるでしょう。数直線にその大き



さのところに印をつけて、分数で表してみましょう。

- T. 1人分、2人分、3人分、……をどのように考えて分数で表したかを話し合しましょう。
- C. テープで分けたとき、2人なら $1\frac{1}{2}$ 本で、4人ならその半分の $\frac{3}{4}$ 本だったので、初めは③のように書きました。でも、 $\frac{1}{2}$ 本は $\frac{2}{4}$ 本と同じ大きさだから、②のようにしました。
- C. 2人分は1より $\frac{1}{4}$ が2個分多くて、3人分は2より $\frac{1}{4}$ が1個分多いから、 $1\frac{2}{4}$ 本と $1\frac{1}{4}$ 本にした。
- T. 1本と $\frac{1}{4}$ 本が2個分は $1\frac{2}{4}$ 本、2本と $\frac{1}{4}$ 本が1個分は $2\frac{1}{4}$ 本と表したのですね。このように整数と分数を足した分数を帯分数と呼んで、 $1\frac{2}{4}$ と読みます。
- C. 1人分は $\frac{1}{4}$ 本が3つ分だから $\frac{3}{4}$ 本。2人分は $\frac{1}{4}$ 本が6つ分だから $\frac{6}{4}$ 本。3人分は $\frac{1}{4}$ 本が9つ分だから $\frac{9}{4}$ 本。4人分は $\frac{1}{4}$ 本が12個分だから $\frac{12}{4}$ 本にした。
- T. 図で表すところなるね。図-6)



(図-6)

T. この考え方でいくと、5人分はどうなるかな。

C. $\frac{15}{4}$ 本になる。

C. $\frac{1}{4}$ 本が15個分だから $\frac{15}{4}$ 本になる。

T. そういうふうに、分子が分母より大きくなっても、 $\frac{1}{4}$ が何個分だから4分の何と表したのですね。こういう分数、分子と分母が等しいか、分子の方が大きい分数を仮分数と呼びます。何分の1をもとにして、それが何個分あるかということをつづって使って、分数を書き表していきます。ノートにこのことをまとめておきましょう。

T. それでは、今日の勉強の練習をしてみましょう。問題の□を5にして、5等分したときの1人分、2人分、3人分……を、数直線に表してみましょう。そして、その大きさを分数で書き表してみなさい。

C. 何分の何で書くんですか。

T. できれば、仮分数、帯分数の両方で表して下さい。

——後略——

(6) 反省と考察

$3 \div 4 = 3/4$ は第5学年の学習内容(商分数)である。しかし、単位分数をもとにして、その何個分あるかで数量を表記しようとする分数の記数法の考えを、児童自らが適応範囲を拡張していくようにしたいため、あえてそれを問題場面として扱った。この問題場面については、次のような結果から、第4学年の児童にとって難し過ぎるものではなく、また、分数の意味の理解とその数範囲の拡張を図るために有効であると考えた。

①具体物(3本の紙テープ)を与え、操作を通して考えさせたので、1人分が $3/4$ 本とな

ることを38名全員が求められた。

- ②1人分の大きさを求める段階から単位分数に着目し、その何個分かと考えさせたため、その考えを1を越えても自然に用いていた。このことは、「1より大きい分数の表記についての児童の反応」に示したように、38名中33名の者が、仮分数を表記していたことから分かる。

Ⅵ. 研究のまとめと今後の課題

分数の概念を理解するのに児童にとってどんな困難な点があるのかを考え、その困難点をいかに指導したらよいかをまとめた。特に、困難点の一つである分数の記数法の指導について、第4学年の分数の大きさの指導を例に実践・考察をしてきた。

そこで、単位分数に着目して問題解決するような課題を与えることによって、分数の意味をしっかりと理解させ、さらに既習の分数の範囲を拡張させることができると分かった。今後、他学級でも検証していこうと思う。

今後の課題としては、同値分数が無限にあること、分数が割合の概念を含んでいることの2つの困難点の指導について、自分の考えを検証するべく、研究を進めることにする。

参考文献

- 1) 文部省：小学校指導書 算数編，東洋館出版社（1989年）
- 2) 文部省：小学校算数指導資料 数と計算の指導，大日本図書（1986年）