YOKOHAMA MATHEMATICAL
JOURNAL VOL. 31, 1983

DEUX RESULTATS SUR LES REPRESENTATIONS D'ALGEBRES DE KAC

Par

MICHEL ENOCK et JEAN-MARIE SCHWARTZ

(Received May 21, 1983)

RÉSUMÉ On donne la réciproque d'un résultat de Y. Nakagami concernant les produits croisés d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac; on caractérise les morphismes qui rendent quasi-équivalentes les représentations λ et $\lambda\otimes\mu$, où λ est la représentation régulière gauche d'un groupe localement compact G et μ une représentation quelconque de G. Ce dernier résultat est, lui aussi, donné dans le cadre des algèbres de Kac.

ABSTRACT We give the converse of a Y. Nakagami's result about crossed products of von Neumann algebras by Kac algebras; we characterize the morphisms which make the representations λ and $\lambda\otimes\mu$ quasi-equivalent, where λ stands for the left regular representation of a locally compact group G, and μ for any representation of G. The latter result is also proved in the framework of Kac algebras.

Introduction

De nombreuses propriétés des actions continues d'un groupe localement compact sur une algèbre de von Neumann ont déjà été généralisées au cas des algèbres de Kac ([2], [4], [6]). On peut, en particulier, traiter de cette manière les coactions d'un groupe localement compact [8]. L'étude des représentations du prédual d'une algèbre de Kac permet d'approfondir cette partie de la théorie. Plus précisément, elle nous servira, au chapitre 1, à démontrer aisément la réciproque d'un théorème de Y. Nakagami [7], laissée ouverte par celui-ci et de donner ainsi une nouvelle caractérisation des produits croisées et des actions duales.

Soient G un groupe localement compact, λ_G la représentation régulière gauche de G et μ une représentation quelconque de G. On sait que les représentations λ_G et $\lambda_G\otimes\mu$ sont quasi-équivalentes; dans le chapitre 2, nous caractérisons les morphiśmes qui réalisent cette quasi-équivalence. Sans effort supplémentaire, cela s'effectue en fait directement dans le cadre des algèbres de Kac, mais le résultat est nouveau déjà dans le cas des groupes.

Ces résultats ont été annoncés dans [5].

Notations

Nous ferons régulièrement appel aux notations usuelles de la théorie des algèbres de Kac ([3], [10], [11], [1]). On désignera en particulier par $\boldsymbol{K}=(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac à laquelle on associera l'algèbre de Kac commutante de la duale, notée $\hat{\boldsymbol{K}}'=(\hat{M}', \hat{\Gamma}', \hat{\kappa}', \hat{\varphi}')$. On sait que les représentations du prédual M forment une catégorie Rep M_* dont les flèches sont les opérateurs d'entrelacement. On note systématiquement μ, μ_1 et μ_2 trois objets arbitraires de Rep M_*, opérant respectivement dans les espaces hilbertiens $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{H}_{\mu_1}$ et $\mathfrak{H}_{\mu_2}$, et engendrant les algèbres de von Neumann A_μ, A_{μ_1} et A_{μ_2}.

Dans cet article, G désignera un groupe localement compact et $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann. On pourra munir $\mathcal{A}$ d'un poids normal, semifini, fidèle ψ; on utilisera alors les constructions classiques de la théorie des poids et algèbres hilbertiennes: espace hilbertien H_ψ, isométrie antilinéaire J_ψ, idéal $\mathfrak{N}_\psi$, etc.

1. Sur un résultat de Nakagami

1.1. Rappels. (i) Il existe un unique unitaire V_μ de $A_\mu \otimes M$ tel que, pour tout ω de M_*, on ait:

$$\mu(\omega)=(i\otimes\omega)(V_\mu).$$

On dit que V_μ est le générateur de μ ([1], 2.10).

(ii) Il existe ([1], 1.5) une représentation de M_* dans $\mathfrak{H}_{\mu_1}\otimes\mathfrak{H}_{\mu_2}$, notée $\mu_1\times\mu_2$ telle que $A_{\mu_1\times\mu_2}\subset A_{\mu_1}\otimes A_{\mu_2}$ et que, pour tous ω de M_*, θ_1 de $(A_{\mu_1})_*$ et θ_2 de $(A_{\mu_2})_*$, on ait:

$$\langle(\mu_1\times\mu_2)(\omega),\ \theta_1\otimes\theta_2\rangle=\langle\mu_{1*}(\theta_1)\mu_{2*}(\theta_2),\ \omega\rangle$$

où $\mu_{i*}(\theta_i)$ $(i=1, 2)$ désigne l'élément de M défini par

$$\langle\mu_{i*}(\theta_i),\ \omega\rangle=\langle\mu_i(\omega),\ \theta_i\rangle$$

(iii) Si λ désigne la représentation de Fourier associée à $\boldsymbol{K}$ ([3], 2.1.11), il existe ([1], 2.14) un morphisme injectif normal $\hat{\beta}_\mu$ de $\hat{M}$ dans $A_\mu\otimes\hat{M}$ tel que $\hat{\beta}_\mu(1)=1\otimes1$, et

$$\hat{\beta}_\mu(\lambda(\omega))=\varsigma(\lambda\times\mu)(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \text{ de } M_*$$

On a, de plus: $(\hat{\beta}_\mu\otimes i)\hat{\Gamma}=(i\otimes\hat{\Gamma})\hat{\beta}_\mu$ d'après [6], 1.4. On dira que $\hat{\beta}_\mu$ est le morphisme de multiplication associé à μ.

(iv) On notera ρ la representation de M_* dans $\hat{M}'$ définie par:

$$\rho(\omega)=J\hat{J}\lambda(\omega)J\hat{J} \quad \text{pour tout } \omega \text{ de } M_*;$$

rappelons que, d'après [10], II. 18, J et $\hat{J}$ commutent. On notera, pour tout x de $\hat{M}'$:

$$\gamma_\mu(x)=(J\hat{J}\otimes 1)\varsigma\hat{\beta}_\mu(J\hat{J}xJ\hat{J})(J\hat{J}\otimes 1).$$

Alors, γ_μ est un morphisme injectif normal de $\hat{M}'$ dans $\hat{M}'\otimes A_\mu$, tel que $\gamma_\mu(1)=1\otimes 1$, $\gamma_\mu\rho=\rho\times\mu$ et, en utilisant [6], (1.1 (iii), 1.11 et 1.12):

$$(\hat{\Gamma}'\otimes i)\gamma_\mu=(i\otimes\gamma_\mu)\hat{\Gamma}'$$

1.2 Exemples (i) D'après [1], 4.2 et 4.3, si $\boldsymbol{K}$ est l'algèbre de Kac abélienne $KA(G)$ ([3] VIII. 1.7), M_* est l'algèbre de Banach $L^1(G)$, les représentations de M_* sont en bijection canonique avec les représentations de G, λ et ρ sont les représentations régulières gauche et droite de G, le produit de Kronecker est alors le produit tensoriel de représentations. On a donc, pour tout s de G:

$$\hat{\beta}_\mu(\lambda(s))=\mu(s)\otimes\lambda(s)$$
$$\gamma_\mu(\rho(s))=\rho(s)\otimes\mu(s).$$

Enfin, le générateur V_μ peut s'identifier à la fonction $s\to\mu(s)$ considérée comme élément de $\mathcal{C}_b(G, A_\mu)\subset A_\mu\otimes L^\infty(G)$.

