ϕ 係数と四分相関係数による「数と計算」の学力の因子分析結果の比較

塗　師　　斌

A Comparison of Phi Coefficients and Tetrachoric Correlation Coefficients in Factor Analysis of Arithmetic Tests on the Conception of Number and Calculation

Akira NUSHI

Abstract

The main purpose of this investigation was to compare the factor results (i. e. eigenvalues, principal factor solutions and varimax rotated factor solutions) when parallel analyses were carried out on the same data using phi coefficients and tetrachoric correlation coefficients. Arithmetic achievement tests on the conception of number and calculation were factor analized by the two methods.

The main results of this investigation showed that the main five factors from the two different methods were very similar in terms of their having highly correlation coefficients each other.

目　　　的

本研究の目的は，算数の「数と計算」の学力の次元性 dimensionality を因子分析法によって検討することと，その際に項目間の関連の測度として ϕ 係数を用いた場合と四分相関係数（テトラコリック相関係数）を用いた場合の異同を比較検討することである。

算数には「数と計算」，「量と測定」，「図形」，「数量関係」の４領域が設定されているが，この中でもとりわけ「数と計算」は他の領域の基礎をなすという意味でも基本的に重要な領域といえよう。「数と計算」の内容は，第１学年の「整数の概念の理解」や「１位数と１位数の加法」から始まって，第６学年の「乗数や除数が分数である乗法や除法」にまで至るが，そもそも４領域が発展系統別に共通な性格を多くもった内容を集めて整理されており（文部省，1978），しかも前の学習事項が理解できていないと後の学習事項の理解が困難であるという算数教科に特に著しい系統性を考えると，「数と計算」の学力はかなり一次元性 unidimensionality が高いのではないかと考えられる。もし一次元性が高いとすれば，分析結果から「数と計算」の各種の問題項目の系統的配列が可能となりこれによっ

て教授学習上の示唆を多く受けることができるし，また Lord ら（1968）などの項目反応理論（Item Response Theory, 潜在特性理論 Latent Trait Theory ともよばれる）という一次元性のテストに対する有力な分析方法を適用することが可能となる。

そこで本研究では第1学年から第5学年までの「数と計算」の学力の次元性を因子分析法を用いて吟味することにするが，その際項目間の関連の測度として何を用いるかという問題が生じる。これは学力テストにおける基本的データが，そのテストを構成する各項目に「できた」（正答）か「できなかった」（誤答）かの二値データであることによる。1つの項目（変数）のとる値が三値以上の場合にはその間の等間隔性を仮定してピアソンの積率相関係数を適用することが多い。ところが二値データ（あるいは二値変数）の場合には，その間の関連の測度として，ピアソンの積率相関係数を適用して得られる ϕ 係数を用いると，項目間の困難度の差によって ϕ 係数の大きさが限定され，これが項目の測定する内容（content）とは無関係な困難度因子（difficulty factor）という擬似因子（spurious factor）を生み出すことが Ferguson（1941）以来問題点として指摘されてきている。これに対して Wherry ら（1944）は項目内容の同質性（homogeneity）と項目困難度の同質性とを区別し，通常のテストのように項目困難度が同質でない場合には，ϕ 係数ではなく四分相関係数を用いるべきで，これによって困難度因子を避けることができるとしている。また Gourlay（1951），Carrol（1945, 1961）なども ϕ 係数のかわりに四分相関係数を用いることを推奨しているが，彼らは guessing（当て推量）による偶然正答が考えられる多枝選択形式のようなテストの場合には，guessing による四分相関係数の低下を修正する必要があることを指摘している。その他，ϕ 係数の基本的な弱点とされる困難度因子に関して，これをテスト間の非線形回帰によるものとする Gibson（1960）や，項目得点の内容因子（content factor あるいは潜在特性）への回帰が非線形であることによるとする McDonald（1965）や McDonald ら（1974）の考え方がある。特に McDonald ら（1974）が，項目間の困難度が異なると同じい時に比べて ϕ 係数が小さくなりそれによって困難度因子が生じるという従来の知見を否定し，「困難度による因子」という概念を「非線形性（non-linearity）による因子」という概念に変えるべきだとしているのは注目に値する。

