

小数の乗除の意味の指導について

片 桐 重 男

On the Teaching of Meanings of Multiplication and Division of Decimal Fractions

Shigeo KATAGIRI*

SUMMARY

The very important aims of mathematical education are to have the children understand the meanings of each computational operation, and to develop their ability of making operational decision. And the meanings of multiplication and division of decimal fractions are the typical examples of mathematical extension.

However our teaching of those meanings has been very insufficient.

This paper clarifies the mathematical and educational importance of teaching those meanings and it also proves through experimental lessons, that the teaching of the general meanings of both operations has much effect.

目 次

- I 小数乗除の意味の指導の問題点
- II 小数乗除の意味の実験的指導
- III 結論と今後の問題点

I 小数乗除の意味の指導の問題点

(1) 計算指導の重点

小学校算数科における計算は、整数、小数、分数の四則であるが、これらの計算の指導内容として、次のものが考えられる。

第1は、演算の決定である。すなわち各々の計算について、それがどのようなときに用いられるかという、各計算の用いられる場をできるだけ豊かに身につけさせ、これによって、それぞれの問題場面でいかなる演算をどのような順に用いればよいかを的確に自主的に判断し、論理的に説明できるようにすることである。それとともに、これらの場の共通の本質的特徴をとらえ、一般化して、各演算の一般的意味を明確にさせていくことである。

また、さらに、数範囲が広げられるに伴って、それぞれの演算の意味を拡張し、より広く用い、より論理的に処理していけるようにすることである。

* 数学教育教室 (Dept. of Mathematical Education)

第2には、各々の計算方法を、数や記数法の意味、演算の意味および既知の数範囲での計算方法に基づいて、子どもたち自身に発見させたり、その方法の真である理由を明らかにさせていくことである。

その際計算法則の成り立つことを漸次明らかにし、これを根拠として用いるようにさせる。そして、このことは、さらに代数的構造の学習へと発展していくのである。

第3は、形式的な計算が正しく、できれば速に行なえるようにすることである。

従来「計算力が上がった」とか「計算さえよくできない」といったことがいわれ、いわゆる計算能力が話題になることが度々あったが、このときは、大体上の第3の場合を対象としていたといえよう。しかし計算についての指導内容には、上述の第1や第2のものもあるのである。従って、計算能力を問題にするときは、上の1、2、3のすべてにわたって考えることが必要である。

もちろん、定められた形式的な計算が正しく速くできることは必要であるが、第1の演算決定の能力や第2の自らの力で計算方法を発見し、演えきの説明ができるといったことは、これにもまして大切なことである。(第2についての考察は、後の機会にまわす。)

新しい問題に遭遇したとき、これに対しどんな行動をとればよいかを自ら決定できるということが必要である。これができなくては、問題の解決は不可能である。計算に関していえば、問題に遭遇したとき、どんな演算をどんな順序で行なっていけばよいかを自ら決定できなくてはならない。これができなくては、計算方法にいくら熟達していても問題を解決することはできないであろう。

このことは、電子計算機の発達によって、むしろ益々重要になってきたといえよう。コンピューターは、極めて複雑な極めて多くの計算を極めて早く正しく計算する。しかし、そのためには、何を如何なる順序で計算するのかが、きちんと定められていなくてはならない。すなわちプログラミングということが、コンピューターを使う人間の仕事として重要なものとなっている。これが演算の決定である。すなわちコンピューターに対する演算の決定ということが、人間が持たなくてはならない能力なのである。

また演算決定は、問題に対して人間が自己の行動を決定することであるから、自らの行動を自らの力で決定できる自主的人間の育成という教育のねらい達成のためにも、この能力態度を伸ばすことは極めて重要である¹⁾。

(2) 乗除の意味の指導の重点と問題点

この演算決定の力を伸ばすには、それぞれの演算が用いられる種々の場を理解させることが必要である。これをただあの時にもこの場合にも用いられるといったように、個々の種々の場を知らせるだけでなく、それらに対して同じ演算が用いられる根拠を明らかにし、これらを統合して各演算の一般的意味をつかませなくてはならない。ただ個々の場合を理解させるだけでは、それと類似な場に遭遇したときには、演算決定ができるかもしれないが、一見全く新しいとみられる問題に対しては、演算決定ができないかもしれない。このようなときにも正しく決定がなされ、しかも論理的に処理できるようにするには、演算の一般的意味を明らかにしておかなくてはならない。さらに数範囲が広がるに伴って、この

新しい数範囲に対しても成り立つように、その意味を拡張し、より一般的なものにしていくことである。これによって、新しい問題に遭遇したときに、その問題の事象に関する正しい知識があれば、この意味に照らして演算が決定できるのである。

そこで、この演算の意味について、数範囲が広がるに伴ってこれをおさえ、拡張するように指導がなされることになってはいる。

すなわち乗法については、2年で同数累加、ある数量の何倍かを求めることといった意味を、それが用いられる具体的な場の考察を通して明らかにする。そして、3年、4年と学年が進み、数範囲が億兆と広がるに伴って、この意味が繰り返えし確かめられ、小数×整数に広げられてもこれが用いられるようにする。

それは、数直線や集合などを用いてこれらの場合における意味をおさえしていくのである。

除法については、3年で、等分除、包含除としての意味、乗法の逆としての意味を指導し、続いてあまりのある除法への拡張をする。そして、5年までの間に、これらの意味が、やはり小数÷整数にまで用いられていくのである。