(ii) Si $\boldsymbol{K}$ est l'algèbre de Kac symétrique $KS(G)$ (voir [3], VIII. 1.7), M est l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}(G)$ engendrée par la représentation régulière gauche λ_G de G et les représentations λ et ρ sont égales à la représentation canonique du prédual $\mathfrak{M}(G)_*$ dans l'algèbre de Fourier $A(G)$.

Pour tout s de G, $\lambda_G(s)$ appartient au groupe intrinsèque de $KS(G)$ ([10], I. 10) et induit donc sur $\mathfrak{M}(G)_*$ un caractère (c'est le caractère s^{-1} sur $A(G)$), et, d'après [1], 2.14 (v), $\hat{\beta}_{\lambda_G(s)}$ est la translation à gauche par s^{-1} sur $L^\infty(G)$.

1.3 Remarques. (i) Pour tout μ dans Rep M_*, posons:

$$\check{\mu}(\omega)=\mu(\omega\circ\kappa) \quad \text{pour tout } \omega \text{ de } M_*.$$

On définit ainsi une anti-représentation de M_*, c'est-à-dire une représentation de l'algèbre opposée de M_*. Celle-ci est en fait le prédual de l'algèbre de von Neumann sous-jacente à l'algèbre de Kac $\boldsymbol{K}^\varsigma$.

On pourra donc appliquer aux anti-représentations tous les résultats relatifs aux représentations.

(ii) Ainsi, pour θ dans $(A_\mu)_*$, nous avons par définition du générateur V_μ (cf. 1.1 (i)):

$$\begin{aligned}\langle\check{\mu}(\omega), \theta\rangle&=\langle\mu(\omega\circ\kappa), \theta\rangle\\&=\langle V_\mu, \theta\otimes\omega\circ\kappa\rangle\\&=\langle V_\mu^*, \theta\otimes\omega\rangle \qquad \text{d'après [1], 2.10}\end{aligned}$$

On en déduit que le générateur $V_{\check{\mu}}$ de $\check{\mu}$ est égal à V_μ^*.

(iii) On a alors:

$$\begin{aligned}V_{(\mu_1\times\mu_2)^\vee}&=V^*_{\mu_1\times\mu_2}\\&=(i\otimes V^*_{\mu_2})(\varsigma\otimes i)(i\otimes V^*_{\mu_1}) &&\text{d'après [1], 2.12}\\&=(i\otimes V_{\check\mu_2})(\varsigma\otimes i)(i\otimes V_{\check\mu_1}) &&\text{d'après (ii)}\\&=(\varsigma\otimes i)V_{\check\mu_2\times\check\mu_1} &&\text{d'après [1], 2.12}\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que:

$$(\mu_1\times\mu_2)^\vee=\varsigma\check\mu_2\times\check\mu_1$$

(iv) D'après [1], 2.11 (ii), le générateur de λ est égal à $\sigma W^*\sigma$. Par définition de ρ (1.1 (iii)) on aura donc:

$$\begin{aligned}V_\rho&=(J\hat J\otimes 1)\sigma W^*\sigma(J\hat J\otimes 1)\\&=(\hat J\otimes\hat J)\sigma W\sigma(\hat J\otimes\hat J) &&\text{d'après [3], 3.1.5 (b).}\end{aligned}$$

(v) D'après (ii), il en résulte que

$$\begin{aligned}V_{\check\rho}&=(\hat J\otimes\hat J)\sigma W^*\sigma(\hat J\otimes\hat J)\\&=\sigma W(\boldsymbol{K}^\varsigma)^*\sigma &&\text{d'après [11], II. 6.1}\end{aligned}$$

En utilisant [1], 2.11 (ii), on en déduit que $\check\rho$ est la représentation de Fourier $\lambda(\boldsymbol{K}^\varsigma)$.

Comme d'après [10], 11.6, on a $\hat{\boldsymbol{K}}^\varsigma=\hat{\boldsymbol{K}}'$, le morphisme $\hat\beta_{\check\mu}$ défini en 1.1 (iii) enverra $\hat M'$ dans $A_{\check\mu}\otimes\hat M'=A_\mu\otimes\hat M'$ et vérifiera, pour tout ω de M_*:

$$\begin{aligned}\hat\beta_\mu(\check\rho(\omega))&=\varsigma(\check\rho\times\check\mu)(\omega) &&\text{d'après 1.1 (iii)}\\&=(\mu\times\rho)^\vee(\omega) &&\text{d'après (iii)}\end{aligned}$$

ce qui implique finalement:

$$\hat\beta_{\check\mu}(\rho(\omega))=(\mu\times\rho)(\omega)$$

1.4 Théorème. *Soient A une algèbre de von Neumann et α une action de $\hat{\boldsymbol{K}}'$ sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe une algèbre de von Neumann B et une action β de $\boldsymbol{K}$ sur B telles que β soit fortement équivalente à l'action duale de α* (cf. [2], I. 10 *et* II. 6);

(ii) *il existe un $1^A_{\boldsymbol{K}}$-cocycle U tel que:*

$$(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(U)=(U\otimes 1)(1\otimes(\hat J\otimes\hat J)W(\hat J\otimes\hat J))$$

Démonstration. La preuve du fait que (i) entraîne (ii) se trouve dans [7]; démontrons la réciproque. Soit U un $1^A_{\boldsymbol{K}}$-cocycle, il engendre une représentation ν de M_*. Alors, $(\alpha\otimes i)(U)$ engendre la représentation $\alpha\circ\nu$, et l'on a:

$$(i\otimes\varsigma)((U\otimes 1)(1\otimes(\hat J\otimes\hat J)W(\hat J\otimes\hat J)))=(\varsigma\otimes i)(1\otimes U)(1\otimes(\hat J\otimes\hat J)\sigma W\sigma(\hat J\otimes\hat J)).$$

D'après 1.3 (iv) et [1], 2.12, ce dernier unitaire apparaît comme le générateur de $\nu\times\rho$ qui d'après 1.3 (v) est égal à $\hat{\beta}_{\check{\nu}}\circ\rho$.