以上見てきたように，ϕ 係数か四分相関係数かということについてはさまざまな議論があり，二値の背後に正規分布する潜在変数が想定できる場合には理論的に四分相関係数のほうが秀れているわけであるが，四分相関係数は ϕ 係数に比べてその計算がたいへんである上に（ちなみに四分相関係数のプログラムはパソコン関係の統計書や統計パッケージで見当らない），Comrey ら（1958）が指摘するように，因子抽出の過程で十分に因子を抽出し終えていない段階でいくつかの項目の共通性が1を超えてしまうといった難点がある。そこで実際には項目間の ϕ 係数行列を求めてこれを因子分析する場合が多い。しかしここで問題になるのは，ϕ 係数行列の因子分析によって，四分相関係数の行列を因子分析した場合と類似の結果が得られるかどうかということである。もし類似の結果が得られるとすれば，少なくとも項目間の因子構造を探るという目的のためには，計算の簡単な ϕ 係数行列の因子分析だけで十分ということになろう。

方　　法

1. データ

1986年の3月中旬から下旬にかけて塗師（1986）が行った「数と計算」の学力調査のデータを分析の対象とした。（問題項目の作成方法や内容については塗師（1986）を参照されたい。）データ数は1年71名，2年62名，3年51名，4年55名，5年82名で，いずれも東京都あるいは神奈川県の公立小学校の2クラスをこみにした人数である。

2. 手続き

まず学年別に項目間の ϕ 係数行列と四分相関係数行列（以後，四分相関行列とよぶ）を求めた。四分相関係数を求める方法はいく通りか提案されているが，ここでは Kirk (1973) の方法を用いた。その際，正答率が極端に1か0に近い項目，すなわち極端に易しいか極端に難しい項目は相関係数の推定の精度が悪くなるため除外された。このため最終的に分析にかけられた項目の数は1年17，2年16，3年19，4年22，5年23である。

次に ϕ 係数行列と四分相関行列をそれぞれ主因子法（芝，1979）で因子分析し，その結果を規準化バリマックス法（芝，1979）を用いて回転した。共通性の推定値としては相関行列の各行あるいは各列の絶対値の最大値を用いた。また回転因子数は，比較がしやすいようにいずれも5因子とした。そして各学年について，主因子法によって得られる固有値の大きさから「数と計算」の学力の次元性を検討し，さらに主因子法によって得られる因子負荷行列（以後，主因子解とよぶ）と規準化バリマックス法による因子負荷行列（以後，バリマックス回転解とよぶ）が，ϕ 係数から求めた場合と四分相関係数から求めた場合とでどの程度類似しているかをその間の相関係数を求めることによって検討した。

