

博士論文

弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦構成式の提案と  
境界値問題への適用

尾崎 伸吾

**Doctoral thesis**

**Proposal of elastoplastic analogy constitutive equation for  
rate- and state-dependent friction  
and its application to boundary value problems**

**Shingo OZAKI**

## Abstract

In various fields of engineering, it is important to clarify the frictional sliding behavior for a wide range of scales from microscopic elements to continental plates. Especially, when two solid bodies in contact slide slowly past each other without lubrication, an intermittent vibration phenomenon might be observed. Such rate-dependent frictional behaviors are referred to as stick-slip motions, and such motions can impair the stability of machines and structures. The aim of this study is to propose a rate- and state-dependent constitutive equation for friction and is also to propose a numerical approach for analyzing frictional contact boundary value problems including rate-dependency and anisotropy. The proposed friction model and the numerical approach are referred to herein as the *rate-dependent subloading friction model* and the *rate form approach*, respectively.

It is widely known that a high friction coefficient is first observed as a sliding between bodies commences, which is called the *static friction*. Then, the friction coefficient decreases approaching the lowest stationary value, which is called the *kinetic friction*. Thereafter, if the sliding stops for a while and then it starts again, the friction coefficient recovers and a similar behavior as that in the first sliding is reproduced. In this study, based on the elastoplastic theory, the constitutive model for friction was formulated by extending the conventional friction model so as to describe the above-mentioned rate- and state-dependent frictional sliding behaviors. Fundamental features of proposed model are as follows:

1. The process for the rising of friction coefficient up to the static-friction and the subsequent reduction to the kinetic-friction is formulated in the unified way as the isotropic softening process due to the plastic-sliding based on the concept of subloading surface describing the smooth elastic-plastic transition, although only the rising process has been discussed and it has been described as the isotropic hardening process in the past models .
2. The process for the recovery from the kinetic- to static-friction is formulated as the isotropic hardening due to the creep deformations of surface asperities, while it has been formulated by the irrational equation involving the elapsed time after the stop of sliding.
3. The smooth elastic-plastic transition is depicted and the cyclic sliding behavior can be described by incorporating the concept of the sliding-subloading surface in which the plastic-sliding velocity due to the rate of contact traction inside the sliding-yield surface is described exhibiting the smooth elastic-plastic transition. It is inevitable for the prediction of the loosening of screws, bolts and piles, the smooth stress/strain distribution at contact surface and the increase of traction with slip in wheel rotation on a solid surface for instance.

4. The reduction of friction coefficient with the increase of normal contact traction is described by incorporating the nonlinear sliding surface, i.e., the normal traction dependency of frictional criterion.
5. A judgment whether or not the sliding surface is fulfilled is not required in the loading criterion for the plastic sliding velocity. This advantage is of importance especially for the analysis of cyclic friction phenomena in which a loading and an unloading are repeated.

These fundamental properties could be described by the concisely unified formulation in the proposed model. The qualitative property of the present model was examined and its adequacy was verified by the numerical experiments of linear sliding phenomenon. Further, the quantitative predictability of the present model was also be verified by comparing with the various basic test results.

Next, I demonstrated the numerical analysis of the stick-slip instability based on the rate-dependent subloading-friction model with Coulomb's condition. As the first stage of the analysis of general contact boundary value problems, the one-degree-of-freedom spring-mass system was used for examinations. The validity of the present approach was examined by numerical experiments of stick-slip motions under various dynamic characteristics of the system, such as the mass, the spring stiffness and the driving velocity, and various frictional properties. The flexibility of present rate form approach was verified by demonstrating the capability of describing qualitative trends in experimental reports for the stick-slip motion. Moreover, the stick-slip instability was confirmed to have a strong correlation to not only the dynamic conditions of the system, but also the properties related to the variation rate of the friction coefficient and the preliminary microscopic sliding before macroscopic sliding. I also discussed the transition between the stick-slip and the stable sliding modes, and propose simple criteria using the friction coefficient difference and/or the spring elongation. The effectiveness of proposed criterial method was demonstrated using the numerical analysis results when the dynamic conditions change roughly. Finally, the quantitative predictability of the present numerical approach was verified by comparing it to experimental results of one-degree-of-freedom system in the range of the examined conditions. The capability of the rate-dependent friction model was shown not only for various combinations of test materials but also for dynamical conditions, i.e., the stiffness, driving velocity, and mass of system.

Then, I formulated an anisotropic friction model with the orthotropy and rotation of the sliding surface based on the elastoplastic theory. This model can also describe preliminary microscopic sliding and rate-dependent frictional response. First, the qualitative property of the present model was examined and its adequacy was verified by numerical experiments on the linear sliding phenomenon. The flexibility of the friction model was shown not only for fundamental anisotropic behavior but also for rate-dependency.

Furthermore, the quantitative predictability of the present model was verified by comparing it with the basic experimental results in the range of the examined conditions.

To analyze practical contact boundary value problems, the rate-dependent friction model was then implemented in the FEM using the user subroutine of the commercial software package. A typical FE analysis of rate-dependent frictional sliding behavior, including stick-slip motion, was conducted to examine the effect of Young's modulus, the geometric properties, and boundary conditions on the numerical results. The present FE approach using the rate-dependent friction model considers not only the properties of friction and materials but also variations in boundary conditions. In addition, the responses of the friction force and displacement of a target body but also the stress and strain states in bulk can be grasped. Moreover, the anisotropic friction model was implemented to FEM by using the user subroutine of the commercial software package. Then, the typical FE analysis was carried out and the effect of parameters prescribing the anisotropy on the numerical results was examined.

From the results of the FE analyses, I suggest that the present FE approach is applicable to the practical contact boundary value problems, including the stick-slip motion, anisotropic frictional sliding and the microscopic sliding. In the present FE analyses, however, the simple FE model that includes the rigid body was adopted. Examinations of stick-slip motion should be investigated using more general FE models, involving nonlinear material property such as plasticity and hyperelasticity and several deformed bodies having complex geometries in frictional contact. It should be noted that further discussion on the application of CAE is necessary because frictional sliding sometimes represents system and environmental dependencies. However, systematic investigations using CAE with CAD are useful for design, control, and maintenance of assembled bodies and tribological conditions at contact surfaces, to suppress stick-slip motion.

# 目次

Abstract .....	i
目次.....	iv
主要な記号一覧.....	vii
<b>1 章 序 論.....</b>	<b>1</b>
1.1 背景 .....	1
1.1.1 速度・状態依存性すべり摩擦現象と不安定すべり .....	2
1.1.2 異方性すべり摩擦現象.....	6
1.1.3 摩擦モデルの発展の歴史.....	6
1.2 論文の目的および構成.....	11
1.3 符号と数学的表記について.....	14
<b>2 章 既往の摩擦モデル.....</b>	<b>15</b>
2.1 緒言 ... .....	15
2.2 トライボロジーモデル.....	17
2.3 State variable モデル .....	19
2.4 メゾスケール EQ モデル .....	22
2.5 弾塑性論に基づく摩擦モデル .....	24
2.5.1 弾塑性挙動とすべり摩擦挙動の類似性.....	24
2.5.2 下負荷面の概念を導入した摩擦モデル.....	31
2.6 結言 ... .....	33
<b>3 章 弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦モデル .....</b>	<b>34</b>
3.1 緒言 ... .....	34
3.2 状態変数とその発展則に関する考察.....	35
3.3 速度・状態依存性摩擦モデルの定式化.....	37
3.3.1 すべり速度の加算分解.....	37
3.3.2 摩擦のモデル化.....	38
3.3.3 正規すべり面およびすべり下負荷面.....	40
3.3.4 硬化関数と正規すべり比の発展則.....	41
3.3.5 接触応力速度ーすべり速度関係式.....	43
3.3.6 負荷基準 .....	44
3.4 非線形すべり面の具体式 .....	45
3.5 Coulomb の摩擦基準に基づくすべり面の具体式.....	47
3.6 基本的な応答特性 .....	50

3.6.1	接線接触応力速度-すべり速度関係.....	50
3.6.2	数値実験および実測値との比較.....	52
3.7	結言.....	66
<b>4章</b>	<b>1自由度スティックスリップ運動の数値解析.....</b>	<b>68</b>
4.1	緒言.....	68
4.2	数値解析手法.....	70
4.3	スティックスリップ運動に対する基本的応答特性.....	71
4.3.1	動的条件の影響.....	71
4.3.2	摩擦力振幅の制御の数値解析.....	77
4.3.3	モデルパラメータの影響.....	83
4.4	摩擦試験結果との比較.....	88
4.4.1	試験概要.....	88
4.4.1	試験結果との比較.....	90
4.5	摩擦試験と摩擦モデルの関係に関する考察.....	98
4.5.1	代表的な摩擦試験装置.....	99
4.5.2	すべり面の同定.....	101
4.5.3	摩擦モデルのパラメータの同定に関する一考察.....	102
4.6	結言.....	104
<b>5章</b>	<b>異方性摩擦モデルへの拡張.....</b>	<b>105</b>
5.1	緒言.....	105
5.2	回転硬化を考慮した異方性摩擦モデルの定式化.....	106
5.2.1	接触応力（速度）とすべり速度の加算分解.....	107
5.2.2	正規すべり面およびすべり下負荷面.....	108
5.2.3	硬化関数と正規すべり比の発展則.....	109
5.2.4	接触応力速度-すべり速度関係式.....	110
5.2.5	負荷基準.....	111
5.2.6	すべり面の具体的関数形.....	111
5.3	直交異方性の導入.....	113
5.3.1	座標系の規定.....	114
5.3.2	すべり面，適応条件およびすべり流動則.....	114
5.3.3	接触応力速度-すべり速度関係式.....	116
5.4	Coulomb の摩擦基準に基づく定式化.....	117
5.4.1	弾性関係.....	118
5.4.2	正規すべり面およびすべり下負荷面.....	119
5.4.3	摩擦係数および正規すべり比の発展則.....	121
5.4.4	接触応力速度-すべり速度関係式.....	122

5.5 摩擦試験との比較 .....	125
5.5.1 基本的応答特性.....	125
5.5.2 摩擦試験の概要.....	128
5.5.3 試験結果との比較.....	129
5.6 結言 .....	134
<b>6章 有限要素解析への適用.....</b>	<b>135</b>
6.1 緒言 .....	135
6.2 有限要素解析の仕様 .....	137
6.2.1 有限要素法での接触・摩擦の取り扱い.....	137
6.2.2 摩擦モデルの有限要素法への実装.....	140
6.3 速度依存性すべり摩擦現象の有限要素解析例.....	142
6.3.1 解析モデルと境界条件.....	142
6.3.2 解析結果 .....	145
6.4 異方性すべり摩擦現象の有限要素解析例 .....	151
6.4.1 解析モデルと境界条件.....	151
6.4.2 解析結果 .....	153
6.5 結言 .....	155
<b>7章 総括.....</b>	<b>157</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>161</b>
<b>謝辞.....</b>	<b>167</b>



## 主要な記号一覧

$A$ : 真実接触面積	$m$ : 等方硬化関数の減少速度を規定するモデルパラメータ
$\tau$ : せん断強さ	$\xi$ : 等方硬化関数の回復速度を規定するモデルパラメータ
$g_n$ : ギャップ量	$n$ : 等方硬化関数の回復速度を規定するモデルパラメータ
$\mu$ : 摩擦係数	$r$ : 正規すべり比の発展速度を規定するモデルパラメータ
$\mu_s$ : 静止摩擦係数に対する $\mu$ の最大値	$\lambda, A$ : すべり流動則における正值の比例係数
$\mu_k$ : 動摩擦係数に対する $\mu$ の最小値	$m^p$ : 塑性すべり係数
$\phi$ : State variable モデルにおける状態変数	$m^c$ : クリープ係数
$\mathbf{n}$ : 単位法線ベクトル	$\bar{M}$ : すべり面上の摩擦力と法線接触力の比を規定するパラメータ
$\mathbf{t}$ : 単位接線ベクトル	$\bar{a}$ : スライダの加速度
$\mathbf{I}$ : 恒等テンソル	$V$ : 駆動速度
$(\ )^e, (\ )^p$ : 弾性, 塑性成分	$U$ : 駆動変位
$(\ )_n, (\ )_t$ : 法線, 接線成分	$K$ : バネ剛性
$(\dot{\ })$ : 物質時間微分	$M$ : スライダの質量
$(\circ)$ : 客観性のある共回転速度	$S$ : スライダの見かけの接触面積
$\bar{\mathbf{v}}$ : すべり速度 (相対速度) ベクトル	$g$ : 重力加速度
$\bar{\mathbf{u}}$ : すべり変位 (相対変位) ベクトル	$\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1$ : 直交異方性の (最大) 主軸方向の単位ベクトル
$\mathbf{f}$ : 接触応力ベクトル	$\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_2$ : 直交異方性の (最小) 主軸方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{\eta}$ : 接触応力比ベクトル	$\boldsymbol{\beta}$ : すべり面の回転を規定するベクトル
$\boldsymbol{\Omega}$ : 剛体回転スピンテンソル	$M_1$ : 異方性 (最大) 主軸方向の $M$ 値
$\alpha$ : 接触弾性係数 (境界値問題においてはペナルティ係数と等価)	$M_2$ : 異方性 (最小) 主軸方向の $M$ 値
$\mathbf{C}^e$ : 2 階の接触弾性係数テンソル	$C_1$ : 長軸方向の直交異方性の程度を規定するパラメータ
$\mathbf{C}^{ep}$ : 2 階の接触弾塑性係数テンソル	$C_2$ : 単軸方向の直交異方性の程度を規定するパラメータ
$\mathbf{C}^c$ : 2 階の接触クリープ係数テンソル	$\mathbf{t}_n$ : 塑性すべり速度の方向を規定する単位ベクトル
$C^c$ : 接触クリープ係数	
$\bar{f}(\ )$ : 接触応力関数 (すべり面関数)	
$\bar{F}$ : 等方硬化関数	
$\bar{F}_s$ : 静止摩擦係数に対する $\bar{F}$ の最大値	
$\bar{F}_k$ : 動摩擦係数に対する $\bar{F}$ の最小値	
$R$ : 正規すべり比	
$\mathbf{N}$ : すべり下負荷面の外向き法線	
$\kappa$ : 等方硬化関数の減少速度を規定するモデルパラメータ	

# 1章 序 論

## 1.1 背 景

自然界のあらゆる物体は、真空中に単独で存在している場合を除いて、他の物体と接触して表面にすべり摩擦現象を生じている。そのため、固体どうしの接触・摩擦現象に関わる相互作用の研究は、工学上の基本的課題として位置付けられている。最大、最小あるいは最適などの様々なレベルでの摩擦制御が、自動車や OA 機器に代表される国民生活機器、エネルギープラントや地盤構造物、ひいては医療や航空宇宙分野における先端機器などの各種実務設計・メンテナンスにて求められている。したがって、今後の工学的な実務作業の高度化の一端は、接触界面におけるすべり摩擦現象の理解と制御に依存していると言えよう。

斯様な状況の下、トライボロジーや固体力学、あるいは地球物理学などの様々な分野にて、分子レベルから大陸プレートに至るまでの幅広いスケールを対象に、摩擦の理解と制御を目的とした多大な努力がなされてきた。しかし、L. da Vinci, G. D'Amontons, C. A. Coulomb などの先駆的貢献に代表されるように、すべり摩擦現象に関する研究は非常に古くから取り組まれているにも関わらず、今日に至ってもすべり摩擦現象には未解明な点が多い。

言うまでもなく、すべり摩擦現象は、機械工学分野においても最も身近な物理現象の一つである。事実、機械のエネルギー損失の多くは摺動面におけるすべり摩擦現象で発生し、機械の致命的な故障の多くは「摺動面の起動停止」といった滑らかでない運動の際に発生する。また、機械製品に多く見られる「びびり」や「鳴き」といった現象もこの滑らかでない運動に起因している。摺動面の起動停止問題の特徴は、機械の休止時に作用する静止摩擦力と運転時に作用する動摩擦力が異なり、間欠性の摩擦振動、いわゆるスティックスリップ遷移が生じることである。スティックスリップ運動は代表的な速度・状態依存性のすべり摩擦現象であり、機械の安定性や寿命を損なう主要因となり得るとともに、摩耗やフレッチング現象とも密接に係ることが知られている(e.g. Bowden and Tabor, 1950; Berthoud and Baumberger, 1998; Persson, 2000; Kartal et al., 2011)。しかし、本不安定現象に注視した研究も多数取り組まれているものの、その機構については未だに諸説あり、統一的な見解は確立されていない。また、簡易な質点系を用いた検討が具体的な製品モデルに対して必ずしも有効でない場合も多い。したがって、速度・状態依存性のすべり摩擦現象を含む接触境界値問題に対する数値解析手法の高度化は、製品開発やメンテナンスなどの実務作業の発展において重要な役割を担うと考えられる。

他方、すべり摩擦現象についての工学的指標としては、Amontons-Coulomb の時代より、摩擦係数と称されるスカラー量が利用されている。摩擦係数は物理量では無く、経験的あるいは現象論的なパラメータであるにも関わらず、幅広い領域で使用されている。しかしながら、

機械工学の領域がより学際的になるとともに、多様な複合材料や加工技術が開発されるなどの深化を遂げ、従来の摩擦係数の考え方では対応できない点も増えてきている。その一つに、表面の微小テクスチャー構造に起因した見かけのすべり摩擦の異方性が挙げられる。したがって、すべり摩擦の異方性にも対応した数値解析手法の高度化も今後の重要な課題として位置付けられる。

上述の速度・状態依存性すべり摩擦現象および異方性すべり摩擦現象に対する数値解析手法の高度化のためには、すべり摩擦の数理モデル化がその成否を担う。したがって、本論文の内容は、すべり摩擦現象の数理モデルの提案と接触境界値問題に対する新しい数値解析的アプローチ手法の確立に主眼を置いている。そのため本節では、先ず、工学上、重要な現象であるにも関わらず、既往の摩擦構成式やそれを実装した汎用 CAE ソフトでは対応できない速度・状態依存性すべり摩擦現象と異方性すべり摩擦現象について概説する。また、提案数理モデルの位置付けを明確にするために、接触・摩擦境界値問題に対する摩擦構成式（摩擦モデル）の発展の歴史について述べる。

### 1. 1. 1 速度・状態依存性すべり摩擦現象と不安定すべり

機械要素や地盤構造物の接触部が摩擦を伴いながら互いにすべる際、摩擦力やすべり変位（相対変位）の経時変化に間欠性の振動現象が観察される場合がある。このような不安定現象は古くからスティックスリップ運動（間欠運動、摩擦自励振動）として知られている。例えば、ブレーキ、クラッチ、鉄道車輪などの機械要素における寿命の長期化、疲労・摩耗や鳴き現象の抑制、サイロなどにおける粉粒体と内壁での騒音や振動発生において、すべりの安定性の議論は不可欠である。また、地震を断層面に沿って生じるスティックスリップ運動によるすべりの不安定現象と捉え、破壊現象はむしろ 2 次的なもので断層の拡大や摩耗によるガウジの形成に寄与するという考えに基づき、地球物理学分野での研究も多数取り組まれている(cf. Scholz, 2002; Bhattacharyya and Chakrabari, 2006)。他方、スティックスリップ運動を積極的に利用する場合もある。例えば、バイオリンなどの弦楽器においては、弦と弓とのスティックスリップ運動が音源となるため、その音色に対する工学的な解析も取り組まれている(e.g. Schmaber and Garoff, 1996; Smith and Woodhouse, 2000)。

以上のように、広く認められたスティックスリップ運動であるが、図 1.1 に示す典型的なすべり摩擦系の 1 自由度バネ-質点モデルを用いて、そのメカニズムと発生条件を模式的に説明する。比較的低速の駆動条件でのスティックスリップ運動は、①静止摩擦が動摩擦よりも大きいこと；②静止摩擦が停止時間に依存して回復すること；そして③摩擦抵抗が速度とともに低下する、いわゆる速度負勾配を示すこと；によって発生する(Persson, 2000)。また、弾性特性（柔性）を有する物体を介しての相互作用により引き起こされ、図に示すような鋸

状の摩擦力-時間関係や階段状の変位-時間関係が現れる。なお、上述の②の条件は、継続的なスティックスリップ運動が生じるための条件であり、②が無い場合でも最初のスティックスリップ遷移は生じる。

いま、ドライバの駆動速度が一定の場合を考えると、図 1.1 の(i)-(ii)ではスライダは動かず、バネのみが伸びるスティック状態にあり、(ii)でバネの力が最大静止摩擦力に達するため、(ii)-(iii)でバネが瞬間的に縮まるスリップ状態へと遷移する。これらの過程を繰り返すことで周期的な間欠運動が表れる。このようなメカニズムと発生条件からわかるように、スティックスリップ運動は、

- a. 静止摩擦と動摩擦の差が大きい場合
- b. 駆動速度が遅い場合
- c. バネ定数が小さい場合
- d. スライダの質量（垂直荷重）が大きい場合
- e. 粘性減衰が小さい場合

に発生しやすい(e.g. Oden and Martins 1985; Persson, 2000).

ここで、スティックスリップ運動に代表される不安定すべりモードの発生要因について、図 1.2 に示す 1 自由度バネ-質点系での摩擦力とバネ力の関係を用いてさらに詳しく説明する。いま、図 1.2 に模式的に示すように、摩擦試験の最中にスライダの摩擦抵抗力  $f_t$  が変化すると仮定しよう。すなわち、すべる直前に  $f_t$  は最大値を取り、その後、すべりとともに減少する。この過程では、バネ剛性の傾き  $-K$  の直線に沿ってバネの力が抜けていく。もし、すべりが点 A に達して、すべり  $\bar{u}$  に対して  $f_t$  が  $K(\bar{u} - U)$  より早く低下すれば、スライダの加速を促すような力の不均衡が発生するため、系は不安定に陥る。点 B に達した後では、 $f_t$  がバネに蓄えられた力よりも大きくなるため、スライダは減速して点 C に至って停止する。図 1.2 に示したような、すべりとともに抵抗が低下するような摩擦挙動はしばしば観察されることがあり、すべり弱化（軟化）と称される。すべり弱化の結果、不安定すべりに至ることがある(cf. Scholz, 2002).

後述する Coulomb の時代から続く考えは、すべりが始まるためには、静止摩擦を超えなければならず、滑っている間は動摩擦による抵抗を受けるというものである。そして一般に、「静止摩擦係数  $\mu_s >$  動摩擦係数  $\mu_k$ 」の場合、すべり弱化に起因した不安定すべりが生じる。しかしながら、代表的な不安定すべりであるスティックスリップ運動は、ある平均摩擦力レベルを中心にした反復挙動を持続的に繰り返す。これは、すべり弱化に加えて、静止摩擦が回復するためである。このような healing（あるいは、aging）のメカニズムを最初に示したのは Rabinowicz (1951, 1958) である。healing とすべり弱化の競合の結果、すべり速度弱化（摩擦抵抗の速度負勾配）を呈することとなり、これが持続的な不安定挙動であるスティックスリ

リップ運動の要因となる。すべりの不安定条件は、図 1.3 に示す Dynamical Phase Diagram が一例としてあるように、多くの条件が提案されている。すべり速度弱化を示すようなシステムでは、いかに注意深くシステムを駆動しても、段々と成長する振動が必ず現れ、持続的なスティックスリップ運動に達してしまう。なお、すべり速度強化（硬化）を示すようなシステムでは、不安定すべりが起こっても不安定性は速やかに減衰して安定すべり状態へと遷移する。

以上の不安定すべりとしてのスティックスリップ運動の概要からわかるように、速度・状態依存性摩擦モデルの要件としては、すべり弱化と静止摩擦の時間依存性回復、そして速度負勾配を合理的に記述し得る必要がある。また、速度依存性すべり摩擦を内包する系の安定性には、図 1.2 に示したように系自体の剛性が密接に関連するため、系の剛性をも同時に検討する必要がある。しかし、現状の速度・状態依存性すべり摩擦現象の解析は、摺動面のトライボロジー特性のみに着目し、質点系に基づく解析が多数を占めている。そのため、任意形状の有限自由度の物体の剛性を適切に反映したものは少ない。したがって、すべり摩擦現象の数理モデル化に関しては、材料強度に関する数値解析手法と併せて適用し得る定式化が望ましいこととなる。

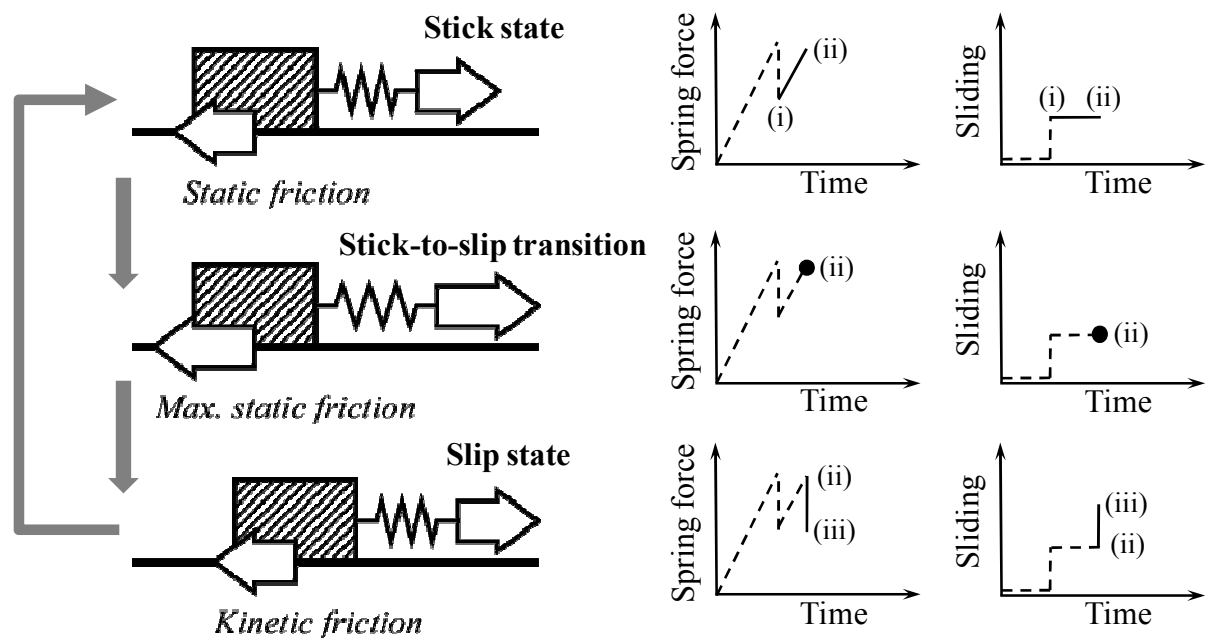


Fig. 1.1. Schematic diagram of stick-slip motion in typical one-degree-of-freedom spring-mass system.

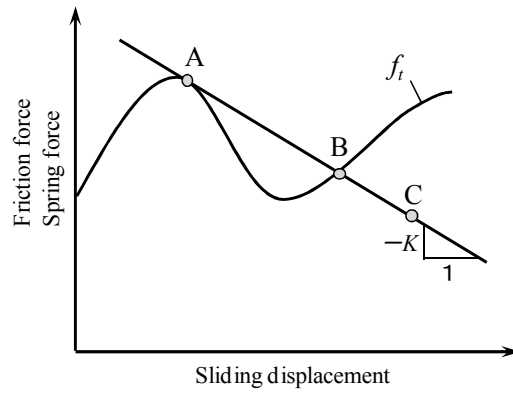


Fig. 1.2. Origin of unstable sliding in typical one-degree-of-freedom spring-mass system.

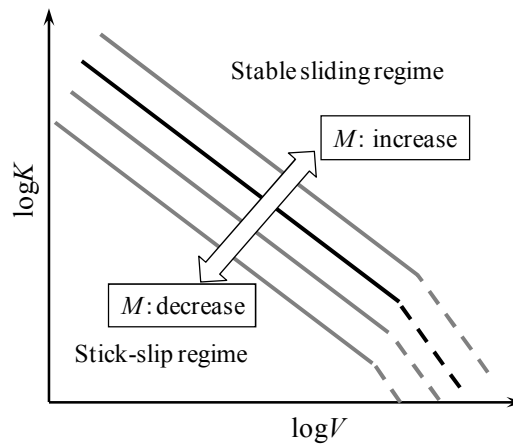


Fig. 1.3. Dynamical phase diagram for sliding mode.

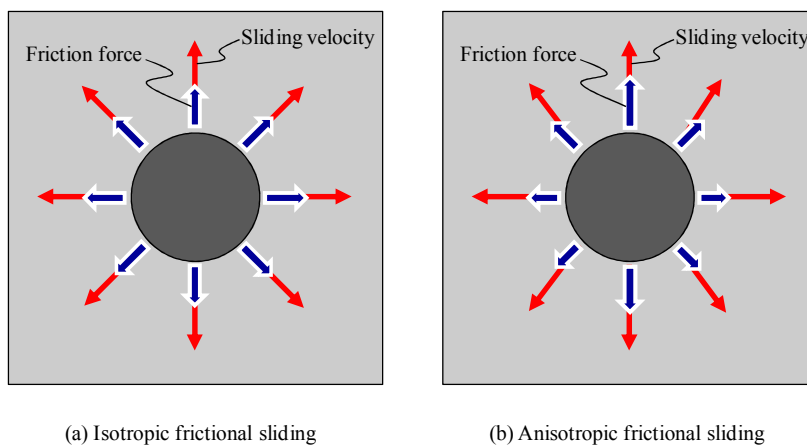


Fig. 1.4. Isotropic and anisotropic frictional sliding behavior.

## 1. 1. 2 異方性すべり摩擦現象

通常のすべり摩擦の検討では、滑らせる方向に依らずに摩擦抵抗が等しくなる等方性挙動にのみ注目したものが大部分を占める。これらの検討では、見かけの接触面積に対して、摩擦係数を介して接触荷重と摩擦力を巨視的に関連付けたモデル化となっている。このような等方性の摩擦モデルにおいては、当然、摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの方向が等しい共軸性を示す。

一方、テクスチャーと称される非対称の微小構造を有する表面においては、微視的スケールでは等方的な摩擦特性を呈するにも係らず、微小構造の傾きや配向に起因して、巨視的な見かけの応答特性が方向依存性を呈する場合がある。その結果、図 1.4 に示すように、摩擦抵抗の方向依存性のみならず、摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの方向が異なる、いわゆるすべり摩擦の非共軸性を呈することとなる。本論文では、このような巨視的なスケールで方向依存性がある場合をすべり摩擦の異方性と定義する。言うまでも無く、既存の等方的な摩擦モデルでは、表面の微小な非対称構造に起因した異方性すべり摩擦を反映することはできない。

以上の異方性すべり摩擦現象の概要からわかるように異方性摩擦モデルの要件としては、摩擦抵抗の方向依存性と非共軸性を無理なく記述し得る必要がある。また、速度・状態依存性をも併せて表現できる形式が望まれるのと同時に、等方モデルに自然と帰着できる数学的定式化が望まれる。すべり摩擦の異方性の定式化は、表面にテクスチャー構造を有する材料や複合材などの先進的な材料の数値解析において重要となり、また獣毛や鱗を模擬したバイオミメティクス型機器のリアルタイムコントロールにおいても計算コストの観点から有益であると考えられる。

## 1. 1. 3 摩擦モデルの発展の歴史

すべり摩擦挙動を記述するための数理モデルは、これまでも多数提案されている。現時、最も有名な摩擦の法則は、Amontons-Coulomb の法則（以下、Coulomb 則と称す）と呼ばれる経験則であろう。本法則は、通常の固体間のすべり摩擦に対して広い範囲で成り立つ。Coulomb 則は次のようにまとめられる。

第 1 法則： 摩擦力は見かけの接触面積に依存しない。

第 2 法則： 摩擦力は垂直荷重に比例する。

第 3 法則： 動摩擦力は静止摩擦力より小さく、速度に依存しない。

したがって、摩擦力の大きさ  $|f_t|$  と垂直荷重  $f_n$  には次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{array}{l} |f_t| < \mu f_n : \text{stick} \\ |f_t| = \mu f_n : \text{slip} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

この比例係数  $\mu$  が摩擦係数と呼ばれるものであり、見かけの接触面積に依存しない。本法則は次のように解釈される。

いま、静止して接触している 2 物体を考える。通常の物体の表面には粗さが存在しているため、図 1.5 のように表面の微小凹凸（アスペリティ）の突起部分だけが接触し、荷重を受け持つこととなる。この接触している部分を真実接触点と称し、その面積を真実接触面積と称す。この真実接触面積は見かけ上の接触面積よりも極めて小さい。真実接触点では、分子間力による凝着が生じているので、2つの物質をせん断するような力を加えてすべり（相対）運動を起こすには、その凝着部分を破断させねばならない。したがって、単位真実接触面積当たりの凝着を破断するためのせん断強さ(Tabor's interfacial shear strength)を  $\tau$  とすると、最大静止摩擦力は次式で与えられる。

$$|f_t| = A\tau \quad (1.2)$$

ここに、 $A$  は真実接触面積である。なお、Bowden and Tabor (1950)が指摘しているように、凝着に加え、掘り起こし（アスペリティの弾塑性変形によるエネルギー散逸）項  $f^p$  を考慮した場合は、

$$|f_t| = A\tau + f^p \quad (1.3)$$

となる。本論文では、掘り起こし項を無視し、凝着摩擦を前提に話を進める。

式(1.3)において、せん断強さを一定とし、真実接触面積が荷重に比例すれば、式(1.1)が成立することとなる。以下では、このことについて説明する。

真実接触面積は、見かけの接触面積に比べて非常に小さいので、そこでの圧力は非常に高く、弾性限界を超えて塑性流動領域に達し、圧力は塑性流動圧力  $\sigma_f$  となる。 $\sigma_f$  はほとんどの場合一定と見なせるので、垂直荷重との間に次のような関係が成り立つ。

$$f_n = A\sigma_f > 0, \quad f_n \propto A \quad (1.4)$$

上式からわかるように、真実接触面積は垂直荷重に比例し、摩擦力も荷重に比例することとなる。式(1.2)および(1.4)より、次式が得られる。

$$\mu = \frac{|f_t|}{f_n} = \frac{A\tau}{A\sigma_f} = \frac{\tau}{\sigma_f} \quad (1.5)$$

しかしながら、荷重レベルによっては、アスペリティの塑性変形が必ずしも生じるとは限らない。この場合は、Hertz 接触として良く知られるように、真実接触面積は荷重の  $2/3$  乗に比例し、摩擦力は荷重に比例しなくなってしまう。すなわち、垂直荷重と真実接触面積が比例するといった仮定が成り立たなくなる。この矛盾は、表面の凹凸の分布を考えることにより解決できる。接触前の表面の凹凸の高さ分布がガウス分布に従えば、真実接触面積が荷重に比例することを示すことができる。その結果、摩擦力も荷重に比例する。そして、現実の表面の接触前の突起の高さ分布はガウス分布で良く表わされることが示されている (Greenwood and Williamson, 1966)。



上述の Coulomb 則は，確かに広範囲のすべり摩擦現象に適用できるが，さらに詳細なすべり摩擦現象に関する知見も望まれている．例えば，ゴム材に代表されるソフトマテリアル特有の現象には，Coulomb 則は適用できない．ソフトマテリアルが硬質表面上を摺動する際，接触面において凝着とせん断変形の影響により座屈（凹み）が生じ，分離している部分と固着している部分が共存する場合がある．このような状態の接触面どうしを相対運動させる際には，この分離している部分が接触面の前方から後方にかけて波のように伝播する必要がある．座屈の発生および伝播の一連の運動の繰り返しにより全体のすべりが発生する．本現象は Schallamach 波と呼ばれ，これまでも多くの報告がなされている (e.g. Schallamach, 1971; Barquins, 1992; Maegawa and Nakano: 2009).

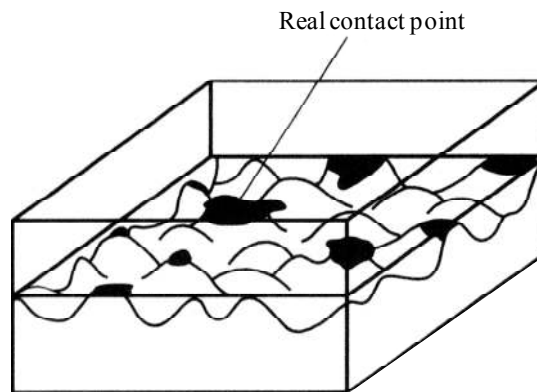


Fig. 1.5. Concept of real contact area.