その間に、将来の乗数が小数になった場合に備えて、乗法の意味を

「乗法は一般に次のような場合に対応して用いられることを漸次理解させるようにするのである

$$(\text{基準とする大きさ}) \times (\text{基準の大きさを単位とした数})^{2)}$$

しかし、実際に教科書などの扱いは、このような一般化は明確にはなされず、

$$(1\text{つ分のねだん}) \times (\text{買った数}) = (\text{ぜんぶの代金})$$

といったような、ある具体的な量についての関係をことばの式でまとめるにとどまっている。すなわち、数の大きさは捨象されているが、量の種類までは捨象しきれていない。

そして、第5学年で、乗数、除数が小数になる場合に、その意味が拡張されるのである。それは、

「 A の B に対する割合 (B を単位として A を測った値) が p であるとき、 A を $B \times p$ として求める。」³⁾

「 A の B に対する割合 p を $A \div B$ として求める。

A の B に対する割合が p であるとき、 B を、 $A \div p$ として求める。」

ことを、乗数、除数が小数であるときを含めて理解させることになっている。

また、第6学年で、乗・除数が分数の場合を指導するが、その際は、この乗除の意味がそのまま用いられる。

従って、第5学年の小数の乗除の指導に、計算指導の重点の一つがあるといってよい。それだけに、ここには指導の難かしさがあり、種々の問題点がある。

実際、教科書の扱いや実際になされている指導を見ると、そのほとんどが、上のような一般的意味は「割合」(百分率・歩合)の章で指導しており、これ以前に扱われる小数の乗除では、これを明確につかませようとする意図があまりみられない。教師用指導書では、小数の乗除で、上の意味をつかませることをねらいとしてあげてはいるが、

ある教科書の扱いを例にあげると、小数乗除の意味の指導の部分は概略次のようになっ

ている。

「1. 1 m が 250 円のぬのを、つぎの長さだけ買うときの代金を求める式を書きなさい。

3 m, 2 m, 1.5 m, 0.4 m

(1 m のねだん) (長さ)

3 m の代金…………… 250×3

2 m の代金…………… 250×2

(1 m のねだん) \times (ぬの長さ) = (代金)

1.5 m, 0.4 m のときも、上の式にあてはめて書きます。

1.5 m の代金…………… 250×1.5

0.4 m の代金…………… 250×0.4 」

これに続いて、この計算方法の説明があり、さらに次のような指導がある。

「5. たて 1.8 m, 横 3.2 m の長方形の形をした花だんがあります。面積は、何 m^2 あるでしょうか。

面積を求める式を書きなさい。

1.8×3.2

「長さが小数のときも、長方形の面積の公式にあてはめて求めます。」そしてこのあとには、計算のし方と計算練習問題がつづく。

除法も、数値が整数の場合から類推させるか、整数のときのあることばの式や公式にあてはめさせるといった、上の乗法と同じような扱いである。しかも上述の除法の二つの意味のうち一方に当たる場合しかとりあげていない教科書もある。

また、この節のまとめに、演算の意味をあげているものはなく、どれも、

- ・いろいろな計算のきまりが、小数のかけ算についても成り立つこと。
- ・小数のわり算は、わる数が整数になるよう、わる数とわられる数の小数点を同じけた数だけうつして計算する。

といったように、計算のし方や計算法則についてのまとめがあるだけである。ここに、演算の意味の位置付け、扱いの軽さがうかがえる。

すなわち計算の意味は、各節のはじめに計算方法に先立って指導されるのであるが、その意味の指導は、一般的意味をおさえる指導がみられず、上述のように具体的例によって、数値が整数の場合から類推させるか、整数の場合に成り立っていたことばの式を小数の場合にも適用できることとするといった扱いである。勿論このように整数で成り立つ演算、公式を小数の範囲にまで保存するといった、なるべく広く用いようとする、いわゆるハンケルの形式不易の考えを伸ばすことは必要である。しかし、そこに取り上げられている例を、現行 6 種の教科書についてまとめてみると、乗法については、小数 \times 小数の例を整数 \times 小数の例と共にとり上げているものと、整数 \times 小数のみをとりあげているもの（小数 \times 小数は、計算方法指導後の練習の中にある。）とが半々であり、その例題数は、ほとんどが二題である。また除法については、上述の割合 p を求める場合と基準量 B を求める場合とのうち、 p の場合しかとり上げていないものが二種ある。そして、例題は一、二題で

ある。しかも上述のように、一般的意味付けは示していないのである。

また、「まとめ」では、意味については述べていない。

これでは十分に一般的意味をは握させ、これにもとずいて演算決定をしたり、論理的に説明ができるようさせうるかどうかは疑問である。

それでは、小数・分数の場合にも用いる乗除の意味として、どのようなおさえ方があるであろうか。

まず、乗法について、ここでは次の四つをあげることができる⁴⁾。

この何れも、「数値が小数や分数であっても、整数の場合と、問題の文脈が同じときには、統一的に同じ形の式（乗法や除法）で表現しよう。」という形式不変の考えがもとになっていることは明らかなことである。

① 公式を利用する場合

これは、買い物の代価を算出したり、面積を計算したりするような場をとりあげ、整数の場合に用いる公式の理解を基礎にし、小数・分数の場合にも同じ式を用いようとする考えに従って、意味を一般化するものである。

② 測定の考えを用いる場合

これは、たとえば、ある机の長さを、手近にあった棒で測ったとしよう。棒の長さが 20 cm で、それを単位として 3 であれば、机の長さは 20×3 で計算される。その棒を単位にして、3.2 の長さであれば、それは 20 cm の棒が、3 個分とその $2/10$ を合わせた長さである。これを、整数の場合と同じように、

$$20 \times 3.2$$

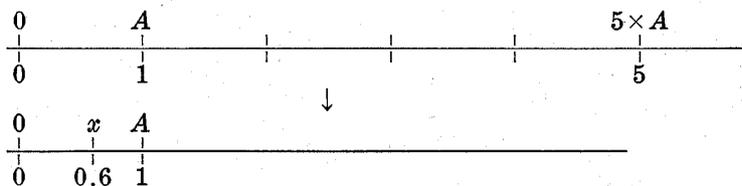
と表現すると、統一的に同じ形式で表現できて便利である。このことから、小数の乗法の意味を理解させるものである。

③ 割合の考えを用いる場合

たとえば、「A が B の 0.6 である」というのは、「A が B の 5 倍である」というのと同じような数量関係（文脈が同じ）であって、ただ、「割合を表わす数 5 が小数 0.6 に変わっただけである」という考えによって、A が B の 0.6 のときは、A を $B \times 0.6$ と表わすつつごうがよいことをわからせて、小数の乗法の意味を理解させる。

