# 定積分による求積の原理を基礎とした 面積・体積の求積問題の指導

円福寺恭司*・渡辺信博**・村山　靖***・池田敏和****・樋口禎一*****

# Teaching of Quadrature Problems based on the Principle of Quadrature by Definite Integral

Yasushi ENPUKUJI*, Nobuhiro WATANABE**, Yasushi MURAYAMA***
Toshikazu IKEDA**** and Teiichi HIGUCHI*****

## I 研究主題

定積分による求積の原理を基礎とした面積・体積の求積問題の指導

## II 主題設定の理由

積分における面積・体積の求積問題はともすれば，公式にあてはめた計算結果の正誤の評価だけで終ってしまいがちであるが，それでは四則演算のドリルと変わるところがない。公式の基礎にある定積分による求積の原理を理解し，具体的な場面でそれが想起でき，問題解決の一助とすることができれば，深淵な積分の概念の理解に近づいたことになると考えられる。基礎の原理が十分に理解されていれば，求積問題も積分の学習体系の一部として生徒に意識させることができて，問題に対する興味・関心を高める効果があると考えられる。

## III 研究仮説

定積分による求積の原理を，一斉指導の説明だけで終わらせず，自主課題としたり，演習で問題を解く過程でも言及することによって，理解を深めることが，求積問題の学習に効果的である。

## IV 研究内容

### 1 指導方針

基礎解析の定積分は，微分の逆演算としての不定積分に，2つの定数を代入した値の差として導入される。そこでは速度と移動距離の例がよく用いられる。定積分の計算自体は，基礎解析の範囲では，不定積分の計算に習熟していれば習得できる。

* 川崎市立高津高校 (Takatsu Senior High School)
** 県立相模田名高校 (Sagami Tana Senior High School)
*** 横浜市立野庭中学校 (Nobe Junior High School)
**** 県立川崎工業高校 (Kawasaki Technical Senior High School)
***** 数学教室 (Dept. of Mathematics)

面積の求積の原理では，面積の図形的性質・不等式の性質・極限の性質を含む長い道程を学習することになる。本校（川崎市立高津高校）では，生徒に説明する場合，この道程を少しでも単純で，見通しよくするために，関数 $y=f(x)$ を単調増加な関数としている。求積の原理は概念を理解するのに努力を必要とするが，例年，生徒の関心は高く，補助教材としてプリント等を用意すれば，かなりの学習効果があげられる。

面積を求める問題では，生徒は定積分の概念が大切であることを理解しているので，演習に多くの時間を使うことが効果的な学習指導となる。

体積での求積の原理は，３次元空間で考えることになるため，始めは戸惑うが，具体的な模型を使えば，むしろ身近なものとして考えられる。論理の展開の道程は面積の場合と同様なので，生徒の理解もそれほど困難ではないように思われる。

具体的に体積を求める問題では，単に計算だけさせても，面積を求める問題の二番煎じになり，学習意欲は沸かない。そこで，幾つかのポイントで求積の原理に言及する。先ず，積分する区間を定める軸を設定するとき，その必要性を確認すれば，求積の原理に戻ることになる。軸に垂直な断面を考えるとき，その切り口だけに着目するのでなく，区間 $[a, b]$ $(a\leqq x\leqq b)$ での立体の $x$ 点での断面を説明すれば，求積の原理の体積の増分を考える段階再確認することができる。さらに，積分区間を定めるとき，座標が増加するに従つて区間を $[a, x]$ での立体の体積 $V(x)$ が増加すること，そして，その変化率に注目していくことになる。このことを求積の原理の道程と対比して説明することができる。具体的な求積問題を解説した後，求積の原理全体を再確認させるため，次のような説明が考えられる。

(1)　今解説した問題の立体について，区間 $[t, t+h]$ での立体のわずかな増分を考える。

(2)　この増分は区間 $[a, t+h]$ での立体の体積 $V(t+h)$ から，区間 $[a, t]$ での立体の体積 $V(t)$ を引いた差で

$$V(t+h)-V(t)$$

と表される。

(3)　ここで，$h$ を限りなく小さくすると，増分は $t$ での断面積 $S(t)$ に幅 $h$ を掛けた薄い柱状の立体に近づいていく，つまり，

$$h\to 0 \text{ のとき}\quad V(t+h)-V(t)\to S(t)h$$

(4)　これを，

$$\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\to S(t)\qquad (h\to 0)$$