結 果 と 考 察

1. 「数と計算」の学力の次元性

次元性については，主因子法で得られる固有値の大きさが共通因子分散の全体の中で占める比率に基づいて考察した。なおここでの共通因子分散の全体とは各項目の共通性の推

表1　ϕ 係数行列の固有値の比率

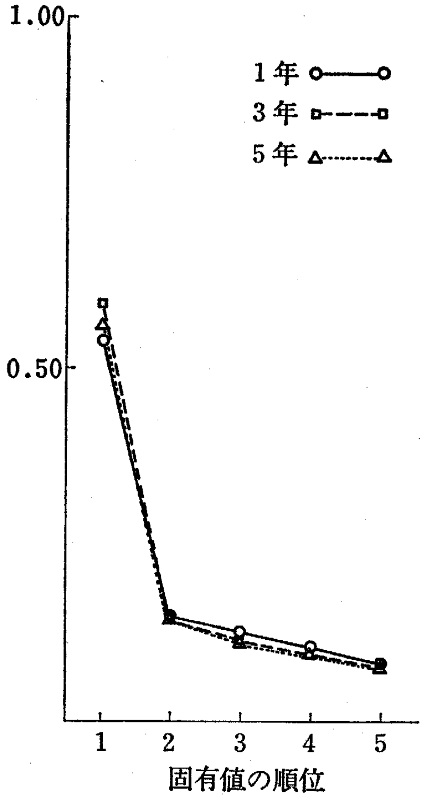
（ ）は固有値の大きさ

学年＼固有値	1	2	3	4	5
1　年	0.533 (3.544)	0.150 (0.997)	0.122 (0.815)	0.110 (0.732)	0.078 (0.521)
2　年	0.598 (4.655)	0.123 (0.961)	0.093 (0.721)	0.086 (0.666)	0.074 (0.579)
3　年	0.566 (5.145)	0.136 (1.239)	0.115 (1.046)	0.092 (0.837)	0.083 (0.753)
4　年	0.460 (5.141)	0.157 (1.754)	0.130 (1.457)	0.103 (1.155)	0.075 (0.836)
5　年	0.544 (5.375)	0.141 (1.393)	0.109 (1.082)	0.096 (0.946)	0.062 (0.616)

表2　四分相関行列の固有値の比率　( ) は固有値の大きさ

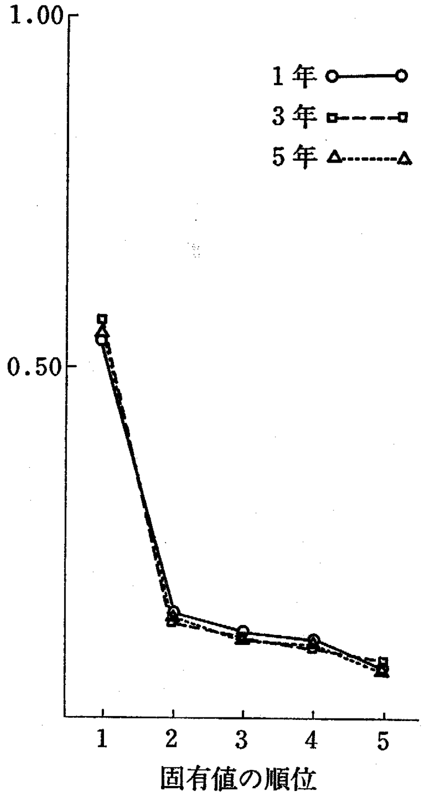
学年＼固有値	1	2	3	4	5
1　年	0.538 (5.839)	0.148 (1.606)	0.127 (1.374)	0.105 (1.137)	0.080 (0.863)
2　年	0.651 (7.563)	0.119 (1.380)	0.093 (1.086)	0.079 (0.922)	0.072 (0.837)
3　年	0.591 (8.377)	0.141 (1.998)	0.109 (1.544)	0.095 (1.349)	0.087 (1.237)
4　年	0.494 (8.227)	0.144 (2.393)	0.128 (2.134)	0.103 (1.716)	0.091 (1.511)
5　年	0.568 (9.084)	0.136 (2.180)	0.103 (1.651)	0.096 (1.536)	0.067 (1.067)

図1　ϕ 係数行列の固有値の比率



固有値の順位

図2　四分相関行列の固有値の比率



固有値の順位

定値の総和のことである。5番目に大きい固有値までの結果を，ϕ 係数行列については表1，四分相関行列については表2に示す。またこれらの結果がわかりやすいように，1年と3年と5年を取り上げて図示したのが図1（ϕ 係数）と図2（四分相関係数）である。これらの結果から次の2つのことがいえよう。

まずどの学年も第1固有値の比率が他の固有値に比べてかなり大きく，第2番目以降の

固有値はいずれも小さくなっている。これは1年から5年までのどの学年においても「数と計算」の学力が一次元性の高い学力であることを示しているものといえよう。

次に図1や図2からも明らかなように，学年間で5つの固有値の大きさの比率のパターンが非常に類似している。これは「数と計算」の学力の次元性が学年間で非常に類似していることを示すとともに，「数と計算」の学力をそれこそ一次元的に規定するような潜在的な学力因子の寄与の度合いが学年間でほゞ同じ程度であることを示している。

以上のことはϕ係数行列，四分相関行列の分析結果のいずれからも全く同様にいえることである。表1と表2を比較すると，第1固有値の比率は四分相関行列のほうが多少高くなっているが，学力の次元性の吟味という観点からみれば，ϕ係数行列は四分相関行列の代用を十分果たすものといえよう。