Dans ces conditions, la proposition (ii) équivaut à l'existence d'une représentation ν de M_* telle que $\alpha\circ\nu=\hat{\beta}_{\check{\nu}}\circ\rho$. Comme $\rho(M_*)$ est fortement dense dans $\hat{M}'$, on en déduit que $\hat{\beta}_\nu(\hat{M}')$ est inclus dans $\alpha(A)$. Ainsi $n=\alpha^{-1}\circ\hat{\beta}_\nu$ définit un homomorphisme normal de $\hat{M}'$ dans A. Par suite, on peut écrire successivement:

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes i)(n\otimes i)\hat{\Gamma}' &= (\hat{\beta}_{\check{\nu}}\otimes i)\hat{\Gamma}' \\ &= (i\otimes\hat{\Gamma}')\hat{\beta}_{\check{\nu}} && \text{d'après 1.1 (iii)} \\ &= (i\otimes\hat{\Gamma}')\alpha n \\ &= (\alpha\otimes i)\alpha n && \text{par hypothèse.}\end{aligned}$$

Grâce à l'injectivité de $\alpha\otimes i$, on en déduit que

$$(n\otimes i)\hat{\Gamma}'=\alpha n$$

d'où (i), en utilisant [4] V.2 et V.3.

2. Caractérisation des morphismes d'équivalence

Dans ce chapitre, β désignera un morphisme normal, injectif de $\hat{M}$ dans $A\otimes\hat{M}$ tel que

$$(\beta\otimes i)\hat{\Gamma}=(i\otimes\hat{\Gamma})\beta$$

$$\beta(1_A)=1_A\otimes 1_{\hat{M}}$$

2.1 Proposition. *On a:*

(i) $(i\otimes\hat{\varphi})\beta(x)=\hat{\varphi}(x)\cdot 1_A$ *pour tout* x *de* $\hat{M}^+$

(ii) $(i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})\beta=\beta\sigma_t^{\hat{\varphi}}$ *pour tout* t *de* $\boldsymbol{R}$.

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\hat{\varphi})\beta(x)\otimes 1_{\hat{M}} &= (i\otimes i\otimes\hat{\varphi})(i\otimes\hat{\Gamma})\beta(x) && \text{d'après [10], I. 6} \\ &= (i\otimes i\otimes\hat{\varphi})(\beta\otimes i)\hat{\Gamma}(x) && \text{par hypothèse} \\ &= \beta((i\otimes\hat{\varphi})\hat{\Gamma}(x)) \\ &= \hat{\varphi}(x)\beta(1_{\hat{M}}) && \text{d'après [10], II. 16} \\ &= \hat{\varphi}(x)(1_A\otimes 1_{\hat{M}}) && \text{par hypothèse}\end{aligned}$$

d'où (i). On a:

$$\begin{aligned}((i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})\beta\otimes i)\hat{\Gamma} &= (i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}}\otimes i)(\beta\otimes i)\hat{\Gamma} \\ &= (i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}}\otimes i)(i\otimes\hat{\Gamma})\beta && \text{par hypothèse}\end{aligned}$$

$=(i\otimes i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})(i\otimes\hat{\Gamma})\beta$ d'après [3], 4.2.5 (a)

$=(i\otimes i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})(\beta\otimes i)\hat{\Gamma}$ par hypothèse

$=(\beta\otimes i)(i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})\hat{\Gamma}$

$=(\beta\otimes i)(\sigma_t^{\hat{\varphi}}\otimes i)\hat{\Gamma}$ d'après [3], 4.2.5 (a)

Il en résulte que $((i\otimes\sigma_t^{\hat{\varphi}})\beta)\otimes i$ et $\beta\sigma_t^{\hat{\varphi}}\otimes i$ coïncident sur $\hat{\Gamma}(\hat{M})$; comme il est clair qu'ils coïncident egalement sur $C\otimes\hat{M}$, il résulte de [2], III. 4 appliqué à l'algèbre de Kac K^s (cf. [11], II. 6) qu'ils coïncident sur $\hat{M}\otimes\hat{M}$; d'où (ii).

2.2 Proposition. *Soit ψ un poids normal, semi-fini, fidèle sur A (pour simplifier, on supposera $A\subset\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\psi)$). Alors, pour tout x de $\mathfrak{N}_\psi$, y de $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$, l'opérateur $\beta(y)(x\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}}$, et il existe une isométrie U dans $\mathfrak{H}_\psi\otimes H$ telle que:*

$$U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(y)(x\otimes 1))$$

Démonstration. On a:

$$(\psi\otimes\hat{\varphi})((x^*\otimes 1)\beta(y^*y)(x\otimes 1))=\psi(x^*((i\otimes\hat{\varphi})\beta(y^*y))x)$$
$$=\psi(x^*x)\hat{\varphi}(y^*y) \qquad \text{d'après 2.1 (i);}$$

ainsi $\beta(y)(x\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}}$.

Soient x_1, x_2 dans $\mathfrak{N}_\psi$ et y_1, y_2 dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$; en polarisant l'égalité précédente, on trouvera:

$$(\psi\otimes\hat{\varphi})((x_2^*\otimes 1)\beta(y_2^*)\beta(y_1)(x_1\otimes 1))=\psi(x_2^*x_1)\hat{\varphi}(y_2^*y_1)$$

qui s'écrit aussi:

$$(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(y_1)(x_1\otimes 1))\,|\,\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(y_2)(x_2\otimes 1)))=(\Lambda_\psi(x_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_1)\,|\,\Lambda_\psi(x_2)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2))$$

d'où le résultat.