と書きかえる。よって，

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(t+h)-V(t)}{h}=S(t)\qquad \therefore\ V'(t)=S(t)$$

したがって，$V(t)$ は $S(t)$ の不定積分（原始関数）である。すなわち，

$$\int S(t)dt = V(t) + C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

(5) 定積分の形式に直すところは，既習のプリントで各自に再確認させる。。

このように，微分係数の考え方を経て，定積分による求積の公式に至る過程は直観的に理解できるものではない，しかし，積分を単なる計算技能の紹介という印象で終わらせるのでなく，極限の考え方を通して微分と結びついていること，したがって，積分を微分の定義から体系的に理解することが大切であることを知らせることは，学習効果があり，このことは数学の指導うえで，重要なことと考えられる。

## 2 指導計画

(1) 指導期間　昭和63年1月9日(土)～3月8日(火)

(2) 指導学級　2年2組　男子21名　女子26名　計47名
　　　　　　　2年5組　男子20名　女子27名　計47名

(3) 指導内容・配当時間

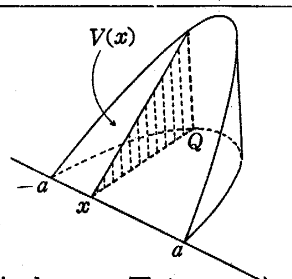
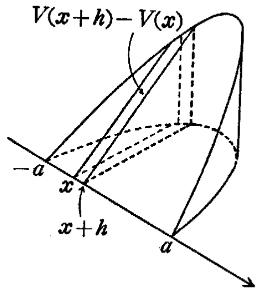
1時間目……不定積分の定義・公式
2 〃 ……　〃　(小テスト No. 1 実施)
3 〃 ……不定積分の練習問題（学習課題Ⅰ　配布）
4 〃 ……定積分の定義・公式（小テスト No. 2 実施）
5 〃 ……　〃
6 〃 ……定積分の練習問題（学習課題Ⅱ　配布）
7 〃 ……面積と定積分の関係・面積の公式（学習課題Ⅲ　配布）
8 〃 ……面積の練習問題
9 〃 ……　〃　(小テスト No. 3 実施)
10 〃 ……体積と定積分の関係・体積の公式（学習課題Ⅳ　配布）
11 〃 ……体積の練習問題
12 〃 ……　〃　(小テスト No. 4 実施)

## 3 指導の流れ

〔不定積分の定義・公式の理解と定着〕＝［不定積分の公式の証明を理解させ，それを通して諸公式を系統立てて身につけさせる。（学習課題Ⅰ）］
〔不定積分の問題演習〕
↓
〔定積分の定義・公式の理解と定着〕＝［定積分の公式の証明を理解させ，それを通して諸公式を系統立てて身につけさせる。（学習課題Ⅱ）］
〔定積分の問題演習〕
↓
〔面積と定積分の関係の理解〕＝（面積と定積分の関係を，図を利用して説明させる。面積の微小な変化率を考え，その極限として微分を導入し，次の逆演算としての不定積分で表現する過程を理解させる。（学習課題Ⅲ））
〔体積の公式の理解〕
↓
〔体積の問題演習〕＝［具体的な立体で定積分による求積の原理を再確認させる。］