2. ϕ係数行列を用いた場合と四分相関行列を用いた場合の因子分析結果の比較

一般に同じ二元分類表であればϕ係数よりも四分相関係数のほうが絶対値が大きくなるので，主因子解においてもバリマックス回転解においても四分相関行列のほうが因子負荷

表3　5年のϕ係数行列の主因子解

問題番号※	1	2	3	4	5	共通性
2――1	0.425	0.233	0.033	−0.296	0.014	0.324
2――2	0.504	0.066	0.056	0.048	−0.155	0.288
3――1	0.478	0.472	0.106	−0.135	0.122	0.495
3――2	0.353	0.243	−0.105	−0.421	−0.216	0.419
3――3	0.530	0.437	0.003	0.007	−0.071	0.477
3――4	0.227	0.077	−0.066	0.064	0.318	0.167
4――1	0.523	−0.093	−0.368	0.055	−0.249	0.483
4――2	0.477	0.079	−0.500	−0.059	0.174	0.517
4――4	0.484	0.141	−0.042	−0.003	0.199	0.296
4――5	0.504	−0.275	0.181	0.253	0.051	0.429
4――6	0.451	0.080	0.448	−0.065	−0.055	0.418
5――1	0.552	−0.127	−0.078	0.347	−0.221	0.497
5――2	0.525	0.309	−0.136	0.165	−0.134	0.435
5――3	0.265	0.202	0.053	0.528	0.093	0.401
5――4	0.539	0.271	0.067	0.098	0.070	0.383
5――5	0.501	−0.202	0.419	−0.028	−0.140	0.488
5――6	0.435	−0.003	0.238	−0.107	−0.077	0.263
5――8	0.534	−0.324	0.095	−0.098	−0.150	0.431
5――9	0.582	−0.289	0.018	0.052	0.144	0.446
5――10	0.460	−0.049	0.101	0.078	0.246	0.291
6	0.512	−0.383	−0.097	−0.261	0.147	0.508
7	0.465	−0.199	−0.368	0.071	−0.140	0.416
8	0.605	−0.308	−0.033	−0.205	0.186	0.539
固有値	5.375	1.393	1.082	0.946	0.616	
寄与率	0.544	0.141	0.109	0.096	0.062	
累積寄与率	0.544	0.685	0.794	0.890	0.952	

※　塗師（1986）における問題番号と対応する。（表4，表10，表11も同じ。）

の絶対値が大きくなることは明らかである。そこでこの2つの場合の因子分析結果の類似性を検討するために因子負荷の差ではなく因子負荷ベクトル間の相関係数を求めることにした。

2.1 主因子解

ϕ 係数行列と四分相関行列の因子構造の異同を検討するためには，それぞれの行列の固有ベクトル間の関係を調べればよいと考え，固有ベクトルに相当する主因子解の因子負荷ベクトルの間の相関係数を求めた。その結果以下に示すようにどの学年にも共通した興味深い傾向がみられたが，これを5年の分析結果を例にとって説明していこう。表3は ϕ 係数行列に基づく主因子解，表4は四分相関行列に基づく主因子解である。いずれも5因子まで求められており，各列は因子負荷ベクトルあるいは固有ベクトルに対応する。表3と表4の比較から，四分相関行列に基づく主因子解のほうが因子負荷の絶対値が全体的に高くなっていることと，Comrey ら（1958）が指摘したように共通性の値も ϕ 係数の場合に比べてかなり高くなっていることがわかる。表5は表3と表4の5因子相互間の相関係数