2.3 Lemme. *Soient X dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}$ et x dans $\mathfrak{N}_\psi$. Alors l'opérateur $(\beta\otimes i)(X)(x\otimes 1\otimes 1)$ apartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}$ et:*

$$\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((\beta\otimes i)(X)(x\otimes 1\otimes 1))=(U\otimes 1)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}(X))$$

Démonstration. Pour tout a de $(\hat{M}\otimes\hat{M})^+$, on pose:

$$\Phi(a)=\psi(x^*x)(\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi})(a)$$

$$\Psi(a)=(\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi})((x^*\otimes 1\otimes 1)(\beta\otimes i)(a)(x\otimes 1\otimes 1)).$$

Soient a_1, a_2 dans $\hat{M}$. On a:

$$\Psi(a_1^*a_1\otimes a_2^*a_2)=(\psi\otimes\hat{\varphi})((x^*\otimes 1)\beta(a_1^*a_1)(x\otimes 1))\hat{\varphi}(a_2^*a_2)$$
$$=\psi(x^*x)\hat{\varphi}(a_1^*a_1)\hat{\varphi}(a_2^*a_2) \qquad \text{d'après 2.2}$$

$$=\Phi(a_1^*a_1\otimes a_2^*a_2)\,.$$

De plus, pour tout t de $\boldsymbol{R}$, on a:

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma_t^\varphi(a))&=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((x^*\otimes1\otimes1)(\beta\otimes i)(\sigma_t^{\hat\varphi}\otimes\sigma_t^{\hat\varphi})(a)(x\otimes1\otimes1))\\&=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((i\otimes\sigma_t^{\hat\varphi}\otimes\sigma_t^{\hat\varphi})((x^*\otimes1\otimes1)(\beta\otimes i)(a)(x\otimes1\otimes1)))\quad \text{d'après 2.1 (ii)}\\&=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((x^*\otimes1\otimes1)(\beta\otimes i)(a)(x\otimes1\otimes1))\\&=\Psi(a)\,.\end{aligned}$$

On en déduit $\Phi=\Psi$, d'après [9], 5.9. Ainsi, $(\beta\otimes i)(X)(x\otimes1\otimes1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}$, et, pour X_1, X_2 dans $\mathfrak{N}_{\hat\varphi\otimes\hat\varphi}$ et x_1, x_2 dans $\mathfrak{N}_\psi$, on trouvera, par polarisation:

$$\begin{aligned}&(\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}((\beta\otimes i((X_1)(x_1\otimes1\otimes1))\,|\,\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}((\beta\otimes i)(X_2)(x_2\otimes1\otimes1)))\\&\quad=(\Lambda_\psi(x_1)\otimes\Lambda_{\hat\varphi\otimes\hat\varphi}(X_1)\,|\,\Lambda_\psi(x_2)\otimes\Lambda_{\hat\varphi\otimes\hat\varphi}(X_2))\end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une isométrie de $\mathfrak{H}_\psi\otimes H\otimes H$ qui envoie $\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\varphi\otimes\hat\varphi}(X)$ sur $\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}((\beta\otimes i)(X)(x\otimes1\otimes1))$. Il résulte de 2.2 que cette isométrie coïncide avec $U\otimes1$ sur les éléments de la forme $\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(X_1)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(X_2)$ (où X_1 et X_2 appartiennent à $\mathfrak{N})_{\hat\varphi}$; donc, par linéarité et continuité, elle est égale à $U\otimes1$ et le lemme en résulte.

2.4 Lemme. *Soient b dans $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat\varphi}$ et y dans $\mathfrak{N}_{\hat\varphi}$. Alors $(i\otimes\hat\Gamma)(b)(1\otimes y\otimes1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}$ et on a:*

$$\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi}((i\otimes\hat\Gamma)(b)(1\otimes y\otimes1))=(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi}(b)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(y))$$

Démonstration. Pour tout a de $(A\otimes\hat M)^+$, on pose:

$$\Phi(a)=\hat\varphi(y^*y)(\psi\otimes\hat\varphi)(a)$$

$$\Psi(a)=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((1\otimes y^*\otimes1)(i\otimes\hat\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes1))$$

Soient a_1 dans A et a_2 dans $\hat M$. On a:

$$\begin{aligned}\Psi(a_1^*a_1\otimes a_2^*a_2)&=\psi(a_1^*a_1)(\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((y^*\otimes1)\hat\Gamma(a_2^*a_2)(y\otimes1))\\&=\psi(a_1^*a_1)\hat\varphi(y^*y)\hat\varphi(a_2^*a_2)\qquad \text{d'après [3], 1.3.1}\\&=\Phi(a_1^*a_1\otimes a_2^*a_2)\,.\end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma_t^\varphi(a))&=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((1\otimes y^*\otimes1)(i\otimes\hat\Gamma)(\sigma_t^\psi\otimes\sigma_t^{\hat\varphi})(a)(1\otimes y\otimes1))\\&=(\psi\otimes\hat\varphi\otimes\hat\varphi)((\sigma_t^\psi\otimes i\otimes\sigma_t^{\hat\varphi})((1\otimes y^*\otimes1)(i\otimes\hat\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes1)))\\&\qquad\qquad\text{d'après [3], 4.2.5 (a)}\\&=\Psi(a)\,.\end{aligned}$$

On en déduit $\Phi=\Psi$, d'après [9], 5.9. Ainsi, l'opérateur $(i\otimes\hat{\Gamma})(b)(1\otimes y\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}$. Après polarisation, on en déduira l'existence d'une isométrie qui envoie $\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(b)\otimes\Lambda_{\varphi}(y)$ sur $\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes\hat{\Gamma})(b)(1\otimes y\otimes 1))$. Or, soient b_1 dans $\mathfrak{N}_{\psi}$ et b_2 dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$; on a:

$$\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes\hat{\Gamma})(b_1\otimes b_2)(1\otimes y\otimes 1)=\Lambda_{\psi}(b_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}(\hat{\Gamma}(b_2)(y\otimes 1))$$

$$=\Lambda_{\psi}(b_1)\otimes\sigma W^*\sigma(\Lambda_{\hat{\varphi}}(y)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(b_2))$$

d'après [3], 4.1.4 (a) et 2.1.1

$$=(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(\Lambda_{\psi}(b_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(b_2)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y)).$$

Cette isométrie coïncide donc avec $(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)$ sur les vecteurs de la forme $\Lambda_{\psi}(b_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(b_2)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y)$, d'où le résultat, par linéarité, densité et continuité.

2.5. Proposition. *Soit U l'isométrie construite en 2.2. Elle vérifie:*

$$(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)=(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)$$

Démonstration. Soient x dans $\mathfrak{N}_{\psi}$, y_1, y_2 dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$. On a:

$$(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2))$$

$$=(1\otimes\sigma)(1\otimes W_*)(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(y_1)(x\otimes 1))\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2)) \quad \text{d'après 2.2}$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes\hat{\Gamma})(\beta(y_1)(x\otimes 1))(1\otimes y_2\otimes 1)) \quad \text{d'après 2.4}$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes\hat{\Gamma})(\beta(y_1))(x\otimes y_2\otimes 1))$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y_1))(x\otimes y_2\otimes 1)) \quad \text{par hypothèse}$$

Soient ξ dans l'algèbre hilbertienn à droite $(\mathfrak{A}_{\psi\otimes\hat{\varphi}})'$ et η dans $\mathfrak{A}_{\hat{\varphi}'}$. On en déduit alors, en utilisant les représentations canoniques correspondantes π' et $\hat{\pi}'$:

$$(\pi'(\xi)\otimes\hat{\pi}'(\eta))(1\otimes\sigma)(1\otimes W)(U\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_1)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2))$$

$$=(\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y_1))(x\otimes y_2\otimes 1)(\xi\otimes\eta)$$

$$=(\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y_1))(\pi'(\xi)(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2))\otimes\eta)$$

$$=(\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y_1))(\pi'(\xi)\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y_2)\otimes\eta).$$