## 4　実践授業案

（体積が定積分で求められる理由は前時で指導済）

| 指導内容と主な発問 | 予想される生徒の反応 | 留意点 |
|---|---|---|
| ○次の問題を解いてみよう | | |
| 底面の半径が $a$，高さが $a$ の直円柱がある。この底面の1つの直径を含み，底面と45°の角をなす平面でこの円柱を切るとき，平面の下にある立体の体積を求めよ。 | | |
| （問題の解法は省略）<br>○体積が求められる原理をこの問題で考えてみよう。立体の区間 $[-a, x]$ $(-x \leqq a \leqq a)$ の部分の体積を $V(x)$ としよう。$x$ が増加するにつれて $V(x)$ はどう変化しますか。 | <br>○増加する　　図 1 | |
| ○そこで，$x$ が増加するときの $V(x)$ の変化率を考えてみるのでしたね。<br>○区間 $[x, x+h]$ での体積の増分 $V(x+h)-V(x)$ を考える。これを $h$ でわった式<br>$$(V(x+h)-V(x))/h$$<br>は体積 $V(x)$ の変化率を表す。<br>○ここで，$h$ を限りなく0に近づけると，$V(x)$ の導関数 $V'(x)$ が求められる。$V'(x)$ は何に等しくなりましたか。 | <br>図 2<br><br>○座標 $x$ での断面積 $S(x)$ | |
| ○したがって，$V'(x)=S(x)$ から，$V(x)$ は $S(x)$ の不定積分の1つである。すなわち，<br>$$\int S(x)dx = V(x)+C$$<br>最終的に，求める体積 $V$ は<br>$$V=\int_{-a}^{a} S(x)dx$$<br>となるところは学習課題Ⅳで復習して下さい。<br>○次の問題を解いてみよう。 | | ○学習課題Ⅳを再確認させる |

底面の半径が $r$, 高さが $h$ である円すいの体積が $\frac{\pi}{3}r^2h$ であることを示せ。

○円すいとは底面が円であるすい形です。(模型をみせる)
○体積を求める原理に戻れば，先ず，断面を考えるための軸を設定しなければなりません，どの方向に軸をとればよいだろうか。

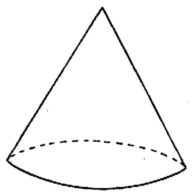


図 3

○頂点と底面の中心を結ぶ方向。この方向を(A)とする。

○もう1つの方向も考えられますよ。

○底面の直径の方向。この方向を(B)とする。

○(B)が答えられないときは，中心を含んだ断面を想定させる。

○それぞれの軸に垂直な断面を考えると，どのような図形になるだろうか。

○(A)では円，(B)では二等辺三角形。

○ここでは，(A)軸で考えよう。軸を横にとって，円すいを真横から見ると右の図のようになる。
○座標 $x$ での断面を式で表そう。図4のように $x$, $y$ をとると三角形の相似関係から，比例式が立てられますね。

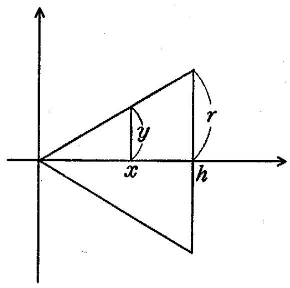


図 4

○これより $y=\frac{r}{h}x$ と表せます。

○$x:y=h:r$

○したがって，座標 $x$ での断面積は求められますね。

○$\pi y^2=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$

○したがって，円すいの体積は求まりますね。

○$\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$=\frac{\pi r^2h}{3}$$

○体積が求められる原理をこの問題で考えてみましょう。
○右の図5の円すい $[0, x]$ の部分の体積を $V(x)$ とする。$x$ が増加するときの $V(x)$ の変化率を考える。
○先ず，円すいの区間 $[x, x+h]$

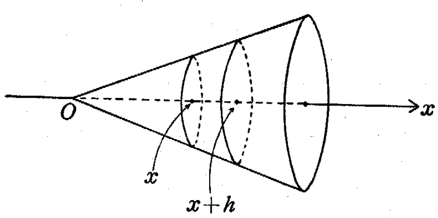


図 5

| | | |
|---|---|---|
| での体積の増加分を考える，それはどのような式で表されたか。<br>◦これを $h$ でわった式<br>$(V(x+h)-V(x))/h$<br>は $V(x)$ の変化率を表す。<br>◦ここで $h$ を限りなく0に近づけると $V(x)$ の導関数 $V'(x)$ が求められる。$V'(x)=?$<br>◦したがって<br>$\int S(x)dx=V(x)+C$<br>最終的に求める円すいの体積 $V$ は<br>$V=\int_0^h S(x)dx$<br>となることは学習課題Ⅳを参考に導いて下さい。 | ◦ $V(x+h)-V(x)$<br>◦座標 $x$ での断面積 $S(x)$ | ◦定積分で表現するところは学習課題Ⅳで確認させる |