④ 数直線の考えを用いる場合

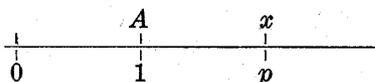
③のような一般的意味をとらえさせるのに、下図の 5 に対応する目もりが $5 \times A$ で求め



られることから、A, 5, $5 \times A$ と A, 0.6, x の位置関係が同じことに着目させて、 x は $A \times 0.6$ と表わせばよいことをつかませる。一般に、下図のような位置関係になっているとき、 x は

$$A \times p$$

と乗法で表わせるという一般的意味を理解させる。



この中で①は、形式的で、小数の場合にも形を統一するとよい、統一することが妥当だということを意識させることが十分にできないという欠点がある。ただ、これを用いる場での立式は容易である。しかし、この①は、②とともに一般性に乏しいというところに最も大きな問題点がある。これらは具体的な量に依存している。従って、既習の公式やことばの式がある場合や、具体的な量に即して考える場合には、これによって処理できるが、そのような公式がなかったりしたときには、これでは処理できないこととなる。前述の教科書の扱は、これらの場合に当る。

③は、数の基本的な性質に着目し、数学でとられる数の意味の理解にもつごうがよく、量の種類も捨象しているので、一般的で、活用場面も広い。しかし子供にとって、やや抽象的で理解がむずかしいかもしれないという問題がある。

④は、低学年から数直線を活用してきていれば、理解されやすいであろうが、そうでないと③と同様に理解がむずかしいという問題がある。しかし意味としては一般的である。

次に除法についてであるが、既に述べたように、 A, B, p の A と B から p を求めるとき ($A \div B$) と、 A と p から B を求めるとき ($A \div p$) とがあるが、このいずれの意味についても、上述の乗法の場合の①～④に相当する場合が考えられる。そしてさらに

⑤ 乗法の逆算の考えを用いる場合

数量の関係が $a \times b = c$ で表わされ、 a または b が未知のとき $c \div b$ ($b \neq 0$) または $c \div a$ ($a \neq 0$) で、 a または b を求めることができることを理解させる。

(これらの除法の意味に対応して、あまりのある除法の意味があるが、これについては省略する。)

教師は、こどもたちにこれらのうちどれを、乗除の意味としてとらえさせようとしているのであろうか。

そのことを知るために、次のような簡単な調査をしてみた。

- ・最近3年以内に小数の乗除を指導した教師 42 名を対象に、次のアンケートに答えてもらった。

「小数乗除の意味の指導についての調査

次の質問にお答えください。(該当する番号を○で囲む)

1. 乗数が小数になる乗法の意味の指導のため(練習は除く)具体的問題を何題とりあげましたか。
 (1) 1題 (2) 2題 (3) 3題以上 (4) その他(具体的にかいてください)
2. 除数が小数になる除法の意味指導のため(練習は除く)具体的問題を何題とりあげましたか。
 (1) 1題 (2) 2題 (3) 3題以上 (4) その他(具体的にかいてください)

3. 2で2題以上のとき、それらの問題の間のちがいを簡単にかいてください。
 4. このような具体的な問題をとりあげることによって、乗除の意味としてどのようなことを子供たちに分からせようと思いましたか。
 - (1) 教科書に準拠して指導しているので、特にどのようなとらえ方をさせようとしたかは考えていない。
 - (2) 乗除数にあたる数が、整数のときのことばの式や公式を思い出し、これにあてはめればよいと理解させる。
 - (3) 問題に与えられている小数を整数に直して、整数のとき乗法なら小数でも乗法、整数のとき除法なら小数でも除法と判断させるようにする。
 - (4) 新しい問題に出会ったら、意味の指導でとりあげた例題と比較して類推させるようにする。
 - (5) 具体例によって、小数の乗法、除法の一般的意味を指導し、この一般的意味に基づいて考えるようにさせる。
- (5) のときは、具体的にかいてください。」

この結果は、次のようであった。

1. (1) 9% (2) 52% (3) 39%
2. (1) 9% (2) 43% (3) 48%
3. これは、いわゆる割合を求める場合と、基準の大きさを求める場合との二つの意味について、それぞれの問題を意識的にとりあげようとしていたかどうかを知ろうとしたものである。

その結果、約 1/3 だけがこのことをかいていた。

また、除数が1より大きいときと小さいとき、被除数が整数と小数のときといったように数値を意識的にかえたというのが約 1/3 あった。

4. (1) 0% (2) 17% (3) 35% (2) と (3) の両方 13% (4) 17% (2) と (5) 13% (5) 9%

従って、(2) につけたものは 43%

(3) につけたものは 48%

- ・乗法で具体例1題、除法で2題以下というのは、意味の指導をしているというには、不十分ではないかと考えられる。これが乗法で約 9%、除法で約 52% みられる。そして、除法の意味の二つに注意を向けているということが、はっきり見られるのが約 1/3 しかないということも、意味の指導の不十分さを示しているといえよう。

また4で、一般的意味をおさえようとしているのは、約 22% にすぎない。

これらのことから、一般的意味の指導を徹底していくことが必要であると考えられるのである。

なお、一般的意味を指導するというもののほとんどが、数直線または線分図による意味づけを挙げていた。

(3) SMSG の実験テキストなどにおける意味の指導

このような乗除の意味の指導が、アメリカやイギリスのテキストなどでは、どのように考えられているかという点、以下に述べるように、我々が考えている以上に十分になされているとは、とてもいえないようである。従って、私の調べた限りでは、参考にし、とりあげたらよいと思えるものはなかった。

① SMSG の実験テキストにおける扱い。

アメリカやイギリスでは、分数の乗除が小数の乗除より先に指導されているので、ここでは、分数の乗除についてみていけばよいことになる。

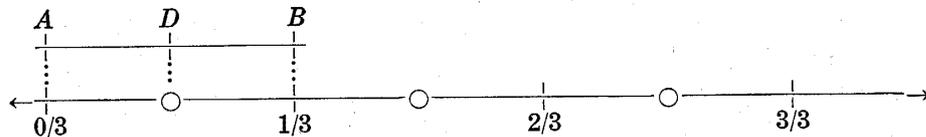
また、 $a \times b$ の a と b の意味が我が国とは逆になっている。3の2倍を、我々は 3×2 とかくが、これを 2×3 とかいている。そこで、 2×3 とかいてあるところを、我々の流儀に従って、 3×2 と書き直して考察していくこととする。