Par linéarité et densité de $\Lambda_{\psi}(\mathfrak{N}_{\psi})\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}})$ dans $\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\hat{\varphi}})$, on en déduit, pour tout X dans $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}}$ et tout y dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$:

$$(\pi'(\xi)\otimes\hat{\pi}'(\eta))(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(X)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))$$

$$=(\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y))(\pi'(\xi)\otimes 1)(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(X)\otimes\eta)$$

$$=(\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y))(X\otimes 1)(\xi\otimes\eta)$$

Il en résulte que $(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(X)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))$ appartient à $\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}$. $(\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}})$ et est égal à:

$$\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y))(X\otimes 1)).$$

Soient z dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$ et a dans $\mathfrak{N}_{\psi}$. D'après 2.2, $\beta(z)(a\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\hat{\varphi}}$, on aura donc successivement:

$$\begin{aligned}
&(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(a)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(z)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))\\
&\quad=(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(z)(a\otimes 1))\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y)) \quad \text{d'après 2.2}\\
&\quad=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y))(\beta(z)(a\otimes 1))\otimes 1)) \quad \text{d'après ce qui précède}\\
&\quad=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((\beta\otimes i)(\hat{\Gamma}(y)(z\otimes 1))(a\otimes 1\otimes 1))\\
&\quad=(U\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(a)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}(\hat{\Gamma}(y)(z\otimes 1))) \quad \text{d'apès 2.3}\\
&\quad=(U\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(a)\otimes\sigma W^*\sigma(\Lambda_{\hat{\varphi}}(z)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))) \quad \text{d'adrès [3], 2.1.1}\\
&\quad=(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(\Lambda_{\psi}(a)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(z))
\end{aligned}$$

Par linéarité, densité et continuité, on en déduit

$$(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)=(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(1\otimes\sigma)$$

d'où le résultat.

2.6 Proposition. *L'isométrie de $\mathfrak{H}_{\psi}\otimes H$, construite en 2.2, appartient à $A\otimes\mathcal{L}(H)$.*

Démonstration. Soient ξ dans $\mathfrak{A}'_{\psi}$ et η dans $\hat{\mathfrak{A}}'$, en utilisant des notations analogues aux précédentes, on a, pour x dans $\mathfrak{N}_{\psi}$ et y dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}}$:

$$\begin{aligned}
&(\pi'(\xi)\otimes\hat{\pi}'(\eta))U(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))\\
&\quad=(\pi'(\xi)\otimes\hat{\pi}'(\eta))\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta(y)(x\otimes 1)) \quad \text{d'après 2.2}\\
&\quad=\beta(y)(x\otimes 1)(\xi\otimes\eta)\\
&\quad=\beta(y)(\pi'(\xi)\otimes 1)(\Lambda_{\psi}(x)\otimes\eta).
\end{aligned}$$

Pour tout vecteur ζ de $\mathfrak{H}_{\psi}$, on aura donc, par densité:

$$(\hat{\pi}'(\xi)\otimes\hat{\pi}'(\xi))U(\zeta\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))=\beta(y)(\pi'(\xi)\otimes 1)(\zeta\otimes\eta).$$

En faisant tendre $\pi'(\xi)$ vers 1, on obtient:

$$(1\otimes\hat{\pi}'(\eta))U(\zeta\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))=\beta(y)(\zeta\otimes\eta).$$

Soit alors z dans A'. On a:

$$\begin{aligned}
(1\otimes\hat{\pi}(\eta))U(z\zeta\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))&=\beta(y)(z\zeta\otimes\eta)\\
&=(z\otimes 1)\beta(y)(\zeta\otimes\eta) \qquad \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

$$=(z\otimes 1)(1\otimes\hat{\pi}'(\eta))U(\zeta\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))$$

d'après ce qui précède.

Par linéarité et densité, on en déduit:

$$(1\otimes\hat{\pi}'(\eta))U(z\otimes 1)=(z\otimes 1)(1\otimes\hat{\pi}'(\eta))U$$

En faisant tendre $\hat{\pi}'(\eta)$ vers 1 on en déduit:

$$U(z\otimes 1)=(z\otimes 1)U$$

d'où le résultat.

2.7 Lemme. *Soit* X *dans* $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa\otimes\varphi\circ\kappa}$. *On a*:

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}((\kappa\otimes\kappa)(X^*))=(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(X)$$

Démonstration. Soient ω_1 et ω_2 dans $\mathcal{L}_{\varphi}\cap\mathcal{L}_{\varphi}^{\circ}$. D'après [3], 2.1.3, $\omega_1\otimes\omega_2$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi\otimes\varphi}\cap\mathcal{L}_{\varphi\otimes\varphi}^{\circ}$, et:

$$(\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(X)\,|\,a(\omega_1^{\circ})\otimes a(\omega_2^{\circ}))=\langle\omega_1^{\circ}\otimes\omega_2^{\circ},\ X\rangle \qquad \text{d'après [3], 2.1.2}$$

$$=\langle\omega_1\otimes\omega_2,\ (\kappa\otimes\kappa)(X^*)\rangle^{-} \qquad \text{d'après [3], 2.2.2}$$

$$=(\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}((\kappa\otimes\kappa)(X^*))\,|\,a(\omega_1)\otimes a(\omega_2))^{-}$$

On en déduit que $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(X)$ appartient au domaine de l'adjoint du produit tensoriel algébrique $\hat{S}\odot\hat{S}$, c'est-à-dire au domaine de $\hat{F}\otimes\hat{F}$. De plus:

$$(\hat{F}\otimes\hat{F})\Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}(X)=\Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}((\kappa\otimes\kappa)(X^*))\,.$$

L'unicité de la décomposition polaire de $\hat{F}\otimes\hat{F}$ permet de conclure.

2.8 Lemme. *Soient* x *et* y *dans* $\mathfrak{N}_{\varphi}\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. *Alors* $\Gamma(x)(1\otimes y)$ *appartient à* $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa\otimes\varphi\circ\kappa}$ *et on a*:

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(x)(1\otimes y))=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma(\Lambda_{\varphi}(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_{\varphi}(y))$$

Démonstration. D'après [2], I. 1, on peut considérer Γ comme une action de $\boldsymbol{K}$ sur M; d'après [4], III. 3, le poids φ est alors $\hat{\Delta}^{-1/2}$-relativement invariant par rapport à Γ. En appliquant [4], III. 7 (i), on obtient alors que $\Gamma(x)(1\otimes y)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$.