**5　評価問題と結果**

No. 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x^3-2x+3)dx$　　(2) $\int(2x-1)^2dx$　　(3) $\int(-t^2+4t)dt$

No. 2　(1)　$4x^3-2x$ の不定積分のうちで $x=1$ のとき3になる関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線上の点 $(x,y)$ における接線の傾きが $3x-2$ である曲線のうち，点 $(0,1)$ を通るものを求めよ。

No. 3　次の面積を求めよ。

(1)　曲線 $y=x(x-1)(x-2)$ と $x$ 軸で囲まれる図形

(2)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ で囲まれる図形

No. 4　(1)　直線 $y=x-3$, $x=1$, $x=2$, $x$ 軸とで囲まれる図形を，$x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2+3x$ と $x$ 軸とで囲まれる図形を，$x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 1 (1) | 正答数 | 38 | 37 |
| | 誤答数 | 5 | 10 |
| | 無答数 | 3 | 0 |

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 1 (2) | 正答数 | 30 | 36 |
| | 誤答数 | 11 | 9 |
| | 無答数 | 5 | 2 |

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 1 (3) | 正答数 | 31 | 26 |
| | 誤答数 | 10 | 19 |
| | 無答数 | 5 | 2 |

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 2 (1) | 正答数 | 38 | 38 |
| | 誤答数 | 7 | 6 |
| | 無答数 | 2 | 3 |
| 問題 No. 2 (2) | 正答数 | 30 | 33 |
| | 誤答数 | 14 | 10 |
| | 無答数 | 3 | 4 |

No. 1 は基本的な計算であるが，10人位の生徒に再確認の必要が生じた。

No. 2 は「不定積分」，「接線の傾き」の内容を式化できるかがポイントであるが，不徹底の生徒が No. 1 とほぼ同数である。No. 1 の後に学習課題Ⅰを行わせて，公式を筋道立てて導く練習をさせている。

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 3 (1) | 正答数 | 27 | 26 |
| | 計算ミス | 10 | 13 |
| | 立式ミス | 8 | 5 |
| | 無解答 | 1 | 2 |

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 3 (2) | 正答数 | 23 | 28 |
| | 計算ミス | 8 | 6 |
| | 立式ミス | 12 | 9 |
| | 無解答 | 3 | 3 |

No. 3 の表で「計算ミス」は求積の式は立てられたが，定積分の計算を誤った人の数であり，「立式ミス」は求積の式を立てる段階で誤りがあった人の数である。

問題 No. 3(1) はグラフが軸より下にある部分の面積は，グラフの式を定積分したものにマイナスをつけることが留意点である。積分区間を間違えたもの，グラフの増減が逆のものが1, 2名いた。問題 No. 3(2) は2つの関数のグラフで囲まれた部分で，上側にある関数のグラフと下側にある関数のグラフを逆に考えてしまう生徒が何人かいた。区間を数値線全体に広げ，そこで上側に伸びている関数のグラフ，下側に伸びている関数のグラフをそれぞれ「上側」，「下側」とみなしてしまう。「2つの関数のグラフで囲まれた部分で」という前提条件を繰り返し確認させなければならない。この結果への求積の原理の指導(学習課題Ⅲ) の影響は，問題(1), (2)の求積の式をたてところまでに顕われると考えられる。その段階までの正答率は(1)においては，2組80% (46人中37人)，5組85% (46人中39人)，(2)においては，2組67% (46人中31人)，5組74% (46人中34人) である。

No. 4 について，体積の求積では，計算量が多くなるため，全般に正答数が減少した。問題(1)では，求積の公式 $\pi\int_a^y \{f(x)\}^2 dx$ で $\pi$ のつけ忘れ，2乗の忘れなど立式段階でのミスが多いクラスと立式は正しくできるが，計算ミスの多いクラスとに分れた。問題 (2) は4乗の式の定積分するため，分数計算が多くなり計算ミス，時間切れが多数出た。立式