アメリカの数学教育現代化のための最も大きな実験団体であった SMSG で発行した実験的テキスト⁶⁾ “Mathematics for the Elementary School” の「第6学年第2章有理数の乗法」では、分数乗法の意味に関して次のように扱っている。

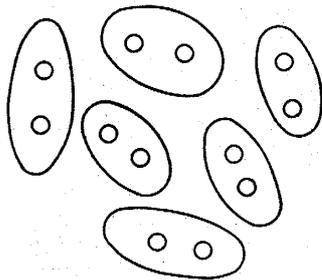
(1) 二辺が分数のときにも、長方形領域の面積を求める演算を乗法とよぶこととする。

(2) 数直線を用いて、 $1/3 \times 1/2$ は、‘1/2 of 1/3’ ということであるから、下図のように AB を $1/3$ 、 AB の中点を D とすれば、 $m\overline{AD}$ が ‘1/2 of 1/3’

故に $1/3 \times 1/2 = 1/6$



(3) 集合の部分集合の大きさを示すのに乗法を用いる。下図の 12 ことからなる集合の一つの部分集合の要素の数は「1/6 of 12」といえる。そこで $12 \times 1/6 = 2$ となる。



これら三つを乗法の意味のモデルとして示している。しかし(3)はモデルとして用いられる場合が極めて限られたものであり、(2)と(3)は、意味のモデルというより、計算のし方を示すために用いられている。また(1)は、前項で述べた(1)の場合である。

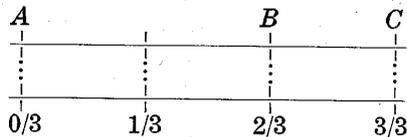
除法については、第6学年第6章でとりあげている。それは次のようである。

(1) 乗法の逆として定義している⁶⁾。

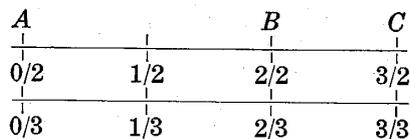
すなわち、整数では、除法 $a \div b = x$ は、 $b \times x = a$ または $x \times b = a$ であった。そこ

で、分数除法 $5/8 \div 2/3 = 15/16$ も $2/3 \times 15/16 = 5/8$ を意味するとしている。そして、これを除法の計算方法の説明に用いている。

(2) 数直線での除法を示している。



上の数直線で、 AC の測度が1である。いま AB の測度が1となるスケールを考えると、下図のようになる。



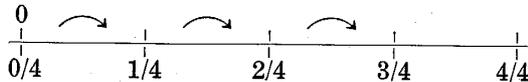
これは、 $m\overline{AC} \div m\overline{AB} = 3/2$ 即ち $1 \div 2/3 = 3/2$ を示している。

また $m\overline{AB} \div m\overline{AC} = 2/3$ 即ち $1 \div 3/2 = 2/3$ を示している。

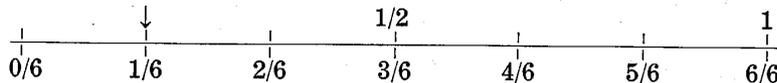
これは、意味の説明とみられるが、一方が1の場合に限られている。

② テキスト *Elementary School Mathematics* における扱い。

このテキストは、算数教育の現代化を目指して、*Ball State Program* に基づいて作られた市販の教科書である⁷⁾。この第5学年第12章で、数直線を用いて



$1/4$ の3ジャンプは、上図のようになる。これは $1/4 \times 3 = 3/4$ である。



また ' $1/3$ of $1/2$ ' は上の図の $1/6$ を示す。これを $1/2 \times 1/3 = 1/6$ とかく。さらに

$$\begin{aligned} 4/5 \times 3/8 &= (4 \times 1/5) \times (3 \times 1/8) \\ &= (4 \times 3) \times (1/5 \times 1/8) \\ &= 12 \times 1/40 = 12/40 \end{aligned}$$

といった展開になっている。

ここでは、この教科書の教師用書に「整数と有理数の積を説明するための一つのモデルとして数直線を導入する」とあるように、数直線によって乗法の意味を指導しているというよりは、積を見出す方法のモデルとして数直線を用いている。

また、第6学年第7章で除法を扱っているが、これは *SMSG* と同様に乗法の逆としている⁸⁾。ただし、それは、例えば、

$8/15 \div 4/5$ は $n \times 4/5 = 8/15$ の n を求めることであるといった抽象的な数の上での扱いである。従って、 $4/5 \times n = 8/15$ の n を求めることであるという扱いは見られない。このように、ここでも、意味の指導としては極めて不十分である。

③ *NMP* における扱い

いで、小数乗除の意味の指導の段階で可能であろうか。またこれを行なうことが効果があるであろうか。さらに効果があるとしたら、どの意味を中心にとりあげるのがよいであろうか。

これらのことは、いわゆる調査やテストだけでは明らかにされない。このことをねらった指導を試みて、その効果を判定しなくてはならないであろう。

そこで、次のような実験研究を試みた。

(1) 実験授業と調査のねらい

① 小数乗除の意味の指導の段階で、乗除の一般的意味を指導することは可能かどうかを明らかにする。

② この段階で、乗除の一般的意味を指導することは効果があるかどうかを明らかにする。

③ 小数乗除の意味として、どのようなものが、こどもにとらえやすく、用いやすいかを明らかにする。

これは、こどもの思考の面から見た望ましい意味をとらえようとする立場をとったものである。

(2) 実験対象と指導計画

実験クラスA……東京都渋谷区立常磐松小学校5年一クラス (26名)

比較クラスB…… 同 上 5年一クラス (26名)

両クラスとも同じ指導計画、同一の教材で授業を展開する。

(i) 小数の乗法除法の意味……5時間 (昭和50年4月下旬～5月上旬)