De plus, nous avons: $\varsigma(\kappa\otimes\kappa)((\Gamma(x)(1\otimes y))^*=\Gamma(\kappa(x^*))(\kappa(y^*)\otimes 1)$. Comme $\kappa(x)^*$ et $\kappa(y^*)$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\varphi}$, il résulte de [3], 2.1 que $\Gamma(\kappa(x^*))(\kappa(y^*)\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$ et donc que $\Gamma(x)(1\otimes y)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa\otimes\varphi\circ\kappa}$. On a alors:

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(x)(1\otimes y))$$

$$=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(\kappa(x^*))(\kappa(y^*)\otimes 1)) \qquad \text{d'après 2.7}$$

$$=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})W(\Lambda_{\varphi}(\kappa(y^*))\otimes\Lambda_{\varphi}(\kappa(x^*))) \qquad \text{d'après [3], 2.1.1}$$

$$=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})W(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})\sigma(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y))$$

d'après [3], 2.3.2.1

$$=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(1\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})(\hat{J}\otimes\hat{J})(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})\sigma(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y))$$

d'adrès [4], I. 1

$$=\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma(\Lambda_\varphi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y))$$

ce qui achève la démonstration.

2.9 Proposition. *Soient x dans $\mathfrak{N}_\varphi$ et η dans $\hat{\mathfrak{A}}_\circ\hat{\top}\hat{\mathfrak{A}}_\circ$. Alors $(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x))$ appartient à $\mathfrak{N}_\varphi$ et $\Lambda_\varphi((i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x)))=\hat{J}\lambda(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\circ\kappa)\hat{J}\Lambda_\varphi(x)$.*

Démonstration. On supposera $\|\eta\|=1$. Alors $(i\otimes\omega_\eta)$ est une espérence conditionnelle et l'on a:

$$(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x^*))(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x))\leqq(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x^*x))$$

D'où:

$$\varphi((i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x^*))(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x)))\leqq(\varphi\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x^*x))$$

$$=\|\hat{\Delta}^{-1/2}\eta\|^2\varphi(x^*x)<+\infty \quad \text{d'après [4], I. 3}$$

il en résulte que $(i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x))$ appartient à $\mathfrak{N}_\varphi$.

En appliquant [4], III. 10 à l'action Γ et au poids $\hat{\Delta}^{-1}$-relativement invariant φ, on trouve, en tenant compte de [4], III. 7 et III. 8 et de 2.8:

$$\Lambda_\varphi((i\otimes\omega_\eta)(\Gamma(x)))$$

$$=((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta})(\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)^*)^*\Lambda_\varphi(x)$$

$$=(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\otimes i)((i\otimes J\hat{J})W^*(1\otimes J\hat{J}))\Lambda_\varphi(x) \quad \text{d'après [3], 3.1.5 (b) et [10], II. 18}$$

$$=J\hat{J}((\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\otimes i)(W^*))J\hat{J}\Lambda_\varphi(x)$$

$$=J\hat{J}\lambda(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta})J\hat{J}\Lambda_\varphi(x) \quad \text{d'après [4], II. 5}$$

$$=\hat{J}\lambda(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\circ\kappa)^*\hat{J}\Lambda_\varphi(x) \quad \text{d'après [3], 3.3.2}$$

2.10 Corollaire. *Soient X dans $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$ et η dans $\hat{\mathfrak{U}}_\circ\hat{\top}\hat{\mathfrak{U}}_\circ$. Alors $(i\otimes i\otimes\omega_\eta)((i\otimes\Gamma)(X))$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$ et*

$$\Lambda_{\psi\otimes\varphi}((i\otimes i\otimes\omega_\eta)((i\otimes\Gamma)((X)))=(1\otimes\hat{J}\lambda(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\circ\kappa)^*\hat{J})\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(X)$$

Démonstration. Supposons $\|\eta\|=1$. Comme $i\otimes\omega_\eta$ est une espérance conditionnelle, on obtient:

$$(\psi\otimes\varphi)(((i\otimes i\otimes\omega_\eta)((i\otimes\Gamma)(X)))^*((i\otimes i\otimes\omega_\eta)((i\otimes\Gamma)(X))))$$

$$\leqq(\psi\otimes\varphi)(i\otimes i\otimes\omega_\eta)(i\otimes\Gamma)(X^*X)$$

$$=\|\hat{\Delta}^{-1/2}\eta\|^2(\psi\otimes\varphi)(X^*X)<+\infty \quad \text{d'après [10], I. 4}$$

Ainsi, $(i\otimes i\otimes\omega_\eta)(i\otimes\Gamma)(X)$ appartient-il à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$ et l'opérateur qui envoie $\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(X)$ sur $\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(i\otimes i\otimes\omega_\eta)(i\otimes\Gamma)(X)$ est-il borné, de norme inférieure à $\|\hat{\Delta}^{-1/2}\eta\|^2$.

Pour x_1 dans $\mathfrak{N}_\psi$ et x_2 dans $\mathfrak{N}_\varphi$, il est immédiat, en utilisant 2.9 que l'on a:

$$\Lambda_{\psi\otimes\varphi}((i\otimes i\otimes\omega_\eta)(i\otimes\Gamma)(x_1\otimes x_2))=(1\otimes\hat{J}\lambda(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\eta}\circ\kappa)\hat{J})(\Lambda_\psi(x_1)\otimes\Lambda_\varphi(x_2))$$

d'où le résultat par continuité et densité.

2.11 Proposition. *L'isométrie U, construite en 2.2, appartient à $A\otimes M$.*

Démonstration. Soient x dans $\mathfrak{N}_\psi$, y dans $\mathfrak{N}_\varphi$ et ξ dans $\mathfrak{A}_\circ\top\mathfrak{A}_\circ$, de norme 1. On a:

$$U(\Lambda_\psi(x)\otimes J\hat{\lambda}(\theta_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\hat{\kappa})^*J\Lambda_{\hat{\varphi}}(y))$$

$$=U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat{\varphi}}((i\otimes\theta_\xi)\hat{\Gamma}(y))) \quad \text{d'après 2.10, appliqué à } \hat{\boldsymbol{K}}$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(\beta((i\otimes\theta_\xi)\hat{\Gamma}(y))(x\otimes1)) \quad \text{d'après 2.2}$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(((i\otimes i\otimes\theta_\xi)(\beta\otimes i)\hat{\Gamma}(y))(x\otimes1))$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}(((i\otimes i\otimes\theta_\xi)(i\otimes\hat{\Gamma})\beta(y))(x\otimes1)) \quad \text{par hypothèse}$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes i\otimes\theta_\xi)((i\otimes\hat{\Gamma})\beta(y))(x\otimes1\otimes1))$$

$$=\Lambda_{\psi\otimes\hat{\varphi}}((i\otimes i\otimes\theta_\xi(i\otimes\hat{\Gamma})(\beta(y)(x\otimes1)))$$

$$=(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\hat{\kappa})^*J)\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\beta(y)(x\otimes1)) \quad \text{d'après 2.10, appliqué à } \hat{\boldsymbol{K}}$$

$$=(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\hat{\kappa})^*J)U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y)) \quad \text{d'après 2.2}$$