表4　5年の四分相関行列の主因子解

問題番号	1	2	3	4	5	共通性
2──1	0.533	0.295	−0.227	−0.286	0.052	0.506
2──2	0.636	0.091	0.045	0.035	−0.193	0.454
3──1	0.583	0.587	−0.021	−0.154	0.184	0.743
3──2	0.484	0.269	−0.417	−0.451	−0.233	0.739
3──3	0.652	0.498	−0.075	0.035	−0.144	0.701
3──4	0.352	0.141	−0.023	0.195	0.538	0.472
4──1	0.778	−0.284	−0.353	0.211	−0.428	1.039
4──2	0.640	0.034	−0.578	0.263	0.240	0.870
4──4	0.613	0.184	−0.045	0.041	0.235	0.468
4──5	0.630	−0.299	0.361	0.189	0.088	0.659
4──6	0.583	0.227	0.456	−0.334	−0.047	0.713
5──1	0.688	−0.149	0.149	0.390	−0.232	0.724
5──2	0.701	0.379	−0.039	0.222	−0.222	0.735
5──3	0.329	0.250	0.333	0.598	−0.013	0.639
5──4	0.680	0.381	0.109	0.081	0.092	0.635
5──5	0.678	−0.201	0.447	−0.302	−0.152	0.814
5──6	0.622	0.057	0.149	−0.271	−0.054	0.488
5──8	0.652	−0.345	0.128	−0.210	−0.103	0.615
5──9	0.717	−0.299	0.165	0.030	0.182	0.666
5──10	0.603	−0.052	0.230	0.007	0.173	0.449
6	0.653	−0.475	−0.153	−0.259	0.271	0.815
7	0.624	−0.311	−0.292	0.249	−0.110	0.646
8	0.803	−0.438	−0.212	−0.141	0.163	0.927
固有値	9.084	2.180	1.651	1.536	1.067	
寄与率	0.568	0.136	0.103	0.096	0.067	
累積寄与率	0.568	0.704	0.807	0.903	0.970	

表5　5年の主因子解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	0.952	−0.366	−0.019	−0.130	−0.261
	2	−0.390	0.982	−0.147	0.059	−0.064
	3	−0.123	0.149	0.851	−0.474	0.017
	4	−0.144	0.008	0.482	0.867	−0.116
	5	−0.279	0.034	0.023	0.107	0.948

表6　1年の主因子解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	0.979	−0.273	−0.124	−0.133	−0.302
	2	−0.219	0.794	−0.572	0.203	−0.055
	3	−0.370	0.582	0.776	−0.159	−0.132
	4	−0.126	−0.050	0.258	0.943	0.186
	5	−0.361	0.104	0.002	−0.182	0.956

表7　2年の主因子解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	0.995	−0.126	−0.147	−0.004	−0.250
	2	−0.097	0.962	−0.066	0.155	−0.156
	3	−0.082	0.105	0.830	−0.503	−0.083
	4	−0.053	−0.087	0.531	0.821	0.110
	5	−0.218	0.147	−0.020	−0.129	0.962

表8　3年の主因子解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	0.986	−0.091	−0.242	−0.006	−0.078
	2	−0.134	0.958	0.260	0.030	−0.015
	3	−0.184	−0.274	0.955	0.078	−0.027
	4	−0.097	−0.005	−0.020	0.489	0.859
	5	−0.067	0.005	0.072	−0.856	0.486

を行列表示したものである。行の番号はϕ係数に基づく因子，列の番号は四分相関係数に基づく因子を示す。この表からϕ係数行列に基づく5因子はいずれも四分相関行列に基づく5因子のうちのいずれかとかなり高い相関を有していることがわかる。他の学年におけるϕ係数行列と四分相関行列に基づく5因子相互間の相関係数を表6～表9に示す。これらはいずれも5年の場合と同様に，ϕ係数行列に基づく5因子と四分相関行列に基づく5

表9　4年の主因子解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
ϕ係数の因子	1	0.962	−0.366	−0.094	−0.178	−0.112
	2	−0.258	0.983	−0.097	−0.053	−0.002
	3	−0.175	0.067	0.966	−0.196	0.101
	4	−0.054	0.062	0.180	0.971	0.042
	5	−0.240	−0.028	−0.130	−0.013	0.876