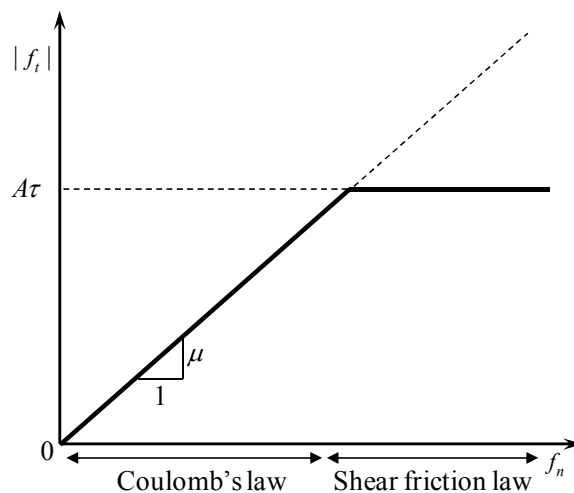


Fig. 1.6. Coulomb's friction law and shear friction law.

また、柔性の大きなゴム材の摩擦では、垂直荷重が大きくなると真実接触面積が飽和し、 $f_n \propto A_r$  の関係が成り立たなくなる（ゴムが微小凹凸に沿って変形し、図 1.5 の真実接触面積が見かけの全面積に達してしまう）。この場合には、Coulomb の摩擦基準よりも、次式のせん断摩擦則の方が実験事実を表現しやすい場合がある。

$$\left. \begin{array}{l} |f_t| < A\tau = \text{const.} : \text{stick} \\ |f_t| = A\tau = \text{const.} : \text{slip} \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

本式は、摩擦力は垂直荷重に依らずに、一定値となることを意味している。このようなせん断摩擦則は、工具圧が降伏応力の数倍に達するような金属の塑性加工時にも適用される場合が多い(Bay and Wanheim, 1976; Petersen et al., 1997)。近年の市販の汎用ソフトでは、カットオフ圧力を導入することで、図 1.2 に示すような Coulomb 則とせん断摩擦則を組合せた摩擦基準（すべり面）も用意されているようである。

上述のような摩擦の法則は、非常にシンプルなため、実務設計やメンテナンスの現場において広く利用されているが、CAE (Computer Added Engineering)の普及とともに、有限要素法に代表される数値解析での利用を前提とした摩擦モデルがおよそ 40 年前から提案され始めた。これらの摩擦モデルは現象論に基づき、物質の力学的特性としての弾塑性構成式と同様の流儀により定式化されている。

物質の応力とひずみとの関係と同様に、すべり摩擦現象においても接触応力とすべり変位との間の 1 対 1 の対応関係は存在せず、接触応力速度（または増分）とすべり速度（または増分）を関係付けることになる。さらに、すべり摩擦が時間や温度に依存する場合には、接触応力（速度）、すべり変位（速度）に加えて、時間、温度も変数として関係式に導入する必要がある。したがって、このようなすべり摩擦に関する関係式は、接触応力－すべり変位式と呼ばれるのは適切ではないが、接触面の物質の構成によるので、摩擦構成式（あるいは摩擦モデル）と呼ばれるのが適当である。

すべり摩擦現象の構成式としての定式化は、まず、剛塑性体としての定式化が行われた (Seguchi et al., 1974; Fredriksson, 1976)。その後、すべり速度をひずみ速度と同様に、可逆な弾性すべり速度と非可逆な塑性すべり速度とに加算分解できるとし、接触面間に仮想弾性ばねを仮定することで弾塑性構成式と同様の数学的表現、すなわち接触応力速度－すべり速度関係の記述がなされた(e.g. Michalowski and Mroz, 1978; Oden and Pires, 1983a,b; Curnier, 1984; Cheng and Kikuchi, 1985; Oden and Martins, 1986; Peric and Owen, 1992; Anand, 1993; Mroz and Stupkiewicz, 1998; Gearing et al., 2001)。しかしながら、これらのモデルでは、すべり面（摩擦基準）内部を純粋弾性域と仮定しているため、その内部での接触応力の変化による塑性すべり速度は表現されない。したがって、すべり面内部の接触応力の繰り返し負荷による塑性すべり変位の集積は予測できない。Drucker(1989)による塑性構成式の分類によれば、これらは

古典摩擦モデル(*conventional friction model*)と呼び得る。

斯様な状況の下，下負荷面の概念(Hashiguchi, 1980, 1989, 2008)に基づいて，非古典弾塑性論(*unconventional elastoplastic theory*)に属する下負荷摩擦モデル(*subloading-friction model*)が定式化されている(Hashiguchi, et al., 2005; Ozaki et al., 2007a, 2007b). 本モデルは，弾性すべり状態から塑性すべり状態への滑らかな遷移を表現でき，さらには接触表面力の繰返し負荷による塑性すべり変位の集積を表現し得る．また本モデルにおいては，非線形のすべり面（摩擦基準）を導入することにより，高圧条件での実測データ(e.g. Bay and Wanheim, 1976; Dunkin and Kim, 1996; Gearing et al., 2001)に見られる法線接触応力の増大に伴う摩擦係数の低下を表現し得る．なお，Coulomb の摩擦基準には，この現象は考慮されていない。

これらの摩擦モデルを導入した有限要素法により，系の材料力学的特性と接触・摩擦現象を連成させた解析が可能となっている．しかしながら，Coulomb 則をはじめとした上述の摩擦モデルは速度非依存性モデルであり，スティックスリップ運動をはじめとした不安定すべり摩擦を含む問題には適用できない。

他の物体と接触して静止している物体がすべり始めると，先ず高い摩擦抵抗つまり静止摩擦が観察される．その後，摩擦抵抗が低下して，停留状態である動摩擦に至る．また，しばらくすべりを止めてから，再び滑らせると，摩擦係数が回復して初期すべり時と同様の挙動が再現される(e.g. Ferrero and Barrau, 1997; Bureau et al., 2001). この摩擦係数の回復は，すべりが停止してからの経過時間を含む式で定式化されている(e.g. Dokos, 1946; Rabinowicz, 1951, 1958; Derjaguin, et al., 1957; Brockley and Davis, 1968; Kato et al., 1972; Richardson and Noll, 1976; Persson, 2000 ; Panait, 2004). しかし，例えば，極低速ですべり速度が変動する状態からもわかるように，すべりが停止してからの経過時間の評価には任意性を伴うので，時間そのものを構成式に含めることは客観性の喪失を招く．一般に，構成式における物質特性の変化は内部状態変数により定式化されなければならない。

上述の静止摩擦から動摩擦への低下および摩擦係数の回復は，古くから広く認められてきた摩擦の基本現象である．静止摩擦と動摩擦の差は数 10 %に昇る場合もあるので，これらを考慮した定式化は工学上の具体的問題の解決に不可欠となる．静止摩擦から動摩擦への遷移過程を塑性すべりによる等方軟化現象とみなし，また，摩擦抵抗の回復過程を表面微小アスペリティのクリープ変形による等方硬化現象とみなして，これらの相互遷移現象を統一的に表現し得る定式化は，3 章で述べる速度依存性下負荷摩擦モデル(*rate-dependent subloading-friction model*)として達成された。

また，弾塑性論に基づいた摩擦モデルについては，降伏条件に対応するすべり面を円錐形から Hill の直交異方性のように扁平化させることにより，すべり摩擦の異方性を表現したモデルも提案されている(Curnier, A., 1984; Mroz and Stupkiewicz, 1994, 1998). しかしながら，こ

これらの摩擦モデルは、摩擦抵抗のすべり方向依存性を表現しているのみであり、微小すべり現象や速度依存性現象には対応していない。速度・状態依存性を含めた異方性摩擦モデルの定式化は、5章で述べる異方性下負荷摩擦モデル(*Anisotropic subloading-friction model*)として達成された。

## 1. 2 論文の目的および構成

ものづくり業界においては、開発期間の短縮やコスト削減を目的として、数値実験としてのCAEが積極的に利用されている。物体の変形現象に関しては、離散化手法や数値積分法の高度化、弾塑性あるいは粘塑性を含む構成式の精緻化(e.g., Hashiguchi, 2008)などに加え、マシンパワーの増強と相まって、CAEは実際の開発過程での使用に十分に耐えられるレベルに達している。しかしながら、接触・摩擦現象に関しては十分な解析精度に達しているとは言い難く、数値解析手法のさらなる高度化が望まれている。実際のすべり摩擦挙動は、様々な要因と素過程が組み合わさって発現しているため、より精緻な摩擦現象の解析には、有限自由度の物体の運動や変形特性と、接触・摩擦特性(トライボロジー特性)を同時に考慮する必要がある。その一つの手段として、有限要素法などを用いた連続体の枠組みでの解析が挙げられるが、前提として、摩擦挙動を適切に表現し得る数理モデルが求められる。特に、前節で述べたスティックスリップ運動を検討するためには、すべり摩擦現象の速度・状態依存性を適切に表現し得る摩擦モデルが不可欠となる。端的に述べると、Oden and Martines (1985)が指摘しているように、実験事実と乖離するシンプルなモデル化よりも、寧ろ多少複雑でも速度依存性現象を適切に表現し得る摩擦モデルが必要となる。これは、恣意的な解析条件に依らず、すべりモードの安定・不安定性とその相互遷移を自然に考慮できるようにするためである。

本論文では、静止一動摩擦の相互遷移や動摩擦の速度負勾配を合理的に記述し得る速度・状態依存性摩擦構成式を提案するとともに、摩擦試験結果との比較を通して、その妥当性を検証する。また、提案摩擦モデルを1自由度バネ-質点系モデルや有限自由度の有限要素モデルへ実装することにより接触境界値問題への適用性について検討する。最終的に、スティックスリップ運動に代表される速度依存性すべり摩擦特性と対象物体の材料力学的特性を含む境界値問題に対する新しいアプローチ手法としての確立を目指す。

他方、機械システムにおける摺動面設計のさらなる高度化を指向して、テクスチャーと呼ばれる物体表面の微視的・周期的構造が様々な分野で利用されてきている。これらのテクスチャーは、主に接触・摩擦現象に影響を及ぼすことでシステムの高機能化に寄与している。また、機械加工痕を有する物体や複合材などの表面もテクスチャーの一種と見なすことがで

きる。前節で述べたように摺動面にテクスチャーがある場合のすべり摩擦挙動は、微視的凹凸の配向や傾きなどに起因して、摩擦抵抗のすべり方向および経路依存性の発生、すべり方向と摩擦抵抗方向が一致しないといった異方性が観察される(e.g. Hagman and Olofsson, 1998; Zमितrowicz, 2006; Konyukhov et al., 2008; Wandersman, et al., 2011)。したがって、テクスチャー形状を有する物体間の接触・摩擦解析では、Coulomb 則のような等方的な摩擦モデルはもはや適用できないこととなる。そのため本論文では、異方性すべり摩擦挙動にも対応できるように、速度依存性下負荷摩擦モデルの一般化にも取り組む。また、摩擦試験結果との比較を実施し、異方性下負荷摩擦モデルの適用性を示す。最終的に、有限自由度の変形現象と異方性すべり摩擦現象を同時に考慮し得るように、異方性摩擦モデルを有限要素法へ実装することにより、異方性すべり摩擦現象を含む接触境界値問題に対するより一般的なアプローチ手法としての確立を目指す。

以上のように、本論文は、速度依存性摩擦モデルの定式化と異方性を含むモデルへの一般化に関する内容、並びに提案摩擦モデルを用いた境界値問題に対する新しいアプローチ手法としての確立に関する内容からなる。本論文は、図 1.7 に示すように序論を含めて 7 章から構成される。各章の概要を以下にまとめる。

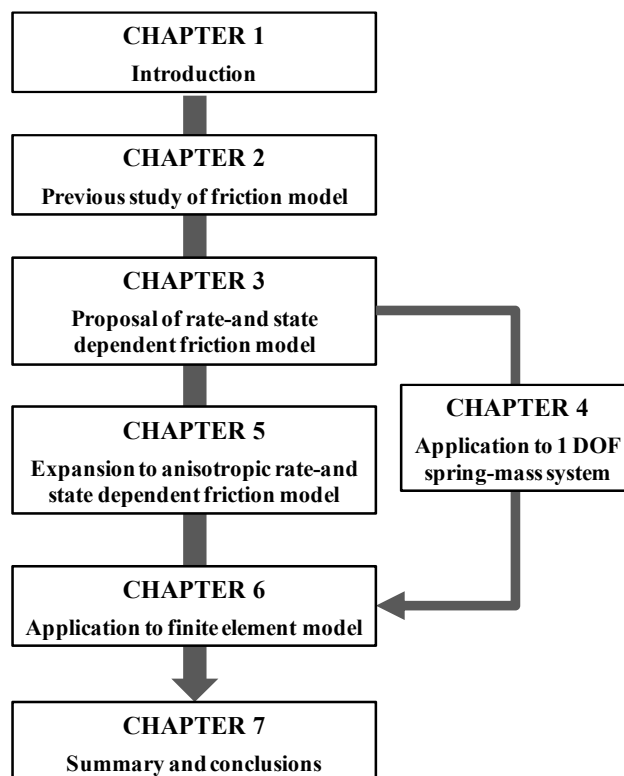


Fig. 1.7. Structure of this thesis.

先ず，第 2 章では，既往の摩擦モデルについて，トライボロジーモデル，state variable モデル (Rice-Ruina モデル)，メゾスケールモデルおよび弾塑性論に基づく摩擦モデルを 4 つのカテゴリーに分類するとともに，その特徴について概説する．特に，弾塑性論に基づく摩擦モデルについて重点的に説明を行うとともに，非古典弾塑性論に属する下負荷面の概念が導入された摩擦モデルを紹介する．また本章を通して，提案する速度依存性下負荷摩擦モデルおよび異方性摩擦モデルの位置付けを明確にする．

第 3 章では，弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦モデルについて述べる．先ず，接触面の微小アスペリティの振る舞いの仮定に基づき，提案摩擦モデルにて採用する状態変数とその発展則に関する考察を行う．次に，すべり速度の加算分解，弾性関係，適応条件およびすべり流動則に従う一般化式の定式化について述べた後，すべり面の具体的な関数形に基づいた接触応力速度-すべり速度関係式を導出する．さらに，単調摩擦負荷および繰返し摩擦負荷に対する提案モデルの基本的な応答特性について述べるとともに，摩擦試験結果との比較により，その妥当性を検証する．

第 4 章では，提案摩擦モデルを 1 自由度の運動方程式に実装し，スティックスリップ運動の数値解析における新しいアプローチ手法を提案する．なお，速度形の摩擦モデルを用いる本手法を state variable approach と区別して rate form approach と称する．提案手法に基づき，垂直荷重・バネ剛性・駆動速度といった動的条件の影響およびモデルパラメータの影響について考察を行う．次に，提案摩擦モデルに基づきすべりモードの安定性に関する一考察を行う．また，スティックスリップ運動に付随した摩擦力振幅の制御方法に関する数値解析的検討を実施する．さらに，摩擦試験と材料試験（要素試験）の類似点と相違点について整理した後，種々の供試材料の組合せを対象としたスティックスリップ運動の試験結果との比較を行い，提案摩擦モデル，ひいてはアプローチ手法の妥当性を検証する．

次の第 5 章では，先ず，摩擦抵抗の方向依存性および非共軸性といった異方性すべり摩擦現象の特徴を述べた後，これに対応できるように直交異方性ならびに回転硬化の概念を新たに導入することで，速度依存性下負荷摩擦モデルの異方性モデルへの一般化に取り組む．また，Coulomb の摩擦基準に準じた場合の具体的定式化を説明する．次に，周期的なテクスチャー加工を施した試験片を用いた摩擦試験結果との比較例を示し，異方性下負荷摩擦モデルの実問題への適用性を示す．

第 6 章では，先ず，接触・摩擦現象の有限要素法への制約条件としての導入方法について概説する．次に，ユーザーサブルーチンを用いて，提案摩擦モデルを有限要素法汎用ソフトに実装する．これより，提案アプローチ手法により，有限自由度の物体の変形現象とスティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦現象を同時に検討し得ることを示す．また，スティックスリップ運動の解析においては，動的条件の影響のみならず，バネ-質点系の解析では困難であった接触物体の材料特性や幾何学的特性を容易に考慮できることを示す．さ

らに，提案異方性摩擦モデルを有限要素法汎用ソフトに実装する．典型的な異方性すべり摩擦現象の境界値問題の数値解析例を通して，摩擦抵抗の方向依存性や摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの非共軸性について考察を行う．

7章は結論である．ここでは，各章で得られた知見をまとめ，本論文の結論とする．

### 1. 3 符号と数学的表記について

論文を通して，垂直応力（速度）と垂直ひずみ（速度）の符号は引張を正とする．また，せん断ひずみの符号は時計回りの変形を正とする．他方，法線方向のすべり速度の符号は相手の物体が近づく場合を正と定義し，法線接触応力は他の物体から圧縮される場合を正と取る．また，接線接触応力ベクトルの方向と弾性接線すべり速度ベクトルの方向は同方向として定式化を進める．また特に断らない限り，スカラー量は斜体，ベクトル量は小文字のボールド体，テンソル量は大文字のボールド体として記述する．

## 2章 既往の摩擦モデル

### 2.1 緒言

図 2.1 のストライベック曲線に示すような比較的低速条件下での乾燥および境界（混合）潤滑領域においては、静止している物体にすべりを生じさせるとき、静止摩擦と呼ばれる高い摩擦抵抗が先ず現れる。その後、摩擦抵抗は、すべり変位の進展とともに低下して（すべり弱化）、ある一定値に漸近するが、この停留摩擦は動摩擦と呼ばれている。ここで、摩擦抵抗はすべり速度の増加に伴い、小さくなることが特徴である（すべり速度弱化）。また、摩擦抵抗が低下した後、しばらく放置して再びすべりを生じさせると、静止摩擦が復活して、初期すべり時と同じ現象が再現されることが明らかにされている。この静止摩擦の時間依存性回復現象は、アスペリティ先端の凝着部の *healing*、または真実接触面積の *aging* として知られている。他方、流体潤滑領域では、十分な潤滑膜厚が確保されているため、すべり摩擦挙動は流体力学的特性に依存する。この領域でのすべり摩擦特性の予測は、弾性流体潤滑理論をはじめとして、十分な精度で実務作業に適用できる理論体系が既に確立されている。したがって、本論文では、未だ十分な理論体系が確立されていないストライベック線図の境界潤滑領域（厳密には乾燥条件下）でのすべり摩擦特性について注目することとなる。この領域での速度・状態依存性すべり摩擦挙動を反映した摩擦力-すべり変位関係の特徴をまとめたものを図 2.2 に示す。

システムとしてのすべり摩擦現象の理解や安定性に関する検討、あるいは数値解析での活用を目的として、これまでに、上述のような速度・状態依存性すべり摩擦挙動を数学的に記述するための摩擦モデルが多数提案されている。これらのモデルは、定式化の手法や数学的構造に基づけば、以下のように大別される。

- 1) トライボロジー分野にて発展してきた“トライボロジーモデル”
- 2) 地球物理学分野で発展してきた“state variable モデル”
- 3) 応用物理化学分野にて発展してきた“メゾスケール EQ モデル”
- 4) 計算固体力学分野で発展してきた“弾塑性論に基づく摩擦モデル”

ただし、これらの摩擦モデルは、おおよそ実験観察に基づく現象論に属しており、厳密な意味での物理モデルではない。一方、本論文での対象外となるが、物理化学分野やトライボロジー分野では、摺動時の境界潤滑膜での物理的素過程や化学的素過程を微視的なスケールで検討することにより、摩擦特性の理解と制御が試みられている(e.g. Persson, 2000; Braum and Naumovets, 2006)。しかしながら、分子動力学法などに基づくこれらの研究では、扱える空間・時間スケールに限界があり、現在のところバルク変形、ひいてはシステム全体をも考慮した検討には適用できない。



本章では、上記のような4つのカテゴリーに分類した摩擦モデルの特徴について、それぞれ概説するとともに、本論文の根幹を成す速度依存性下負荷摩擦モデルの位置付けを明確にする。

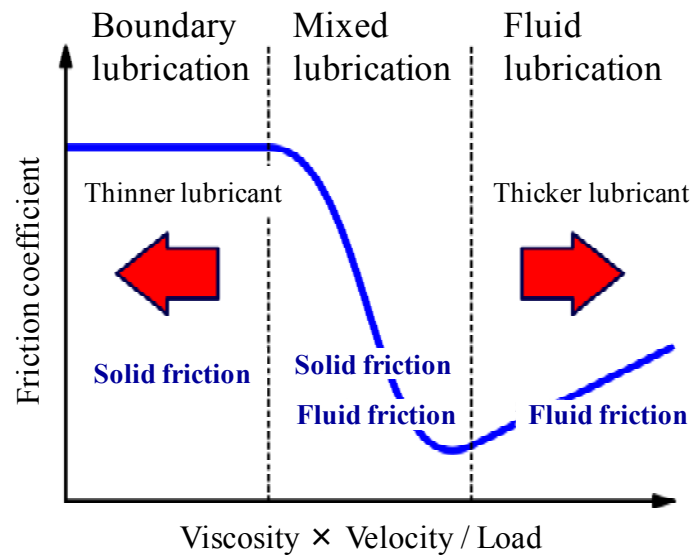


Fig. 2.1. Stribeck curve.

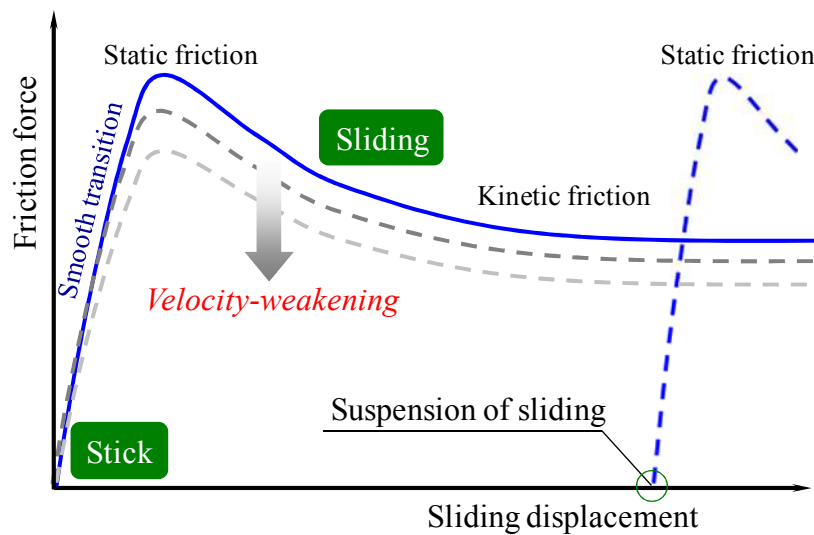


Fig. 2.2. Schematic diagram of rate-dependent frictional sliding behavior.

## 2. 2 トライボロジーモデル

1章で述べたように、Coulomb 則は幅広い分野およびスケールにて活用されているが、速度依存性すべり摩擦現象には適用できない。そのため、いくつかの拡張が試みられている。本論文における“トライボロジーモデル”は、主にトライボロジー分野で使用されており、摩擦係数測定の実験結果に基づき、自然関数や対数関数を用いて速度依存性のすべり摩擦挙動を記述した数理モデルのことをいう。定式化の特徴としては、主に次式のように、摩擦係数をすべり変位やすべり速度、あるいはすべり停止後の経過時間の関数( $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ )とすることで定式化され、これらをスイッチ関数的に併用することで解析が行われている。

$$\left. \begin{aligned} \mu_s &= f(\mu, t, \theta) \\ \mu_k &= g(\mu, \bar{u}, \bar{v}, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここに、 $\mu_s$  および  $\mu_k$  は静止摩擦および動摩擦係数であり、 $t$  は時間を表している。また、 $\theta$  は温度や法線応力などをまとめて示した変数である。これらの具体式について、いくつかの代表例を以下に紹介する。

真実接触部のアスペリティ形状を円柱と仮定して、クリープ変形と多点接触理論に基づき、次式のような静止摩擦の時間依存性モデルが提案されている。本式は、静止摩擦の回復が対数的に生じるという実験結果を再現し得る。

$$\mu(t) = a + b \ln(t) \quad (2.2)$$

ここに、ここに、 $a$  および  $b$  はモデルパラメータである。また、 $t$  は静止時間である。Panait et al. (2004) もスカラーの内部状態変数  $\phi$  を導入した摩擦モデルを提案している。これによると、摩擦係数は次式で与えられる。

$$\mu = (1 + \phi)\mu_0 \quad (2.3)$$

ここに、 $\mu_0$  は摩擦係数の初期値（または参照値）である。法線接触応力が一定の場合、状態変数  $\phi$  の発展則を次のように仮定する。

$$\dot{\phi} = \beta e^{-\alpha t} + \gamma e^{-\delta t} \quad (2.4)$$

ここに、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  および  $\gamma$  はモデルパラメータである。上式は、摩擦係数の変化はクリープ変形に起因した真実接触面積の増加によるものと仮定している。式(2.4)を積分すると次式を得る。

$$\phi = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\gamma}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) \quad (2.5)$$

したがって、式(2.3)と(2.5)より、摩擦係数は時間の関数として、以下のように表される。

$$\mu = \left[ 1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\gamma}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) \right] \mu_0 \quad (2.6)$$

上式において、 $t \rightarrow \infty$ を仮定すると、 $\mu \rightarrow (1 + \beta/\alpha + \gamma/\delta)\mu_0$ となる。これより、 $(\beta/\alpha + \gamma/\delta)$ は摩擦係数の初期値からの増加割合を意味する。本モデルでは5つのパラメータを含むことになるが、最小二乗法などを用いて決定する。なお、状態変数の発展則は、通常、自身の関数として次のように規定されるが、式(2.4)はそうではない。

$$\dot{\phi} = f(\phi, \text{etc.}) \quad (2.7)$$

したがって、Panait et al., (2004)の摩擦則は厳密な意味において、後述する state variable モデルとは異なる。摩擦係数が時間の関数として陽に記述されているため、本論文ではトライボロジーモデルに分類している。

一方、動摩擦の速度依存性に関する代表的な式には、次のようなものがある。本モデルは多くの汎用ソフトに導入されている。

$$\mu = \mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-c|\bar{v}|} \quad (2.8)$$

ここに、 $c$ は摩擦係数を静止摩擦係数から動摩擦係数にスムーズに連続させるためのパラメータである。決定方法としては、 $c|\bar{v}|$ が約0.7のとき、摩擦係数は $\mu_s$ と $\mu_k$ の中間値となり、 $c|\bar{v}|$ が約4程度以上のとき、ほぼ $\mu_k$ と一致する。また、他の動摩擦の速度依存性モデルとしては、以下のようなものがある。

$$\mu(V) = \mu_0 + \beta_d \ln \left( 1 + \frac{V_{sat}}{\bar{v}} \right) \quad (2.9)$$

ここに、パラメータ $\beta_d$ は $10^{-2}$ のオーダーである。 $\mu_0$ は動摩擦の下限値、 $V_{sat}$ は速度負勾配の対数関係が飽和するすべり速度である。

以上で紹介したトライボロジーモデル以外にも同様の概念で定式化されたモデルが多数存在する。トライボロジーモデルは、その簡便さから実用的である反面、摩擦構成式としてはいくつかの問題点を内包する。例えば、すべり速度が小さい場合に停止したか否かの判定には任意性を伴うことからわかるように、式(2.2)や(2.6)のように時間そのものを含むことは構成式としての要件である客観性を破ることになり、解析結果は解析者に依存する。さらに、式(2.8)や(2.9)のように摩擦係数をすべり速度の関数とすると、後述する摩擦構成式としての接触応力速度-すべり速度関係式の導出が困難となる。物質特性の変化は、内部状態変数とその変化により記述すべきであることに留意しなければならない。

## 2. 3 State variable モデル

スティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦現象の数値解析では、Oden and Martins (1985)が指摘しているように、シンプルだが実験事実と乖離するような摩擦モデルよりは、寧ろ摩擦力とすべり速度の複雑な関係を記述し得るモデルが必要となる。主に地球物理学分野にて発展してきたスティックスリップ運動に対するアプローチとして、速度と状態依存性を摩擦モデルに直接導入した研究がある。これらは“*state variable approach*”と称されており、その摩擦モデルは提案者の名前を取り、Dieterich-Ruina モデルあるいは Rice-Ruina モデルとも称される。

Dieterich (1972, 1979)の「すべりー停止ーすべり」実験により、ある時間だけ準静的に保持した後に、以前と同じ速度ですべりを再開させると、その瞬間に摩擦が $\Delta\mu$ だけ増加することが観察された。また、その後のすべりでは以前の定常すべり時の摩擦抵抗に戻ることも確認された。これが *healing* の効果であり、静止摩擦係数 $\mu_s$ は停止時間に対して対数的に増加する。一方、図 2.3 に示すように定常状態で滑っている際に、すべり速度を突然1桁増加させると摩擦抵抗も同時に増加し、その後のすべりにより摩擦は新しい定常状態に対応したレベルで減衰していく。この摩擦抵抗のオーバーシュート挙動を直接効果(*direct effect*)と称す。なお、動摩擦係数 $\mu_k$ はすべり速度に対して対数的な負の依存性を持つ。

このような実験結果を再現し得る経験則が Dieterich (1979)によって提案され、その後、Ruina(1983)が速度と状態に依存する摩擦構成式(*rate- and state-dependent friction model*)として定式化した。これまでに、本枠組みに基づく派生モデルが多数提案されている(Marone, 1998)。これらの摩擦モデルの第一の仮定は、接触面のあらゆる瞬間の状態は状態変数により特徴付けられ、さらにその状態は、本質的に、与えられたすべり速度が一定の場合には一定である。また、すべり速度が変化する際には状態変数も共に変化する。この状態変数の変化に伴い以前の履歴が失われ、ある特定のすべり距離の間に過渡的な応答を示す。代表的な *state variable* モデルとして、Rice and Ruina (1983)のものが主に地震破壊力学分野で使用されてきたが、最近ではトライボロジー分野でも積極的に利用されている(e.g. Heslot et al., 1994; Baumberger et al., 1994, 1999; Berthoud et al., 1999; Persson, 2000; Baumberger and Caroli, 2006)。以下に、*state variable* モデルの定式化と概念を簡単にまとめる。

式(2.2)を用いることで静止摩擦の時間依存性が記述できるが、静止摩擦から定常すべりまでの一連の挙動を記述することを考え、Rice and Ruina(1983)は状態変数 $\phi$ を導入している。定式化においては、まず、停留状態の速度 $\bar{v}_0$ の下、静止摩擦係数が時間に依存して対数的に回復する様子を次式で記述する。

$$\mu = \mu_0 + \bar{\beta} \ln(\phi \bar{v}_0 / D) \quad (2.10)$$

ここに、 $D$ は結合部の破壊に必要な物体中心のすべり変位であり、表面粗さや表面の性質に依存する。 $D$ は臨界距離（特性長さ）とも呼ばれる。

式(2.10)において $\bar{v}_0/D=\phi_0$ とすると、次式が得られる。

$$\mu = \mu_0 + \bar{\beta} \ln(\phi / \phi_0) \quad (2.11)$$

ここに、状態変数 $\phi$ は臨界距離滑るまでの履歴を表し、その変化速度は $\bar{v}$ に依存する。したがって、式(2.11)により、定常すべりにおける速度負勾配も記述できる。また、初期の速度がゼロの静止時において $\phi$ は時間と等価となるため、静止摩擦の回復も表現できることとなる。一方、凝着部のせん断強さの速度依存性 $\tau(\bar{v})$ を考慮すると、

$$\tau(\bar{v}) = \tau_0 [1 + \bar{\alpha} \ln(\bar{v} / \bar{v}_0)] \quad (2.12)$$

と現象論的に記述できる。本式は先に述べた直接効果を意味する。式(2.10), (2.11)および(2.12)より、摩擦はその瞬間のすべり速度 $\bar{v}$ と状態変数 $\phi$ に依存するような形式として次式のように記述される。

$$\mu = \mu_0 + \bar{\beta} \ln(\phi / \phi_0) + \bar{\alpha} \ln(\bar{v} / \bar{v}_0) + O^2 \quad (2.13)$$

ここに、 $\bar{\alpha}$ および $\bar{\beta}$ はパラメータである。また、2次のオーダー $O^2$ は微小なので無視できる。式(2.13)または垂直荷重を作用させた次式を一般に Rice-Ruina モデルと称する。

$$f_t = [\mu_0 + \bar{\beta} \ln(\phi / \phi_0) + \bar{\alpha} \ln(\bar{v} / \bar{v}_0)] f_n \quad (2.14)$$

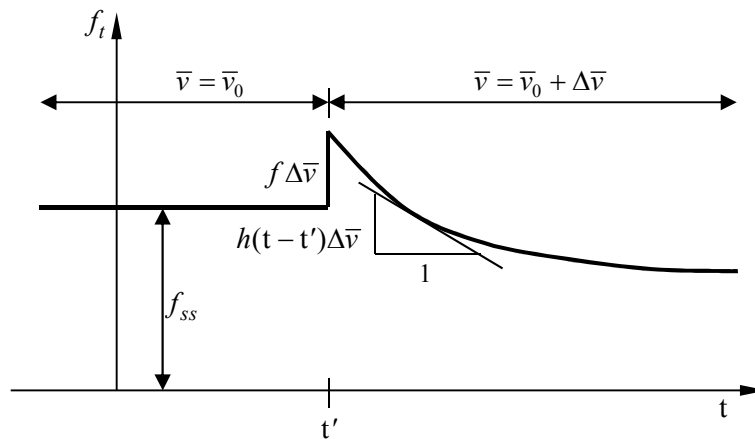


Fig. 2.3. Resistive friction stress  $f_t$  in response to a sudden step  $\Delta\bar{v}$  in sliding velocity imposed at time  $t'$ .

一般に、接触物体間の真実接触面積は時間とともに増大する一方、速度 $\bar{v}$ で滑っている際に、接触している微小アスペリティはせん断変形を受ける。このため、すべりがアスペリティの半径のオーダーに達すると凝着が消失する。また、一定の荷重条件の下では、接触している微小凹凸の数は保存される。すべりによる凝着の消失は新しい凝着の発生を生じ、この新しい接触アスペリティはクリープ変形を体験していない。接触状態の一新は微小アスペリティの凝着の継続の間に生じる。準静的な場合には、 $\phi = t$ であるから、 $\phi$ は接触の平均年齢、すなわち任意の瞬間において存在する個々の接触が、最初に接触の状態に入ってから経過時間の平均であると解釈できる。そうすると、臨界すべり距離 $D$ はある一定すべり速度の下で現存の接触の集団が破壊され、相関の無い新たな接触集団に置き換わるのに必要なすべり距離となる。すなわち、 $\phi = D/\bar{v}$ はアスペリティの結合の破壊に要する平均的な時間となる。したがって、状態変数の時間発展則を次のように仮定できる。

$$\dot{\phi} = 1 - \frac{\bar{v}\phi}{D} \quad (2.15)$$

式(2.13)において、 $\mu_0$ がある定常状態での基準すべり速度 $\bar{v}_0$ となるように $\phi_0 = D/\bar{v}_0$ と置くと、速度 $\bar{v}$ で定常的に滑っている状態での摩擦係数は次のようになる。

$$\mu_{ss} = \mu_0 + (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \ln(\bar{v}/\bar{v}_0) \quad (2.16)$$

したがって、動摩擦は速度 $\bar{v}$ における $\mu_{ss}$ だと考えることができる。

本摩擦モデルは、岩石だけでなく、プラスチック、ガラス、ボード紙、金属など様々な材料のすべり摩擦挙動に適用できるとされている。また本摩擦モデルにより、静止摩擦から動摩擦への移行が定量的に扱われ、すべり速度下での定常値と速度の急変による遷移挙動が明瞭に区別されて議論できるようになった。ただし、このような摩擦モデルが成り立つすべり速度は、数 100 mm/s 以下の摩擦熱による溶融等による状態変化が起こらない場合である。

さらに、state variable approach に基づき、Lapusta et al. (2000), Ranjith and Rice (2001), Rice et al. (2001), Putelat et al. (2007)は、スティックスリップ不安定性解析やすべりモードの分岐解析に関するフレームワーク的研究を展開している。さらに、法線接触応力の摂動、異なる弾性体どうしの接触、接触面での応力波の伝播や温度依存性などの影響を考慮し得るように、これらのモデルの定式化はより一般化されている。しかしながら、これらの定式化では接線接触応力がすべり速度の関数として与えられるため、すべり摩擦とバルク変形との連成問題や繰返し摩擦負荷問題、さらには微小すべりやすべり摩擦の異方性を含むより一般的な接触・摩擦境界値問題などへの適用は、2.5 節で述べる弾塑性論に基づく摩擦モデルの場合よりも複雑となってしまう。

## 2. 4 メゾスケール EQ モデル

スティックスリップ運動に代表される速度依存性すべり摩擦現象については、状態変数の発展則(2.15)を導入したモデルにより、良く説明されている (2.3 節参照)。しかしながら、これらのモデルは純粋に現象論的である。このため、対応している数式はミクロスケールでのシミュレーションからは導出されない。実験的に観察されたマクロスケールでの滑らかなすべりは、ミクロスケールでのスティックスリップ運動に対応していなければならない。しかし、分子動力学法に基づく数値解析で見られるミクロスケールでのスティックスリップから滑らかなすべりへの遷移メカニズムは、マクロスケールの実験で観察される同現象との共通点が少ない。そのような状況の下、Persson (1995)は地震破壊力学分野で利用されている earthquake モデル (EQ モデル) を室内でのトライボロジー試験結果の解釈にはじめて適用した。本モデルは、ミクロスケールとマクロスケールの両方の振る舞いに対応しており、メゾスケールモデルとして位置付けられる。本節では、速度依存性すべり摩擦を呈する境界潤滑条件を対象として、Persson (1995)のモデルを拡張することにより定式化された Braun and Tosatti (2009)のメゾスケールモデルについて概説する。

定式化においては、Burridge-Knopoff spring block EQ model に基づき、図 2.4 に示すような平行な平板間の接触点  $i=1 \dots N$  (潤滑膜のパッチに相当) を扱っている。外力が作用していない状態では、 $N$  個の接触点は乱された 2 次元格子構造を取る。ここに、各接触点  $i$  の位置ベクトル  $\mathbf{r}_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$  は距離  $a$  離れた三角形格子に従い配置されている。ただし、分子鎖の空間的なばらつきを考慮するため、ガウス分布を用いてその位置をランダムにシフト ( $x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i$ ) させている。なお、ばらつきの標準偏差は  $\Delta l$  で、通常、ゼロを基準としてある。

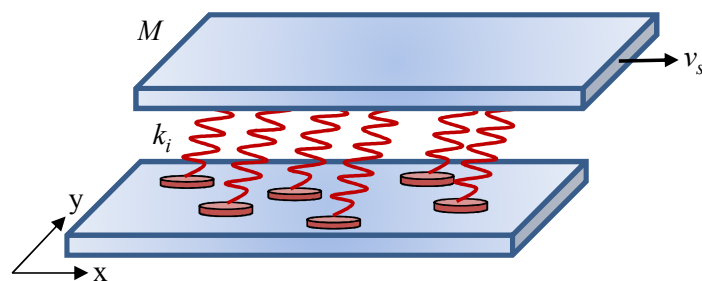


Fig. 2.4. Schematic diagram of contact patches based on the earthquake Burridge-Knopoff model.