(ii) 小数の乗除の計算のし方……3時間

(iii) 練習 ……2時間

これ以後に、積や商の大きさ、計算法則、あまりのある除法、練習・テストなどが続くが、本実験は、上の(i)の5時間である。これは意味を指導し終わったところまでで、計算のし方や練習を含めない。従って、この点が一般に行なわれている指導と異なる。一般には、乗法の意味、乗法の計算のし方、練習、積の大きさ、計算法則といったように、乗法の指導全体を先ず行ない。その後には除法の意味の指導が行なわれる。

しかし、これでは、乗除の演算の選択判断の指導が曖昧になり望ましいことではないので、乗除の意味を先ず同時に扱い、調査問題でも、演算を選択判断しなくてはならないようにした。また、こどもたちの中には、計算のし方がわからないと演算決定に抵抗があるものが多い。この点で、乗法の意味に続いて計算のし方を指導した方が、学習させやすいのであるが、実験をなるべく短期間に集中的に終らせたいということからも、上のような計画で行なった。

そのため、常に乗除演算の選択判断をしなくてはならないということ(これは望ましいことである。)と、計算のし方がわからない段階で、即ち実行できない計算について、それを決定しなくてはならないという二つの点で、一般に行なわれている授業よりも、こどもにとって難かしいものになったと考えられる。

AクラスとBクラスのちがいは、Aクラスは、第3時間以後において、各問題ごとに、後にあげるような一般的意味をおさえ、これを用いて判断説明させるようにしたが、Bクラスの方は、個々の問題ごとにあてはまることばの式を整数の場合から想起させて考えさせるようにした。この点でBクラスは、一般性、論理的扱いの程度が、Aクラスより低いのである。(指導者はAが担任(2時間)片桐(3)、Bは担任)

(3) 調査ならびに授業の実際

(i) 事前調査 I, II

まず、乗除の意味をどのようにとらえているかを調査し、は握する。即ち4年までの乗除の学習結果として、乗除の用いられる場をどのように一般的にとらえているかを確かむ。そのために、次の調査Iを行なった。

調査 I

1. 「かけ算はどのようなときに使うのですか。」と聞かれたら何と答えますか。なるべくいろいろな場合にあってはまる説明を書いてください。
2. 「わり算はどのようなときに使うのですか。」と聞かれたら何と答えますか。なるべくいろいろな場合にあってはまる説明を書いてください。

「これらは、幾つ書いてもよいこと」を注意として与えた。

次に、調査IIを調査Iに続けて行なう。

これは、小数乗除に対して、子供が指導を受ける前に、小数乗除に関する問題に対して、どの程度どのように反応するか。またなぜそう考えたかを探るものである。この二つが出発点で、このあとの指導で、これがどう変容していくかを明らかにしようとしたのである。

調査 II

つぎのおのおの答えを求める式を書きなさい。また、そのように考えたわけも書きなさい。もしわからないときは、わからないわけを書きなさい。(計算はしないでよい。)

1. $1l$ が 0.68 kg の重さのガソリン $5.4l$ の重さはいくらですか。
○式
○わけ (2以下も同様)
2. $4.5l$ のあずきの重さをはかったら、 3.15 kg ありました。このあずき $1l$ の重さは何 kg ですか。
3. 明くんの体重は 31.5 kg で、父の体重は 75.6 kg です。父の体重は明くんの体重の何倍ですか。
4. $11.2l$ の油を $0.8l$ ずつはいるびんに入れていくと何本のびんにいっぱいになり、どれだけあまりますか。
5. お金が 12000 円たまったので、その 0.3 だけ貯金することにしました。いくら貯金するのでしょうか。
6. げん米をついて白米にするとつきべりがあって、げん米のときの重さ1に対して 0.925 の重さになります。白米が 74 kg いるときには、げん米は何 kg つけばよいでしょう。
7. 容積が $7.5l$ の水そうがあります。これに水を $3.6l$ 入れました。水の量は水そうのどれだけ

の割合にあたりますか。

この問題のうち1, 2, 3は, どの教科書の問題とも似よりのものである。ただ, 多くの教科書には, 「長方形のたてが2.5 cm, 横が3.6 cmの面積はいくらですか。」といった問題があるが, 杉並区立松庵小学校, 新潟市立礎小学校で, 本研究についての予備実験をしてもらったが, その結果の一つとして, この長方形の問題は, 殆ど全員が, 公式を適用して 2.5×3.6 と正しく立式し, これに何の疑問ももたないことがわかった。この問題は公式を用いる以外に方法がないので, このように立式できるのが当然だともいえる。従って, これは意味の拡張のための導入問題としては適当ではないと考えられる。そこでこの種の問題はとり上げないことにして, これ以外の, 教科書に普通にとりあげられている問題によって調査することとした。

4, 5, 6, 7は, 乗除の「練習」か, 「割合」の章でとりあげられている問題である。これは, 指導後の調査で再びこどもたちに課し, 指導前と指導後との比較をするためのものである。従って, 4, 5, 6, 7については, 正解の説明はしないのはもちろんのこと, 何も指導しないことにした。1, 2, 3は次に述べるように, 授業にとりあげる。

(ii) 実験授業第1次 (3時間)

第1時：小数乗法の意味

調査Ⅱのこどもの反応結果を整理し, この結果をもとにして, 第1～3時の授業を展開する。

調査Ⅱの中の乗法の用いられる問題1「1lが0.68 kgの重さのガソリン5.4lの重さはいくらですか。」をとりあげる。これに対して, 子供たちが全体としてどう答えたかということを知らせ, このどれが正しいか, それはなぜかということ子供たちと一緒に考えていくことによって授業を展開していった。(これは本研究のもう一つの特色である。調査が事前になされることがよくあるが, この調査とは別個の問題をとりあげて授業が展開されることが多い。このように調査と授業とを切り離すことは, 調査が調査だけのものとなり, こどもに利益を還元することにならない。従って時間の浪費でもある。しかもこのように切り離して行なうと, 授業の導入のために, ことさら新しい導入問題となるものを用意してこなくてはならない。そこで, 子供たちに, 調査結果を知らせ, これを検討するという展開や, この調査問題を導入問題としてとりあげるという展開をすれば, 学習への興味関心は十分に高められ, 目的をもって学習を展開させることができるのである。)