表10　5年のϕ係数行列のバリマックス回転解

問題番号	1	2	3	4	5	共通性
[2]―1	0.166	0.504	−0.076	0.152	−0.120	0.324
[2]―2	0.315	0.314	−0.250	0.033	0.162	0.288
[3]―1	0.107	0.641	0.042	0.236	0.124	0.495
[3]―2	0.067	0.546	−0.212	−0.055	−0.262	0.419
[3]―3	0.109	0.610	−0.158	0.104	0.239	0.477
[3]―4	0.006	0.101	−0.022	0.379	0.111	0.167
[4]―1	0.143	0.190	−0.649	0.049	0.061	0.483
[4]―2	−0.104	0.271	−0.498	0.430	−0.018	0.517
[4]―4	0.158	0.324	−0.149	0.360	0.119	0.296
[4]―5	0.522	−0.044	−0.202	0.216	0.258	0.429
[4]―6	0.521	0.348	0.115	0.026	0.108	0.418
[5]―1	0.347	0.083	−0.485	0.028	0.366	0.497
[5]―2	0.080	0.453	−0.336	0.079	0.323	0.435
[5]―3	0.056	0.083	−0.059	0.153	0.604	0.401
[5]―4	0.211	0.438	−0.120	0.232	0.279	0.383
[5]―5	0.677	0.155	−0.047	−0.007	0.057	0.488
[5]―6	0.421	0.283	−0.056	0.048	0.010	0.263
[5]―8	0.550	0.088	−0.329	0.069	−0.086	0.431
[5]―9	0.466	0.036	−0.303	0.364	0.059	0.446
[5]―10	0.318	0.138	−0.080	0.377	0.149	0.291
[6]	0.409	0.038	−0.342	0.373	−0.288	0.508
[7]	0.145	0.058	−0.611	0.133	0.031	0.416
[8]	0.460	0.120	−0.311	0.425	−0.188	0.539
固有値	2.587	2.342	2.051	1.305	1.127	
寄与率	0.262	0.237	0.207	0.132	0.114	
累積寄与率	0.262	0.499	0.706	0.838	0.952	

因子とが密接に対応していることを示している。以上のことはφ係数行列の因子分析によって，四分相関係数を用いた場合とほゞ同様な因子構造が得られることを示すものといえよう。もちろんここでの「同様な」という意味は因子負荷の絶対値についてではなく，相関が高いという意味においてである。

2.2 バリマックス回転解

本研究で用いた規準化バリマックス法によるバリマックス回転は，各学年のφ係数行列と四分相関行列から得られた主因子解のそれぞれに対して独立にバリマックス基準を適用するため，回転後の因子負荷行列においては，φ係数行列を用いた場合と四分相関行列を用いた場合とで主因子解におけるよりも因子構造の類似性が低くなるのではないかと予想された。しかし以下に述べるように予想に反して主因子解におけるよりも類似性が高くなるという結果が得られた。5年の分析結果を例にとってこのことを説明していこう。表10はφ係数行列に基づく回転解，表11は四分相関行列に基づく回転解である。これらはそれぞれ表3，表4の主因子解を因子数5で回転した結果である。表10と表11を比較してみる

表11　5年の四分相関行列のバリマックス回転解

問題番号	1	2	3	4	5	共通性
2——1	0.167	0.636	−0.162	−0.131	0.176	0.506
2——2	0.351	0.412	−0.305	0.260	−0.000	0.454
3——1	0.150	0.764	0.064	0.136	0.338	0.743
3——2	0.090	0.735	−0.290	−0.306	−0.115	0.739
3——3	0.121	0.735	−0.191	0.316	0.094	0.701
3——4	0.083	0.143	−0.043	0.147	0.649	0.472
4——1	0.294	0.279	−0.910	0.183	−0.119	1.039
4——2	−0.054	0.364	−0.676	0.039	0.526	0.870
4——4	0.256	0.417	−0.196	0.153	0.409	0.468
4——5	0.647	−0.042	−0.257	0.350	0.223	0.659
4——6	0.637	0.494	0.194	0.161	−0.004	0.713
5——1	0.416	0.127	−0.500	0.534	0.026	0.724
5——2	0.153	0.615	−0.328	0.471	0.064	0.735
5——3	0.071	0.081	−0.040	0.769	0.186	0.639
5——4	0.284	0.571	−0.096	0.359	0.299	0.635
5——5	0.854	0.240	−0.088	0.101	−0.099	0.814
5——6	0.531	0.438	−0.113	0.028	0.040	0.488
5——8	0.682	0.153	−0.354	−0.034	−0.011	0.615
5——9	0.646	0.086	−0.344	0.136	0.323	0.666
5——10	0.518	0.200	−0.132	0.197	0.289	0.449
6	0.601	0.078	−0.471	−0.321	0.350	0.815
7	0.244	0.101	−0.736	0.131	0.133	0.646
8	0.596	0.175	−0.632	−0.189	0.327	0.927
固有値	4.401	3.981	3.486	1.977	1.673	
寄与率	0.275	0.249	0.218	0.124	0.105	
累積寄与率	0.275	0.524	0.742	0.866	0.970	