ベースとスライダ間で各接触点は弾性定数  $k_i$  の各ばねを介して連結されている。したがって、せん断を受けると、接触点の分子鎖はベースに対して  $\mathbf{I}_i$  伸び、 $i$  番目の接触点は横力

$$\mathbf{f}_i^{\text{sub}} = -k_i \mathbf{I}_i \quad (2.17)$$

を受ける。さらに、表面科学分野の知見に基づき、接触点は弾性的な相互作用を及ぼし合うと仮定する。その相互力は、 $g$  を相互作用の強さとして次式で与えられる。

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} \approx 3g(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) / (r_{ij}^0)^5 \quad (2.18)$$

したがって、 $i$  番目の接触点がベースおよび他の接触点から受ける力の和は次式のようになる。

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\text{sub}} + \sum_j \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} \quad (2.19)$$

加えて、各接触点はスライダベース間で摩擦連結されていると仮定できる。そのため接触点は、力が  $\|\mathbf{f}_i\| < f_{si}$  の間は剛体的に移動する。ここに、 $\|\ \|\$  は大きさを表し、 $f_{si}$  は力の上限值である。上限値を超えると接触点はスライダから剥離し、時間  $\tau_i$  の間、相対的に滑る。その後、接触点はスライダに再結合する。そのため、 $\tau_i$  は新しい接触を形成(contact aging)するのに必要な時間と等価であり、例えば、潤滑膜がすべりによって局所的に融解した場合、潤滑液中で新しく吸着膜を形成・成長させる時間に対応していると思なせる。

一方、摩擦的に滑っている間、接触点はスライダから次式のような牽引力を受ける。

$$\mathbf{f}_i^{\text{drag}} = m_i \eta_i (\mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{I}}_i) \quad (2.20)$$

ここに、 $\mathbf{v}_s$  はスライダの速度、 $m_i$  および  $\eta_i$  は接触点の質量および潤滑剤の局所的な粘性係数である。滑った後、接触点はスライダに再結合するが、これは力の大きさ  $\|\mathbf{f}_i\|$  が下限値  $f_{bi}$  よりも十分に小さくなり、遅れ時間  $\tau_i$  後に生じる。

パラメータ  $f_{si}$ 、 $m_i$  および  $k_i$  は各接触点に振り分けられる。特に、閾値  $f_{si}$  には、平均値  $f_s$ 、標準偏差  $\Delta f_s$  のガウス分布に基づいたランダム値を採用する。閾値の連続的な分布は、初期すべりの緩和（徐々にすべる様子）のキーポイントなる。他方、接触剛性は  $k_i \approx \rho c^2 a_i$  で与えられる。ここに、 $\rho$  は密度、 $c$  は接触点を形成する物質（潤滑液、または支持層）の横断方向の音速である。また、 $f_{si}$  と  $m_i$  は接触面積  $A_i = \pi a_i^2$  ( $a_i$  は接触半径) に比例すべきである。したがって、次式が仮定できる。

$$m_i = m f_{si} / f_s, \quad k_i = k (f_{si} / f_s)^{1/2} \quad (2.21)$$

ここに、 $m$  および  $k$  は平均値である。接触点が再形成される際、関連するパラメータは新しい値を取る。

以上より、固着しているか否かに関わらず、スライダは全接触点より次式のような摩擦力を受けることとなる。



$$\bar{\mathbf{f}}_i A = \sum_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^{\text{drag}}) \quad (2.22)$$

ここに、 $A$ はスライダとベース間の見かけの接触面積である。なお、金属接触部を考慮した Bowden and Tabor (1959)の境界潤滑モデルには以下のように単純に拡張できる(Ozaki, 2013)。

$$\bar{\mathbf{f}}_i A = A\gamma\tau + (1-\gamma)\sum_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^{\text{drag}}) \quad (2.23)$$

ここに、 $\gamma$ は潤滑膜の破断面積の割合（良好な潤滑剤に対しては非常に小さく、数%程度）であり、 $\tau$ は真実接触点のせん断強さである。ただし、より詳細な定式化には、三角格子内部に金属接触部分（島）を仮定する必要があると考えられる。

上述のメゾスケールモデルは、速度依存性スティックスリップを表現するため、接触面の不均一さと複雑さの導入を基礎としているものの、原子的にスムーズなマイカ表面を対象としているため、現実の工学的接触面への適用は現段階では困難である。しかし、式(2.23)のように拡張されたモデルは、金属の応力解析における結晶塑性モデルに対応すると考えられる。本メゾスケールモデルの妥当性を様々な視点から精査することにより、今後、後述する現象論的な速度・状態依存性摩擦モデルと組み合わせて使用することが可能となる。例えば、摩擦試験と対応したメゾスケールモデルを数値実験として利用することにより、現象論的なモデルの素性の良いパラメータの決定が可能となる。さらに、Watanabe and Terada (2010)の金属の塑性変形挙動に関するミクロマクロ非連成解析手法を援用することで、「境界潤滑面の接触・摩擦問題に対するマルチスケール数値解析手法」を構築できる可能性もある。

## 2. 5 弾塑性論に基づく摩擦モデル

State variable モデルとは異なる枠組みとして、すべり摩擦挙動を弾塑性構成モデルと同様の形式で記述する方法が約 40 年前に見出され、近年に至るまで主に計算固体力学分野にて発展を遂げてきた(cf. Kikuchi and Oden, 1988; Laursen, 2000; Wriggers, 2003)。このような摩擦モデルは、接触・摩擦挙動を制約条件として有限要素法に導入する手法が確立されているため、有限自由度の複数物体を対象とした接触・摩擦境界値問題の解析に容易に利用できる。以下では、本論文で提案する速度・状態依存性摩擦モデルが属する弾塑性論に基づく摩擦モデルの基本的概念について述べる。

### 2. 5. 1 弾塑性挙動とすべり摩擦挙動の類似性

従前より、法線方向の接触問題は幾何学的制約条件としての非貫通条件(*non-penetration condition*)を満足するように定式化されてきた。一方、接線方向に関しては、すべりが発生しない場合は法線方向と同様の考え方が適用できる。すなわち、摩擦基準以下での接線方向の

微小なすべりを幾何学的制約条件として定式化する．これらのモデルは接触・摩擦を非貫通条件として定式化しているため，しばしば“*penalty contact method*”と称される．ここでは，古典的な接触・摩擦理論を通して弾塑性挙動とすべり摩擦挙動の類似性について述べる．

## 2. 5. 1(a) 制約条件

いま，図 2.5 に示すような変形した 2 物体の接触配置  $\varphi^1(B^1)$ ， $\varphi^2(B^2)$  とギャップ量  $g_n$  を考える．ここに，物体の配置  $B^\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) は，時刻  $t$  から  $t+dt$  の間， $\varphi^\alpha$  により 1 対 1 でマッピングされる．すなわち，物体  $B^1$  と  $B^2$  の表面状の物質点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\mathbf{x}^1 = \varphi^1(\mathbf{X}^1, t), \quad \mathbf{x}^2 = \varphi^2(\mathbf{X}^2, t) \quad (2.24)$$

となる．

非貫通に対する数学的条件はギャップ量が正 ( $g_n > 0$ ) であることにより保障される．ここに，ギャップ量は物体  $B^1$  の表面から物体  $B^2$  の表面までの最小距離と等価である．他方，物体どうしが接触すると，ギャップ量は  $g_n = 0$  となり，法線接触応力が物体  $\varphi^1(B^1)$  に作用せねばならない (図 2.6 参照)．したがって，接触条件は次式で与えられる．

$$g_n \geq 0, \quad f_n \geq 0, \quad f_n g_n = 0 \quad (2.25)$$

ここに，

$$f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad (2.26)$$

$$g_n \equiv (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n} \quad (2.27)$$

$\mathbf{f}$  および  $\mathbf{n} = \varphi^1(\mathbf{N}, t)$  は物体  $\varphi^1(B^1)$  の単位接触表面に作用する接触応力および単位外向き法線ベクトルである．条件式(2.25)は摩擦無しの場合の“*Hertz-Signorini-Moreau condition*”として知られている．図 2.7(a)に示すように，式(2.25)は連続で無い法線接触モデルを導く．

制約条件付き最適問題において，このような条件は摩擦無し接触の基礎を提供する．一般に，最適問題では，式(2.25)のような式の組合せを“*Kuhn-Tucker condition*”と称す．このような条件は，図 2.7(b)に示すように，法線方向のみならず，すべり摩擦が存在する接線方向の問題に対しても同様に適用できる(e.g. Seguchi et al., 1974; Fredriksson, 1976; Michalowski and Mroz, 1978; Kikuchi and Oden, 1988; Laursen, 2000; Wriggers, 2003)．

図 2.7 からわかるように，接触に関する制約条件は，法線方向に関しては降伏応力無限大の剛塑性現象に類似しており，また接線方向に関しては降伏応力が摩擦基準 (例えば， $\mu f_n$ ) に対応した剛塑性現象と類似している．さらに，式(2.25)の制約条件を基礎としているため，上述の 3 つのカテゴリーの摩擦モデルでは議論されていなかった法線方向の乖離・再接触も取り扱える．

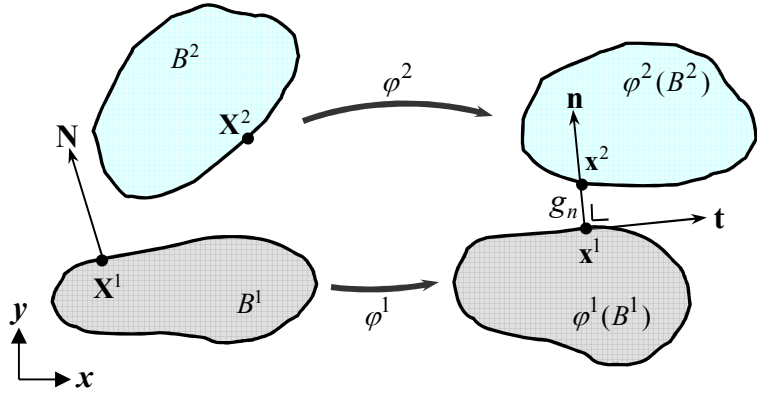


Fig. 2.5 Deformed configuration of bodies  $B^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) and the gap  $g_n$ .

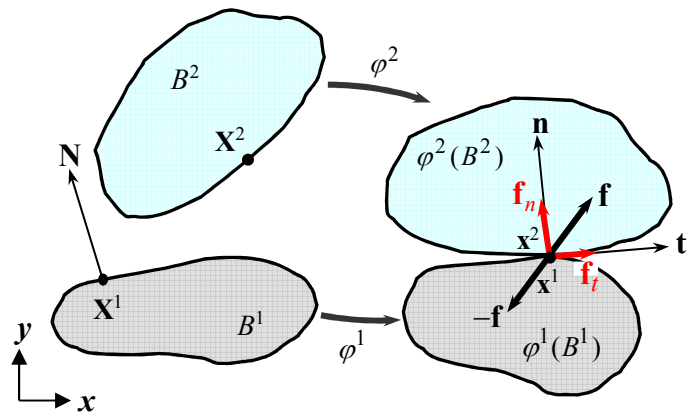


Fig. 2.6 Two bodies in contact.

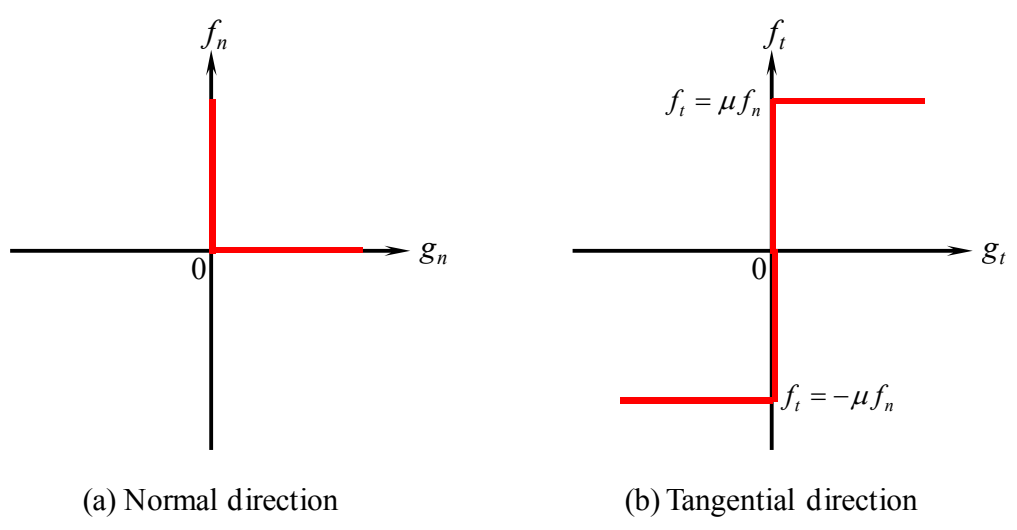


Fig. 2.7 Relation of traction vs. gap based on Eq.(2.25).

## 2. 5. 1(b) 古典摩擦モデル

固着は接線方向のすべり速度ベクトル  $\bar{\mathbf{v}}_t$  がゼロの時として定義される。したがって、固着条件は次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{v}}_t = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{u}}_t = \int \bar{\mathbf{v}}_t dt = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{u}}_t$  は接線方向のすべり変位ベクトルであり、その大きさは、接触力学において、図 2.7 の接線方向のギャップ量  $g_t$  と等価である。式(2.28)の条件は現配置  $\varphi(B^\alpha)$  で定義されるため、通常、接触面上の運動に対して非線形の制約条件を課すこととなる。

他方、接線方向の接触応力ベクトル  $\mathbf{f}_t$  がある閾値に達すると、2 物体は相対的に運動する。この相対的なすべりの発生に対応した接線方向の接触応力は、1 章で述べた Coulomb 則の場合、次式で規定される。

$$\mathbf{f}_t = \mu f_n \frac{\bar{\mathbf{v}}_t}{\|\bar{\mathbf{v}}_t\|} \quad (2.29)$$

Coulomb 則は次式を満足せねばならない。

$$\|\mathbf{f}_t\| \leq \mu f_n, \quad f_n > 0 \text{ for contact} \quad (2.30)$$

上式は弾塑性構成式における降伏条件(*yield condition*)と同様の意味を持つ、したがって、図 2.7(b)のような挙動を示すこととなる。弾塑性構成式の“降伏”に対して、摩擦構成式では“すべり”が相当するため、本論文では式(2.30)のような摩擦基準をすべり面(*sliding surface*)と称する。

その後、上述のような剛塑性型の接触・摩擦の取り扱いに対して、接触面に仮想的なバネをペナルティパラメータとして導入することで弾完全塑性型の摩擦モデルへの拡張が行われた。(e.g. Curnier, 1984; Kikuchi and Oden, 1988; Peric and Owen, 1992; Anand, 1993; Stupkiewicz and Mroz, 1999; Laursen, 2000; Wriggers, 2003). このような弾完全塑性構成式に類似した摩擦モデルの定式化のキーアイデアは、図 2.8 に示すように、接触面におけるすべり速度ベクトル  $\bar{\mathbf{v}}$  が弾性成分  $\bar{\mathbf{v}}^e$  と塑性成分  $\bar{\mathbf{v}}^p$  に加算分解できると仮定することである。すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p = (\bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p) + (\bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p) \quad (2.31)$$

ここに、下添字  $(\ )_n$  および  $(\ )_t$  はそれぞれ法線成分および弾性成分を意味する。また一般に、法線方向の塑性すべりはゼロであるため、

$$\bar{\mathbf{v}}_n = \bar{\mathbf{v}}_n^e \quad (2.32)$$

となる。

接触面に仮想的なバネを配置することにより、接触応力速度  $\dot{\mathbf{f}}$  とすべり速度が弾性構成式として関係付けられる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_n &= \alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n^e \\ \dot{\mathbf{f}}_t &= \alpha_t \bar{\mathbf{v}}_t^e \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

ここに、 $\alpha_n$ と $\alpha_t$ は法線および接線方向の仮想バネ定数であり、接触弾性係数と称される。これらが、大きな値を取る程、非貫通条件を満足することとなる（図 2.9 参照）。式(2.33)をまとめて記述すると、次の弾性式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \{ \alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} \cdot \bar{\mathbf{v}}^e \quad (2.34)$$

ここに、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソル、 $\mathbf{n} = \mathbf{f}_n / \|\mathbf{f}_n\|$ は接触面の外向き単位法線ベクトルである（図 2.4, 2.5 参照）。また、 $\cdot$ および $\otimes$ はそれぞれスカラー積およびテンソル積を表す。

さて、一般的な塑性理論を用いて定式化される場合、接線方向の塑性すべり $\bar{\mathbf{u}}_t^p$ の発展式が規定されねばならない。そこで、塑性流動則と同様に、すべり流動則(*sliding-flow rule*)を導入する。

塑性すべり速度によるエネルギー散逸は次式で与えられる。

$$D^s = -\mathbf{f}_t \cdot \bar{\mathbf{v}}_t^p \geq 0 \quad (2.35)$$

いま、関数 $\bar{f}$ で規定される接触応力空間において、次式の弾性領域を考慮する。

$$\mathbf{E} = \bar{f}(\mathbf{f}) < 0 \quad (2.36)$$

Coulomb の摩擦基準を採用した場合、関数 $\bar{f}$ は次式で表現される。

$$\bar{f}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}_t\| - \mu f_n = 0 \quad (2.37)$$

本式は与えられた接触応力条件下でのすべり面を意味する。

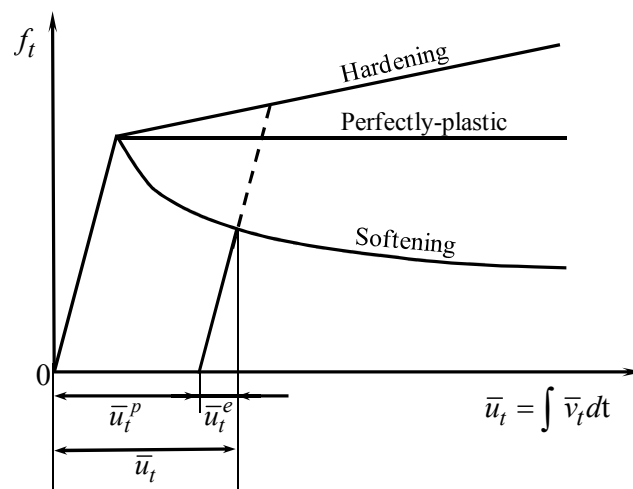


Fig. 2.8 Decomposition of sliding displacement into an elastic part and a plastic part.

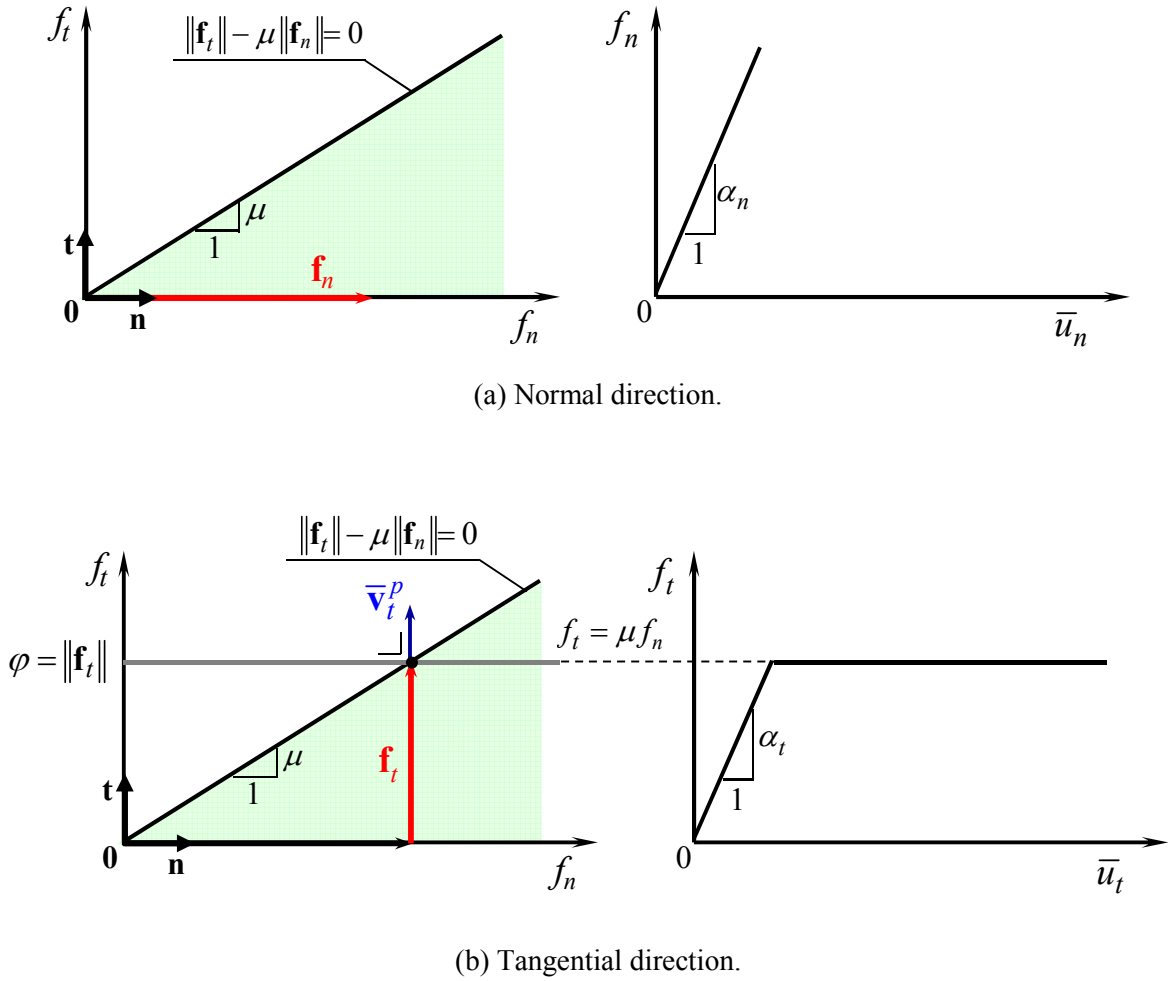


Fig. 2.9 Contact traction vs. sliding displacement curves based on elastoplastic analogy friction model.

すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}_t^p$  の発展式は、塑性理論で良く知られている最大塑性仕事の原理 (*maximum dissipation principle*) から導かれる。次の塑性ポテンシャルと仮定すると、

$$\varphi = \|\mathbf{f}_t\| \quad (2.38)$$

すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}_t^p$  の発展式としてのすべり流動則は次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{v}}_t^p = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{f}_t} = \lambda \mathbf{t} \quad \text{with } \mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (2.39)$$

ここに、 $\lambda$  は正值の比例係数であり、塑性すべり速度の大きさを規定する。

塑性すべり時において、接触応力は式(2.37)を必ず満足せねばならない。本条件は適応条件 (*consistency condition*) と称され、式(2.37)を物質時間微分することで与えられる。すなわち、

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t - \mu \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n = 0 \quad (2.40)$$

弾塑性構成式の定式化と同様に、式(2.40)の適応条件式に、すべり速度の加算分解式(2.31)およびの弾性関係式(2.34)を考慮することにより、正值の比例係数 $\lambda$ が得られる。

$$\lambda = \frac{\alpha_t \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}}_t - \mu \alpha_n \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}_n}{\alpha_t} \quad (2.41)$$

最終的に、接触応力速度-すべり速度関係式は、式(2.31)~(2.34), (2.39), (2.40)および(2.41)より次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_n &= \alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{f}}_t &= \alpha_t \{ (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \alpha_n \mu (\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \} \cdot \bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

図 2.9 に接触応力-すべり変位関係の模式図を示す。すべり摩擦挙動が弾塑性構成式と類似の形式により定式化されている。また式(2.42)からわかるように、本定式化での摩擦モデルは、接触応力速度 $\dot{\mathbf{f}}$ とすべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ が1対1で対応付けられる速度形(rate form)となっており、除荷・再摩擦負荷を含む繰返し挙動にも対応可能である。さらに数値解析においては、式(2.42)のすべり速度は物体の変形・運動に付随した接触面間のギャップ量の速度と等価である。したがって、式(2.42)を介して接触物体に接触応力が反映されることとなり、バルクの変形と界面の接触・摩擦現象を連成させて解くことが可能となる (図 2.10 参照)。

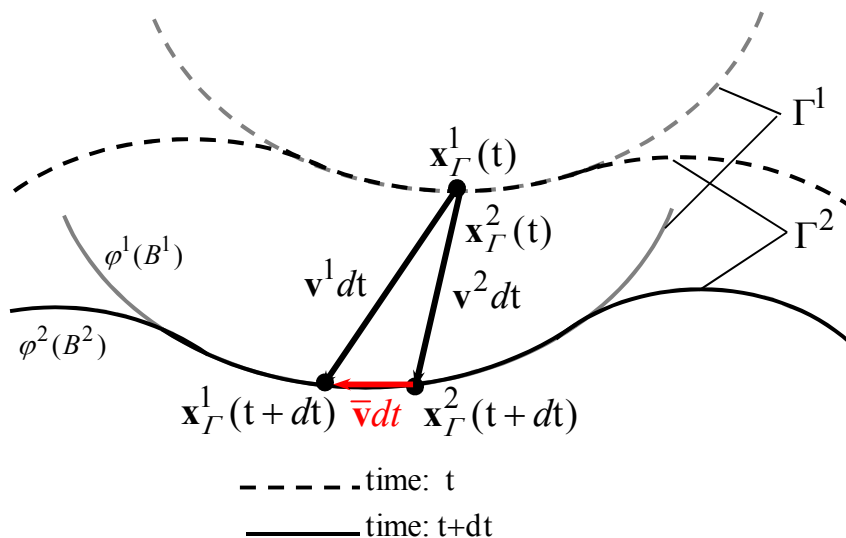


Fig. 2.10 Relationship between velocity and sliding velocity in deformed bodies.

## 2. 4. 2 下負荷面の概念を導入した摩擦モデル

上述のように，弾塑性構成式と同様の流儀により，接触応力速度とすべり速度の関係を記述する摩擦モデルの定式化が見出された．これより，接触・摩擦境界値問題を摩擦を伴う表面応力速度とすべりを伴う表面速度の関係として解析し得るに至っている(cf. Kikuchi and Oden, 1988; Laulsen, 2000; Wriggers, 2003)．しかし，これらの弾塑性論に基づく摩擦モデルは，接触応力空間において塑性すべり変位の発生する応力を表すすべり面内部を純粋弾性域としており（式(2.36)参照），弾塑性構成モデルに関する Drucker(1988)の定義における古典弾塑性モデルに相当する．そのため，図 2.11 に示すような接触応力の増大につれてすべり変位が滑らかに進展する実際のすべり摩擦挙動を適切に表現し得ない．すべり面内部での非可逆な微小すべりの発生は，フレットング摩耗や機械要素の緩み現象，あるいは精密位置決め性能とも密接に係るため，これまでにも多くの実験的報告がなされている(e.g. Courtney-Pratt and Eisner, 1957; Olofsson, 1995; Olofsson and Hagman, 1997; Berthoud and Baumberger, 1998; Hagman and Olofsson, 1998; Filippi et al., 2004; Kartal et al., 2011)．

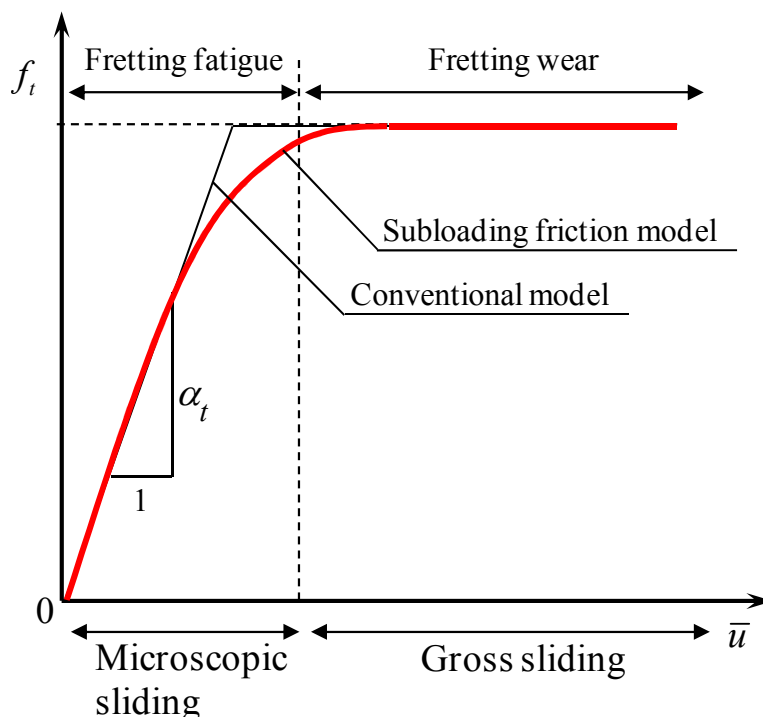


Fig. 2.11 Microscopic sliding and gross sliding.



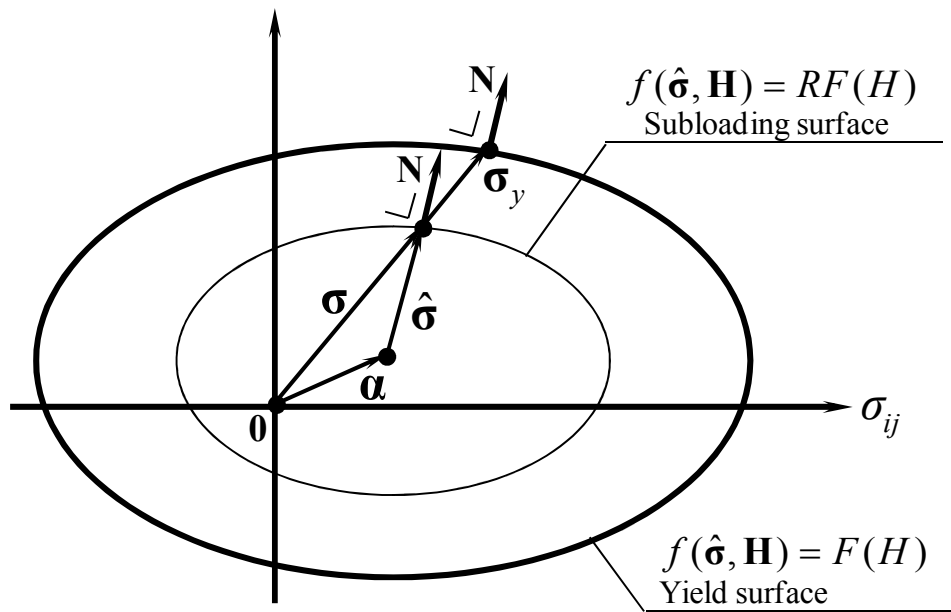


Fig. 2.12 Yield and subloading surfaces.