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 4 (1) | 正答数 | 24 | 28 |
| | 計算ミス | 4 | 11 |
| | 立式ミス | 10 | 3 |
| | 無解答 | 6 | 5 |

| | | 2組 | 5組 |
|---|---|---|---|
| 問題 No. 4 (2) | 正答数 | 13 | 14 |
| | 計算ミス | 10 | 18 |
| | 立式ミス | 11 | 11 |
| | 無解答 | 10 | 4 |

の時点でのミスは(1)と同様，$\pi$ のつけ忘れ，２乗の忘れ，それに積分区間が逆になっている場合があった。No. 4 での立式までの正答率は，(1)において２組64％(44人中28人)，５組83％(47人中39人)，(2)において２組52％(44人中23人)，５組68％（47人中32人）である。

以上の結果より，特に，５組では求積問題の立式段階までの正答率が高く，仮説は肯定されていると考えられる。２クラス間の学力差は，定期試験の平均点で３～５点，２組が良い，しかし，授業中の反応は５組の方が良く，この面を考慮すれば，結論は一層肯定的であると考えられる。

**6　学習課題**（Ⅰ～Ⅳ）

**Ⅰ　1**（不定積分の定義）

(ア)　$x'=1 \to \int 1dx=(1)$，　　(イ)　$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x \to \int xdx=(2)$，

(ウ)　$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2 \to \int x^2=(3)$，　　(エ)　$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n \to \int x^n dx=(4)$

（以下省略）

**Ⅱ**　①　$\int_a^a f(x)dx=0$

証明）$\int f(x)dx=F(x)+C$ とすると

$$\int_a^a f(x)dx=[(1)]_a^a=(2)-(3)=0$$

②　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

証明）$\int f(x)dx=F(x)+C$ とすると

$$\int_b^a f(dx)=[F(x)]_b^a=F(a)-F(b)=-\{(1)-(2)\}$$

$$=-[F(x)]_{(3)}^{(4)}=-\int_a^b f(x)dx$$

（以下省略）

**Ⅲ　1**（面積関数 $S(x)$ の定義）　関数 $y=f(x)$ は単調増加で正とする。区間 $[0, x]$ で曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸とではさまれる部分の面積を $S(x)$ とする。例えば，$[0, a]$ で曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸とではさまれる部分の面積は $S(a)$ と表される。$[0, b]$ で曲線 $y=f(x)$ と

$x$ 軸ではさまれる部分の面積は (1) と表される。

**2** (区間 $[t, t+h]$ での $S(x)$ の増加量に注目)

区間 $[t, t+h]$ での $S(x)$ の増加量は右図の ABCD で囲まれる部分で

$$S(t+h)-(1)$$

と表される。この部分を長方形 ABED と長方形 ABCF ではさむことを考える。長方形 ABED の底辺は $h$ だから高さは (2) で面積は (3) となり，長方形 ABCF の底辺は $h$ だから高さは (4) で面積 (5) となる。これらから次の不等式が成り立つ。

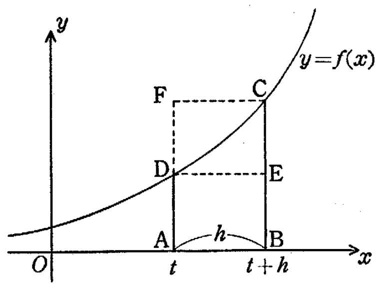


図 6

$$f(t)\cdot h \leqq S(t+h)-S(t) \leqq f(t+h)\cdot h$$

この各辺を $h$ で割ると次の不等式が得られる。

$$f(t) \leqq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqq f(t+h)$$

(以下省略)

**IV** **III** と同様の展開

途中の ( ) の中に番号の入った所は生徒が答えを入れる。

## 参 考 文 献


1) 中学・高校生の数学成績と諸条件，国立教育研究所，第一法規，1982.
2) 中学生の数学成績と教師の指導法，国立教育研究所，第一法規，1983.
3) いかにして問題をとくか，G・ポリア著，柿内賢信訳，丸善，1954.
4) 公理的方法に基づく算数数学の学習指導，杉山吉茂著，東洋館出版社，1986.
5) 数学科における学習指導，古藤怜編著，共立出版，1982.