と，それぞれの主因子解からも予想されるように四分相関行列に基づく回転解のほうが因子負荷の絶対値が全体的に高くなっていることがわかる。この傾向は因子の解釈上一長一短があり，因子負荷の高い項目が明確になる反面，高い項目が多くなって解釈が難しくなるとか，因子負荷が通常の感覚よりも大きくなるためにかえって解釈しずらいという側面もあるように思われる。表10と表11の5因子相互間の相関係数を行列表示したのが表12である。表12は極めて興味深い結果である。すなわち表10は表3，表11は表4の主因子解をそれぞれ全く独立にバリマックス回転した結果であるにもかかわらず，表10と表11の対応する因子間の相関係数はいずれも 0.9 以上で，主因子解における相関よりもかなり高くなっている。このことは表13～表16から明らかなように他のすべての学年についても共通していえることである。これらの結果は，ϕ 係数行列に基づく因子分析によって，四分相関係数を用いた場合に得られる因子構造と（相関が高いという意味で）非常に近似した回転後の因子負荷行列を求められることを示している。因子分析の主要な目的は回転後の因

表12 5年のバリマックス回転解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
ϕ 係数の因子	1	0.983	−0.406	0.139	−0.172	−0.353
	2	−0.519	0.994	0.356	−0.082	−0.153
	3	0.095	0.343	0.964	0.052	0.134
	4	−0.076	−0.320	−0.112	−0.180	0.920
	5	−0.219	−0.075	0.304	0.992	−0.015

表13 1年のバリマックス回転解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
ϕ 係数の因子	1	−0.958	−0.007	0.271	−0.276	−0.039
	2	−0.068	0.986	−0.250	0.087	−0.370
	3	0.036	−0.245	−0.120	−0.976	−0.002
	4	−0.309	−0.212	0.998	0.186	−0.294
	5	−0.375	−0.401	−0.190	−0.216	0.950

表14 2年のバリマックス回転解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
ϕ 係数の因子	1	0.982	0.039	0.177	−0.296	0.091
	2	−0.138	0.102	−0.978	−0.096	−0.192
	3	0.082	0.994	−0.146	0.108	0.167
	4	−0.235	0.071	−0.053	0.984	−0.381
	5	−0.219	0.042	0.120	−0.069	0.926

表15　3年のバリマックス回転解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	0.997	0.157	−0.088	0.170	0.100
	2	0.088	−0.244	−0.994	−0.327	−0.060
	3	0.204	0.981	0.295	−0.044	−0.062
	4	0.224	−0.114	0.249	0.981	0.006
	5	0.018	0.076	−0.103	0.139	−0.986

表16　4年のバリマックス回転解の相関係数

		四分相関行列の因子				
		1	2	3	4	5
φ係数の因子	1	−0.163	−0.987	−0.125	0.160	0.194
	2	0.987	0.288	−0.297	0.193	0.160
	3	−0.079	0.113	0.137	0.198	−0.890
	4	0.263	−0.110	0.286	0.985	−0.074
	5	−0.308	0.094	0.938	0.185	0.235

子負荷行列の解釈である場合が非常に多いが，その限りではφ係数行列は四分相関行列の代用になり得る可能性を示すものといえよう。もちろん，因子構造が極めて類似しているといっても，あくまでも相関が高いという意味であるから，たとえばφ係数行列に基づく因子負荷の値が全体的に非常に小さくて四分相関行列の場合だと解釈可能な因子をそのように解釈できないというようなことがあれば代用にはなり得ないわけであるが，少なくとも本研究における1年から5年までの回転結果の解釈において，そのような不適合は生じなかった。ところで主因子解よりも回転解のほうが因子構造の類似性が高くなるのはどうしてであろうか。単純構造への回転によって各項目の因子的性質がより明確化されることと関係があるのかもしれないが根拠は定かでない。Comrey ら (1958) も MMPI のバリマックス回転解で同様に高い相関を得ていることを考えると，高くなる理論的必然性があるのかもしれないが，これは今後の検討課題である。