他方，弾塑性構成式研究において，降伏面内部を純粋弾性域としない非古典弾塑性モデルがこれまでも多数提案されている．代表的なものには，多面モデル(Iwan, 1967; Mroz, 1967)や境界面モデル(Dafalias and Popov, 1975; Krieg, 1975; Dafalias and Herrmann, 1980.)などがある．中でも下負荷面モデルは(Hashiguchi, 1980, 1989)は，降伏面内部での応力速度による塑性ひずみ速度を表現し得るのみならず，Masing 効果や Baushinger 効果を表現でき，また滑らか条件 (*smoothness condition*)をも満足し得るため，様々な分野にて利用されている．下負荷面モデルには，図 2.11 に示すように，降伏面と相似で負荷面の役割を果たす下負荷面が導入されており，これが塑性ひずみ速度の発生とともに膨張・収縮するため，弾塑性遷移挙動を合理的に表現し得る．

斯様な状況の下，下負荷面モデルの概念を弾塑性論に基づく摩擦モデルに導入することで，すべり面内部での微小すべりの発生を記述し得る下負荷摩擦モデル(*subloading-friction model*)が提案されている(Hashiguchi et al., 2005; Ozaki et al., 2007)．本摩擦モデルは，滑らかな固着-すべり遷移を表現可能なため，微小すべりを含む繰返し摩擦挙動に適用できる．下負荷摩擦モデルの詳細な定式化は 3 章に譲るが，基本的には 2.4.3 で述べた弾塑性論の枠組みに基づいている．したがって，接触・摩擦挙動を制約条件として数値解析に導入することができるとともに，本論文の主題である速度・状態依存性摩擦モデルや異方性摩擦モデルへの自然な拡張が可能となる．

## 2. 6 結 言

本章では、本論文の根幹を成す速度依存性下負荷摩擦モデルの位置づけを明確にするために、既存の摩擦モデルを4つのカテゴリーに分類し、それらの特徴を整理した。構成式としての客観性を満足し、且つ複雑な速度・状態依存性のすべり摩擦現象に対応できるモデリング手法は、state variable モデルか弾塑性論に基づくモデルが適当であると考えられる。これらのモデルにおいては、状態変数とその発展則を導入している点が特徴である。しかしながら、state variable モデルの定式化では接線接触応力がすべり速度の関数として与えられるため、すべり摩擦とバルク変形との連成問題や繰返し摩擦負荷問題、あるいはすべり摩擦の異方性を含むより一般的な接触・摩擦境界値問題などへの適用は困難となる。一方、弾塑性論に基づく摩擦モデルにおいては、既に境界値問題への適用方法が確立されている。加えて、速度依存性モデルや異方性モデルへの拡張に関しても、硬化則あるいはクリープ則などに代表される多くの研究成果が蓄積されている(e.g. Hashiguchi, 2008)。同時に、メソスケールモデルを併用した境界潤滑面の接触・摩擦問題に対するマルチスケール数値解析手法”を構築できる可能性もあるなど、今後の発展性にも優れると考えられる。

以上を踏まえ、本論文では速度・状態依存性摩擦モデルの定式化とそれを用いた各種すべりモードの数値解析に当たり、弾塑性論に基づく流儀を採用することとする。

### 3章 弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦モデル

#### 3.1 緒言

摩擦モデルに関する研究は、Amontons-Coulombの研究依頼盛んに取組まれているが、おおよそ40年前に及んで、接触応力増分とすべり変位増分の関係を塑性構成式と同様の形式で記述する手法が見出された。Seguchi et al. (1974), Fredriksson (1976)は、先ず、剛塑性構成式の形式としての定式化に成功した。その後、有限要素法などの汎用的な数値解析手法を用いて有限自由度の接触境界値問題を解析するために、多くの研究者が接触応力とすべり変位の関係を弾完全塑性現象と見なした定式化を行った(e.g. Michalowski and Mroz, 1978; Oden and Pires, 1983a,b; Curnier, 1984; Cheng and Kikuchi, 1985; Oden and Martins, 1986; Peric and Owen, 1992; Anand, 1993; Mroz and Stupkiewicz, 1998; Gearing et al., 2001)。すなわち、接触応力増分とすべり変位増分の関係を弾塑性体の構成式と同様に数学的に表現する。これより、ペナルティ法やLagrangeの未定乗数法などを用いることで境界値問題を摩擦を伴う表面応力増分とすべり変位を伴う表面変位増分の関係として解析し得るに至っている(Kikuchi and Oden, 1988; Laursen, 2001; Wriggers, 2003)。さらに、Hashiguchi et al. (2005), Ozaki et al. (2007)は非古典弾塑性論に基づき下負荷摩擦モデルを提案している。本モデルによると、“固着状態”から“すべり状態”への滑らかな遷移を表現することができるため、巨視的なすべり以前の微小すべりを適切に表現できる。また、本モデルにおいては、非線形のすべり面をも導入することができるため、高圧領域における法線接触応力の増大に伴う摩擦係数の低下を表現し得る。しかしながら、上述の弾塑性構成式と類似の摩擦モデルは速度非依存の定式化であり、スティックスリップ運動に代表される不安定すべり摩擦現象へは適用できない。

他の物体と接触して停止している物体がすべり始めると、先ず高い摩擦抵抗つまり静止摩擦が現れる。その後、摩擦抵抗が低下して動摩擦に至る。しかしながら、摩擦係数のピーク値までの増加は等方硬化現象として定式化されているにも関わらず、長い間、この静止摩擦から動摩擦への遷移プロセスは定式化されてこなかった。また、しばらくすべりを止めてから、再び滑らせると、摩擦係数が回復して初期すべり時と同様の挙動が再現される(Dokos, 1946; Rabinowicz, 1951, 1958; Brockley and Davis, 1968; Kato et al., 1972; Richardson and Noll, 1976; Horowitz and Ruina, 1989; Ferrero and Barrau, 1997; Bureau et al., 2001)。この摩擦係数の回復は、すべりが停止してからの経過時間を含む式で定式化されている(2.2節参照)。しかし、例えば、極低速ですべり速度が変動する状態からわかるように、すべりが停止してからの経過時間の評価には任意性を伴うので、時間そのものを構成式に含めることは構成式の客観性の喪失を招く。一般に、物質特性の変化は、内部状態変数とその速度により定式化されねばならない。

上述の静止摩擦から動摩擦への低下および摩擦係数の回復は、古くから広く認められてき

たすべり摩擦の基本的現象であり、すべりの不安定性に係る摩擦抵抗の速度負勾配とも密接に関連する。そのため、静止－動摩擦の相互遷移現象および速度負勾配を考慮した定式化は工学上の具体的問題の解析において極めて重要である。しかし、これらの速度・状態依存性を表現し得る摩擦モデルの合理的な定式化は依然としてなされていない。

本章では、先ず、速度・状態依存性を記述するために不可欠な内部状態変数とその発展則について考察を行う。次に、静止摩擦から動摩擦への低下を塑性すべりに起因した等方軟化現象として、また静止摩擦の回復を法線応力下での表面アスペリティ（微小凹凸）のクリープ変形に起因した等方硬化現象として記述し得るように、下負荷摩擦モデル(Hashiguchi et al., 2005; Ozaki et al., 2007)を拡張する。拡張されたモデルを速度依存性下負荷摩擦モデルと称する。また、すべり面の具体的関数形について述べるとともに、速度依存性下負荷摩擦モデルの応答特性について、数値実験による検証や実験結果との比較を交えて示す。

### 3. 2 状態変数とその発展則に関する考察

本節では、速度・状態依存性摩擦モデルの定式化において基礎となる、状態変数とその発展則についての考察を述べる。

Bowden and Tabor (1950)が指摘しているように、摩擦力  $f_t$  は真実接触部の“凝着力”に起因したもの ( $f_t^a$ ) とアスペリティの“掘り起こし”に起因したもの ( $f_t^p$ ) とに分けられる。

$$f_t = f_t^a + f_t^p \quad (3.1)$$

いま、掘り起こしの影響を無視すると、摩擦力は真実接触面積  $A$  と凝着部のせん断強さ  $\tau$  の積で与えられる。すなわち、

$$f_t = f_t^a = A\tau \quad (3.2)$$

固着からすべり遷移までの一連の過程について、微視的スケールでの振る舞いに基づけば、真実接触面積はアスペリティのクリープ変形(*aging of contact junction*)とともに増加する一方、すべりの進展(*rapture of contact junction*)とともに減少する。その後、真実接触面積は、現在の固着あるいはすべりの状態に従って、ある一定の状態に停留すると考えられる。さらに、ひずみ速度依存性を考慮すると、すべり状態でのアスペリティの変形は速度とともに硬化し(粘性抵抗が増し)、真実接触面積の変形も小さくなる。したがって、摩擦力は真実接触面積  $A$  は状態変数  $\phi$  とすべり変位の大きさ  $|\bar{u}|$  の関数  $A(\cdot)$  として次式のように記述できる。

$$f_t = A(|\bar{u}|, \phi)\tau \quad (3.3)$$

摩擦力の変動は非線形であり、通常、負荷および除荷を繰り返すため、摩擦力とすべり変位は1対1で関係付けられない。しかし、それらの速度どうしは1対1で対応させることができる。そこで、式(3.3)を物質時間微分してみると次式が得られる。

$$\dot{f}_t = \frac{\partial A(\phi, |\bar{u}|)}{\partial \bar{u}} |\bar{v}| \tau + \frac{\partial A(\phi, |\bar{u}|)}{\partial \phi} \dot{\phi} \tau + A(\phi, |\bar{u}|) \dot{\tau} \quad (3.4)$$

ここに、 $\bar{v}$ はすべり速度である。いま、状態変数 $\phi$ は接触時間 $t$ と等価であるとする、上式は

$$\dot{f}_t = \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial t} \tau + \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial \bar{u}} |\bar{v}| \tau + A(t, |\bar{u}|) \dot{\tau} \quad (3.5)$$

となる。さらに簡単のため、せん断強さの速度依存性を無視すると ( $\dot{\tau} = 0$ )、次式が得られる。

$$\dot{f}_t = \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial t} \tau + \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial \bar{u}} |\bar{v}| \tau \quad (3.6)$$

両辺を垂直荷重 $f_n$ で割ると、

$$\frac{\dot{f}_t}{f_n} = \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial t} \frac{\tau}{f_n} + \frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial \bar{u}} |\bar{v}| \frac{\tau}{f_n} \quad (3.7)$$

が得られる。式(3.7)の右辺第1項は、微小アスペリティのクリープ変形による真実接触面の増加（時間依存性による摩擦抵抗の増加）を意味し、右辺第2項はすべりによる真実接触面の減少（凝着部の剥離による摩擦抵抗の低下）を意味している。

式(3.7)の右辺を解析的に導出することは困難であるため、真実接触面積の変化速度は現在の状態 $A_c$ に依存すると現象論的に仮定する。すなわち、

$$\frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial \bar{u}} \frac{\tau}{f_n} |\bar{v}| \approx f_d \left( \frac{A_c \tau}{f_n}, \text{etc.} \right) |\bar{v}| = f_d(\bar{F}, \text{etc.}) |\bar{v}| \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial A(t, |\bar{u}|)}{\partial t} \frac{\tau}{f_n} \approx f_i \left( \frac{A_c \tau}{f_n}, \text{etc.} \right) = f_i(\bar{F}, \text{etc.}) \quad (3.9)$$

ここに、関数 $f_d()$ および $f_i()$ はそれぞれ単調減少および単調増加関数である。また、 $\bar{F}$ は現在の接触応力状態を表しているため、状態変数とみなされる。ここで、垂直荷重を一定と仮定すれば、

$$\left( \frac{f_t}{f_n} \right) \dot{\phantom{f}} = \frac{\dot{f}_t f_n - f_t \dot{f}_n}{f_n f_n} = \frac{\dot{f}_t}{f_n} = \dot{\bar{F}} = \dot{\mu} \quad (3.10)$$

が成り立つ。したがって、式(3.7)は次のように書き改められる。

$$\dot{\bar{F}} = f_d(\bar{F}, \text{etc.}) |\bar{v}| + f_i(\bar{F}, \text{etc.}) \quad (3.11)$$

上式は、摩擦抵抗に関する状態変数 $\bar{F}$ の発展則を意味しており、これより、摩擦係数の時間依存性とすべり弱화가表現され、それらが競合した結果として、速度負勾配が自然に表現さ

れることとなる。次節で述べる摩擦モデルの定式化においては、式(3.11)に基づき、状態変数の発展則を規定する。なお、式(3.10)より、すべり面として Coulomb の摩擦錘を採用した場合、状態変数  $\bar{F}$  の具体値として摩擦係数  $\mu$  が採用できる。この場合、式(3.11)は次のようになる。

$$\dot{\mu} = f_d(\mu, \text{etc.})|\bar{\mathbf{v}}| + f_i(\mu, \text{etc.}) \quad (3.12)$$

### 3. 3 速度・状態依存性摩擦モデルの定式化

本節では、下負荷摩擦モデル(Hashiguchi et al., 2005; Ozaki et al., 2007)を拡張することにより、静止ー動摩擦の相互遷移現象を表現し得る摩擦モデルの定式化を行う。

#### 3. 3. 1 すべり速度の加算分解

すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}$  は、接触物体間の相対速度であるが、これは接触相手の物体の接触点（接触面）における外向き法線方向成分  $\bar{\mathbf{v}}_n$  および接線方向成分  $\bar{\mathbf{v}}_t$  に加算分解される（図 3.1 参照）。すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t \quad (3.13)$$

ここに、 $\mathbf{n}$  を外向き単位法線ベクトルとすると、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} = -\bar{\mathbf{v}}_n \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

• および  $\otimes$  はスカラー積およびテンソル積をそれぞれ表している。また、 $\mathbf{I}$  は 2 階の恒等テンソルであり、Kronecker のデルタの成分を有する。つまり、 $\delta_{ij} = 1$  for  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  for  $i \neq j$ 。  
 $\bar{\mathbf{v}}_n$  は、すべり速度の法線成分であるが、相手の物体が近づく場合を正と定義している。これより、

$$\bar{\mathbf{v}}_n \equiv -\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (3.15)$$

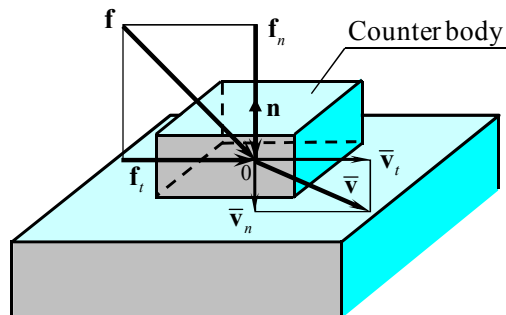


Fig. 3.1. Contact traction  $\mathbf{f}$  acting to main body and sliding velocity  $\bar{\mathbf{v}}$  of counter body relative to velocity of main body.

他方、すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}$  は弾性すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}^e$  と塑性すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}^p$  に加算的に分解できると仮定する。つまり、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p \quad (3.16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n^e &= (\bar{\mathbf{v}}^e \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^e = -\bar{\mathbf{v}}_n^e \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{v}}_t^e &= \bar{\mathbf{v}}^e - \bar{\mathbf{v}}_n^e = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^e \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_t^p &= (\bar{\mathbf{v}}^p \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^p = -\bar{\mathbf{v}}_t^p \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{v}}_n^p &= \bar{\mathbf{v}}^p - \bar{\mathbf{v}}_t^p = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}^p \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$\bar{\mathbf{v}}_n^e$  および  $\bar{\mathbf{v}}_n^p$  はそれぞれ  $\bar{\mathbf{v}}_n$  の弾性および塑性成分である。

### 3. 3. 2 摩擦のモデル化

接触物体に作用する単位面積当たりの接触力（接触応力） $\mathbf{f}$  は、法線方向の接触応力成分  $\mathbf{f}_n$  と接線方向の接触応力成分  $\mathbf{f}_t$  に分解される。すなわち、

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_n &\equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = -f_n \mathbf{n} \\ \mathbf{f}_t &\equiv \mathbf{f} - \mathbf{f}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = f_t \mathbf{t} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ここに、 $\mathbf{n}$  および  $\mathbf{t}$  は  $\mathbf{f}_n$  および  $\mathbf{f}_t$  の方向の単位ベクトルであるため、次式で定義される。

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (3.22)$$

また、 $f_n$  および  $f_t$  はそれぞれ  $\mathbf{f}_n$  および  $\mathbf{f}_t$  の大きさである。つまり、

$$f_n \equiv -\|\mathbf{f}_n\| = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}, \quad f_t \equiv \|\mathbf{f}_t\| \quad (3.23)$$

ここに、 $f_n$  の符号は他の物体から圧縮される場合に正に取られている。なお、接線接触応力（摩擦応力）と接線すべり速度の方向は異なる場合もあり、また 3 次元すべり摩擦現象においては、 $\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \neq \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$  であることに留意すべきである。

接触応力の微分に関しては、次の諸式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}\}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{n} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}\}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{f}_t} \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{t} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial (f_t / f_n)}{\partial \mathbf{f}} = \frac{f_n \mathbf{t} - f_t (-\mathbf{n})}{f_n^2} = \frac{1}{f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}_t / f_n}{\partial \mathbf{f}} = \frac{f_n (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{f}_t \otimes (-\mathbf{n})}{f_n^2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\eta}\|}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \|\boldsymbol{\eta}\|}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{t} \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} = \frac{1}{f_n} \{(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \mathbf{t}\} = \frac{1}{f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \quad (3.30)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{f_n}, \quad \eta \equiv \frac{f_t}{f_n}, \quad \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} = \mathbf{t} \quad (3.31)$$

さて、弾性すべり速度は、通常、塑性すべり速度に比べて極めて小さいが、次の歪弾性式で与えられると仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}}_n^e = \frac{1}{\alpha_n} \dot{\mathbf{f}}_n, \quad \bar{\mathbf{v}}_t^e = \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}}_t \quad (3.32)$$

ここに、 $\dot{\mathbf{f}}_n$  および  $\dot{\mathbf{f}}_t$  は接触応力速度  $\dot{\mathbf{f}}$  の法線および接線成分である。(°)は客観性のある共回転速度を表しており、物質時間微分( $\dot{\cdot}$ )と次のように関係付けられる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f} = (\dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t) - \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t) = \dot{\mathbf{f}}_n - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f}_n + \dot{\mathbf{f}}_t - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f}_t = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t \quad (3.33)$$

したがって、

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{f}}_n = \dot{\mathbf{f}}_n - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f}_n, \quad \dot{\mathbf{f}}_t = \dot{\mathbf{f}}_t - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{f}_t \quad (3.34)$$

の関係が成り立つ。ここに、反対称テンソル  $\boldsymbol{\Omega}$  は、接触平面の剛体回転スピンである。 $\alpha_n$  および  $\alpha_t$  は、接触表面の法線および接線方向の弾性係数であり、接触剛性係数とも称される(cf. Oden and Martins, 1986; Berthoud and Baumberger, 1998)。他方、すべり速度  $\bar{\mathbf{v}}$  は、物体表面上の点の絶対速度でなく、接触物体表面上の2点間の相対速度であるので、客観性を有し、そのまま構成式に用い得る(図3.2参照)。

式(3.32)から次式を得ることができ、摩擦のモデル化が可能となる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e \quad (3.35)$$

ここに、 $\mathbf{C}^e$  は次式で与えられる2階の接触弾性係数テンソルである。



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^e &= \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{C}^{e-1} &= \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

### 3. 3. 3 正規すべり面およびすべり下負荷面

等方硬化を有する次のすべり面（摩擦基準）を仮定する.

$$\bar{f}(\mathbf{f}) = \bar{F} \quad (3.37)$$

ここに、 $\bar{F}$  はすべり面の大きさを示す等方硬化関数である. また簡単のため、 $\bar{f}(\mathbf{f})$  は  $\mathbf{f}$  の 1 次の同次関数であると仮定する. ゆえに、 $s$  は任意の正值のスカラ一量として、

$$\bar{f}(s\mathbf{f}) = s\bar{f}(\mathbf{f}) \quad (3.38)$$

を満たし、また、Euler の同次関数の定理により、次式が成り立つ.

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} = \bar{f}(\mathbf{f}) \quad (3.39)$$

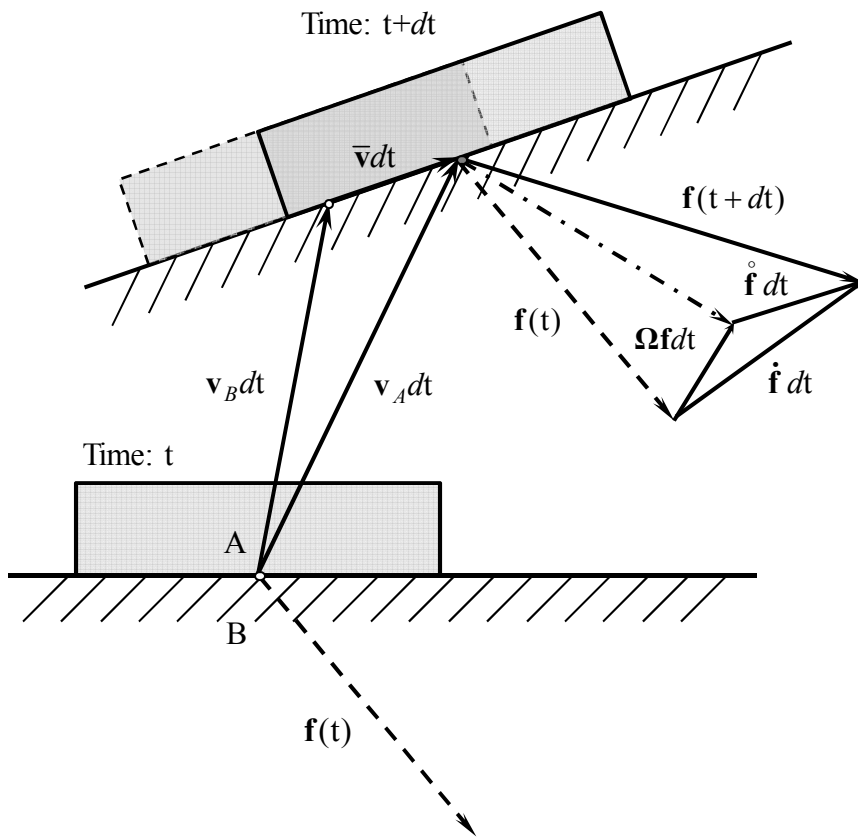


Fig. 3.2. Objectivity of sliding velocity  $\bar{v}$  and corotational contact traction rate  $\dot{\mathbf{f}}$ .

以降では、すべり面の内部は純粋弾性域ではなく、その内部の接触応力の変化によっても塑性すべりが生じると仮定する。これに伴い、式(3.37)で表される曲面を“正規すべり面 (*normal-sliding surface*)”と称する。また、非古典弾塑性論(Drucker, 1988)に属する下負荷面モデルの概念(Hashiguchi, 1980, 1989)に基づいて、接触応力空間において、常に現在の接触応力点を通して、正規すべり面に相似で、且つ原点  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  に関して、この面に相似な形状、同一の向きを有する“すべり下負荷面 (*subloading-sliding surface*)”を導入する。ところで、接触応力が正規すべり面上に存在する“正規すべり状態 (*normal sliding state*)”への接近の度合いは、正規すべり面の大きさに対するすべり下負荷面の比  $R(0 \leq R \leq 1)$  で表し得るが、これを“正規すべり比(*normal-sliding ratio*)”と称する。なお、 $R = 0$  は最も弾性的な状態に相当し、 $R = 1$  は正規すべり状態に相当する。以上より、すべり下負荷面は次式で表される。

$$\bar{f}(\mathbf{f}) = R\bar{F} \quad (3.40)$$

式(3.40)を物質時間微分すると次式を得る。

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} = R\dot{F} + \dot{R}F \quad (3.41)$$

ここに、 $\mathbf{N}$  はすべり下負荷面の外向き法線、すなわち、

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \quad (3.42)$$

となる。なお、式(3.40)の物質時間微分が共回転微分に変換し得ることは、任意のベクトル  $\mathbf{a}$  に対して  $\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}) = 0$  であることから容易にわかるが、その一般証明は Hashiguchi (2007, 2008)を参照されたい。

### 3. 3. 4 硬化関数と正規すべり比の発展則

3.2 節で述べた考察を踏まえ、等方硬化関数および正規すべり比の発展則を規定する。

#### 3. 3. 4 (a) 等方硬化関数の発展則

実験事実に基づけば、次のように考えられる。

- 1) すべりが生じると、まず摩擦抵抗は、すべり変位に対して最大値の静止摩擦抵抗に達した後、停留値の動摩擦抵抗に至る。物理的に、これは塑性すべりに伴う接触物体間の表面突起の凝着の剥離によると解釈される(cf. Bowden and Tabor, 1950)。そこで、この摩擦抵抗の低下は、塑性すべりによる正規すべり面の収縮、つまり等方軟化によると仮定する。
- 2) 摩擦抵抗が低下した後、すべりが停止すると、時間経過とともに、摩擦抵抗が復活し、

十分に時間が経過した後では、静止摩擦を示す初期すべり時と同様の現象が再現される。物理的に、これは面圧作用下において時間経過に伴い接触物体間の表面突起の凝着が再び形成されることによると解釈される。そこで、この摩擦抵抗の回復は、接触法線応力の作用下での表面突起のクリープ変形による正規すべり面の膨張、つまり等方硬化現象によると仮定する。

以上の内容と式(3.11)を考慮し、硬化関数の発展則として次式を採用する。

$$\dot{\bar{F}} = -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n \quad (3.43)$$

ここに、 $F_s$ および $F_k$  ( $F_s \geq \bar{F} \geq F_k$ )は、 $\bar{F}$ のそれぞれ最大および最小限界値を示すパラメータである。また、 $\kappa$ および $m$ は塑性すべりに伴う $\bar{F}$ の減少速度を規定するパラメータ、 $\xi$ および $n$ は時間経過に伴う $\bar{F}$ の回復速度を規定するパラメータで、 $\xi$ は一般に絶対温度の関数であると考えられる。なお、式(3.43)の第1項および第2項は、表面突起の凝着の崩壊および回復をそれぞれ表す。一方、これらの現象は、すべり変位による軟化とすべり停止からの経過時間による硬化により定式化されてきたが、緒言で述べたように、構成式に時間そのものを含めることはできない。また、式(3.43)を見てみると、すべり弱化に対応する第1項とhealingに関する第2項が競合していることがわかる。この競合型の発展則により、速度弱化としての摩擦抵抗の速度負勾配が自然と表されることとなる。

### 3. 3. 4 (b) 正規すべり比の発展則

実験結果によれば、塑性変形の進展と同様に、塑性すべりが進行するとき、接線接触応力は、まず弾性的に増大し、その後、次第に増大して正規すべり面に漸近すると考えられる。そこで、正規すべり比の発展則として、次式を仮定する。

$$\dot{R} = U(R) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \text{ for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (3.44)$$

ここに、 $U(R)$ は次の条件を満たすような $R$ の単調減少関数である (図3.3参照)。

$$\left. \begin{array}{l} U(R) \rightarrow +\infty \text{ for } R \rightarrow 0 \\ U(R) = 0 \text{ for } R = 1 \\ U(R) < 0 \text{ for } R > 1 \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

関数 $U(R)$ の具体例として、次式が挙げられる。

$$U(R) = -r(\ln R) \quad (3.46)$$

$$U(R) = -r \cot \left( \frac{\pi}{2} R \right) \quad (3.47)$$

ここに、 $r$ はモデルパラメータである。

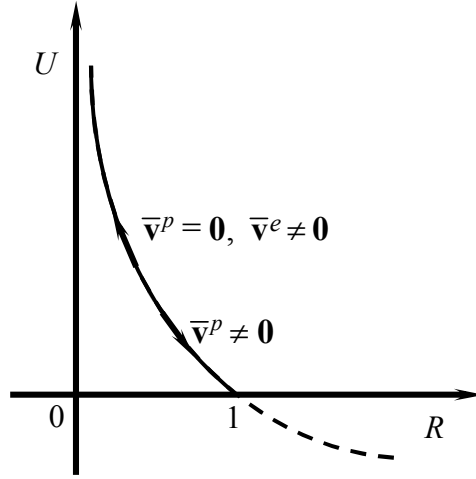


Fig. 3.3. Function  $U$  for the evolution rule of the normal-sliding ratio  $R$ .

### 3. 3. 5 接触応力速度—すべり速度関係

式(3.43)および式(3.44)を式(3.41)に代入して、次のすべり下負荷面に対する適応条件 (*consistency condition*)を得る.

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} = R \left\{ -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n \right\} + \bar{U} \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \bar{F} \quad (3.48)$$

ここに、適応条件は、塑性負荷時に接触応力ベクトルが常にすべり下負荷面上に存在するための条件である.

さて、塑性ひずみ速度の方向は接触面に並行で、また、すべり下負荷面と一定法線応力平面  $\mathbf{f}_n = \text{const.}$  交線で作られる閉曲線の外向き法線方向、いうなれば“接線関連すべり流動則 (*tangential associated sliding-flow rule*)”を仮定する. つまり、

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \lambda \mathbf{t} \quad (\lambda > 0) \quad (3.49)$$

式(3.49)を適応条件式(3.48)に代入して、正值の比例係数  $\lambda$  は次式で表される.

$$\lambda = \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \quad (3.50)$$

したがって、式(3.49)より塑性すべり速度が得られる. すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t} \quad (3.51)$$

ここに、

$$m^p \equiv -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m R + \bar{F} U \quad (3.52)$$

$$m^c \equiv \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n R \quad (\geq 0) \quad (3.53)$$

式(3.35)および式(3.51)を式(3.16)に代入して、すべり速度は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t} \quad (3.54)$$

式(3.54)より、すべり塑性流動則における正值の比例係数  $\lambda$  のすべり速度  $\bar{\mathbf{v}}$  による表現を記号  $A$  で示せば、 $A$  は次式で表される。

$$A = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}} \quad (3.55)$$

式(3.16)、(3.35)、(3.49)および式(3.55)より、接触応力速度は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \left( \bar{\mathbf{v}} - \left\langle \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}} \right\rangle \mathbf{t} \right) \quad (3.56)$$

ここに、 $\langle \rangle$  は McCauley のブラケットである。すなわち、任意のスカラー値  $s$  に対して  $\langle s \rangle = (s + |s|) / 2$  となる。

### 3. 3. 6 負荷基準

塑性すべりの除荷・負荷判定は、弾塑性構成式の場合と同様である。先ず、次のことがいえる。

- 1) 負荷（塑性すべり）状態  $\bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0}$  においては、

$$\lambda = A > 0 \quad (3.57)$$

- 2) 除荷（弾性すべり）状態  $\bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}$  においては、

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} \leq 0 \quad (3.58)$$

である。また本状態においては、 $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e$  により、 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}}^e = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}}$  であるので、 $A$  は次式で表される。

$$A = \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p + \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}} \quad (3.59)$$

ここに、一般に、式(3.53)で示したように  $m^c \geq 0$  であることに留意する。

- 3) 塑性すべり係数  $m^p$  は正、負の両符号を取り得る。一方、接触弾性係数  $\mathbf{C}^e$  は正定値テンソルで、一般に  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} > m^p$  であるが、塑性緩和が無限大に生じることはなく、次式を仮定する。

$$m^p + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t} > 0 \quad (3.60)$$

したがって、式(3.50)および式(3.57)～(3.60)より、除荷状態において、塑性係数  $m^p$  の符号、つまり硬化、完全塑性および軟化により、次の不等式が成立する。

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \leq 0 \text{ and } A \leq 0 \text{ when } m^p > 0 \\ \lambda \rightarrow -\infty \text{ or indeterminate and } A \leq 0 \text{ when } m^p = 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ and } A \leq 0 \text{ when } m^p < 0 \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

つまり、 $m^p \leq 0$  の状態からの除荷過程においては、 $\lambda$  の符号は必ずしも負とはならない。一方、 $A$  の符号は、硬化、完全塑性、軟化いずれが生じ得る状態からの除荷過程においても負である。したがって、一般には、除荷・負荷の判定は、 $\lambda$  の符号では行えず、すべり速度の関数である  $A$  の符号で行わねばならない。つまり、

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}^p \neq \mathbf{0} : A > 0 \\ \bar{v}^p = \mathbf{0} : \text{otherwise} \end{array} \right\} \quad (3.62)$$

または、式(3.60)を考慮して、

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}^p \neq \mathbf{0} : \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c > 0 \\ \bar{v}^p = \mathbf{0} : \text{otherwise} \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

### 3. 4 非線形すべり面の具体式

非常に高圧な接触応力下での実験によれば、法線接触応力の増大に伴って摩擦係数が低下する(e.g., Bay and Wanheim, 1976; Dunkin and Kim, 1996; Gearing et al., 2001; Stupkiewicz and Mroz, 2003). この現象は、一定の摩擦係数（摩擦角）を介して接線接触応力を法線接触応力に関係付ける Coulomb の摩擦錘では表現されない。

そこで本節では、法線接触応力の増大に伴う摩擦係数の低下を表現し得るように、接線接触応力と法線接触応力を非線形関係を仮定する。まず、

$$f(\mathbf{f}) = f_n \bar{g}(\chi) \quad (3.64)$$

とにおいて、次の閉曲面の正規すべり面とすべり下負荷面を仮定する。

$$f_n \bar{g}(\chi) = \bar{F}, \quad f_n \bar{g}(\chi) = R\bar{F} \quad (3.65)$$

ここに、

$$\chi \equiv \frac{\eta}{M} \quad (3.66)$$

$M$  は  $f_t$  の最大点における接触応力比  $\eta$  を示す材料定数である。式(3.64)における関数  $\bar{g}(\chi)$  の具体例を次に示す。

$$\bar{g}(\chi) = \exp(\chi), \quad \bar{g}'(\chi) = \exp(\chi) \quad (3.67)$$

$$\bar{g}(\chi) = 1 + \chi^2, \quad \bar{g}'(\chi) = 2\chi \quad (3.68)$$

$$\bar{g}(\chi) = \exp(\chi^2/2), \quad \bar{g}'(\chi) = \chi \exp(\chi) \quad (3.69)$$

$$\bar{g}(\chi) = \frac{1}{1 - \chi/2}, \quad \bar{g}'(\chi) = \frac{1}{2(1 - \chi/2)^2} \quad (3.70)$$

以上の諸式は、 $f_t = 0$ においていずれも接触応力成分が $f_n = 0$ および $f_n = \bar{F}$ である点を通る軸対称閉曲面を呈する。なお、式(3.67)および式(3.68)は、土のオリジナル Cam-clay モデル (Schofield and Wroth, 1968)および修正 Cam-clay モデル(Roscoe and Burland, 1968)における降伏面にそれぞれ基づくものである。式(3.69)は、式(3.67)を法線接触応力に関して反転した涙型の形状を有する(Hashiguchi et al., 2005)。式(3.70)は放物線形状を有する(Hashiguchi et al., 2005)。涙型の式(3.69)の場合および放物線型の式(3.70)の場合について、正規すべり面とすべり下負荷面を図 3.4 および 3.5 に例示している。

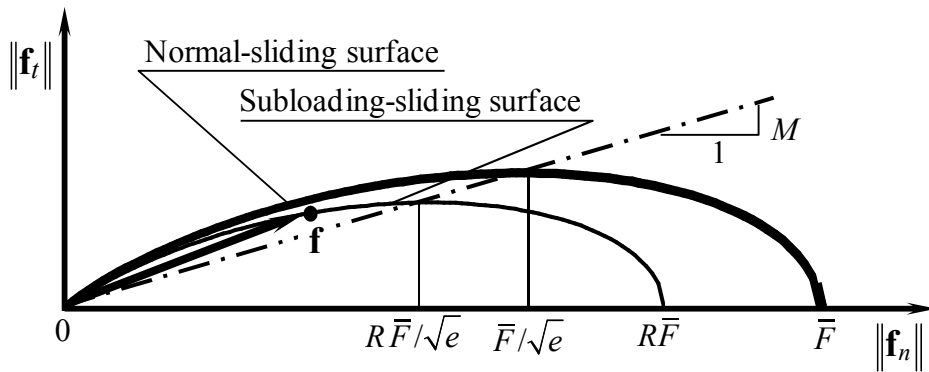


Fig.3.4. Tear-shaped normal-sliding and subloading-sliding surfaces.

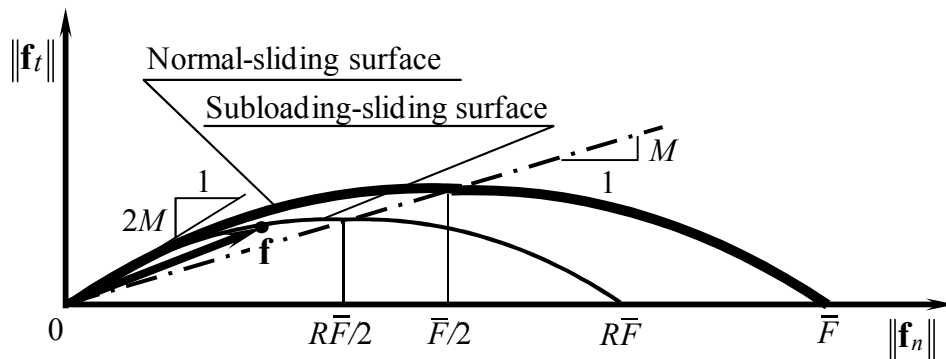


Fig.3.5. Quadric normal-sliding and subloading-sliding surfaces.

式(3.64)および(3.66)に対して，式(3.24)～(3.30)は成り立つ．また，次の諸式が成り立つ．

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \eta / M}{\partial \mathbf{f}} = \frac{1}{M f_n} \{(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \mathbf{t}\} = \frac{1}{M f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \quad (3.71)$$

$$\mathbf{N} = -\bar{g}(\chi) \mathbf{n} + f_n \bar{g}'(\chi) \frac{1}{M f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) = -(\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e = \left\{ -(\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \right\} \cdot \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} = \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t} = \left\{ -\alpha_n (\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \right\} \cdot \mathbf{t} = \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \quad (3.74)$$

式(3.36)および式(3.72)～(3.74)を式(3.54)および式(3.56)に代入して，すべり速度－接触応力速度およびその逆関係は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} \dot{\mathbf{f}} + \frac{\left\{ -(\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \right\} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t} \\ &= \left( \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_t} \right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}) \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}} + \frac{-\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}} + \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}) - m^c}{m^p} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} \left[ \dot{\mathbf{v}} - \left\langle \frac{\left\{ -\alpha_n (\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} \mathbf{t} \right\} \cdot \dot{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M}} \right\rangle \mathbf{t} \right] \\ &= (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{n} + \alpha_t \dot{\mathbf{v}} - \alpha_t \left\langle \frac{-\alpha_n (\bar{g}(\chi) - \bar{g}'(\chi) \chi) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - m^c}{m^p + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M}} \right\rangle \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.76)$$

### 3. 5 Coulomb の摩擦基準に基づくすべり面の具体式

他方，幅広い面圧レベルでその妥当性が実証されている Coulomb の摩擦基準に対応した円錐形の正規すべり面およびすべり下負荷面は，

$$\bar{f}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}_t\| / f_n, \quad \bar{F} = \mu \quad (3.77)$$

とにおいて，次式で与えられる．

$$\|\boldsymbol{\eta}\| = \mu, \quad \|\boldsymbol{\eta}\| = R\mu \quad (3.78)$$

ここに， $\mu$ は摩擦係数で，その発展則は，式(3.11)や(3.12)および式(3.43)と同形式で与えられる (3.2 節参照)．すなわち，



$$\dot{\mu} = -\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \quad (3.79)$$

$\mu_s$  および  $\mu_k$  は、それぞれ最大および最小の静止摩擦および動摩擦を示すパラメータである。図 3.6 のように、式(3.78)の正規すべり面およびすべり下負荷面は円錐形の開曲面を呈し、 $\mu$  や  $R$  の増減により拡大または縮小する。

式(3.78)に対して、次式が成り立つ。

$$m^p \equiv -\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m R + \mu U \quad (3.80)$$

$$m^c \equiv \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n R \quad (\geq 0) \quad (3.81)$$

さらに、式(3.36)、(3.28)から次式が成り立つ。

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \|\boldsymbol{\eta}\|}{\partial \mathbf{f}} = \frac{1}{f_n} \{ (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \mathbf{t} \} = \frac{1}{f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \quad (3.82)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \frac{1}{f_n} \{ \eta \mathbf{n} + \mathbf{t} \} = \frac{1}{f_n} \mathbf{t} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e = \frac{1}{f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \cdot \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} = \frac{1}{f_n} (\alpha_n \eta \mathbf{n} + \alpha_t \mathbf{t}) \quad (3.84)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{f_n} (\alpha_n \eta \mathbf{n} + \alpha_t \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} = \frac{\alpha_t}{f_n} \quad (3.85)$$

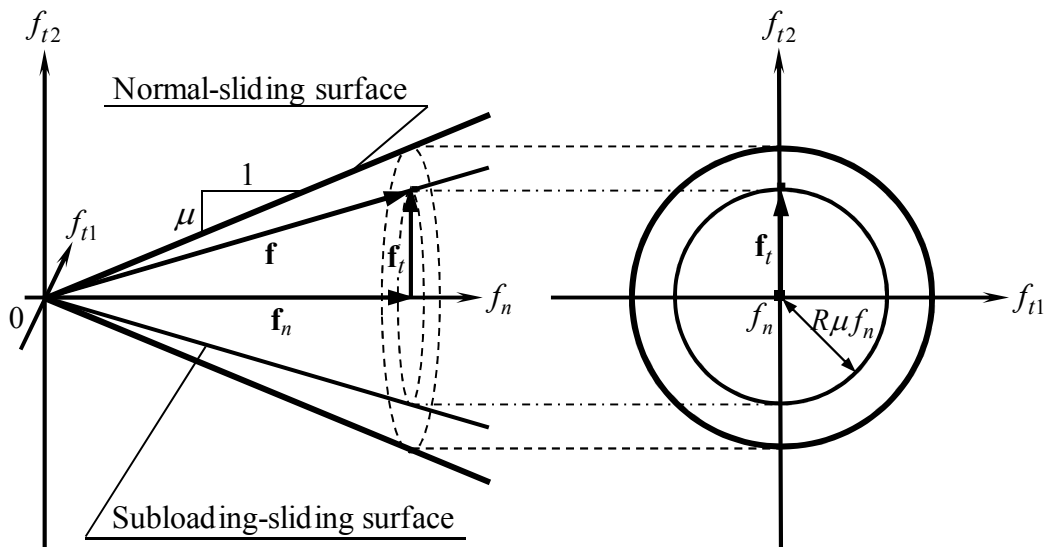


Fig. 3.6. Normal-sliding and subloading-sliding surfaces based on Coulomb's criterion.