この際, この問題がなぜ乗法でよいかということは, 数値が整数の場合と比べて類推させたり, ことばの式に当てはめさせることによって指導する。このようにこの問題についての理解を主とし, これをもとに一般的意味を指導することはここでは行なわない。

次に, 縦2.5 cm, 横3.6 mの長方形の面積を求める式を, 同じようにして考えさせ説明させた。

第2時・第3時：小数除法の意味

調査Ⅱの問題2と3「4.5lのあずきの重さをはかったら, 3.15 kg ありました。この

あずき 1*l* の重さは何 kg ですか。」「明くんの体重は 31.5 kg で、父の体重は 75.6 kg です。父の体重は明くんの体重の何倍ですか。」をとりあげ、これについて、子供たちに、どのように考えたか（調査Ⅱにおいて）を質問し答えさせながら授業を展開する。これは、第1時と同様な扱い方である。

(iii) 調査Ⅲと実験授業第2次（2時間）

調査Ⅲは、こどもたちの理解度を調査するのであるが、それよりも主なねらいは、これを行なわせることによって、第1次と同様にその結果を授業に生かしていこうとするものである。

調査Ⅲ

＊ つぎのおのおのの答えを求める式を書きなさい。またそのように考えたわけも書きなさい。もしわからなかったら、そのわけを書きなさい。

1. ある田から 10.5 t の米がとれました。この田からは 1 ha あたり 4.2 t の米がとれます。田の広さは何 ha ですか。

式：

わけ：（2以下も同様）

2. 1*l* のガソリンでおよそ 9.5 km 走ることのできる自動車があります。この自動車は、24.8*l* のガソリンでおよそ何 km 走ることができますか。

3. えんぴつ1本のねだんは 15 円で、これはボールペン1本のねだんの 0.3 倍にあたります。ボールペン1本のねだんはいくらですか。

4. 本1さつのねだんが 250 円でノート1さつのねだんはこの本の 0.4 倍です。ノート1さつのねだんはいくらですか。

実験授業第4，5時：乗除の意味の一般化

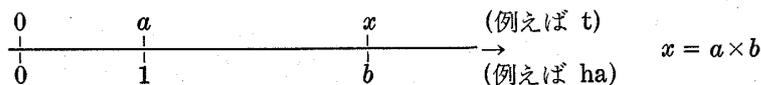
調査Ⅲの4題をとり上げ、子供たちにどのように考えたかを発表させ、話し合いをさせながら、できるだけ立式の理由を論理的に説明させるようにする。

このようにして、問題がむずかしいときは、数値を簡単な整数にして、その場合に成り立つ式、およびその理由にもとづいて、もとの問題の立式やその説明のし方を類推していくとよいことを分らせる。それとともに、次のような意味を指導する。

乗法は次の場合に用いること

(1) (1つ分の大きさ) × (いくつ分または何倍) = (いくつ分または何倍にあたる大きさ)

(2) 下のような数直線で、*a* と *b* から *x* を求めるとき（文字 *a* や *b* は用いないで、具体的な数で表わす。）



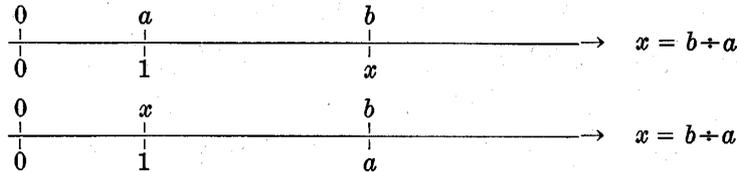
除法は、次の場合に用いること、

(1) (いくつ分または何倍にあたる大きさ) ÷ (1つ分の大きさ) = (いくつ分または何

倍)

(いくつ分または何倍にあたる大きさ) ÷ (いくつ分または何倍) = (1つ分の大きさ)

(2) 下のような数直線で、 a と b から x を求めるとき、



(3) 乗法の逆

$a \times x = b$ または $x \times a = b$ で表わされるとき x を求めるのに除法 $b \div a$ を用いる。これらを並列的に示して、子供たちにどれを用いてもよいようにさせておく。

(iv) 調査 IV, V, VI

5時間の指導の結果を次のIVとV, VIによって調査する。

調査IVは調査Iと同じであり、調査Vは、調査IIの問題4, 5, 6, 7と同じである。これによって、事前と事後のちがいをとらえるのである。

調査 IV

1. 「かけ算はどういうときに使うのですか。」と聞かれたら何と答えますか。なるべくいろいろな場合にあてはまる説明を書いてください。
2. 「わり算はどういうときに使うのですか。」と聞かれたら何と答えますか。なるべくいろいろな場合にあてはまる説明を書いてください。

調査 V

★つぎのおのおのの答えを求める式を書きなさい。また、そのように考えたわけも書きなさい。もしわからないときは、わからないわけを書きなさい。

1. 11.2l の油を 0.8l ずつはいるびんにいれていくと、何本のびんにいっぱいになりますか。(式とわけを書く。以下同様)
2. お金が、12000 円たまったので、その 0.3 だけ貯金することにしました。いくら貯金するのでしょうか。
3. げん米をついて白米にすると、つきべりがあって、げん米のときの重さ1に対して、0.925 の重さになります。白米が 74kg いるときには、げん米は何 kg つけばよいでしょう。
4. 容積が 7.5l の水そうがあります。これに水 3.6l を入れました。水の量は水そうのどれだけの割合にあたりますか。

調査VIは、これまで指導してきた問題と同程度の問題で、直接、これまでの学習の理解の程度を見ようとするものである。

調査 VI

1. 1m の重さが 4.3kg の鉄のぼうがあります。この鉄のぼう 5.6m の重さは何kg あるでしょう。
2. 父の体重は 62.1kg で、子どもの体重の 1.8 倍だそうです。子どもの体重は何kg でしょう。
3. 25.2m のひもがあります。このひもからなわとびのなわをとります。1本 1.8m にすると何