討　　論

1. 「数と計算」の学力の次元性について

本研究では固有値の大きさから判断して「数と計算」の学力は一次元性が高いと結論づけたが，第1固有値の占める比率がどの程度以上であれば一次元的であるといえるのかに対する客観的基準がないので，見方によっては，一次元性が高いというためには第1固有値がもっと大きくなる必要があるのではないかという判断も成り立つであろう。またスケーログラム・アナリシスや多次元尺度解析法などを用いた場合に異なった結果が得られる可能性もあろう。さらに本研究で用いた問題が「数と計算」の学力の全領域を適切に代表

していたかという内容妥当性に関する疑問も考えられるであろう。その点本研究では学習指導要領や指導書や教科書を参照しつつできる限り注意したつもりである。また本研究では「数や計算を用いる能力」を調べるために全学年とも「文章題」を少数含めているが，この問題解決のためには文章理解力などの他の要因も関係してくるために「数と計算」の学力の一次元性が低められるはずである。それにもかかわらず第1固有値がかなり大きいということも，「数と計算」の学力は一次元性が高いと結論づける1つの根拠になっている。

2. ϕ 係数行列を用いた場合と四分相関行列を用いた場合の因子分析結果の異同について

本研究の結果は，固有値が共通因子分散全体の中で占める比率，主因子解，バリマックス回転解のいずれも，ϕ 係数行列を用いた場合と四分相関行列を用いた場合とで非常に類似していることを示している。このことは，研究目的が因子分析である場合には ϕ 係数行列が四分相関行列の代用になり得る可能性を強く示唆するわけであるが，代用になり得るといいきるためには，たとえば正答率が1や0に極めて近いような極端な項目や，正答率が非常に異なる項目が多く含まれているといったような各種のケースをとり上げて検証してみる必要があろう。また因子構造が非常に類似しているといっても，先にも述べたようにあくまでも相関が高いという意味であるから，実際に2つの因子負荷行列を解釈したときに同一の因子を得ることが可能かどうかを種々のケースについて調べてみる必要があろう。

なお ϕ 係数行列の因子分析の際よく問題にされる困難度因子に関する詳しい議論は別の機会に譲るが，本研究の結果では主因子解においてもバリマックス回転解においても困難度と相関係数の高い因子負荷ベクトルは見い出し得なかった。

参考文献

1) Carrol, J. B., 1945, The effect of difficulty and chance success on correlations between items or between tests. Psychometrika, 10, 1-20.
2) Carrol, J. B., 1961, The nature of the data, or how to choose a correlation coefficient. Psychometrika, 26, 347-372.
3) Comrey, A. L. & Levonian, E., 1958, A comparison of three point coefficients in factor analysis of MMPI items. Educational and Psychological Measurement, 18, 739-755.
4) Comrey, A. L., 1973, A first course in factor analysis, Academic Press (芝 祐順訳, 1978, 因子分析入門, サイエンス社).
5) Ferguson, G. A., 1941, The factorial interpretation of test difficulty. Psychometrika, 6, 67-77.
6) Gibson, W. A., 1960, Nonlinear factors in two dimensions. Psychometrika, 25, 381-392.
7) Gourlay, N., 1951, Difficulty factors arising from the use of tetrachoric correlations in factor analysis. Br. J. math. statist. Psychol. 18, 11-23.
8) Kirk, D. B., 1973, On the numerical approximation of the bivariate normal (tetrachoric) correlation coefficient. Psychometrika, 38, 259-268.
9) Lord, F. M. & Novick, M. R., 1968, Statistical theories of mental test scores, Addison-Wesley
10) McDonald, R. P., 1965, Difficulty factors and non-linear factor analysis. Br. J. math. statist. Psychol. 18, 11-23.
11) McDonald, R.P. & Ahlawat, K. S., 1974, Difficulty factors in binary data. Br. J. math. statist. Psychol. 27, 82-99.

12）塗師　斌，1986，算数の「数と計算」におけるつまづきの分析，横浜国立大学教育紀要，26，107-122.
13）芝　祐順，1979，因子分析法（第2版），東京大学出版会.
14）小学校指導書 算数編，1978，文部省.