式(3.36)および式(3.82)～(3.85)を式(3.54)および式(3.56)に代入して、すべり速度－接触応力速度関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{f_n} \frac{(\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t} \\ &= \left( \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_t} \right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}) \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}} + \frac{1}{f_n} \frac{\{\eta(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}) + (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}})\} - m^c}{m^p} \mathbf{t}\end{aligned}\quad (3.86)$$

本式の逆関係は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}} &= \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} \left\{ \bar{\mathbf{v}} - \left\langle \frac{1}{f_n} \{ \alpha_n (\eta \mathbf{n} + \alpha_t \mathbf{t}) \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c \} \right\rangle \mathbf{t} \right\} \\ &= (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{n} + \alpha_t \bar{\mathbf{v}} - \frac{\alpha_t}{f_n} \left\langle \frac{\alpha_n \eta (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \alpha_t (\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - m^c}{m^p + \frac{\alpha_t}{f_n}} \right\rangle \mathbf{t}\end{aligned}\quad (3.87)$$

$m=1, n=1$  とし、正規すべり比の発展則として式(3.44)を採用した場合、負荷時における式(3.87)は次のように closed-form として記述できる。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{C}^{ep} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^c \mathbf{t} \\ &= \left\{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes (\alpha_t \mathbf{t} - \alpha_n R \mu \mathbf{n})}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R \kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n} \right\} \bar{\mathbf{v}} + \frac{\alpha_t \xi R \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) f_n}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R \kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n} \mathbf{t}\end{aligned}\quad (3.88)$$

ここに、 $\mathbf{C}^{ep}$  および  $\mathbf{C}^c$  は 2 階の接触弾塑性係数テンソルおよび接触クリープ係数であり、次式で定義される。

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes (\alpha_t \mathbf{t} - \alpha_n R \mu \mathbf{n})}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R \kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n}\quad (3.89)$$

$$\mathbf{C}^c \equiv \frac{\alpha_t \xi R \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) f_n}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R \kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n}\quad (3.90)$$

### 3. 6 基本的な応答特性

本節では、以上の速度依存性下負荷摩擦モデルの応答の妥当性について、数値実験および実測値との比較により検証してみる。簡単のため、法線接触応力一定、接線接触応力方向一定下での線形すべり現象を対象とする。したがって、式(3.35)、式(3.49)から次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_n &= \text{const.}, \quad \mathbf{t} = \text{const.}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{f}}_n &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{f}}_t = \dot{f}_t \mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \dot{f}_t \mathbf{t} \\ \bar{\mathbf{v}}^e &= \bar{v}_t^e \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{v}}^p = \bar{v}_t^p \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{v}}_t = \bar{v}_t \mathbf{t} \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

#### 3. 6. 1 接線接触応力速度－すべり速度関係

式(3.91)を式(3.75)および(3.76)に代入して、接線すべり速度－接触応力速度関係およびその逆関係が次式で与えられる。

$$\bar{v}_t = \left\{ \frac{1}{\alpha_t} + \frac{\bar{g}'(\chi) / M}{-\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m R + U\bar{F}} \right\} \dot{f}_t - \frac{\xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n R}{-\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m R + U\bar{F}} \quad (3.92)$$

$$\dot{f}_t = \alpha_t \left\{ \bar{v}_t - \left\langle \frac{\alpha_t \bar{g}'(\chi) \bar{v}_t - \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n R}{-\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m R + U\bar{F} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\chi)}{M}} \right\rangle \right\} \quad (3.93)$$

また、Coulomb の摩擦基準の場合には、式(3.91)を式(3.86)および(3.87)に代入して、接線すべり速度－接触応力速度関係およびその逆関係は次式で与えられる。

$$\bar{v}_t = \left\{ \frac{1}{\alpha_t} + \frac{1/f_n}{-\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m R + \mu U} \right\} \dot{f}_t - \frac{\xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n R}{-\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m R + \mu U} \quad (3.94)$$

$$\dot{f}_t = \alpha_t \left\{ \bar{v}_t - \left\langle \frac{\frac{\alpha_t}{f_n} \bar{v}_t - \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n R}{-\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m R + \mu U + \frac{\alpha_t}{f_n}} \right\rangle \right\} \quad (3.95)$$

式(3.92)において、クリープ硬化に関する第1項が無視し得る高速すべり過程について、 $f_t$  に対する  $\bar{u}_t$  ( $\equiv \int \bar{v}_t dt$ ;  $t$ : time) の関係を図 3.7 に模式的に示す。なお、すべり面の内部を弾性域

と仮定する古典摩擦モデルによる関係も示す。速度依存性下負荷摩擦モデルにおいては、式 (3.92) の第 1 項内の塑性すべり速度の分母において、軟化項  $-\kappa(\bar{F}/F_k - 1)^m R (\leq 0)$  は負値から単調に 0 まで増加する一方、正規すべり比項  $U\bar{F} (\geq 0)$  は無限大から 0 に向かって減少する。その間、塑性係数は正つまり  $m^p > 0$  で、接線接触応力が増大する。しかし、軟化項と正規すべり比項が相殺し合って  $m^p = 0$  となってピークつまり静止摩擦点  $p$  を迎える。その後、軟化項は徐々に 0 に向かう一方、正規すべり比は急速に減少するので、 $m^p < 0$  となり、接線接触応力は低下して動摩擦点  $k$  に至る。

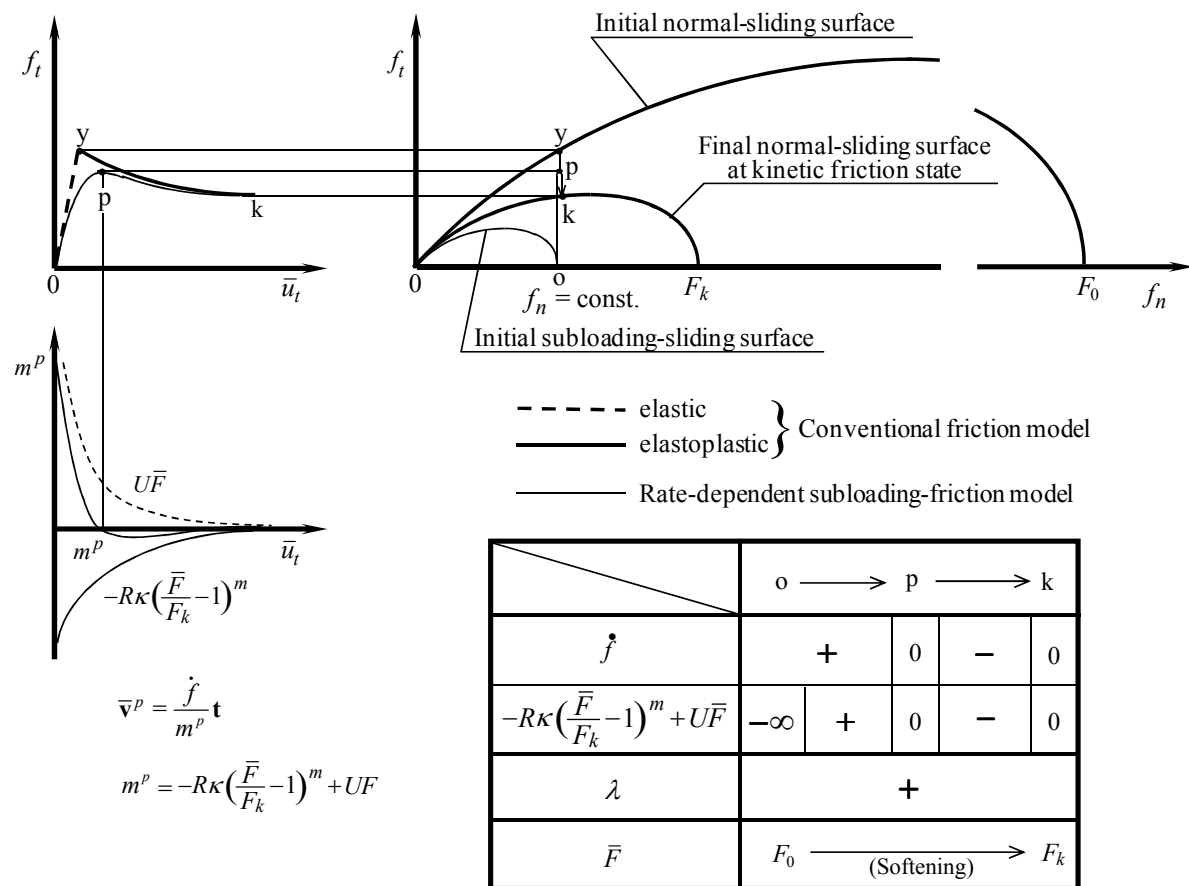


Fig. 3.7. Prediction of linear sliding behavior from the static to the kinetic friction by the conventional friction model and the rate-dependent subloading-friction model at high sliding rate without the creep hardening.

図 3.7 に示すように、速度依存性下負荷摩擦モデルによれば、下負荷面モデルによる土の変形予測と同様に、静止摩擦の最大値に達した後、徐々に動摩擦の最小値に至る滑らかな曲線が予測される。この背景について以下に述べる。

式(3.92)の第一括弧内の塑性すべり速度の分母において、 $-\kappa(\bar{F}/F_k - 1)^m R (\leq 0)$  は負値から単調に 0 まで増加する一方、 $U\bar{F} (\geq 0)$  は無限大から単調に 0 に向かって減少する。したがって、まず、塑性係数  $m^p > 0$  で接線接触応力が増大するが、これらが相殺し合って  $m^p = 0$  となってピークつまり静止摩擦点  $p$  を迎える。その後、 $-\kappa(\bar{F}/F_k - 1)^m R (\leq 0)$  は徐々に 0 に向かう一方、 $U/R$  は急速に減少するので、 $m^p < 0$  となり、接線接触応力は低下する。そして、塑性すべりに伴って、 $\bar{F}$  が減少して  $F_k$  に至ると軟化項が 0 になり、また  $R$  が増大して 1 に至ると正規すべり比項も 0 に向かうので、 $m^p = 0$  となって、動摩擦点  $k$  に至る。

また、本速度依存性摩擦モデルには下負荷面の概念が導入されているため、塑性摩擦負荷時に接触応力がすべり面上に常に漸近する自動制御機能を有する。このため、図 3.8 に示すように、リターンマッピング法やラジアルリターン法などの通常の弾塑性計算上の手当てを必要としない。これは数値計算上の大きなメリットとなり得る。

### 3. 6. 2 数値実験および実測値との比較

速度依存性下負荷摩擦モデルについて、先ず、式(3.69)の涙型のすべり面を導入した式(3.93)により、数値実験および実測値との比較を以下に示す。なお、正規すべり比の発展則における関数  $U(R)$  には式(3.46)を採用する。

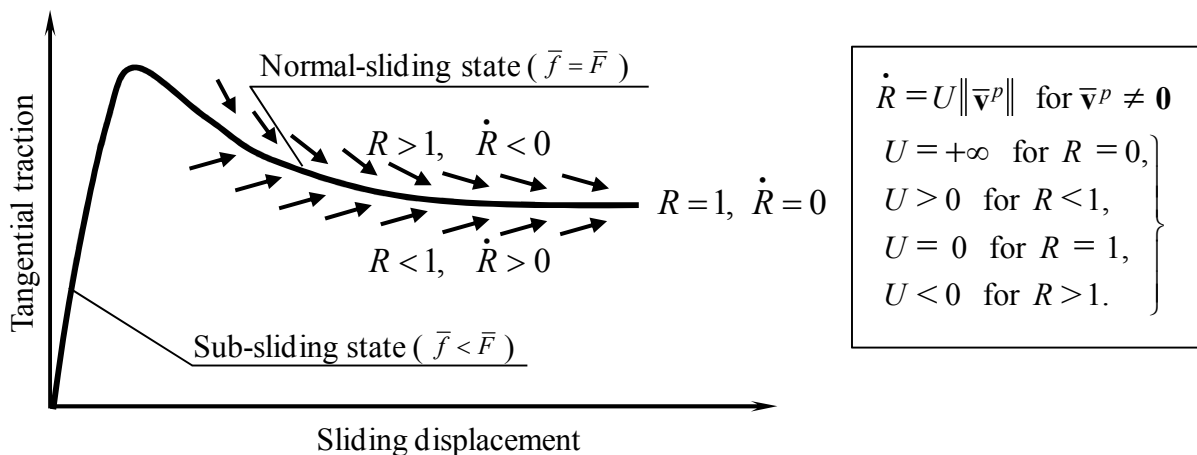


Fig. 3.8. Automatic controlling function of the present model to make a traction approach the normal-sliding surface in the plastic frictional loading process.

数値実験に当たって、材料パラメータおよび法線接触応力を表 3.1 のように選んでいる。ここに、法線接触応力は  $f_n = 10 \text{ MPa}$  としている。涙型のすべり面を採用した場合、10 個のパラメータ  $\alpha_n$ ,  $\alpha_t$ ,  $F_s$ ,  $F_k$ ,  $M$ ,  $\kappa$ ,  $m$ ,  $\xi$ ,  $n$  および  $r$  と、 $\bar{F}$  の初期値  $F_0$  が必要となる。これらのパラメータの物理的意味と決定方法について、以下にまとめる。

- 1)  $F_s$  は硬化関数  $\bar{F}$  (正規すべり面の大きさ) の最大値であり、長時間のすべりが停止によるクリープ硬化が飽和した状態から定められる。他方、 $F_k$  は硬化関数の最小値であり、すべりによる塑性軟化がクリープ硬化よりも支配的になる高速すべり速度での停留状態から定められる。
- 2)  $M$  はすべり面上の接線接触応力の法線接触応力に対する比を規定する。
- 3)  $\kappa$  および  $m$  はすべり変位による軟化挙動を特徴づける。他方、 $\xi$  と  $n$  はすべりの停留状態における時間経過によって生じるアスペリティのクリープ変形に起因した硬化挙動を特徴付ける。
- 4)  $r$  はすべり面内部での微小すべりの発生の程度を規定するパラメータであり、接触応力-すべり変位曲線の滑らかさを特徴付ける。 $r \rightarrow \infty$  の場合、下負荷摩擦モデルは古典摩擦モデルに帰着し、すべり降伏時に尖った曲線を呈する。一方、 $r$  が小さいほど、滑らかな接触応力-すべり変位曲線が描かれる。
- 5)  $\alpha_n$  と  $\alpha_t$  は接触面の法線方向と接線方向の弾性特性をそれぞれ特徴付ける。これらは、接触応力-すべり変位曲線において巨視的な塑性すべりが発生する以前の立ち上がり部により決定される。また、Oden and Martins(1985)によれば、理論的にも決定できるとされる。多くの場合、接触弾性係数は法線方向と接線方向で等しい値  $\alpha (= \alpha_n = \alpha_t)$  を採用する。

以降の構成式の計算では、一定の時間増分および接線方向のすべり速度を入力し、これを積分することで行われる。なお、すべり速度に応じて時間増分との比を調整すれば計算コストは変わらない。

図 3.9 に、種々の接線すべり速度における、接線すべり変位  $\bar{u}_t$  および停止時間に対する接触応力比  $f_t / f_n$  の推移を示す。ここに、所定の  $f_n$  において、 $\bar{F} = F_s$  と  $\bar{F} = F_k$  に対するすべり面から算定される接線接触応力をそれぞれ  $\bar{f}_t^s$  および  $\bar{f}_t^k$  で示している。接線すべり速度  $\bar{v}_t$  が大であるほど、接触応力比、すなわち摩擦抵抗の低下が顕著となり、速度負勾配が表現されている。また、図 3.10 には、図 3.9 と同条件での接線すべり変位に対する硬化関数  $\bar{F}$  の推移と停止時間に対する回復についても示している。停止時間 200 s においてほぼ完全な回復が見られる。

3 種類のすべり速度において、正規すべり比  $R$  の発展則における材料定数  $r$  の摩擦抵抗への影響を図 3.11 に示す。 $r$  が小さいほど、すべり面内部での接触応力速度による塑性すべり速度が大となり、接線接触応力-接線すべり変位曲線は滑らかになる様子がわかる。なお、

$r \rightarrow \infty$  の場合, すべり面の内部を純粋弾性域とする古典摩擦モデルに帰着する.

Table 3.1 Model parameters for numerical experiments.

$F_s = F_0$	100 MPa	$F_k$	30 MPa
$M$	0.3	$\alpha$	100 MPa/mm
$\kappa$	1000 MPa / mm	$m$	1
$\xi$	10 MPa / s	$n$	2
$r$	5, 10, 50, 100 and 1000 $\text{mm}^{-1}$		

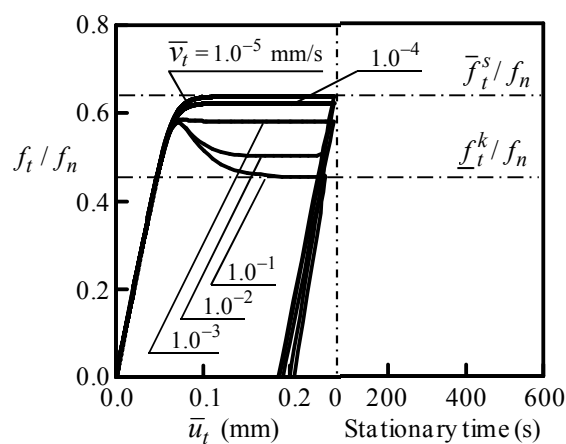


Fig. 3.9. Variations of contact traction ratio  $f_t / f_n$  with tangential sliding displacement and stationary time for various tangential sliding velocity ( $r = 100 \text{ mm}^{-1}$ ).

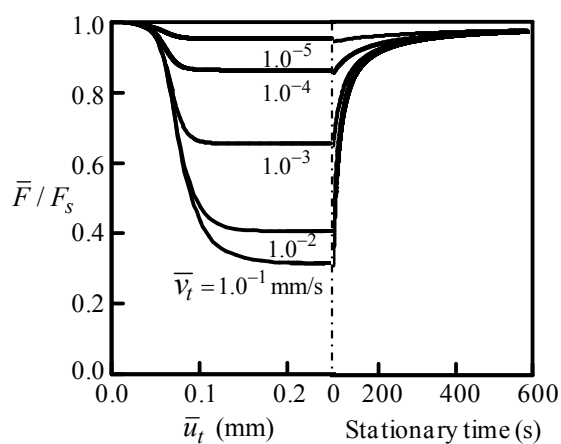


Fig. 3.10. Variations of hardening function  $\bar{F}$  with tangential sliding displacement and stationary time for various tangential sliding velocity ( $r = 100 \text{ mm}^{-1}$ ).

摩擦係数の回復へのすべり停止時間の影響を図 3.12 に示す。計算では一定速度で滑らせた後、接線接触応力がゼロになるまで除荷し、一定時間すべりを停止させた。その後、再び同じ速度で滑らせている。停止時間が長いほど、回復が大となることが確認できる。

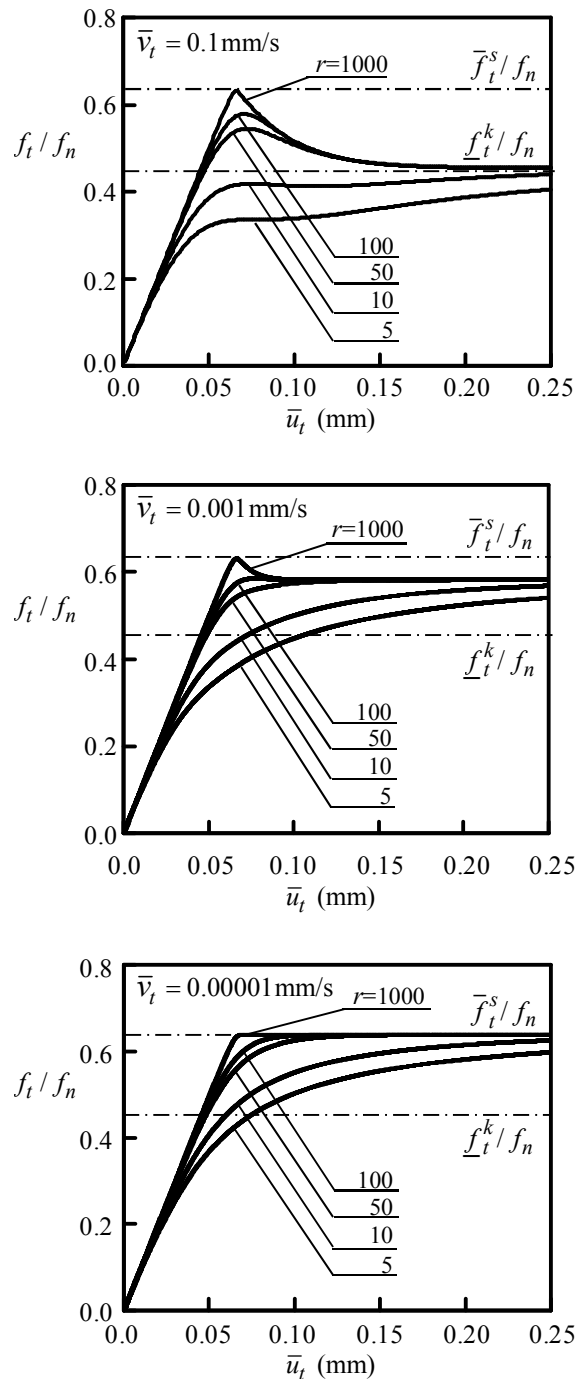


Fig. 3.11. Influences of the material parameter  $r$  on the relation of contact traction ratio vs. tangential sliding displacement for three levels of tangential sliding velocity.



$\bar{f}_t^s$  の 80 % の接線接触応力の繰返し負荷におけるすべり変位の集積を図 3.13 に示す. 下負荷面の概念の導入により, すべり面内部の応力振幅レベルによっても非可逆なすべり変位が集積している様子がわかる. また, すべり速度が大きいほど, 集積が著しいことが見られる. なお, 古典摩擦モデル( $r \rightarrow \infty$ )によれば,  $\bar{f}_t^s$  以下でのすべり変位の集積は全く表現されない. また, 塑性軟化によるすべり面の収縮は速度負勾配の影響を受けるため, すべり速度の増大とともに, すべり変位の集積がより顕著に進展する.

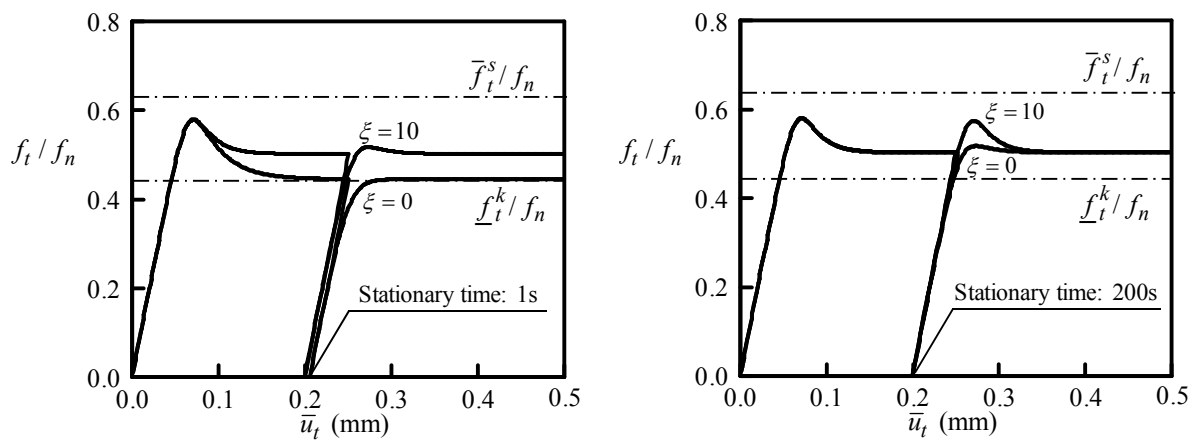


Fig. 3.12. Influence of stationary time on recovery of friction coefficient ( $\bar{v}_t = 0.01 \text{ mm/s}$ ).

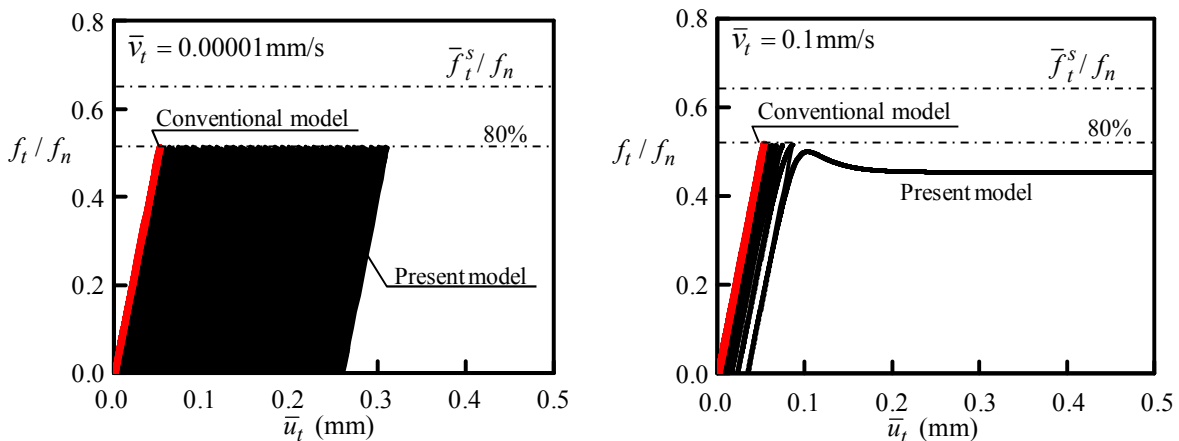


Fig. 3.13. Accumulation of sliding displacement under cyclic loading for two levels of sliding velocity ( $r = 100 \text{ mm}^{-1}$ ).

以上の数値実験の結果からも確認できるように、速度依存性下負荷摩擦モデルにより、すべり弱化和静止摩擦の時間依存性回復の競合としての摩擦抵抗の速度負勾配が自然に表されるとともに、微小すべり現象も含めた速度依存性すべり摩擦現象を統一的に記述し得る。以下では、涙型のすべり面を採用した場合について、摩擦試験結果との比較例を示す。

静止摩擦から動摩擦への摩擦係数の低下についての試験結果との比較を図 3.14 に示す。微小なすべり速度  $\bar{v}_t \leq 0.0002 \text{ mm/s}$  における粗に磨かれた鋼の表面間のすべりの試験曲線 (Ferrero and Barrau, 1997) が本モデルにより十分良く近似されている。ここに、モデルパラメータを表 3.2 のように選んでいる。なお、法線接触応力および接線すべり速度は一定値とし、それぞれ  $f_n = 10 \text{ MPa}$  および  $\bar{v}_t = 0.0002 \text{ mm/s}$  としている。

次に、静止摩擦から動摩擦への接触応力比  $f_t / f_n$  の低下過程におけるすべり停止による摩擦係数の回復についての試験結果との比較を図 3.15 に示す。微小なすべり速度  $\bar{v}_t \leq 0.0002 \text{ mm/s}$  において、20 s および 400 s 停止させた場合の粗に磨かれた鋼の表面間のすべりの試験曲線 (Ferrero and Barrau, 1997) が本モデルにより十分良く近似されている。ここに、材料パラメータは表 3.2 と同様のものを用いている。

Table 3.2 Model parameters for comparison of experiment (Ferrero and Barrau, 1997).

$F_s = F_0$	120 MPa	$F_k$	25 MPa
$M$	0.28	$\alpha$	100 GPa/mm
$\kappa$	3000 MPa / mm	$m$	2
$\xi$	0.1 MPa / s	$n$	2
$r$	1500 $\text{mm}^{-1}$		

Table 3.3 Model parameters for comparison of experiment (Brockley and Davis, 1968).

$F_s = F_0$	1200 kPa	$F_k$	200 kPa
$M$	0.16	$\alpha$	10 MPa/mm
$\kappa$	10 MPa / mm	$m$	2
$\xi$	0.1 MPa / s	$n$	2
$r$	3000 $\text{mm}^{-1}$		

Table 3.4 Model parameters for comparison of experiment (Kato et al., 1972).

$F_s = F_0$	3000 kPa	$F_k$	50 kPa
$M$	0.19	$\alpha$	10 MPa/mm
$\kappa$	5 MPa / mm	$m$	2
$\xi$	20 kPa / s	$n$	2
$r$	1000 mm <sup>-1</sup>		

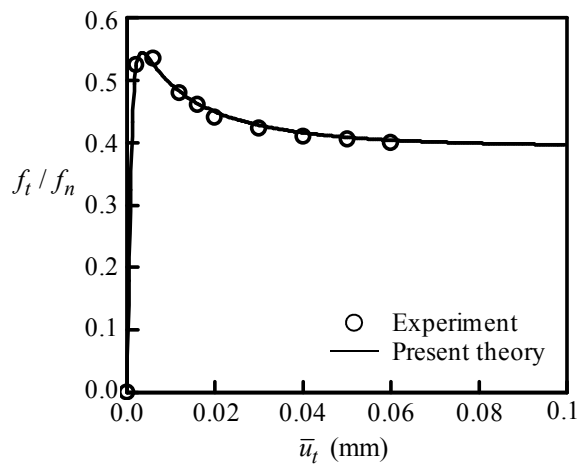


Fig. 3.14. Comparison of reduction process of friction coefficient from the static to kinetic friction under the infinitesimal sliding velocity (Test data after Ferrero and Barrau, 1997).

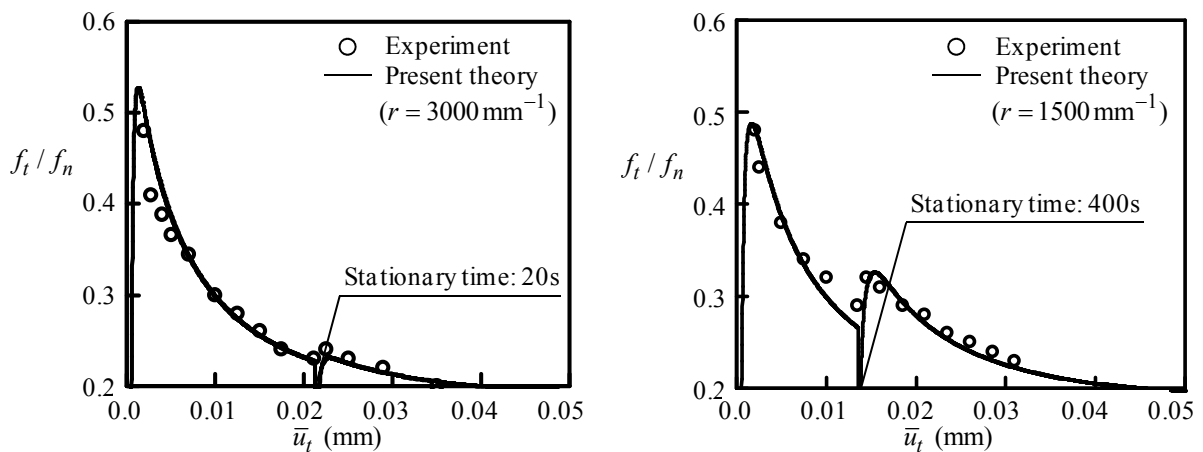


Fig. 3.15. Comparison of recovery of friction coefficient by the stop of sliding in the reduction process from the static to kinetic friction under the infinitesimal sliding velocity (Test data after Ferrero and Barrau, 1997).

静止摩擦係数の回復についての実験結果との比較を図 3.16 に示す。まず、静止状態から滑らせて動摩擦に低下した後、接線接触応力が除荷された状態で、しばらくすべりを停止させて、再びすべりを与えている。数水準のすべり停止後の経過時間に対して、それにより生じる接触応力比の最大値  $f_t^{\max} / f_n$  の関係が示されている。摩擦試験結果(Brockley and Davis, 1968)は、硬化後、完全焼きなましされた銅板間のすべり摩擦についてのものであるが、速度依存性下負荷摩擦モデルにより十分によく近似されている。ここに、モデルパラメータは表 3.3 のように選んでおり、計算で与えたすべり停止までの接線すべり速度は  $\bar{v}_t = 0.1 \text{ mm/s}$ 、法線接触応力は  $f_n = 138 \text{ kPa}$  である。

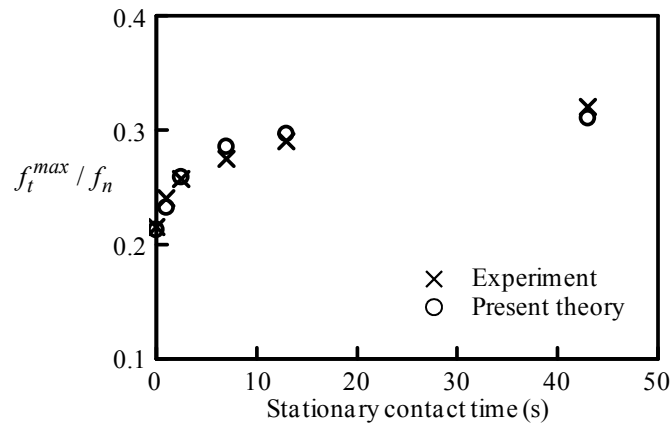


Fig. 3.16. Comparison of recovery process of friction coefficient with the elapsed time after the stop of sliding (Test data after Brockley and Davis, 1968).

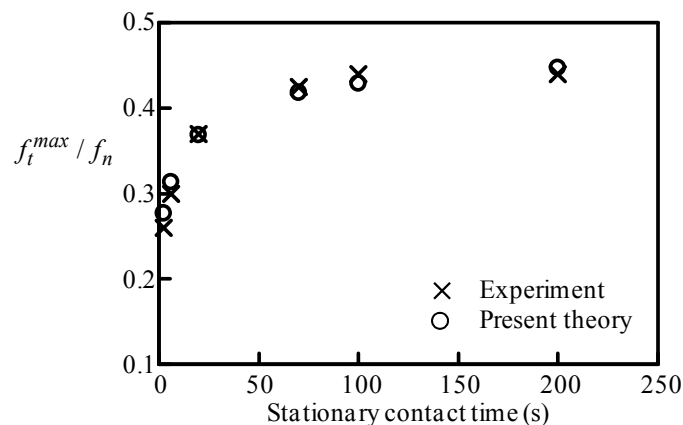


Fig. 3.17. Comparison of recovery process of friction coefficient with the elapsed time after the stop of sliding (Test data after Kato et al., 1972).