Par linéarité et densité, on en déduit:

$$U(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\hat{\kappa})^*J)=(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\hat{\kappa})^*J)U$$

par densité de $\mathfrak{A}_\circ\top\mathfrak{A}_\circ$ dans H, on en déduit

$$U(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta)J)=(1\otimes J\hat{\lambda}(\theta)J)U$$

pour tout θ de $\hat{M}_*$, et, par densité de $\hat{\lambda}(\hat{M}_*)$ dans M, on en déduit $U\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\psi)\otimes M$, d'où le résultat, grâce à 2.6.

2.12 Lemma. *Soit P un projecteur de $A\otimes M$ tel que $(i\otimes\varsigma\Gamma)(P)\leqq P\otimes1$ (resp. $(i\otimes\varsigma\Gamma)(P)\geqq P\otimes1$). Alors, il existe un projecteur Q de A tel que $P=Q\otimes1$.*

Démonstration. D'après [10], II. 8, pour tout X de $(A\otimes M)^+$, on a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varphi\otimes i)(i\otimes\varsigma\Gamma)(X)&=(i\otimes i\otimes\varphi)(i\otimes\Gamma)(X)\\&=(i\otimes\varphi)(X)\otimes1\\&=(i\otimes\varphi\otimes i)(X\otimes1)\end{aligned}$$

Comme $(P\otimes 1)-(i\otimes \varsigma\Gamma)(P)\geqq 0$ (resp. $(i\otimes\varsigma\Gamma)(P)-(P\otimes 1)\geqq 0$), on en déduit :

$$(i\otimes\varphi\otimes i)((P\otimes 1)-(i\otimes\varsigma\Gamma)(P))=0 \quad (\text{resp. } (i\otimes\varphi\otimes i)((i\otimes\varsigma\Gamma)(P)-(P\otimes 1))=0)$$

et, par fidélité, on en conclut :

$$\begin{aligned} P\otimes 1 &= (i\otimes\varsigma\Gamma)(P) \\ &= (1\otimes\sigma W\sigma)(P\otimes 1)(1\otimes\sigma W^*\sigma) \quad \text{d'après [2], I. 5 (i).} \end{aligned}$$

Ainsi, $P\otimes 1$ commute à $1\otimes\sigma W\sigma$, d'après [4], I. 15, appliqué à $\hat{\boldsymbol{K}}$, cela implique que $P\in A\otimes\hat{M}'$, et donc, d'après [10], I. 4, que $P\in A\otimes \boldsymbol{C}$, d'où le résultat.

2.13 Lemme. *Pour tout z de $\hat{M}$, U étant l'isométrie construite en 2.2, on a :*

$$\beta(z)U=U(1\otimes z)$$

Démonstration. Soient x dans $\mathfrak{N}_\psi$, y dans $\mathfrak{N}_{\hat\varphi}$. On a :

$$\begin{aligned} \beta(z)U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(y)) &= \beta(z)\Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi}(\beta(y)(x\otimes 1)) \quad \text{d'après 2.2} \\ &= \Lambda_{\psi\otimes\hat\varphi}(\beta(zy)(x\otimes 1)) \\ &= U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(zy)) \quad \text{d'après 2.2} \\ &= U(1\otimes z)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\varphi}(y)) \end{aligned}$$

d'où le résultat, par linéarité, continuité et densité.

2.14 Proposition. *L'isométrie U, construite en 2.2, est un unitaire. Il appartient à $A\otimes M$; c'est un $1^A_{\boldsymbol{K}}$-cocycle et, si on désigne par μ la représentation de M_* qu'il engendre, on a $\beta=\hat\beta_\mu$.*

Démonstration. D'après 2.11, on sait que U appartient à $A\otimes M$. L'égalité démontrée en 2.5 s'écrit donc, en utilisant [2], I. 5 (iii) :

$$(i\otimes\Gamma)(U)=(U\otimes 1)(i\otimes\varsigma)(U\otimes 1) \qquad (*)$$

Soit P le projecteur UU^*. On a :

$$\begin{aligned} (i\otimes\Gamma)(P) &= (U\otimes 1)(i\otimes\varsigma)(P\otimes 1)(U^*\otimes 1) \\ &\leqq (UU^*\otimes 1)=P\otimes 1\,. \end{aligned}$$

En appliquant 2.12 à $\boldsymbol{K}^\varsigma$, on en déduit l'existence d'un projecteur Q de A tel que $P=Q\otimes 1$. Soit z dans $\hat{M}$. On a :

$$\begin{aligned} \beta(z)(Q\otimes 1) &= \beta(z)UU^* \\ &= U(1\otimes z)U^* \quad \text{d'après 2.13} \\ &= UU^*U(1\otimes z)U^* \end{aligned}$$

$$=(Q\otimes 1)U(1\otimes z)U^*$$

$$=(Q\otimes 1)\beta(z)(Q\otimes 1) \quad \text{par le même calcul.}$$

En passant aux adjoints, il vient:

$$\beta(z)(Q\otimes 1)=(Q\otimes 1)\beta(z)$$

Soient alors x dans $\mathfrak{N}_\psi$ et y dans $\mathfrak{N}_{\hat\phi}$. On a:

$$\begin{aligned} U(Q\otimes 1)\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\phi}(y)) &= U(\Lambda_\psi(Qx)\otimes\Lambda_{\hat\phi}(y)) \\ &= \Lambda_{\psi\otimes\hat\phi}(\beta(y)(Qx\otimes 1)) && \text{d'après 2.2} \\ &= \Lambda_{\psi\otimes\hat\phi}((Q\otimes 1)\beta(y)(x\otimes 1)) && \text{d'après ce qui précède} \\ &= (Q\otimes 1)\Lambda_{\psi\otimes\hat\phi}(\beta(y)(x\otimes 1)) \\ &= (Q\otimes 1)U(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\hat\phi}(y)) && \text{d'après 2.2} \end{aligned}$$

Par linéarité, continuité et densité, on en déduit:

$$U(Q\otimes 1)=(Q\otimes 1)U$$

d'où

$$U^*U(Q\otimes 1)=U^*UU^*U$$

$$Q\otimes 1=1.$$

Ainsi U est unitaire; la relation (*) exprime alors que c'est un 1^A_K-cocycle. D'après [1], 2.14, pour tout x de $\hat M$, on a:

$$\begin{aligned} \hat\beta_\mu(x) &= U(1\otimes x)U^* \\ &= \beta(x) && \text{d'après 2.13} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

2.15 Théorem. *Soient K une algebre de Kac, A une algèbre de von Neumann, β un morphisme normal injectif de $\hat M$ dans $A\otimes\hat M$. Alors, les assertions:*

(i) $(i\otimes\hat\Gamma)\beta=(\beta\otimes i)\hat\Gamma$ *et* $\beta(1)=1$;

(ii) *il existe une représentation non dégénérée de M_* dans A telle que $\beta=\hat\beta_\mu$;*
sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de regrouper 1.1 (ii) et 2.14.