本とれるでしょう。

(4) 調査の結果

(i) 調査 I と IV との比較

先ず、乗除を用いる場合についての考えが、クラスによって、また事前と事後とによってどうなっているかの比較を試みよう。

乗法については次のようであった

	1. 何倍かを求める	2. 累加	3. 面積や代金などの具体例をあげる	4. 除法のたしかめ	5. 数直線や割合による一般的意味	6. その他
Bクラス I	18 人	10	12	4	0	4
Aクラス I	20	10	12	6	0	2
Aクラス IV	21	13	5	10	9	5

除法については次のようであった

	1. 等分除	2. 包含除	3. 具体例をあげる	4. 乗法のたしかめ	5. 累減	7. あまりをだすときその他	8. 数直線による一般的意味	9. 乗法の逆
Bクラス I	18	8	5	3	0	1	0	0
Aクラス I	13	12	8	4	0	4	0	0
Aクラス IV	13	16	6	7	4	3	3	7

(1人が、いくつもかいているので、総計は 26 人より多くなっている)。

事前調査 I では、A、B のクラス間の傾向は大体同じで、乗法は、1 と 2、3 が多く除法では 1、2、3 が多い。これは、4 年までの乗除の意味の指導からいって当然のことであろう。この点では、特に両クラスの差をとりたてる必要はないであろう。

ところが、IV と比較すると、A クラスでは乗法で 9 人、除法で 8 と 9 の計 10 人が一般的意味を挙げている。そして、ここに示すまでもないことなので省略したが、B クラスでは IV でこの一般的意味を挙げたものは 1 人もいない。そして結果は I とほとんど同じであった。この A と B とのちがいが当然で、B では一般的意味を指導してないのであるから、これを挙げるものはないのであった。すなわち一般的意味は、積極的に指導しなければ、子供たちが自らとらえていくということはないだろうということである。

A は 10 人ぐらいずついたが、これはあまり好い結果とはいえないだろう。これは、指導が未だ十分ではないということであろうが、その一つの理由として、数範囲が小数にまで広げられたときは、これまでの意味、累加、累減や等分、包含では、意味として不十分であるということのおさえがたりなかったということと、具体的なことばの式では、量の種類が異なると用いられないのだという否定的面の強調が弱かったということが挙げられよう。

なお、乗法の意味について、中島健三氏の次のような調査結果がある¹¹⁾。これは都内の 5 年生 301 名について調査したものであるが、これを見ると、乗法の一般的意味につい

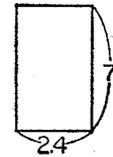
て、私の調査よりはるかに多くのものが答えている。

しかし、これは、一般的意味を示して、これを選ばせた中島氏の方法と、これを全く示さないで、子供自身に考えさせた本実験の方法とのちがいでないかと思われる。

7×2.4 のように、かける数が小数のかけざんは、どんな考えを表わしているといえますか。次のうちで、自分でもっともよいと思うもの 1つだけに○をかきなさい。

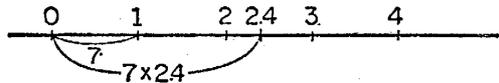
ア. 7を2.4回加えるという考え

イ. たとえば、たて7cm, よこ2.4cmの長方形の面積を表わすという考え

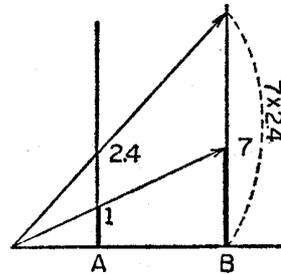


ウ. (もとにする大きさ) × (割合) の式で「もとにする大きさ」が7, 「割合」が2.4という考え

エ. たとえば、下の図のように、7の大きさを1目もり(単位)にして数直線をかいたとき、2.4の目もりのところの大きさを表わすという考え



オ. たとえば、右の図のように、Aのじくで1の長さがBのじくで7に広がるようなしかけがあるとき、Aの2.4がBでどれだけになるかを表わすという考え



カ. 7×2.4 は、 7×1 の大きさを1とみたとき、2.4にあたる大きさを表わすという考え

この結果は、ア. 69名、イ. 50、ウ. 43、エ. 56、オ. 13、カ. 71であった。

特に、オは小学校で指導しているとは考えられないし、5年生の4月では、小数乗除は未学習であろうから、イ、ウ、エ、カも未学習のことであると思われる。そして、予備実験を行なった前述の松庵小学校、礎小学校での調査でも、このような一般的意味を示したものはなく、Aクラスと同様であった。従って調査のし方によるちがいでありと考えられる。ただこの中島氏の調査から、このような一般的意味の指導は可能であろう、こどもに理解されるであろうということがよみとれる。

(ii) 事前調査問題 II と事後調査問題, V, VI の結果について

II の各問の正答者数は次の通りであった。

この表で、AクラスとBクラスの間には有意の差は認められなかった。すなわち指導前は大体同程度であったと考えられる。

IIの正答者数 (各クラス 26 名)

問 題 ク ラ ス	1	2	3	4	5	6	7
A	14	8	24	24	0	2	0
B	14	9	20	22	0	1	0

この二つのクラスの、この調査IIの4, 5, 6, 7番と同じ問題で行なった、指導後の調査Vとを比較すると、次のようになった。

これをみると、検定をするまでもなく、1については、どちらもほとんど全員が正解であるが、2, 3, 4については明らかに両クラスの間には差がみられる。2と3はBクラスは約30%の正解しかないのに、Aクラスは50%以上であり、4にいたっては、Bクラスは依然として正解0に対し、Aクラスは、60%以上のものが正解している。

このことは、さらに、立式の「わけ」を調べると、より顕著になる。

Bクラスの正答者の書いている「わけ」をみると、たとえば、問題1についてのわけとして、「11.2lの油を0.8lずつはいるびんに入れるのだから $11.2 \div 0.8$ をすればよい」とか、問題3に対して「げん米の重さ1対して0.925で、74kgのとき、小数でわればふえるから。」といったように、問題の繰り返しにすぎないものや、理由にならない理由を挙げているか、わけを述べていないかである。