鋳鉄についての同様の比較を図 3.17 に示すが、供試材料および試験条件が異なる場合においても、提案モデルにより試験結果は十分に近似されている。ここに、モデルパラメータは表 3.4 のように選んでおり、計算で与えたすべり停止までの接線すべり速度は  $\bar{v}_t = 0.05 \text{ mm/s}$ 、法線接触応力は  $f_n = 33.4 \text{ kPa}$  である。

次に、式(3.95)で与えられる Coulomb の摩擦基準を採用した場合の摩擦モデルの応答特性について述べる。本モデルを用いて計算を行う場合、9つのパラメータ  $\alpha_n$ 、 $\alpha_t$ 、 $\mu_s$ 、 $\mu_k$ 、 $\kappa$ 、 $m$ 、 $\xi$ 、 $n$  および  $r$  と、 $\mu$  の初期値  $\mu_0$  が必要となる。これらのパラメータの物理的意味と決定方法について、以下にまとめる。

- 1)  $\mu_s$  は摩擦係数  $\mu$  の最大値であり、初期すべり時の摩擦抵抗のピーク値より決定される。他方、図 3.19 に示すように、長時間のすべり停止の際、アスペリティのクリープ変形に起因した真実接触面積の回復が飽和した状態からも定められる。
- 2)  $\mu_k$  は摩擦係数  $\mu$  の最小値である。本パラメータは、図 3.18 に示すように、巨視的なすべりによる塑性軟化がクリープ硬化よりも支配的になる高速すべり速度での停留状態から定められる。また後述するように、スティックスリップ運動が生じる場合には、摩擦力振幅からも定めることができる。
- 3)  $\kappa$  および  $m$  はすべり変位による軟化挙動（すべり弱化による静止摩擦—動摩擦遷移）を特徴付ける。これらのパラメータは、図 3.18 に示すように、摩擦係数（接触応力比）—すべり変位関係から定められる。なお、静止摩擦の回復の影響を取り除けるように、 $\kappa$  と  $m$  は  $\xi$  と  $n$  を決定した後に定めた方がよい。
- 4)  $\xi$  と  $n$  はすべりの停留状態における時間経過によって生じるアスペリティのクリープ変形に起因した硬化挙動を特徴付ける。これらのパラメータは、図 3.18 に示すように、すべり停止後の経過時間と摩擦係数の関係から定められる。
- 5) 先に述べたように、 $r$  はすべり面内部での微小すべりの発生の程度を規定するパラメータであり、接触応力—すべり変位曲線の滑らかさを特徴付ける。
- 6) 先に述べたように、 $\alpha_n$  と  $\alpha_t$  は接触面の法線方向と接線方向の弾性特性をそれぞれ特徴づける。

計算に当たっては、表 3.5 に示すパラメータ値を採用する。法線接触応力を  $f_n = 10 \text{ MPa}$  と一定の下、一定の接線すべり速度  $\bar{v}_t$  と時間増分を入力し、接線接触応力増分を積分することにより、接触応力—すべり変位関係を描いている。

図 3.19 に接触応力比  $f_t / f_n$  とすべり変位  $\bar{u}_t$  の関係を示す。ここに、種々のすべり速度（計算の間では一定）を入力値として与えている。図からわかるように、静止摩擦から動摩擦への滑らかな遷移挙動が表現されている。また、すべり速度の増加とともに摩擦抵抗が低下する、いわゆる摩擦係数の速度負勾配も確認できる。図 3.20 に図 3.19 と同様の条件で一旦すべ

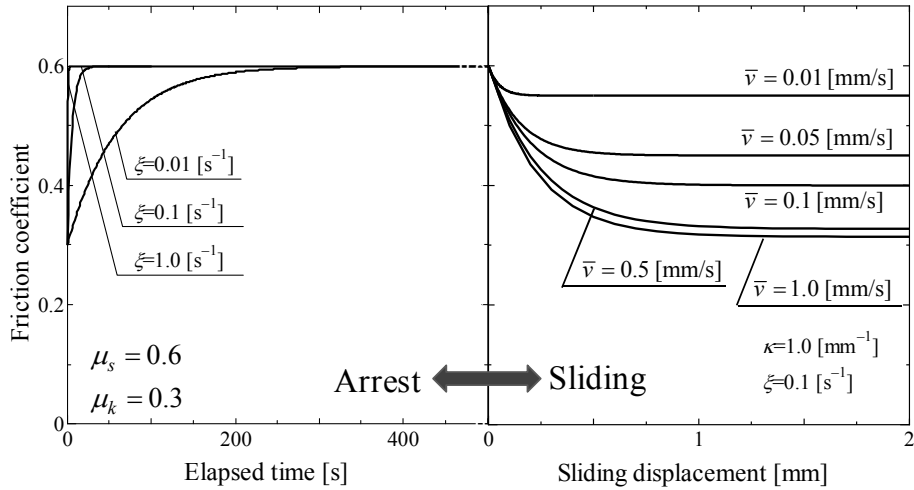
らせて動摩擦に達した後に接線接触応力を除荷し、一定時間経過した後に再びすべりを与えた際の、静止摩擦の回復に対するすべり停止後の時間経過の影響を示している。停止時間が長いほど、回復が進む状況が表現されている。

一定の垂直荷重の下で、静止摩擦に対応した Coulomb の摩擦基準の 80% の大きさの接線接触応力 ( $f_{80} = 0.8\mu_s f_n$ ) を片振りで繰返し与えた場合におけるすべり変位の集積を図 26.21 に示す。ここに、微小すべりを規定するパラメータ  $r \text{ mm}^{-1}$  以外のモデルパラメータは、表 3.5 に示したものと同一である。本摩擦モデルは、下負荷面の概念に基づいて定式化されているため、正規すべり面内部での接触応力速度による塑性すべりを表現し得る。そのため、摩擦基準以下での接線接触応力の繰返し負荷に対してもすべり変位の集積が記述される。また、摩擦係数の発展則を導入しているため、すべり速度が高いほど、動摩擦への移行が早まり、すべり変位の集積が著しくなることが確認できる。なお、本モデルは  $r \rightarrow \infty$  とすれば、正規すべり面の内部を弾性域とする古典摩擦モデルに帰着するが、その場合にはすべり変位の集積は全く表現されない。以上の図から確認できるように、Coulomb の摩擦基準に基づく速度依存性下負荷摩擦モデルにより、基本的な速度依存性すべり摩擦現象を統一的に記述可能である。

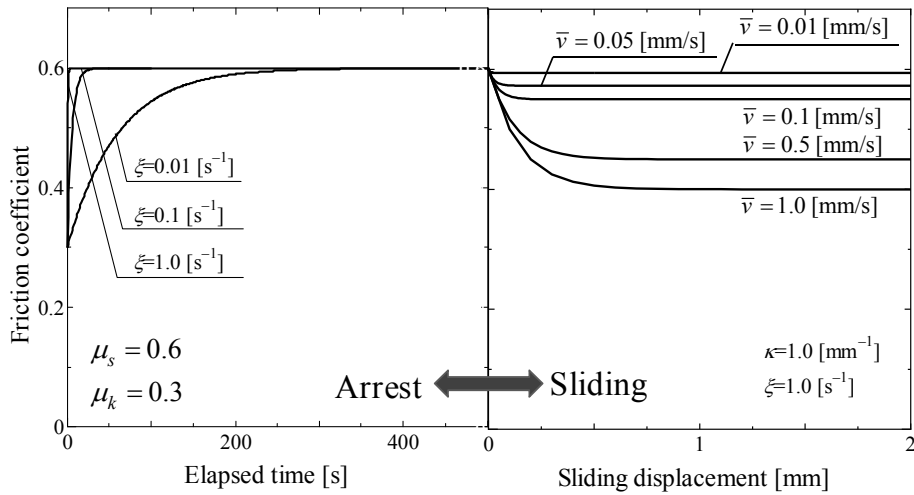
次に、式(3.93)の場合と同様に、Coulomb の摩擦基準を採用した場合の摩擦モデルについても試験結果との比較を行ってみる。静止摩擦から動摩擦への摩擦抵抗の低下についての比較例を図 3.22 に示す。ここに、参照した試験結果は図 3.15 と同一である。図から確認できるように、試験結果が速度依存性摩擦モデルにより十分に近似されている。また図 3.23 に、静止摩擦から動摩擦への摩擦抵抗の低下の過程において、一旦、摩擦荷重を除荷し、20 s または 400 s 停止させた後、再び滑らせた場合の結果を示す。図からわかるように、すべりの一時停止を含む場合についても、摩擦係数の回復およびその後の動摩擦への移行現象を本モデルにより近似できることがわかる。ここに、モデルパラメータは表 3.6 に示す通りである。なお、速度依存性への対応は、 $m = n = 1$  でも十分であることも確認できる。

Table 3.5 Model parameters of Eq.(3.94) for numerical experiments.

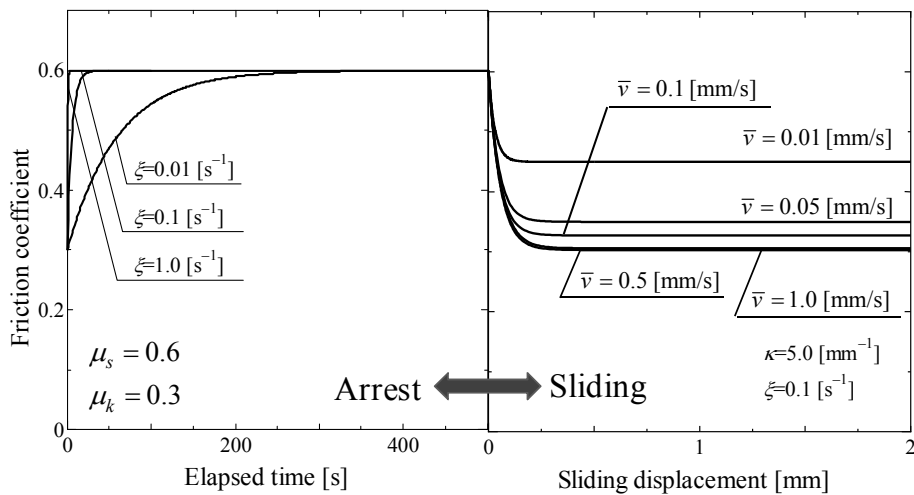
$\mu_s = \mu_0$	0.4	$\mu_k$	0.2
$r$	1000 $\text{mm}^{-1}$	$\alpha$	1 GPa/mm
$\kappa$	10 $\text{mm}^{-1}$	$m$	1
$\xi$	0.01 $\text{s}^{-1}$	$n$	1



(a) Representative values of type I



(b) Representative values of type II



(c) Representative values of type II

Fig. 3.18. Plot of competitive variation in friction coefficient during arrest and sliding according to Eq.(3.80).

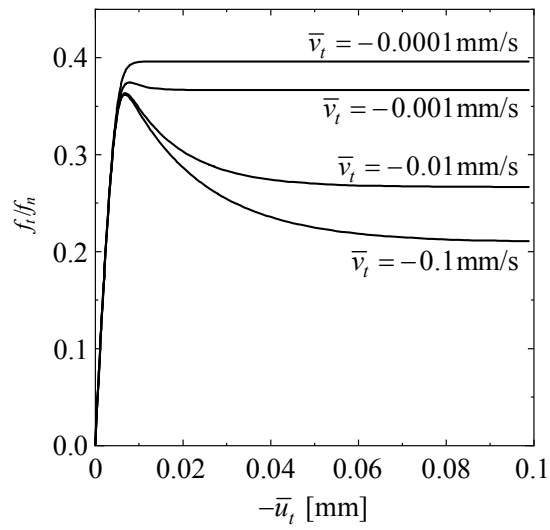


Fig. 3.19. Variations of contact traction ratio  $f_t / f_n$  with tangential sliding displacement for various tangential sliding velocity.

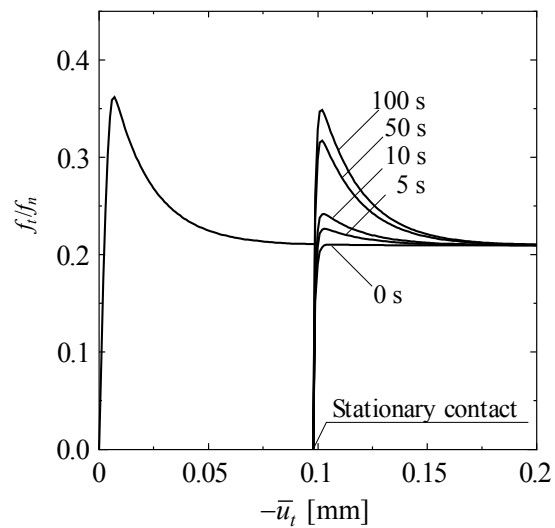


Fig. 3.20. Recovery of static friction coefficient from the kinetic friction with the time  $t$  elapsed after the complete unloading ( $\bar{v}_t = -0.1$  mm/s).



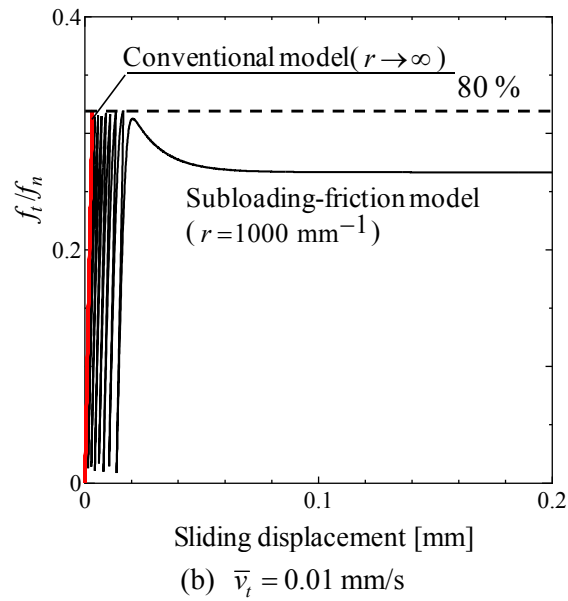
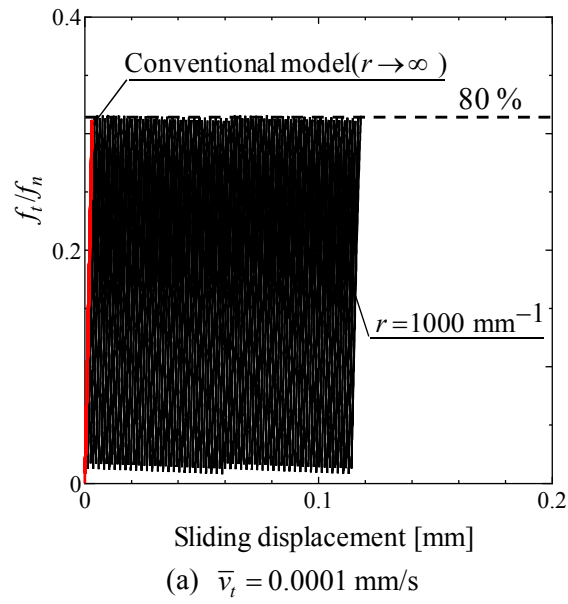


Fig. 3.21. Influence of the material parameter  $r$  in the evolution rule of the normal-sliding ratio  $R$  on the variation of the traction ratio  $f_t/f_n$

Table 3.6 Parameters of Eq.(3.94) for comparison of experiment (Ferrero and Barrau, 1997).

$\mu_s = \mu_0$	0.58	$\mu_k$	0.38
$r$	2000 mm <sup>-1</sup>	$\alpha$	1000 GPa/mm
$\kappa$	35 mm <sup>-1</sup>	$m$	1
$\xi$	0.0005 s <sup>-1</sup>	$n$	1

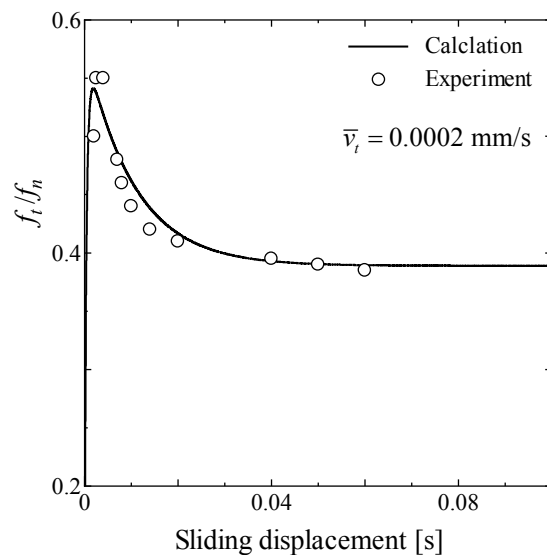


Fig. 3.22. Comparison of reduction process of friction coefficient from the static to kinetic friction under the infinitesimal sliding velocity, where Coulomb's criterion is adopted for numerical calculation (Test data after Ferrero and Barrau, 1997).

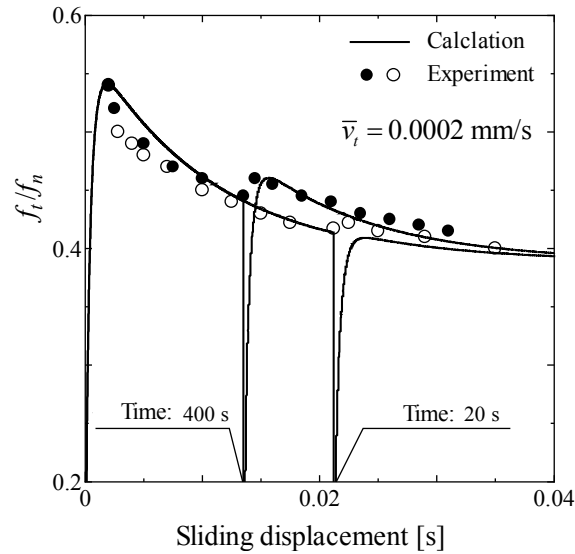


Fig. 3.23. Comparison of recovery of friction coefficient by the stop of sliding in the reduction process from the static to kinetic friction under the infinitesimal sliding velocity, where Coulomb's criterion is adopted for numerical calculation (Test data after Ferrero and Barrau, 1997).

### 3. 6 結 言

本章では、先ず、速度・状態依存性を記述するために不可欠な内部状態変数とその発展則について考察を行い、競合型の発展則を導出した。この結果を踏まえ、速度・状態依存性すべり摩擦現象を記述するため、すべり面の等方硬軟化を導入することにより、下負荷摩擦モデルを拡張した。具体的には、状態変数としての硬化関数および摩擦係数の発展則の具体式を規定することにより、弾塑性論に基づく摩擦モデルを定式化している。提案摩擦モデルの基本特性は以下の通りである。

- 1) 静止摩擦に至るまでの摩擦抵抗の増加とその後の動摩擦に至るまでの低下過程を塑性すべりに起因した等方軟化過程として統一的に記述できる。なお、下負荷面の概念により、滑らかな弾塑性遷移過程をも記述し得る。
- 2) 動摩擦状態からの静止摩擦抵抗の回復を接触面の微小アスペリティのクリープ変形に起因した等方硬化として定式化している。これらは、長い間、すべり停止後の経過時間を含む非合理的な定式化がなされてきた。また、等方軟化（すべり弱化）とクリープ等方硬化（静止摩擦の時間依存性回復）が競合するような状態変数の発展則を導入しているため、すべり速度の増大に伴う摩擦抵抗の減少、いわゆる速度負勾配が自然に表現される。本現象は、すべりモードの安定性の検討において不可欠となる。

- 3) 正規すべり面内部での接触応力速度の変化による塑性すべりの発生を許容し得る下負荷面の概念により、固着—すべり遷移時の微小すべりの発生や繰返しすべり現象を記述し得る。このような現象は、フレTTィング現象や機械要素の緩み現象、あるいは精密位置決め機能をはじめとして、工学上の基本的課題解決に密接に関係する。
- 4) 非線形のすべり面の導入により、法線接触応力の増大とともに摩擦係数が低下するような高圧での接触問題にも適用できる。
- 5) 塑性すべり発生に対する負荷基準において、すべり条件（摩擦基準）を満たしているか否かの判定が不要である。このような利点は、摩擦負荷・除荷が繰り返されうような振動問題の数値解析において重要となる。
- 6) 下負荷面の概念が導入されているため、その発展則により塑性負荷過程において、接触応力がすべり面上に引き戻される自動制御機能を有する。

また、提案モデルの応答特性について、線形すべり現象の数値実験を実施するとともに、摩擦試験結果との定量的な比較を通して、その妥当性を示した。

## 4章 1 自由度スティックスリップ運動の数値解析

### 4.1 緒言

現在用いられている工学的なシステムは、通常、接触境界を有する。これらの接触境界には、物体間のすべり摩擦を生じ、乾燥または境界潤滑、低速すべり条件下では特徴的なすべり摩擦挙動が観察される場合がある。その代表的なものがスティックスリップ運動であり、これは摩耗や材料の損傷を誘発して摺動システムの安定性や耐久性を損なう主要因となり得る。また、騒音や振動の原因となり、製品の2次性能の低下も招く。加えて、機械要素接合部においては、潤滑機構の高性能化のみならず、摩擦エネルギーの散逸による摩擦減衰を積極的に活用した摩擦ダンパの存在などもあり、これらの最適な設計や高性能化の面においても、スティックスリップ運動に代表される速度依存性すべり摩擦挙動の適切な評価法が求められている。

速度依存性すべり摩擦現象に起因したスティックスリップ運動の発生条件やメカニズムについては、1.1節で述べた通りである。いま、図4.1に示すような典型的なすべり摩擦系の1自由度バネ-質点系を考えると、スティックスリップ運動は、すべり速度の増加に伴って摩擦係数が小さくなるケース（速度負勾配）、あるいはバネの駆動速度  $V$  が小さい場合やバネ剛性  $K$  が小さい場合により顕著になる(e.g. Oden and Martins, 1985; Baumberger et al., 1994; Heslot et al., 1994; Persson, 2000; Bureau et al., 2001; Nakano, 2006; Nakano and Maegawa, 2009, 2010)。これまでに、上述のスティックスリップ運動を検討するために、トライボロジー分野を中心に多くの研究が取り組まれており、摩擦係数を時間やすべり速度の関数とした摩擦モデルが多数提案されている(cf. Marone, 1998; Persson, 2000; 2章参照)。しかし、このような定式化の摩擦モデルは、構成式の要件である客観性を満足せず、接触境界条件が未知となる一般的な境界値問題には適用できない。したがって、スティックスリップ運動を含む接触境界値問題の解析には、状態変数とその発展則を導入した速度・状態依存性摩擦モデルが不可欠となる。

このような状況の下、3章で述べたように、すべり面の等方硬軟化を導入することで、静止-動摩擦の速度・状態依存性過程を合理的に表現し得る“速度依存性下負荷摩擦モデル”を提案している。本モデルの基本的特徴は以下の通りである。

- 1) 接触応力の静止摩擦への上昇、その後の動摩擦への低下過程は、滑らかな弾塑性遷移を示す下負荷面の概念により塑性軟化現象として統一的に表現可能である。
- 2) 動摩擦から静止摩擦への回復現象は、表面アスペリティのクリープ変形による凝着部の増加による硬化現象であると見なして、内部状態変数を物理量として定式化されている。
- 3) すべり面内部の接触応力の変化による塑性すべり速度を表現し得る下負荷面の概念に基

づいており，滑らかな弾塑性遷移を表現でき，ひいては繰返し摩擦負荷に対するすべり変位の集積現象を表現し得る．

- 4) 塑性すべり速度の負荷基準において，すべり条件（摩擦基準）が満たされたか否かの判定は必要でない．特にこれは，繰返し負荷変動の著しい現象の解析において重要である．特徴 1)によりすべり弱화가表現され，特徴 2)により静止摩擦の時間依存性回復が表現される．これらは常に競合しており，結果として摩擦抵抗の速度負勾配が合理的に表現されることとなる．しかしながら，運動方程式に速度依存性下負荷摩擦モデルを実装することによる系の動的応答特性の検証は行われていない．このような検証は，速度依存性摩擦モデルの境界値問題への適用において不可欠なものである．

本章では，バルクの変形とすべり摩擦の連成する有限自由度の接触問題の解析の前段として，速度依存性下負荷摩擦モデルを導入した図 4.1 に示すような 1 自由度バネ-質点系のモデルを用いて，新しいスティックスリップ運動の数値解析法を提案する．弾塑性構成式と同様の速度形の摩擦モデルを用いているため，本アプローチ手法を“*rate form approach*”と称する．先ず，系の動的パラメータであるバネ定数，ドライバの駆動速度およびスライダの質量を変化させたケーススタディを行うことで提案手法の妥当性を実証するとともに，すべりモードの安定性について議論する．加えて，速度依存性すべり摩擦挙動に関するモデルパラメータの及ぼす影響について検討する．次に，スティックスリップ運動時の摩擦力変動の力学的抑制方法について，数値解析による検討を行う．最後に，摩擦試験と材料試験の相違について整理するとともに，摩擦試験結果との比較を通して，速度依存性摩擦モデルならびにこれを実装した数値解析アプローチ法の妥当性の定量的な検証を実施する．なお，本章での検討は，工学上の幅広い領域で成り立つとされる Coulomb の摩擦基準を採用する．したがって，以降での接触応力-すべり速度関係は，式(3.87)または(3.88)で与えられる．

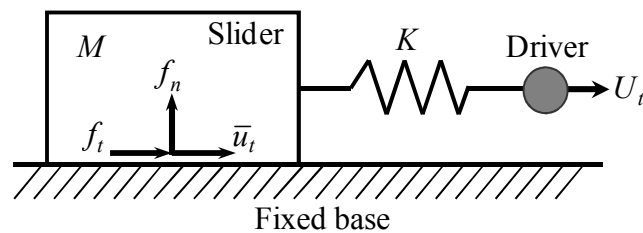


Fig. 4.1. Typical one-degree-of-freedom system.

## 4. 2 数値解析手法

先ず，図 4.1 に示すような 1 自由度バネ－質点系の運動方程式に対して，速度依存性摩擦モデルを導入してみる．

図 4.1 の系において，バネの端部に取り付けてあるドライバ駆動の速度を  $V_t$  とすると，バネの伸びは  $U_t - \bar{u}_t (= \int_t V_t dt - \int_t \bar{v}_t dt)$  となる．スライダの質量を  $M$ ，バネの剛性を  $K$  とすると，スライダの接線方向の運動方程式は次式で与えられる．

$$M\bar{a}_t = K(U_t - \bar{u}_t) + Sf_t \quad (4.1)$$

ここに， $S$  はスライダの見かけの接触面積である．また， $\bar{a}_t$  と  $\bar{u}_t$  はスライダの加速度とすべり変位であり，相対的な物理量である．以下では，対象としている問題の性質と記述の煩雑さを鑑み，接線成分を意味する下添え字  $( )_t$  を省略する．

いま，運動方程式(4.1)を数値的に解き，系の時系列応答を得ることを考える．本論文では，代表的な数値積分方法である Newmark の  $\beta$  法を用いて時間方向の離散化を行い，運動方程式を解く．時刻  $t + \Delta t$  におけるスライダのすべり変位とすべり速度は次式で与えられる．

$$\bar{u}^{t+\Delta t} = \bar{u}^t + \Delta t \bar{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{a}^t + \beta \Delta t^2 (\bar{a}^{t+\Delta t} - \bar{a}^t) \quad (4.2)$$

$$\bar{v}^{t+\Delta t} = \bar{v}^t + \frac{\Delta t}{2} (\bar{a}^{t+\Delta t} + \bar{a}^t) \quad (4.3)$$

ここに， $\Delta t$  は時間増分である． $( )^t$  および  $( )^{t+\Delta t}$  は，それぞれ時刻  $t$  および  $t + \Delta t$  における各物理量の値を意味する．ここで，式(3.88)の 1 次近似を考慮すると，式(4.1)は次のように書き改められる．

$$M\bar{a}^{t+\Delta t} + K\bar{u}^{t+\Delta t} = KU^{t+\Delta t} + Sf^{t+\Delta t} \quad (4.4)$$

$$f^{t+\Delta t} = f^t + \Delta t \dot{f}^{t+\Delta t} = f_t^t + \Delta t (C^{ep} \bar{v}^{t+\Delta t} + C^c) \quad (4.5)$$

ここに，

$$C^{ep} = \mathbf{C}^{ep}(\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \quad (4.6)$$

式(3.88)および式(4.6)を考慮すれば，塑性摩擦負荷時の接線接触応力速度 - 接線すべり速度関係は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{f} &= C^{ep} \bar{v} + C^c \\ &= \left\{ \alpha_t - \frac{\alpha_t \alpha_t}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n} \right\} \bar{v} - \frac{\alpha_t \xi R \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) f_n}{\alpha_t - r(\ln R) \mu f_n - R\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right) f_n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここに，パラメータ  $m$  と  $n$  は 1 としている．また，弾性摩擦除荷時は

$$\dot{f} = \alpha \bar{v} \quad (4.8)$$

なお、対象としている系は剛体回転を含まないため、 $\overset{\circ}{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}$  と見なせる。

式(4.2)と(4.3)を時刻  $t + \Delta t$  の運動方程式(4.4)に代入することにより、加速度  $\bar{a}^{t+\Delta t}$  が次のように得られる。

$$\bar{a}^{t+\Delta t} = \frac{Sf^t + KU^{t+\Delta t} - K \left\{ \bar{u}^t + \Delta t \bar{v}^t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \bar{a}^t \right\} + SC^{ep} \left( \Delta t \bar{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{a}^t \right) + SC^c \Delta t}{M + \beta K \Delta t^2 - SC^{ep} \frac{\Delta t^2}{2}} \quad (4.9)$$

式(4.9)を式(4.2)および(4.3)に代入することで、時刻  $t + \Delta t$  のスライダの速度  $\bar{v}^{t+\Delta t}$  および変位  $\bar{u}^{t+\Delta t}$  が求まり、また、式(4.7)あるいは式(4.8)と式(4.5)より、摩擦力も算出される。これらの作業を逐次行うことで、スティックスリップ運動の時刻歴応答が得られる。なお、弾塑性構成式を用いた数値解析では、通常、有限の応力増分が降伏面を飛び越えてしまうため、その手当のためのリターンマッピング法やラジアルリターン法などの導入が必要となるが、通常の摩擦モデルの場合も同様である。一方、本モデルは、下負荷面の概念が導入されているため、正規すべり比の発展則で述べたように自動制御機能を内包している。したがって、数値積分の際に自動的に接触応力がすべり面に引き戻されるため、特別な手当では必要としない。

本論文では Newmark の  $\beta$  法のパラメータ値について、無条件安定性を保証する  $\beta = 1/4$  を採用する。ただし、 $\beta = 1/6$  とした線形加速度法も頻繁に利用されているのでそちらを用いても良い。なお、数値解析では初期値が必要となるが、バネの伸びおよびスライダの速度より、 $U^0 - \bar{u}^0 = 0$  および  $\bar{v}^0 = 0$  となる。

### 4. 3 スティックスリップ運動に対する基本的応答特性

本節では、図 4.1 に示した 1 自由度の系について、一定の駆動速度を与えた場合のスティックスリップ運動の解析結果について述べる。ただし、提案速度依存性摩擦モデルは速度強化（摩擦抵抗の速度正勾配）には対応していないため、本論文での数値解析的検討は低速領域を対象としている。ここに、低速領域は接触面のアスペリティが摩擦熱により融解しない速度範囲をいう。

#### 4. 3. 1 動的条件の影響

数値実験に当たり、Baumberger et al. (1994)の実験結果を参照して  $\mu_s$  と  $\mu_k$  を決定した。次に、静止摩擦の回復は数十秒のオーダーで飽和すると仮定して  $\xi$  を決定した。その後、スティッ

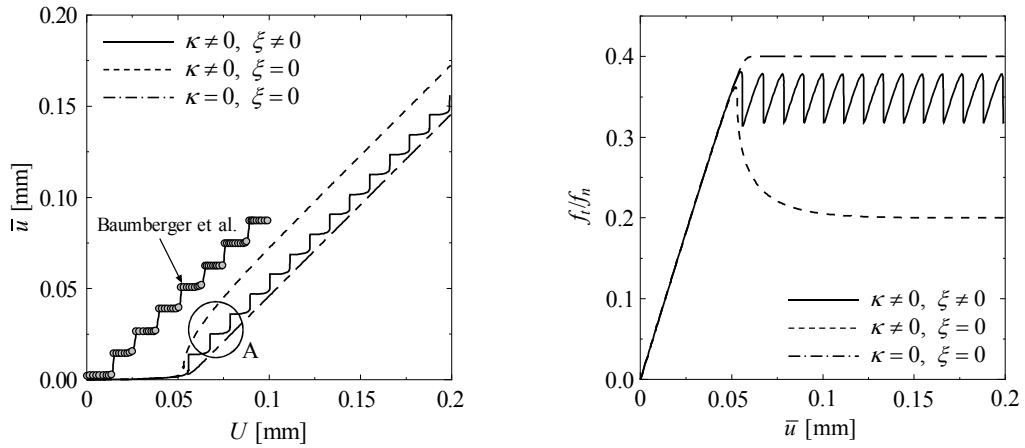


クスリップ振幅より  $\kappa$  を決定した。また、微小すべりの程度を規定するパラメータ  $r$  に関しては、Baumberger et al. (1994) の実験結果のクリープ距離を参照して決定した。表 4.1 にモデルパラメータの一覧を示す。

図 4.2(a) に接触応力比  $f_t/f_n$  - すべり変位  $\bar{u}$  の関係を示す。また、図 4.2(b) にすべり変位  $\bar{u}$  - ドライバの駆動変位  $U$  の関係を示す。ここに、スライダの質量を  $M = 0.8 \text{ kg}$ 、バネ定数を  $K = 58 \text{ N/mm}$ 、ドライバの駆動速度を  $V = 0.001 \text{ mm/s}$ 、見かけの接触面積を  $S = 720 \text{ mm}^2$  としている。これらは Baumberger et al. (1994) の実験と同条件である。図からわかるように、調和振動などを入力値としなくとも一定の駆動速度の下での典型的なスティックスリップ運動、すなわち、鋸状の摩擦力変動と階段状のすべり変位変動を再現できている。また、スティックスリップ運動の振幅と周期は実験結果と良く一致している。なお図 4.2 には、摩擦係数の発展則以外のパラメータが同じ場合で、 $\xi = 0$  および  $\kappa = \xi = 0$  とした場合の結果も併せて示している。 $\xi = 0, \kappa \neq 0$  とした場合は静止摩擦から動摩擦への遷移のみを考慮したすべり弱化型摩擦モデル、 $\kappa = \xi = 0$  とした場合は速度非依存性モデルにそれぞれ相当するが、これらのモデルでは継続的なスティックスリップ運動を再現できないことがわかる。

先に述べたように、スティックスリップ運動は、システムの剛性が小さい場合や接触荷重が大きい場合に発生しやすい。このことを検討するために、バネ剛性とスライダの質量の条件が異なる場合におけるバネの伸び  $U - \bar{u}$  の経時変化を図 4.3 と図 4.4 に示す。ここに、図 4.3 では、駆動速度  $V = 0.001 \text{ mm/s}$  と質量  $M = 1 \text{ kg}$  を一定とし、バネ定数を  $K = 10, 20, 40$  および  $80 \text{ N/mm}$  と変化させている。他方、図 4.4 では、駆動速度  $V = 0.001 \text{ mm/s}$  とバネ定数  $K = 50 \text{ N/mm}$  を一定とし、スライダの質量を  $M = 0.5, 0.75, 1.5$  および  $3.0 \text{ kg}$  と変化させている。また、見かけの接触面積はいずれも  $S = 1000 \text{ mm}^2$  である。図から確認できるように、バネ定数が大きくなれば振幅と周期が小さくなり、スティックスリップ運動から安定すべりへ<sup>註1)</sup>と移行している。また、質量についても従来の知見通りの傾向が再現されていることがわかる。

註 1) 数値解析では、出力結果のステップ幅や解析スケールによって、見かけ上、スティックスリップ運動が発生していないように見えるだけの場合もある。厳密な意味での安定すべりは固着状態が存在しない場合であるが、この安定性の議論については本論文の対象外とし、見かけ上のスティックスリップ運動が発生していない場合を安定すべりとする。



(a) Sliding displacement vs. driving displacement. (b) Traction ratio vs. sliding displacement.

Fig. 4.2. Variations of traction ratio  $f_t/f_n$ , displacement of the slider  $\bar{u}$  and the driving displacement  $U$  ( $M = 0.8$  kg,  $K = 58$  N/mm,  $V = 0.001$  mm/s).