2.16 Corollaire. *Soient G un groupe localement compact, A une algèbre de von Neumann, β un morphisme normal injectif de $\mathfrak{M}(G)$ dans $A\otimes\mathfrak{M}(G)$. Alors, les assertions:*

(i) $(i\otimes\Gamma^s_G)\beta=(\beta\otimes i)\Gamma^s_G$ *et* $\beta(1)=1$;

(ii) *il existe une représentation μ de G dans A telle que $\beta(\lambda(s))=\mu(s)\otimes\lambda(s)$ pour tout s de G;*
sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 1.2 (i) à 2.15.

2.17 Corollaire. ([12]) *Soit G un groupe localement compact. Tout automorphisme β de $L^\infty(G)$ qui commute aux translations à droite est une translation à gauche.*

Démonstration. L'hypothèse s'écrit $\Gamma_G^a\beta=(\beta\otimes i)\Gamma_G^a$. En appliquant 2.5 au cas où $\boldsymbol{K}=KS(G)$ et $A=\boldsymbol{C}$, on en conclut l'existence d'un caractère χ de $\mathfrak{M}(G)_*$ tel que $\beta=\hat{\beta}_\chi$. On sait que χ est nécessairement égal à $\lambda_G(s)$ avec s dans G, le corollaire résulte alors de 1.2 (ii).

2.18 Corollaire. *Soient $\boldsymbol{K}$ une algèbre de Kac, $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann, γ un morphisme normal injectif de $\hat{M}'$, dans $\hat{M}'\otimes\mathcal{A}$. Alors, les assertions:*

(i) $(\hat{\Gamma}'\otimes i)\gamma=(i\otimes\gamma)\hat{\Gamma}'$ *et* $\gamma(1)=1$;

(ii) *il existe une représentation non dégénérée μ de M_* dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma=\gamma_\mu$; où γ_μ a été défini en* 1.1 (iv);
sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 2.15 à $\beta=(v\otimes i)\gamma v$.

2.19 Corollaire. *Soient α une action de $\hat{\boldsymbol{K}}'$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, μ une représentation de M_*, α_μ la décomposition associée au sens de* [6], 3.2, *$\mathcal{B}$ und algèbre de von Neumann et δ un morphisme injectif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Alors, les assertions suivantes:*

(i) *il existe une représentation μ de M_* telle que $\delta=\alpha_\mu$ et*

(ii) *il existe un morphisme γ de $\hat{M}'$ dans $\hat{M}'\otimes\mathcal{B}$ tel que $\gamma(1)=1$ et*

$$(i\otimes\gamma)\alpha=(\alpha\otimes i)\delta$$

et

$$(\hat{\Gamma}'\otimes i)\gamma=(i\otimes\gamma)\hat{\Gamma}'$$

sont équivalentes.

Démonstration. Cela résulte clairement de 2.18 et [6], 3.2.

2.20 Corollaire. *Soient α une coaction de G sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, μ une représentation de G, α_μ la décomposition associée au sens de* [6], 3.2. *$\mathcal{B}$ une algèbre de von Neumann et δ un morphisme injectif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Alors les assertions suivantes:*

(i) *il existe une représentation μ de G telle que $\delta=\alpha_\mu$ et*

(ii) *il existe un morphisme γ de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{B}$ tel que*

$$(i\otimes\gamma)\alpha=(\alpha\otimes i)\delta$$

et

$$(\Gamma_{\mathcal{R}(G)}\otimes i)\gamma=(i\otimes\gamma)\Gamma_{\mathcal{R}(G)}$$

sont équivalentes.

($\Gamma_{\mathcal{R}(G)}$ désigne l'unique morphisme de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G)$ tel que $\Gamma_{\mathcal{R}(G)}(\rho(s))=\rho(s)\otimes\rho(s)$ pour tout s de G).

Bibliographie

[1] J. de Canniere, M. Enock and J.-M. Schwartz: *Algèbres de Fourier associées à une algebre de Kac*. Math. Ann. **245** (1979), p. 1-22.

[2] M. Enock: *Produit croise d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac*. J. Funct. Anal. **26** (1977), p. 16-47.

[3] M. Enock and J.-M. Schwartz: *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*. Bull. Soc. Math. France, Sup. Mémoire n° **44** (1975), p. 1-144.

[4] M. Enock and J.-M. Schwartz: *Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac*, II. Publ. RIMS Kyoto **16** (1980), p. 189-232.

[5] M. Enock and J.-M. Schwartz: *Actions d'une algèbre de Kac sur une algèbre de von Neumann et représentations*. C. R. A. S. Paris **291** (1980), p. 631-633.

[6] M. Enock and J.-M. Schwartz: *Systemes dynamiques généralisés et correspondances*, Journal of Operator Theory, (1983), à paraitre.

[7] Y. Nakagami: *Some remarks on crossed products of von Neumann algebras by Kac algebras*. Yokohama Math. J. **27** (1979), p. 141-162.

[8] Y. Nakagami and M. Takesaki: *Duality for crossed products of von Neumann algebras*. Lecture Notes in Maths. Vol. **731** (1979), Springer-Verlag.

[9] G. K. Pedersen and M. Takesaki: *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*. Acta Math. **130** (1973), p. 53-87.

[10] J.-M. Schwartz: *Sur la structure des algèbres de Kac*, I. J. Funct. Anal. **34** (1979), p. 370-406.

[11] J.-M. Schwartz: *Sur la structure des algèbres de Kac*, II. Proc. London Math. Soc. **41** (1980), p. 465-480.

[12] J. G. Wendel: *Left centralizers and isomorphisms of group algebras*. Pac. J. Math. **2** (1952), p. 251-261.

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
U. E. R. 48, Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05
France