IIとVの比較 (正答数)

IIとV		Vの問題 () 内はIIの番号			
		1 (4)	2 (5)	3 (6)	4 (7)
A	II	24	0	2	0
	V	26	14	13	16
B	II	22	0	1	0
	V	25	7	8	0

これに対して、Aクラスの正答者については、まず2の 12000×0.3 のわけは、正答者14名中3人が数直線で説明し、4名が「 $\square \div 12000 = 0.3$ だから」と説明している。(他は、Bクラスと同じように、問題の繰り返しか、述べていない。) また誤答者の中にこの何れかで説明しようとしているものが4名いるので、これを加えると11名が一般的意味にもとづいて説明しようとしている。

また、除法の1, 3, 4については、次の表のようであった。特に3と4については、正答者の大部分が一般的意味にもとづいて説明している。

AクラスのVの正答者中の一般的理由

問 題	1 (正答 26 名中)	3 (13 名中)	4 (16 名中)
一般的理由			
数 直 線 で	2	1	6
$\square \times a = b$ または $a \times \square = b$ で	8	8	4
割 合 の 公 式 で	3	2	4

このことから、一般的意味を積極的に指導した方が、論理的に説明し、考えられるようになることはもちろんだが、そのみでなく、既知の公式がないVのような問題に対して解決への効果をあげることができるといえよう。

このような一般的意味を指導すると、調査VIのようなやさしい問題になると、これが一層よく用いられることがみられる。

まず、調査VIの正答者は、Aで、1と3は全員の26名で、2は24名であった。このことから、これまでの学習が一応よく理解されたといつてよい。これは調査IIの問題1、2と比べて著しくよくなっている。

そして、1の「わけ」については、19名が数直線を用いて説明しており、この中でさらに5名は、これに加えて、割合の公式に当たる説明をもつけ加えている。残りの5名はことばの式で、2名は、問題文の繰り返しである。したがって、約90%が一般的意味に基づいて説明していることになる。

除法の問題の2では、数直線によるもの13名、 $\square \times 1.8 = 62.1$ によるもの18名、このうち、この両方を同時に述べているもの11名、割合の公式によるもの2名、この三つを述べているものはこの中に1名いる。従って少なくともこのどれかで説明しているものは21名であった。

問題3では、数直線12名、乗法の逆20名、割合の公式3名、このうち、これらの二つまたは三つを同時に説明として挙げているものが10名であった。そして少なくともこのどれかで説明しているものは22名となっている。

このように、どの問題についても80%から90%のものが、一般的意味に基づいて立式の理由を説明できたのである。

次に、この一般的意味の中で、どれが子どもにとって使いやすいかということであるが、Aクラスは、前述のように、数直線による説明、割合の公式、除法の場合は乗法の逆としての意味を並列的に扱ってきた。その中で、調査VとVIによると、乗法では、数直線を用いるものが多い。すなわち既に述べたように、VIの1では、数直線が19名、割合の公式が5名。Vの2では、数直線が14名中3人であった。対象が少ないので、不十分ではあるが、数直線を使って考えさせ説明させる方が、割合の公式のみで行なわせるよりは、子どもの思考に合うようである。

除法について、やはりVIの2、3とVの1、3、4の結果から、乗法の逆として考えさせるのが良く、これに数直線を並用させるのが、可能性として最も大きいのではないかと

考えられる。

Ⅲ 結論と今後の問題点

以上の考察から、小数の乗除の意味についての指導が、自主的人間の育成のためにも、また、拡張の考えや論理的思考といった数学的な考え方の育成のためにも重要である。それにもかかわらず、一般になされている小数乗除の演算決定および、一般的意味の指導が不十分であることを明らかにしてきた。

そして、実験的指導によって一応次のことを実証した。乗除の一般的意味の指導は可能であり、それを指導することが、こどもの論理的思考、論理的説明を可能にし、さらに演算の決定を容易にするという点で効果があるということ、また、その意味としては、乗法は数直線によるもの、除法は、乗法の逆ということに、数直線を並用していくのが、子供の思考に合うとみられることを示してきた。

しかし、この実験は、26人という小人数のクラス1クラスずつであったこと、またこのような授業を通しての実験は、教師の力量や子供たちの能力、環境など種々のファクターが複雑にからみあってくるので、この一実験からの上のような結論は、十分確実なものとはいえない。また、このような実験では、単元終了後、さらに一、二か月後にその定着の程度をみるのが望ましい。これについては引き続き調べていきたい。

このように未だ多くの課題が残されているので、今後さらに、実験方法をよりよいものにするるとともに、その範囲を広げ、より客観的なものにしていく努力を続けたい。

引用(参考)文献

- 1) 片桐重男, 算数教育に於ける演算の位置と意味について。
- 2) 文部省, 小学校学習指導要領。
- 3) 同上。
- 4) 文部省, 数と計算の指導1。
- 5) School Mathematics Study Group "Mathematics for the Elementary School" Grade 6 Part I.
- 6) 同上, Part II.
- 7) Eicholz, O'Daffer, Brumfiel, Shanks "Elementary School Mathematics" Book 5.
- 8) 同上, Book 6.
- 9) Naffield Mathematics Project "⑤ Computation and Structure".
- 10) National Council of Teachers of Mathematics "The Growth of Mathematical Ideas K-12".
Heddens and Hynes "Division of fractional numbers" the Arithmetic Teacher (A. T.) 1969 Feb.
I. Vance "A natural way to teach division of rational numbers" A. T. 1969 Feb.
B. B. Hales and M. N. Nelson "Dividing fractions with fraction wheels" A. T. 1970 Nov.
C. A. Dillely and W. E. Rucker "Division with common and decimal fractional number" A. T. 1970 May.
J. E. Insheep Jr. "Building a case for the application of Piaget's Theory and research in the classroom" A. T. 1972 April. などなど。
- 11) 中島健三, 乗法の意味の指導について, 日本数学教育学会誌 Vol. 50, No. 2.