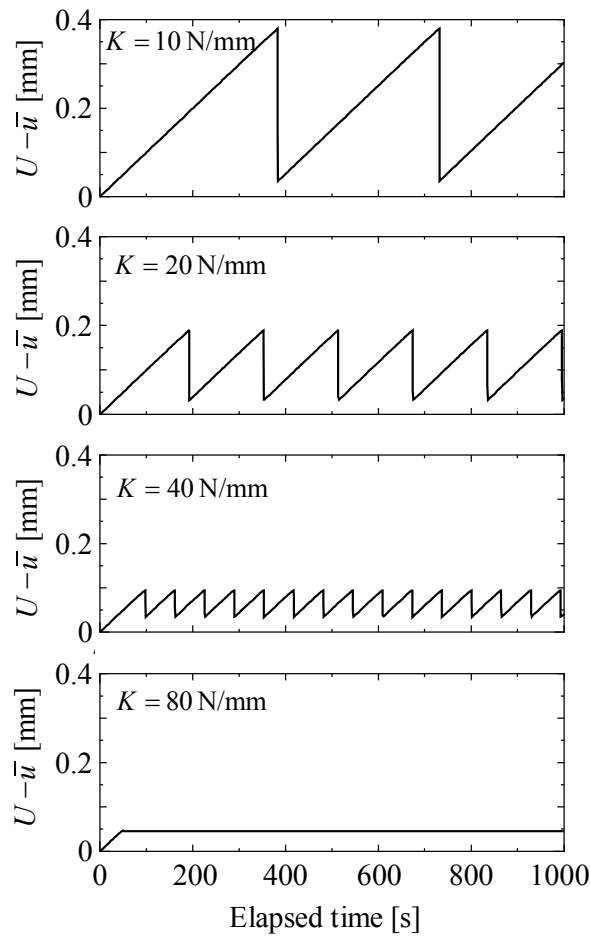


Fig. 4.3. Variations of the spring elongation  $U - \bar{u}$  during the stick-slip motion for various spring stiffnesses ( $V = 0.001$  mm/s,  $M = 1$  kg).

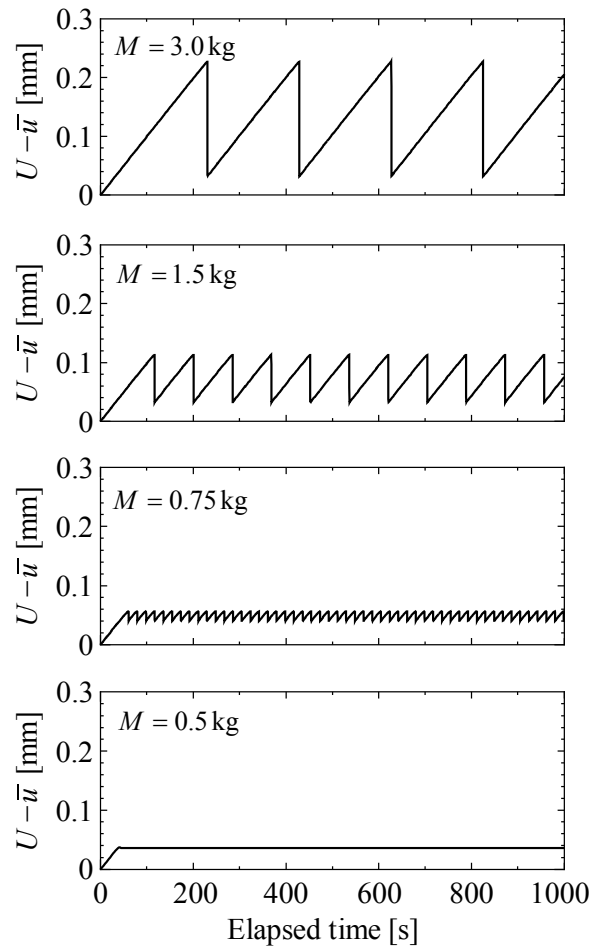


Fig. 4.4. Variations of the spring elongation  $U - \bar{u}$  during the stick-slip motion for various mass of slider ( $V=0.001$  mm/s,  $K=50$  N/mm).

Table 4.1 Material constants for analysis of stick-slip instability.

$\mu_0 = \mu_s$	0.4	$\mu_k$	0.2
$\alpha_n = \alpha_t$	$1000 \text{ N/mm}^3$	$r$	$1000 \text{ mm}^{-1}$
$\kappa$	$10 \text{ mm}^{-1}$	$\xi$	$0.1 \text{ s}^{-1}$

スティックスリップ運動の基本的な問題として、dynamical phase diagram を把握すること、すなわち、 $(K, V)$  平面において安定すべりと不安定すべりのそれぞれのモードの境界を決定することが挙げられる。加えて、 $(K, V)$  平面の分岐ラインを越えた際のモード遷移挙動の検討も重要となる(Rice and Ruina, 1983; Baumberger et al., 1994; Heslot et al., 1994; Putelat et al.,

2007). State variable approach により，すべりモードの分岐を規定する臨界バネ剛性を駆動速度の関数として導出されているが，このような検討は摩擦モデルに応じた複雑な解析解の計算が不可欠となる．また，状態変数とその発展則に基づき，接触応力速度－すべり速度関係によりすべり摩擦挙動を記述しているため，提案している rate form approach では臨界バネ剛性や臨界駆動速度を解析的に導出することは困難である．したがって，本論文では別の方法により，すべりモードの分岐について検討を行う．

低速領域でのスティックスリップ運動の発生は，図 4.5 の概念図より容易に理解される (Persson, 2000)．図 4.5 はすべりモードの分岐を概念的に示したものである．ここに，実線および破線は，すべり停止後の静止摩擦の回復 (aging of contact junction) および駆動速度一定下でのバネ力の増加の経時変化をそれぞれ示している．すべりモードは典型的な 2 種類のタイプに分けられる．破線(a)のタイプでは，静止摩擦の回復よりもバネ力の増加の方が速いため，安定すべりモードを呈する．一方，破線(b)のタイプでは，バネ力の増加は静止摩擦の回復よりも遅いため，加速度が発生し，系は不安定なスティックスリップに陥る．

不安定なすべりモードは静止摩擦の回復と速度負勾配により誘発されるため，今，停留の動摩擦に達した後の静止接触状態( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ )を考えてみる．摩擦係数の発展則(3.79)より，静止摩擦の初期の回復速度は次式で与えられる．

$$\dot{\mu} = \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) \quad (4.10)$$

対象としている系が，すべりが停止した時刻  $t_0$  からその後のある時刻  $t_1$  の間で安定すべりモードを呈するためには，次の条件を満足せねばならない．

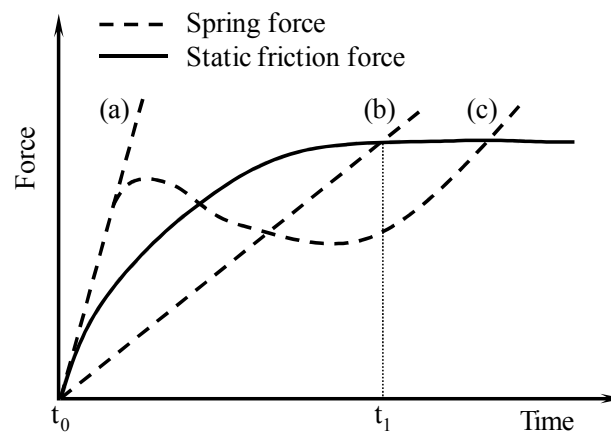


Fig. 4.5. Schematic representation of the bifurcation of sliding modes. The solid line indicates the recovery of the static friction, and the dashed line indicates the increase of the spring force.

$$K \int_{t_0}^{t_1} V^t dt > S \int_{t_0}^{t_1} \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right) f_n dt \quad (4.11)$$

ここに、単純のため、慣性項の影響を無視している。もし、駆動速度  $V$  が一定で  $Sf_n = Mg$  ( $g$ : 重力加速度) を仮定すれば、式(4.11)は次のように記述できる。

$$KV(t_1 - t_0) > Mg \int_{t_0}^{t_1} \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right) dt \quad (4.12)$$

ここに、 $\mu_k \leq \mu \leq \mu_s$  である。多くの研究により示されているように、図 4.1 に示した系のスティックスリップ運動の周期と振幅は、次の動的条件下では減少することが式(4.12)からも確認できる。

- a) 駆動速度  $V$  が増加した場合
- b) バネ定数  $K$  が増加した場合
- c) スライダの質量  $M$  が減少した場合
- d) 静止摩擦係数と動摩擦係数の差が減少した場合

図 4.6(a)および 4.6(b)に、様々なバネ剛性  $K$  と駆動速度  $V$  の組み合わせに応じて、スティックスリップの周期がどのように減少するかを示す。ここに、図 4.6(a)および 4.6(b)において、質量はそれぞれ  $M = 1 \text{ kg}$  および  $M = 5 \text{ kg}$  である。また、見かけの接触面積は  $S = 1000 \text{ mm}^2$  としている。図に示されているように、式(4.12)に基づく上記条件は数値実験によっても示されている。対数グラフ軸において、振動の周期は駆動速度  $V$  に対してほぼ線形的に減少している。駆動速度が十分に大きくなると、周期は連続的に減少し、すべりモードは安定すべりへと遷移する。加えて、低速条件下では、検討の範囲のバネ剛性  $K$  に依らず、振動の周期は駆動速度に対して対数関係を示す。

しかしながら、現実のシステムにおけるすべりモードの分岐の検討には、上述のような方法は不適当な場合もある。これは、物理的な観点より、厳密には真の固着状態は無く、アスペリティのクリープ過程により局所的な応力緩和が常に生じるためである(Baumberger et al., 1994)。また、接触応力の変動が極めて小さい場合でも微小すべりが生じる場合もある。さらに、実問題において、静止摩擦係数の回復過程やシステムの剛性を決定することは困難となる。したがって、有限自由度の問題の場合、モードの分岐条件を解析的に導出することはほぼ不可能である。また、このような手法は、物体の剛性に履歴依存性がある場合や、図 4.5 の破線(c)で示しているように、動的条件 (例えば、 $V$ ,  $K$ ,  $f_n$ , etc.)が急激に変動する場合には対応していない。

そこで実用性の観点から、摩擦係数差  $\Delta\mu$  あるいはバネの伸び  $U - \bar{u}$  を用いた次式のような簡易クライテリオンを定義する。

$$\frac{f_t^{\max} - f_t^{\min}}{f_n} \leq \frac{\Delta\mu}{e_1} = \frac{\mu_s - \mu_k}{e_1} \quad \text{or} \quad \frac{|U - \bar{u}|}{U} \leq e_2 \quad (4.13)$$

ここに、 $f_t^{\max}$  および  $f_t^{\min}$  は、運動の間（一周期）の接線接触応力のそれぞれ最大および最小値である。また、 $e_1$  および  $e_2$  は摩擦振幅およびバネの伸びに関する許容値である。式(4.13)を満足する場合、すべり摩擦運動は実用的に安定すべりと見なされる。ただし、式(4.13)は安定すべりとスティックスリップ運動との本質的な差を表しているわけではないことに注意されたい。名称が示しているように、スティックスリップ運動はすべり速度がゼロと非ゼロの周期を含み、接触応力やバネの伸びの変化がどれくらい小さいかは問題では無い。しかし、数値解析のメリットの一つとして、境界条件が時々刻々と変化する場合に対しても検討が可能な点が挙げられる。そのため、提案アプローチ手法のような数値解析と簡易クライテリオンを併用することは、機械／構造物の実務設計、制御およびメンテナンスに対するすべりモードが安定・不安定性の判断において有効であると考えられる。そこで、ドライバの駆動速度を線形的に変化させ、スティックスリップと安定すべりの2つのすべりモードの分岐ラインを遷移する場合の解析を行ってみる。また、簡易クライテリオン式(4.13)による判断も併せて行ってみる。

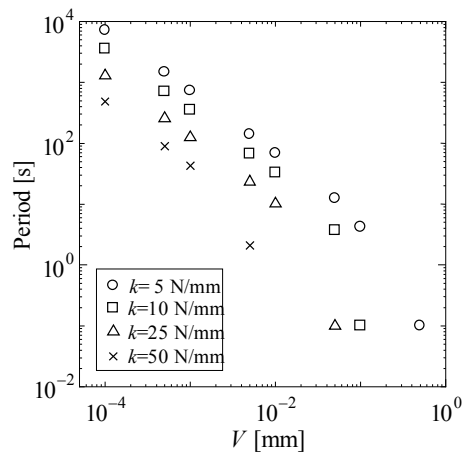
図 4.7(a)および 4.7(b)は駆動速度が変化する間のバネの伸び  $U - \bar{u}$  の経時変化を示している。図 4.7(a)は、駆動速度が  $V = 0.0005 \text{ mm/s}$  から線形的に増加する場合であり、図 4.7(b)は、駆動速度が  $V = 0.01 \text{ mm/s}$  から線形的に減少する場合である。ここに、 $K = 50 \text{ N/mm}$ 、 $M = 1 \text{ kg}$ 、 $S = 1000 \text{ mm}^2$  である。モデルパラメータは表 4.1 のものと同じである。図から確認できるように、スティックスリップ運動は駆動速度の増加とともに安定すべりへと移行している。また、既往の研究 (Baumberger et al., 1994; Persson, 2000)でも指摘されているように、比較的低速でのすべりモードの遷移は連続的に生じている様子がわかる。これらの図には、式(4.13)を用いた場合のすべりモードの判定も併せて示してある。ここに、 $e_1 = 100$  としている。提案手法は、系の動的条件が変動する場合におけるスティックスリップ運動と安定すべり間の遷移挙動の検討に対して、実用的な観点から適用し得ると考えられる。

以上の解析結果例からもわかるように、速度依存性下負荷摩擦モデルを運動方程式に導入することにより、スティックスリップ運動に関する境界値問題の解析が可能となる。また、対象とするシステムの動特性 ( $K$ ,  $V$ ,  $M$ ) が解析中に変動する場合についても容易に対応できる。

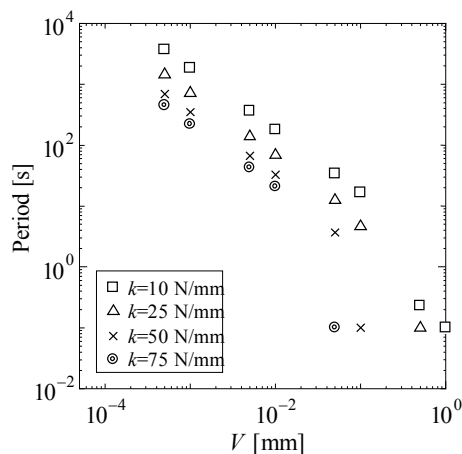
#### 4. 3. 2 摩擦振幅制御の数値解析

一般に、スティックスリップ運動は、摺動面の材料や潤滑条件を改良することにより抑制される。しかしながら、もしシステムの作動条件を制御することにより、摩擦係数の速度負

勾配を見かけ上の正勾配に変更できれば、摩擦力変動は抑制されることが考えられる。このような考えに基づき、Tadokoro and Nakano (2005)は微小な垂直荷重変動のフィードバック制御を用いることにより、摩擦力変動の抑制を試みている。すなわち、図 4.8 に示すように、微小な法線接触応力変動  $\Delta f_n$  をスティック状態からスリップ状態への遷移時に印加し、摩擦係数の速度負勾配を見かけ上の正勾配へと変化させている。他方、式(3.87)で表されるように、速度依存性下負荷摩擦モデルでは、法線接触応力の変動を容易に考慮することができる。そこで本項では、Tadokoro and Nakano (2005)が実験により報告した摩擦力変動の抑制方法について、上述したバネ-質点系に対する数値解析手法を用いて検討を試みる。

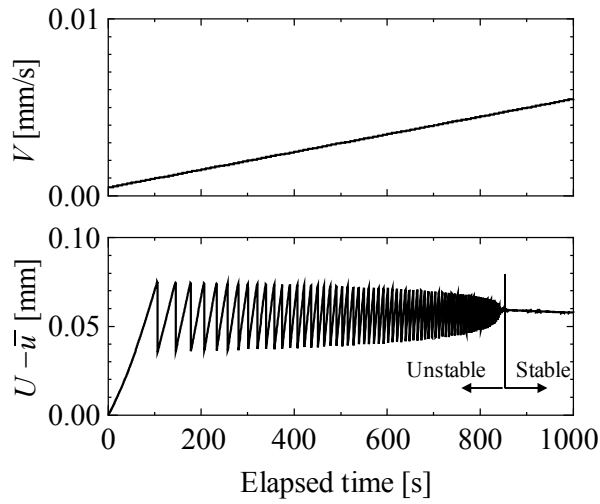


(a)  $M=1$  kg

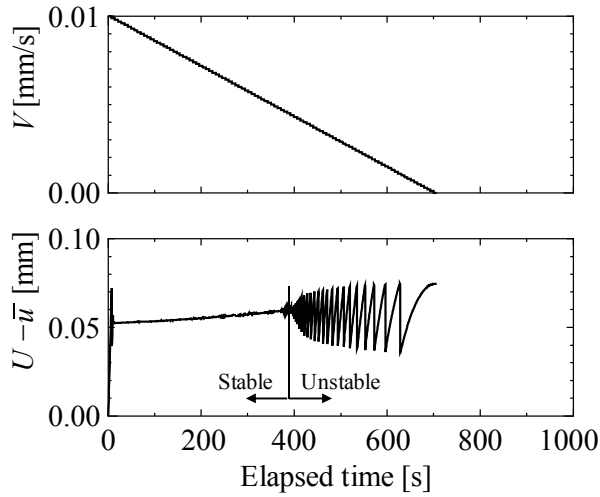


(b)  $M=5$  kg

Fig. 4.6. Variations of the period of oscillations of the spring elongation  $U - \bar{u}$  with the driving velocity  $V$ .



(a) Increase of driving velocity



(b) Decrease of driving velocity

Fig. 4.7. Relations between the spring elongation  $U - \bar{u}$  and the elapsed time during the linear change in the driving velocity ( $M = 1$  kg,  $K = 50$  N/mm).

数値解析では、法線接触応力  $f_n$  は以下のように制御されるとする.

$$\left. \begin{aligned} f_n^{k+1} &= f_n^0 && \text{for stick phase} \\ f_n^{k+1} &= f_n^k + \Delta f_t^k / \mu^k && \text{for slip phase} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

ここに、上添え字  $k$  は繰返し計算のステップ数を示しており、 $\Delta f_t$  は 1 ステップの間の接線接触応力の変動である。また、 $f_n^0 = Mg/S$  ( $g$  は重力加速度) である。数値解析で用いたモデルパラメータは表 4.1 に示したのと同じである。



スティックスリップ運動中の無次元化された接触応力  $f_t / f_n^0$  の変動を図 4.9 および 4.10 に示す。ここに、図 4.9 では、ばね定数は  $K = 50 \text{ N/mm}$ ，スライダの質量は  $M = 1.0 \text{ kg}$ ，駆動速度は  $V = 0.001, 0.01 \text{ mm/s}$  である。また図 4.10 では、ばね定数は  $K = 30 \text{ N/mm}$ ，スライダの質量は  $M = 1.5, 3.0 \text{ kg}$ ，駆動速度は  $V = 0.001 \text{ mm/s}$  である。見かけの接触面積はいずれも  $S = 1000 \text{ mm}^2$  である。これらの図は、微小な垂直荷重変動を印加したものと垂直荷重一定のもの両方の結果を含んでいる。垂直荷重の微小変動による摩擦力変動の抑制方法は有効であることが図から確認できる。特に、この制御方法はスライダの質量が小さく、また比較的速い駆動速度条件下で有効であり、これは Tadokoro and Nakano (2005) が試験により指摘している傾向と同じである。

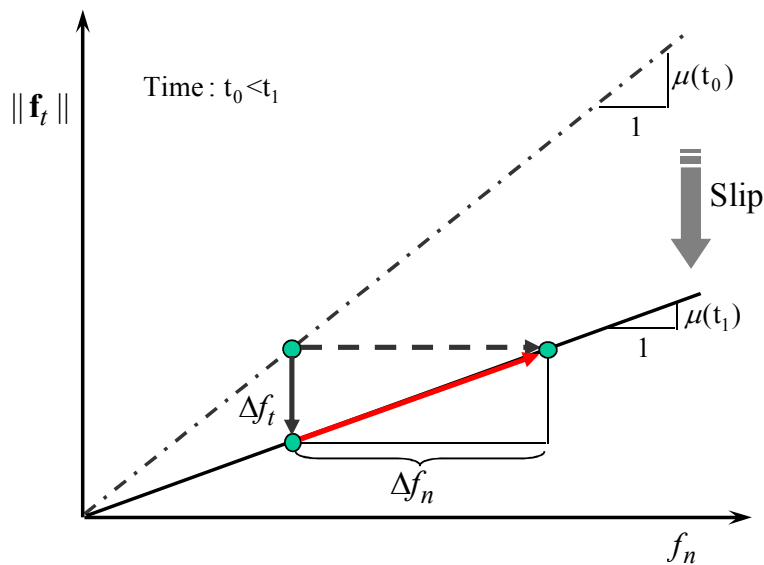


Fig. 4.8. Schematic diagram of suppression method by controlling small normal traction.

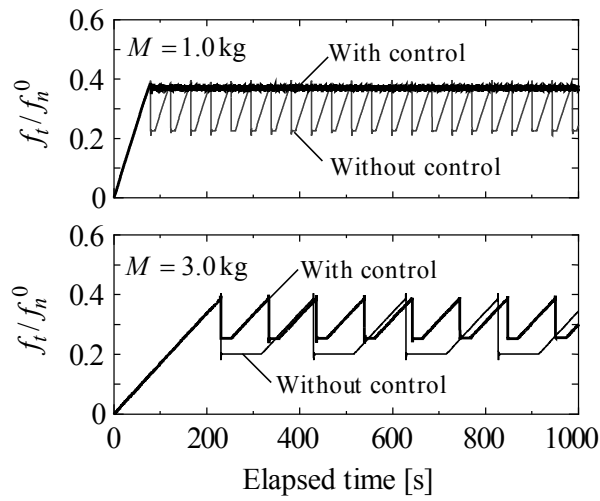


Fig.4.9. Variations of the tangential traction  $f_t / f_n^0$  during the stick-slip motion with normal traction control for two kinds of driving velocity ( $K= 50$  N/mm,  $M= 1.0$  kg).

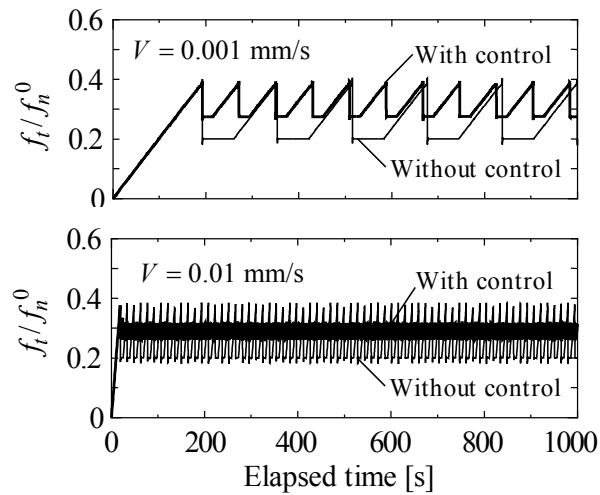
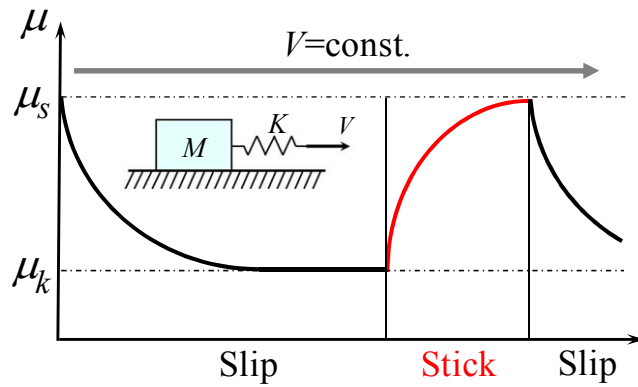
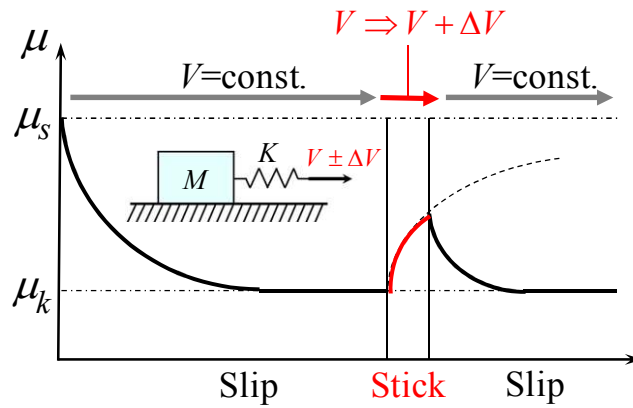


Fig. 4.10. Variations of the tangential traction  $f_t / f_n^0$  during the stick-slip motion with normal traction control for two kinds of mass of slider ( $V= 0.001$  mm/s,  $K= 30$  N/mm).



(a) Without control of driving velocity



(b) With control of driving velocity.

Fig. 4.11. Schematic diagram of suppression method by controlling driving velocity.

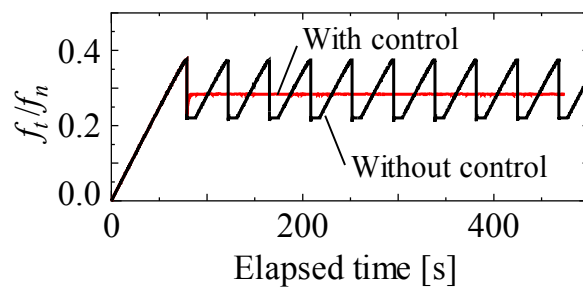


Fig. 4.12. Variations of the tangential traction  $f_t / f_n^0$  during the stick-slip motion with driving velocity control ( $V=0.001$  mm/s,  $K= 50$  N/mm,  $M= 1.0$  kg).

スティックスリップ遷移時に微小な垂直荷重を印加することにより、摩擦力変動を抑制した数値解析例を以上で示した。スティックスリップ運動は、荷重条件以外では、システムの剛性と駆動速度が大きいほど小さくなることがわかっている。稼働中にシステムの剛性を変化させることは原理的に困難であるが、もう一つの動的条件である駆動速度を変化させることによってもスティックスリップ運動を抑制できる可能性がある。すなわち、スティックスリップ一周期においてスライダは加速と減速を繰り返すが、減速過程に入り静止摩擦の回復が生じる過程で速度弱さを再度誘発して摩擦抵抗を下げる事ができれば、スライダは動摩擦抵抗のまま運動することとなる。そこで図 4.11 に示すように、数値解析において、スリップからスティックへの遷移時に駆動速度を瞬間的に増加させることにより、スティック状態を回避することで摩擦力変動の抑制を試みる。数値解析では、スリップからスティックへと遷移する瞬間に駆動速度  $V$  を次のように制御した。

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 && \text{for otherwise} \\ V &= 10V_0 && \text{for slip to stick transition} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

ここに、 $V_0$  は駆動速度の初期値である。

図 4.12 に駆動速度の制御の有無に対する無次元化された摩擦力の経時変化を示す。数値解析で用いたモデルパラメータは表 4.1 に示したものと同一である。スリップからスティック遷移時に駆動速度を瞬間的に増加させることにより、静止摩擦の回復が間に合わずに、その結果、摩擦力変動が抑制されている様子がわかる。

このように、速度依存性摩擦構成式を用いた数値解析により、スティックスリップ運動の最適制御条件の系統的な検討も可能である。

### 4. 3. 3 モデルパラメータの影響

上述の数値解析結果より、提案アプローチ手法はスティックスリップ運動の検討に適用し得ることが確認された。しかしながら、スティックスリップ運動は速度依存性下負荷摩擦モデルのパラメータ  $\kappa$ 、 $\xi$  および  $r$  とも強く関連すると考えられる。したがって、さらに詳細な議論が必要である。

図 4.13 にモデルパラメータ  $\xi$  に対するスティックスリップ運動の変化を示す。ここに、他のパラメータは表 4.1 に示したものと等しい。また、動的条件は以下のように設定する。

$$M = 1 \text{ kg}, K = 50 \text{ N/mm}, V = 0.001 \text{ mm/s}, S = 1000 \text{ mm}^2.$$

図 4.13 より、静止摩擦の回復速度を規定するパラメータ  $\xi$  が小さい場合、すべりモードは安定すべりとなる。他方、パラメータ  $\xi$  が大きい場合には、すべりモードは不安定すべりとなる。この理由は次の通りである：モデルパラメータ  $\xi$  が大きい場合、バネ力の増加は静止摩

擦力の初期回復よりも遅く、その結果、スティックスリップ運動の振幅は大きくなる（図 4.5 および式(4.12)参照）。しかしながら、パラメータ  $\xi$  が十分に大きい場合、すべりモードは再び安定すべりとなる。この理由は、パラメータ  $\xi$  が十分に大きい場合、静止摩擦から動摩擦への低下と速度負勾配がわずかとなるためである。

図 4.14 にモデルパラメータ  $\kappa$  に対するスティックスリップ運動の変化を示す。ここに、 $\xi = 0.1 \text{ s}^{-1}$  とし、他のパラメータと動的条件は図 4.13 と同じである。モデルパラメータ  $\kappa$  が十分に小さい場合、すべり速度に対して摩擦係数がほとんど低下しないため、系は安定すべりモードとなる。他方、パラメータ  $\kappa$  が十分に大きい場合、スティックスリップ運動の振幅および周期は小さくなる。これは  $\kappa$  が十分に大きい場合、静止摩擦の回復が十分に行われないうためである。

以上の検討より、静止摩擦から動摩擦への遷移速度が大きい場合か、あるいは静止摩擦係数の回復速度が大きい場合には、すべり摩擦運動の安定性は増加するが、これらの速度が競合してバランスが保たれるような場合は、各速度の値によらずに系のすべりモードは不安定となる。この事実を図 4.15 に示す。ここに、モデルパラメータの組合せは  $\kappa = 10 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 5 \text{ s}^{-1}$ ;  $\kappa = 50 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 5 \text{ s}^{-1}$ ; および  $\kappa = 100 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 10 \text{ s}^{-1}$  とし、他のパラメータおよび動的条件は図 4.13, 4.14 と同じである。

さらに、摩擦係数の変化速度を規定するモデルパラメータ  $\kappa$  および  $\xi$  のすべりモードに対する影響は、駆動速度  $V$ , スライダの質量  $M$  およびバネ剛性  $K$  などの系の動的条件にも依存すると考えられる。図 4.16(a)に、 $M = 1 \text{ kg}$ ,  $K = 50 \text{ N/mm}$  とし、 $V$  を  $0.0001$  および  $0.0005 \text{ mm/s}$  と変化させた際のバネの伸び  $U - \bar{u}$  と駆動変位  $U$  の関係を示す。また図 4.16(b)に  $V = 0.001 \text{ mm/s}$  とし、 $M/K$  の組合せを  $4 \times 10^{-5}$ ,  $8 \times 10^{-5}$  and  $20 \times 10^{-5} \text{ s}^2$  と変化させた際のバネの伸び  $U - \bar{u}$  と駆動変位  $U$  の関係を示す。ここに、モデルパラメータと見かけの接触面積は図 4.13 に示した安定すべりモードの条件 ( $\kappa = 10 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 0.01 \text{ s}^{-1}$ ) と等しくしている。図 4.16 と図 4.13 の比較より、スティックスリップ運動の振幅と周期は動的条件とモデルパラメータの組合せに強く影響を受けることが確認できる。このことは、摩擦係数の発展則と式(4.12)により、暗に示されている。数値解析と式(4.13)とを併用する提案アプローチ手法は、一般的な接触摩擦境界値問題におけるスティックスリップ運動の解析に有効であると考えられる。その理由は、スティックスリップ運動は対象としている系の動的条件のみならず、摩擦特性や接触物体の内部状態を合せて考慮せねばならないためである。

最後に、スティックスリップ運動時の静止摩擦以前の微小すべりの影響について検討を行うため、スティック状態からスリップ状態への遷移過程（図 4.2 の A 部分）の拡大図を図 4.17 に示す。ここに、モデルパラメータ  $r$  を  $100, 500, 1000, 2000$  および  $5000 \text{ mm}^{-1}$  と変化させ、他のパラメータは表 4.1 と同じものを採用している。また、動的条件は次のように設定してい

る.

$$M = 1 \text{ kg}, K = 50 \text{ N/mm}, V = 0.001 \text{ mm/s}, S = 1000 \text{ mm}^2.$$

図より、スティック状態からスリップ状態への連続的な遷移が、提案手法により合理的に表現されていることが確認できる。この滑らかな遷移過程は、クリープ領域でのスティックスリップ運動の基本的な特性であり、クリープ距離として実験的にも報告されている (Baumberger et al., 1995; Heslot et al., 1995)。また、パラメータ  $r$  が小さい場合には、正規すべり面内部での塑性すべり速度が発生し易くなり、遷移過程の曲率半径が大きくなっている。さらに、モデルパラメータ  $r$  が極端に小さい場合、特徴的なスティックスリップ遷移挙動を示す。パラメータ  $r$  が小さいケースは、柔性が高く粗いアスペリティや粒状体の場合に対応すると考えられる。

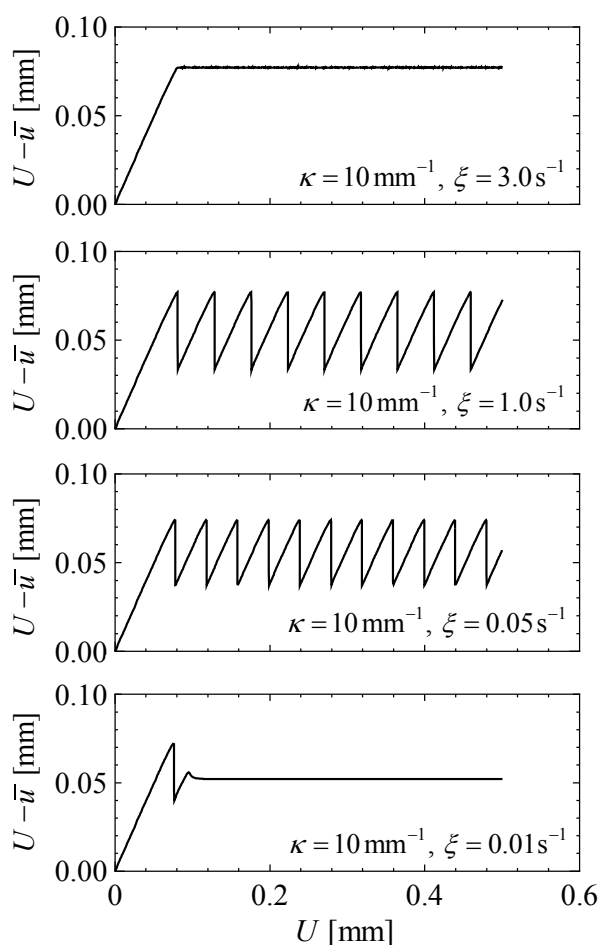


Fig. 4.13. Influence of material parameter  $\xi$  on the stick-slip motion ( $M = 1 \text{ kg}$ ,  $K = 50 \text{ N/mm}$ ,  $V = 0.001 \text{ mm/s}$ ).

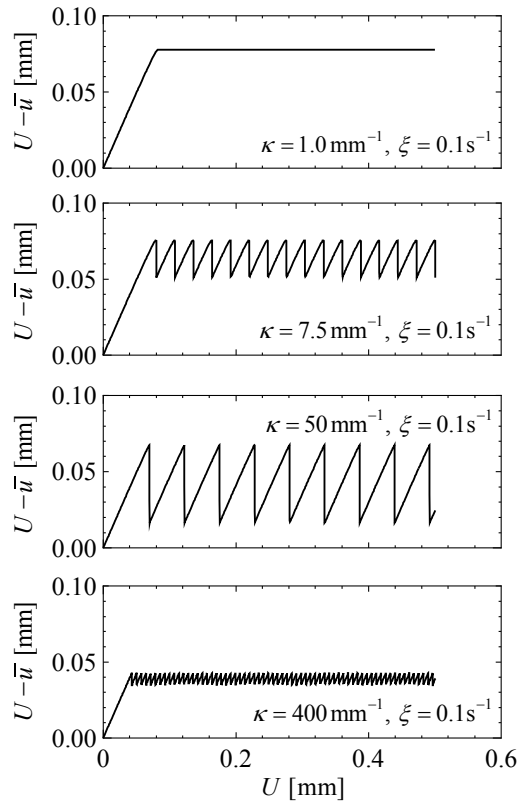


Fig. 4.14. Influence of material parameter  $\kappa$  on the stick-slip motion ( $M = 1$  kg,  $K = 50$  N/mm,  $V = 0.001$  mm/s).

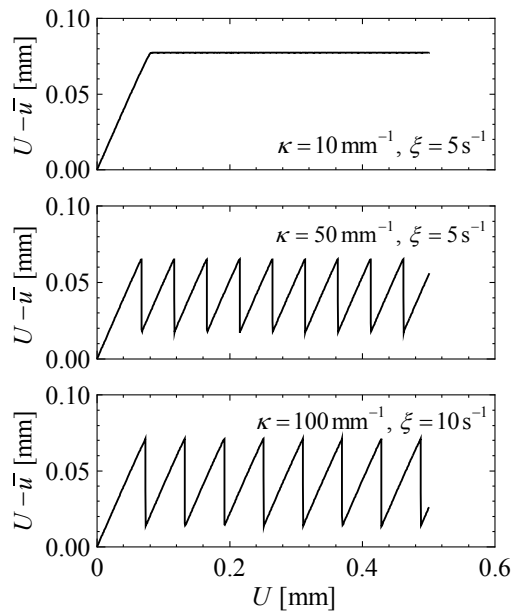
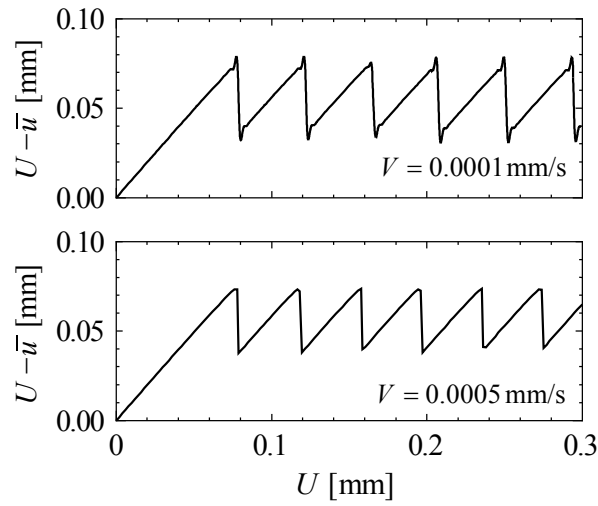
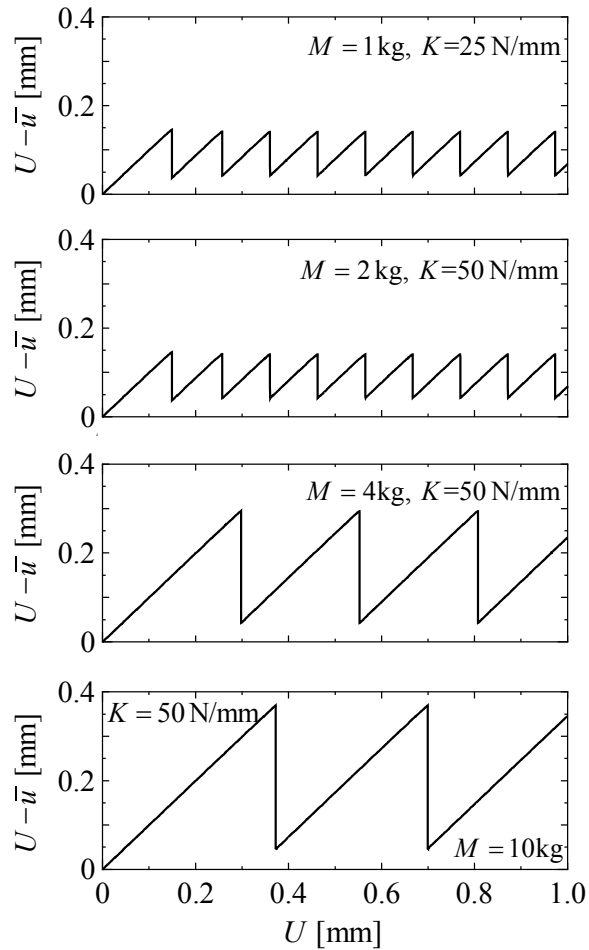


Fig. 4.15. Stick-slip motions for three combinations of parameters:  $\kappa = 10$  mm<sup>-1</sup>,  $\xi = 5$  s<sup>-1</sup>;  $\kappa = 50$  mm<sup>-1</sup>,  $\xi = 5$  s<sup>-1</sup>; and  $\kappa = 100$  mm<sup>-1</sup>,  $\xi = 10$  s<sup>-1</sup>.



(a) various driving velocities  $V$  for  $M = 1$  kg and  $K = 50$  N/mm



(b) various combinations of  $M/K$  for  $V = 0.001$  mm/s.

Fig. 4.16. Relations between the spring elongation  $U - \bar{u}$  and the driving displacement  $U$ .



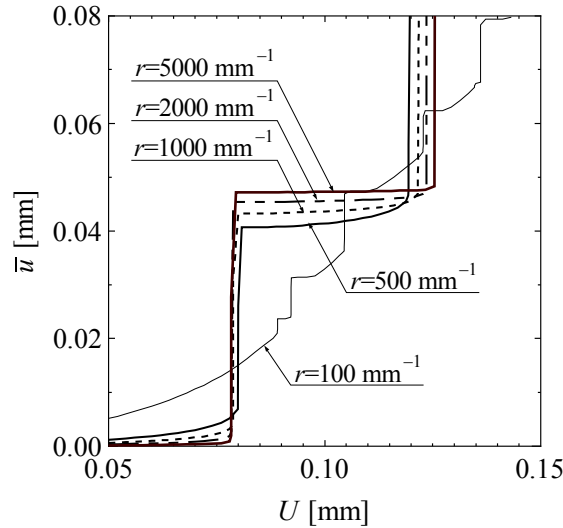


Fig. 4.17. Close-up of the transition process from the stick state to the slip state, and the effect of microscopic sliding prior to the static friction on the stick-slip motion.

## 4. 4 摩擦試験結果との比較

境界値問題の解析においては、試験結果との比較による構成式の事前検証が不可欠となる。そこで本節では、4.3 節で述べた rate form approach について様々な動的条件および材料条件下での摩擦試験結果との比較例を示し、スティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦現象に対する適用性を示す。

### 4. 4. 1 試験概要

速度依存性下負荷摩擦モデルの有効性を検証するために、摩擦試験結果との比較を行う。図 4.18 に比較に用いた摩擦試験装置の模式図を示す。ここに、試験装置はステンレス製の厚いプレートにより支持されている。様々な材料での試験が容易に行え、且つ摩耗の影響を極力除外できるため、Heslot et al.(1994)の装置と同様のシステムを採用している。図に示すように、固定された下部をベース、稼働する側の上部をスライダと称する。また、このスライダ（質量  $M$  g）が重りの役割を果たす。ベースとスライダのそれぞれの表面に試験片を接着して滑らすことで、対象とする接触面におけるすべり摩擦の時系列データを取得できる。なお、スライダ側に接着する試験片のサイズは面積  $40 \times 40 \text{ mm}^2$ 、高さ  $5 \text{ mm}$  である。

試験で用いた供試材料の組合せとそれらの表面粗さを表 4.2 に示す。供試材料としては、スティックスリップ運動を含む速度依存性摩擦現象に関しての研究実績(e.g. Persson, 2000; Baumberger et al., 1994; Panait et al., 2004)があるボード紙、SUS420 および S45C を採用してい

る。加えて、機械システム内の接触要素としての利用が増している汎用エンジニアリングプラスチックも採用している。

試験では、スライダは速度  $V$  mm/s で駆動する高剛性の X ステージ(中央精機, ALS-903-H1S)の先端に取り付けられた板バネによって移動させられる。ここで、板バネの剛性は装置の他の部分と比べて十分に小さいため、板バネのバネ定数  $K$  N/mm をシステムの剛性と見なして良い。スライダが滑る際に板バネがたわむが、このたわみ量を渦電式変位計(キーエンス, EX614)で測定することでバネ力(安定すべりの場合は摩擦力と等価)を評価できる。板バネとスライダ中央の接触形態は半円筒を介した線接触としており、モーメントの影響を除外している。

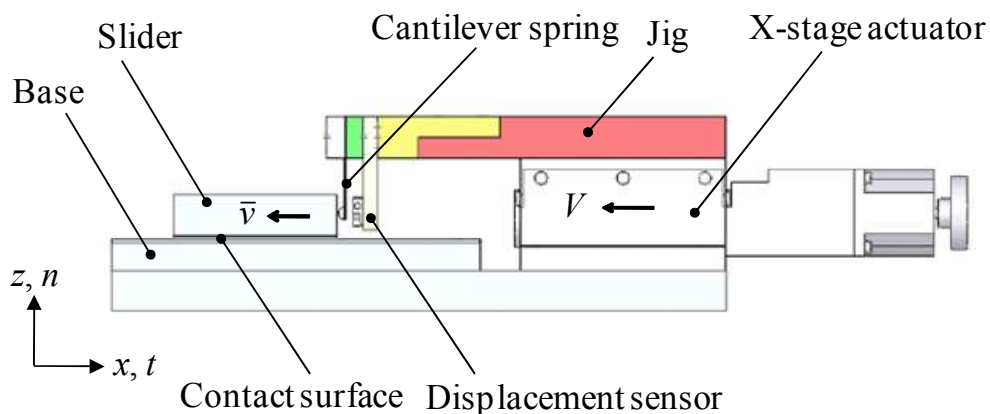


Fig. 4.18. Experimental setup.

Table 4.2 Combinations of test pieces and associated surface roughnesses.

Slider (Ra [ $\mu\text{m}$ ])	Base (Ra [ $\mu\text{m}$ ])
Bristol board (3.1)	Bristol board (3.1)
Bristol board (3.1)	SUS420 (2.5)
Bakelite (2.6)	S45C (2.5)
Polyoxymethylene (2.45)	Polyoxymethylene (2.45)

全ての試験は、室内環境にて実施した。ここに、平均室温は 23 °C、平均湿度は 24 %である。各試験の前に試験片表面をエタノールにて洗浄し、摺動面を十分に馴染ませた後に計測を行った。また、摺動前の静止時間は、300 s 以上とした。そのため、静止摩擦係数は十分に飽和しており、 $\mu = \mu_0 \approx \mu_s$  と見なせる。

#### 4. 4. 2 試験結果との比較

いま、図 4.18 の摩擦試験装置を系として捉えると、図 4.1 と等価であり、さらに式(4.1)の運動方程式と等価であることがわかる。したがって、試験結果との比較には、4.3 節で述べた、速度依存性摩擦モデルを導入した 1 自由度スティックスリップ運動の数値解析手法を利用すれば良いこととなる。

図 4.19(a)~4.22(a)に、表 4.2 の各試験片間の摺動面におけるバネ力の経時変化の試験結果を示す。ここに、バネ定数は  $K=6.87$  N/mm、駆動速度は  $V=0.04$  または  $0.4$  mm/s とし、4 水準のスライダの質量  $M=500, 1500, 2500$  および  $3500$  g の下で試験を行った。また、図 26.19(b)~26.22(b)には、rate form approach による数値解析結果を示している。ここに、それぞれの摺動面の条件に対応したモデルパラメータの組合せを表 4.3 に示す。モデルパラメータは次の手順で決定すれば良い：まず、スティックスリップ運動の振幅を参照して  $\mu_s$  と  $\mu_k$  を決定する。次に、静止摩擦の時間依存性とスティックスリップ運動の周期から  $\xi$  と  $\kappa$  を決定する。また、 $r$  は微小すべりの程度から決定できる。なお、初期条件の影響を受け易いスティックスリップ第 1 周期を除いて比較することにより、モデルパラメータの決定を行っている。一例として、表 4.3(a)の場合のパラメータ値についての詳細を説明する。まず、バネ力の振幅の最大値および最小値を参照して、 $\mu_s$  および  $\mu_k$  をそれぞれ 0.16 および 0.12 と定めた。ここに、 $\mu_k$  は摩擦係数の最小値であり、スティックスリップ振幅の振動中心には必ずしも対応しない。すなわち、下負荷摩擦モデルは速度負勾配特性によりすべり速度に依存して摩擦抵抗は変化するため、 $2\mu_k - \mu_s$  を加速・減速を伴うスティックスリップ振幅の最小値に対応させる必要はない。次に、十秒のオーダーで静止摩擦係数が回復すると仮定し、 $\xi=0.1$  s<sup>-1</sup> と決定した。そして、 $\kappa$  をバネ力のスティックスリップ振幅を参照して決定した。ここに、 $\kappa=10$  mm<sup>-1</sup> は接触面の履歴が臨界すべり距離 0.1 mm 程度で失われることに対応している。最後に、0.01 mm オーダーの微小すべりが発生した後、巨視的なすべりが発生すると仮定して、 $r=1000$  mm<sup>-1</sup> と定めた。一般に、スティックスリップの振幅は垂直荷重が大きくなるとともに増大することが知られている。図から確認できるように、速度依存性下負荷摩擦モデルを用いた提案アプローチ手法により、材料の組み合わせに依らずにスティックスリップ運動の時系列応答を再現できる。

Table 4.3 Friction model parameters for one-degree-of-freedom system.

(a) Bristol board-Bristol board

$\mu_s = \mu^0$	0.16	$\mu_k$	0.12
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	10 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	0.1 s <sup>-1</sup>

(b) Bristol board-SUS420

$\mu_s = \mu^0$	0.24	$\mu_k$	0.19
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	50 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	0.2 s <sup>-1</sup>

(c) Bakelite-S45C

$\mu_s = \mu^0$	0.25	$\mu_k$	0.18
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	50 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	0.08 s <sup>-1</sup>

(d) POM-POM

$\mu_s = \mu^0$	0.38	$\mu_k$	0.18
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	100 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	1.0 s <sup>-1</sup>

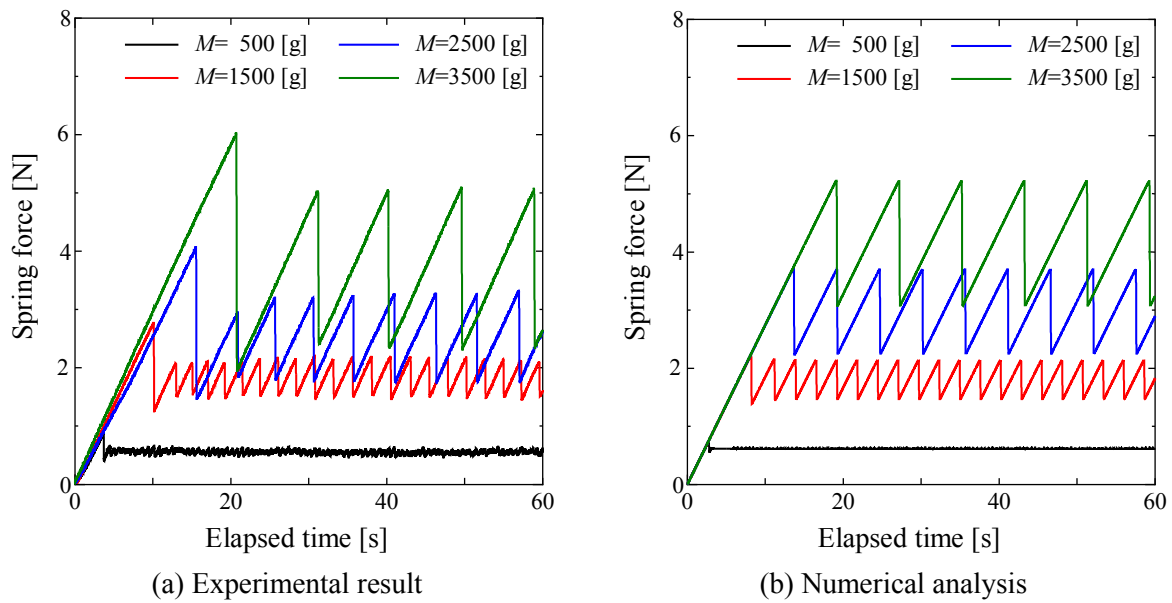


Fig. 4.19. Stick-slip motion of Bristol board-Bristol board contact. Dynamic conditions are as follows: four types of normal loads under  $V = 0.04$  mm/s, and  $K = 6.87$  N/mm.

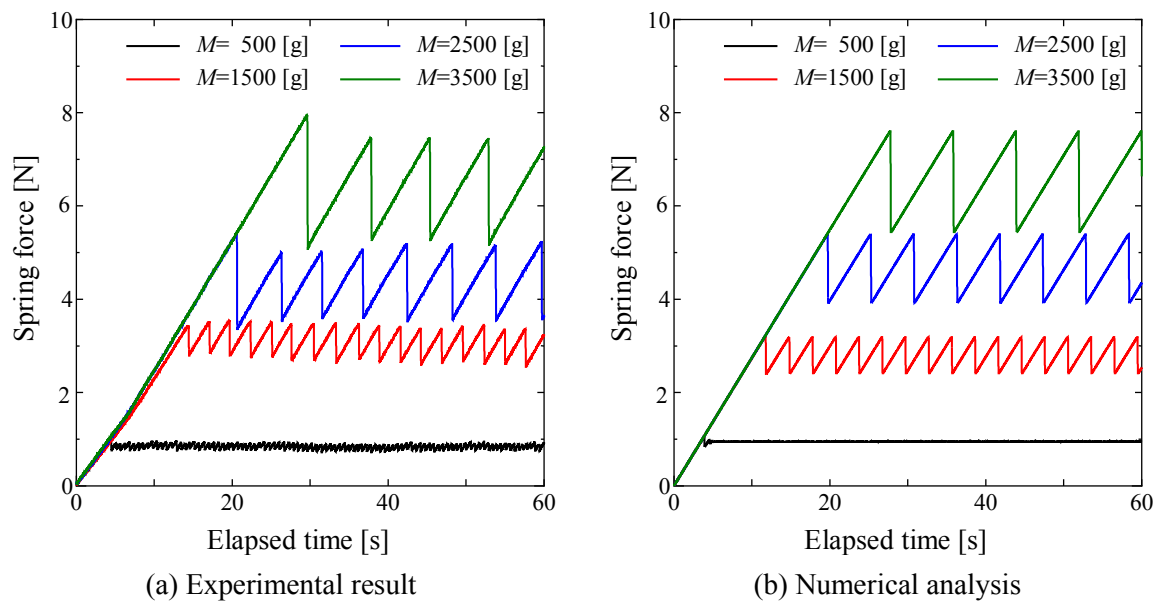


Fig. 4.20. Stick-slip motion of Bristol board-SUS420 contact. Dynamic conditions are as follows: four types of normal loads under  $V = 0.04$  mm/s, and  $K = 6.87$  N/mm.

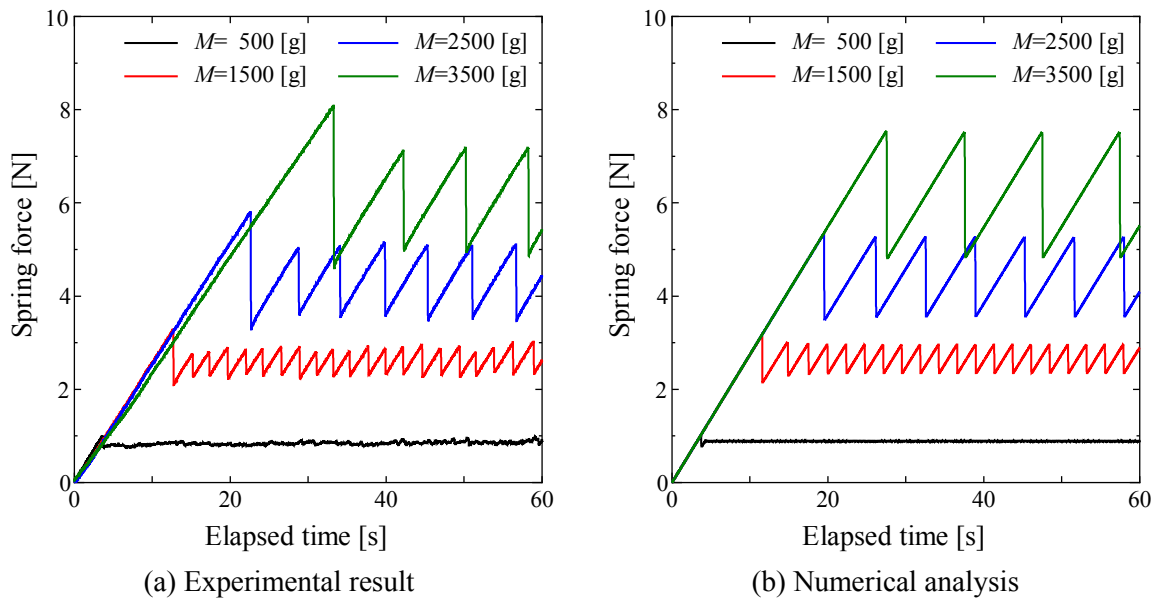


Fig. 4.21. Stick-slip motion of Bakelite-S45C contact. Dynamic conditions are as follows: four types of normal loads under  $V = 0.04$  mm/s, and  $K = 6.87$  N/mm.

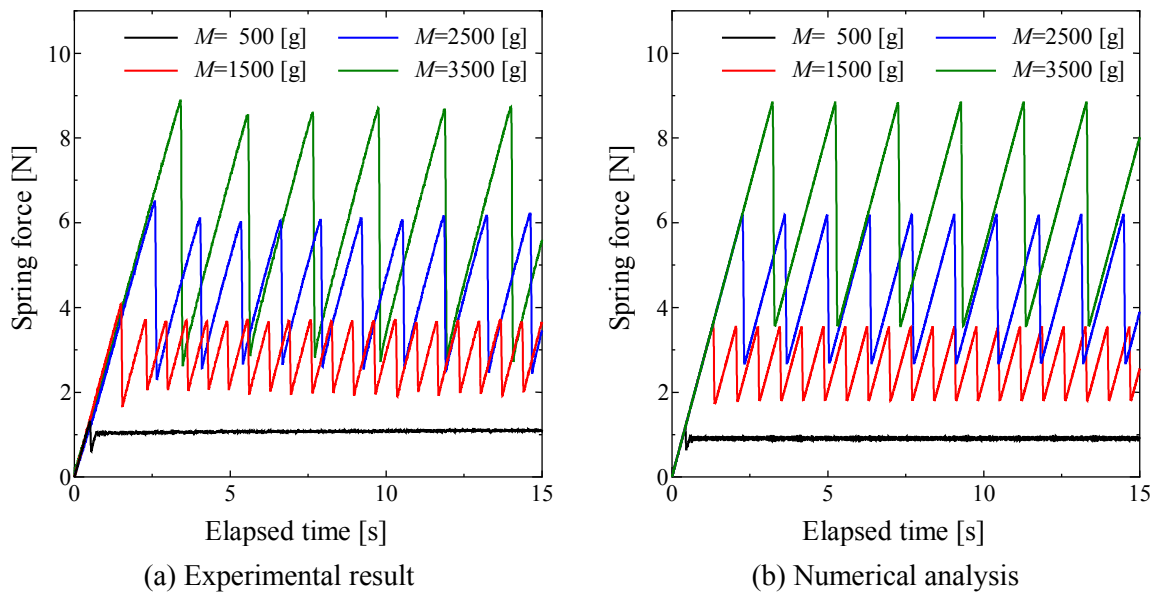
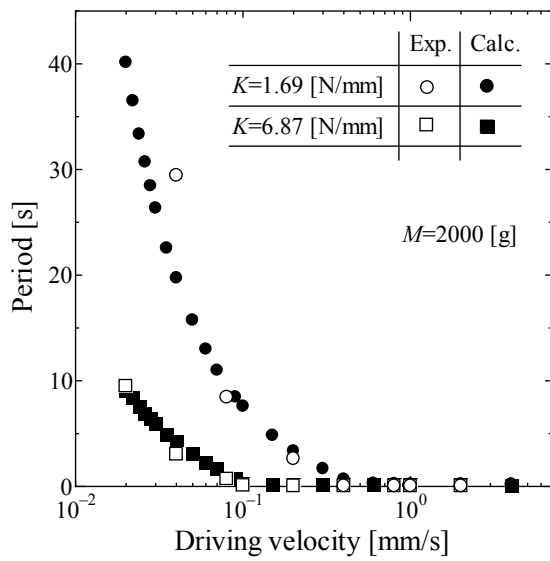
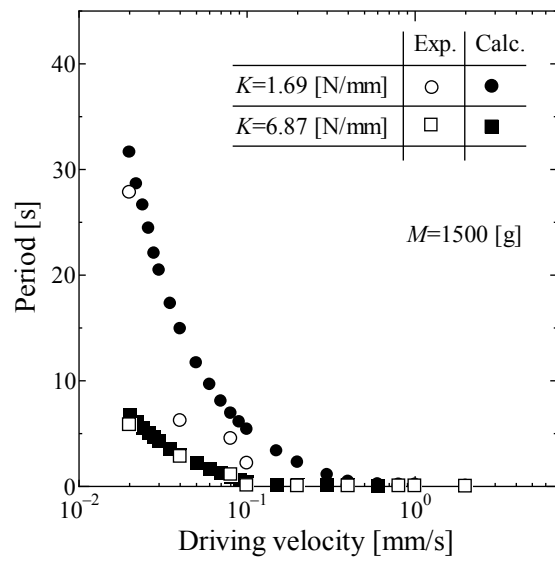


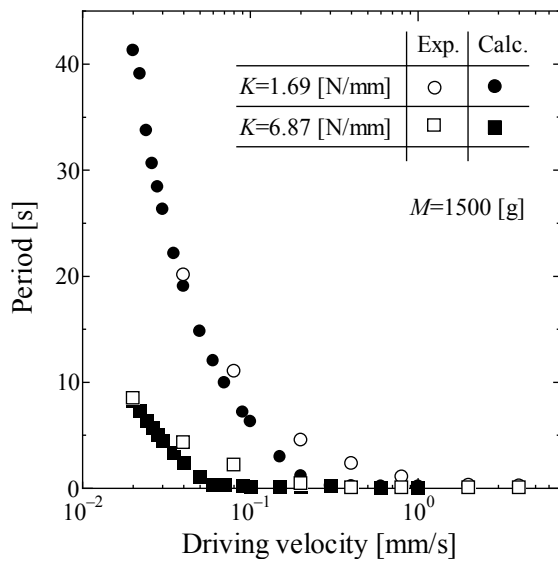
Fig. 4.22. Stick-slip motion of POM-POM contact. Dynamic conditions are as follows: four types of normal loads under  $V = 0.4$  mm/s, and  $K = 6.87$  N/mm.



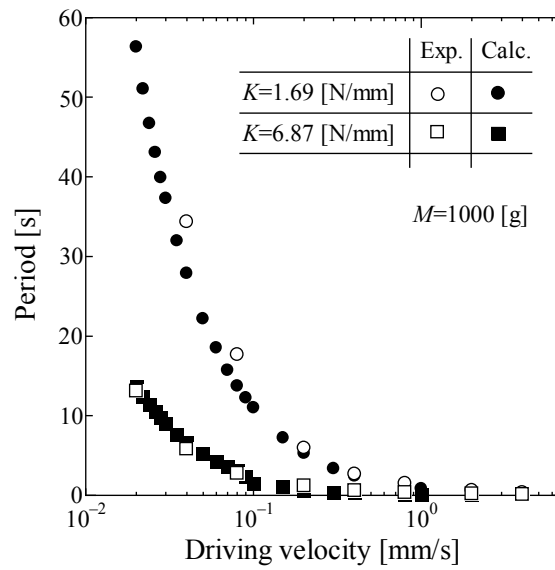
(a) Bristol board-Bristol board



(b) Bristol board-SUS420



(c) Bakelite-S45C



(d) POM-POM

Fig. 4.23. Variations in spring force period with driving velocity  $V$ .

次に、スティックスリップ運動の周期に及ぼす測定システムの動的条件( $K, V$ )の影響について検討を行う。図 4.23 に摩擦力変動の周期と駆動速度の関係を示す。ここに、ばね定数には  $K=1.69$  および  $6.87$  N/mm の 2 種類を採用し、一定のスライダの質量  $M$  の下、駆動速度  $V$  を変化させている。また、図 4.19 に示すように、初期条件の影響を受ける第 1 周期を除いた数周期の平均値として周期を算出し、さらに 5 回の試験の平均値として評価した。これらの図では、試験結果を○印、数値解析結果を●印で表している。システムの剛性および駆動速度が増加すると、スティックスリップ運動の周期は減少することは広く知られているが、速度依存性下負荷摩擦モデルを用いた数値解析により、試験結果の傾向を定量的に評価できていることが確認できる。ここに、速度依存性摩擦モデルのパラメータは、図 4.19~4.22 のものと同じものを用いている。このように、同一のパラメータを用いることで、異なる動的条件下( $K, V, M$ )での試験結果を再現可能な点は、速度依存性下負荷摩擦モデルが境界値問題へも十分に応用できることを示唆している。

他方、図 4.18 に示した摩擦試験装置とは異なる機構を有する装置も多数存在し、多くの技術者や研究者に利用されている。そこで、本報で紹介した数値解析手法の汎用性やロバスト性を示すために、異なる試験装置によって得られた試験結果との比較を行ってみる。比較対象として、Maegawa et al.(2010)により報告されている「PMMA-PMMA」間のスティックスリップ運動の試験結果を採用する。図 4.24 に様々な垂直荷重条件下  $F_n$  での摩擦力の経時変化の比較を示す。ここに、駆動速度は  $V=0.1$  mm/s である。またシステムのばね定数は  $K=800$  N/mm であり、これはロードセルの剛性に相当する。図 4.25 には、3 水準の駆動速度条件下( $V=0.01, 0.1, 1.0$  mm/s)での摩擦力の経時変化を示している。ここに、垂直荷重は  $F_n=400$  N である。これらの図からわかるように、異なる試験装置を用いた場合においても、種々の条件下でのスティックスリップ運動の振幅および周期を数値解析により評価できている。なお、摩擦モデルのパラメータは表 4.4 に示す通りである。

Table 4.4 Friction model parameters for comparison with experimental results obtained by Maegawa et al. (2010).

$\mu_s = \mu^0$	0.52	$\mu_k$	0.41
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	150 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	50 s <sup>-1</sup>



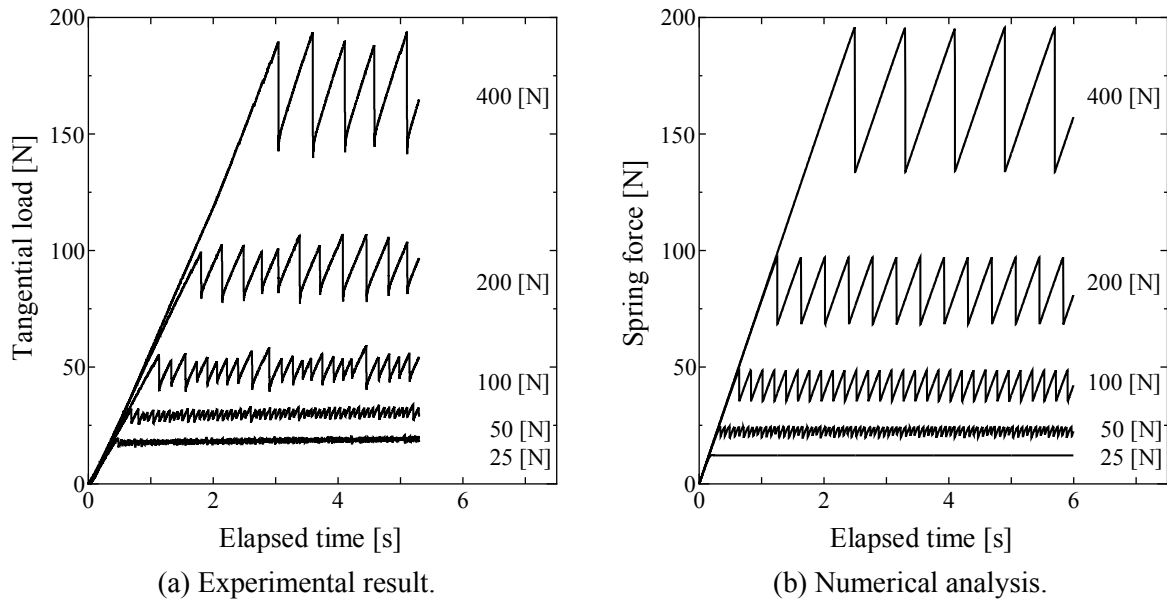


Fig. 4.24. Comparison of stick-slip motion of PMMA-PMMA contact. Dynamic conditions are as follows: five types of normal loads under  $V=0.1$  mm/s, and  $K=800$  N/mm.

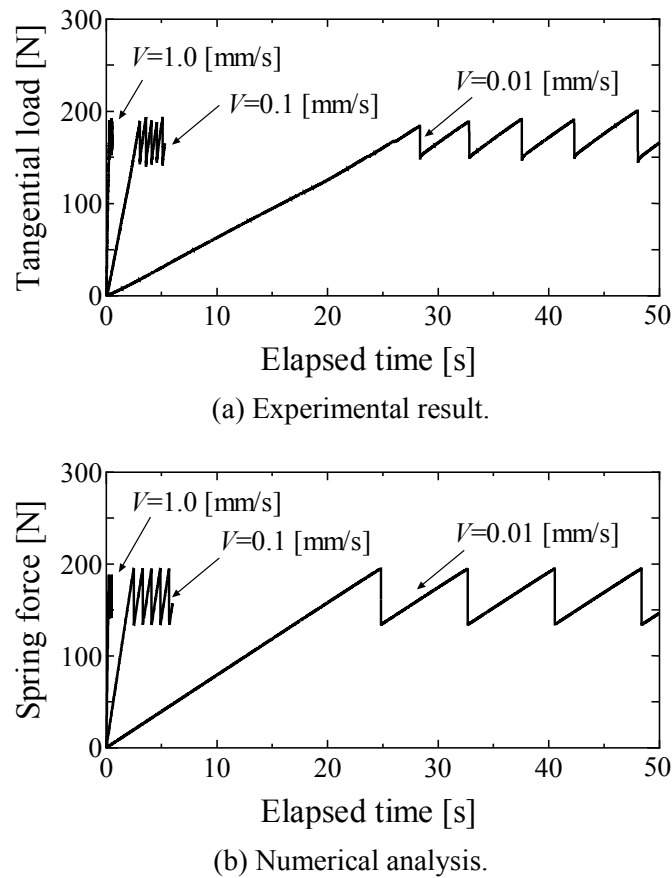


Fig. 4.25. Comparison of stick-slip motion of PMMA-PMMA contact under various driving velocities. Normal load  $F_n = 400$  N, and spring stiffness  $K = 800$  N/mm.

スティックスリップ遷移現象の特徴の一つとして、バルク全体の巨視的なすべり (gross sliding) の発生以前に、微小すべり (microscopic sliding) が観察されることが挙げられる。前者はフレッシング摩耗と関連し、後者はフレッシング疲労と関連することが指摘されている。また、微小すべりは精密機械システムの位置決め性能とも密接に関連することから、これまでも多くの研究がなされている (e.g. Courtney-Pratt and Eisner, 1957; Berthoud and Baumberger, 1998; Fillippi et al., 2004; Kartal et al., 2011)。これらの研究では、アスペリティの弾塑性変形と微小すべりを関連付け、多点接触理論を用いた接線接触剛性に対する解析的な検討や、画像相関法などを利用した計測技術に関する実験的な検討が行われている。しかしながら、微小すべり現象と摩擦モデルの応答特性を関連づけた研究は少ない。そこで、摩擦基準以下での接線接触応力の繰返し負荷に対してもすべり変位の集積が記述され速度依存性下負荷摩擦モデルを用いて、スティックスリップ遷移時の微小すべりの影響について、摩擦試験と数値解析の比較を行ってみる。図 4.26 に「A1050P-SUS420」間の摺動面におけるスティックスリップ運動の試験結果を示す。ここに、グラフの横軸は時間、縦軸はスライダのすべり量である。ノイズの影響が若干見られるが、スティックスリップ遷移が不連続ではなく、滑らかに生じている様子がわかる。図 4.27 に数値解析結果を示す。ここに、モデルパラメータは表 4.3(b) と同じであり、システムの動的条件は図 4.18 の試験と一致させてある。微小すべりの程度、すなわち滑らかな接触応力-すべり変位関係を規定するパラメータ  $r$  の値を適切に設定することにより、数値解析によってもスティックスリップ遷移時の微小すべりを表現できることが確認できる。なお、古典摩擦モデル ( $r \rightarrow \infty$ ) を用いた場合には、スティックスリップ遷移は不連続となり、これは境界値問題において計算の安定性を損なう一要因となり得る。

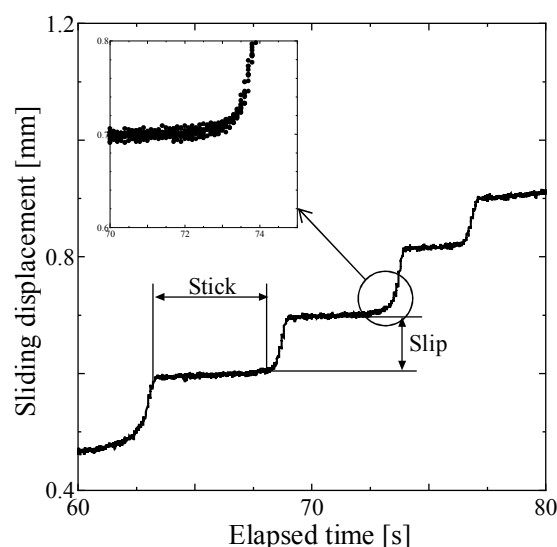


Fig. 4.26. Transition process from the stick state to the slip state obtained by experiment, where A1050P-SUS420 are adopted for contact surface ( $K=6.87$  N/mm,  $V=0.02$  mm/s,  $M=2000$  g) .

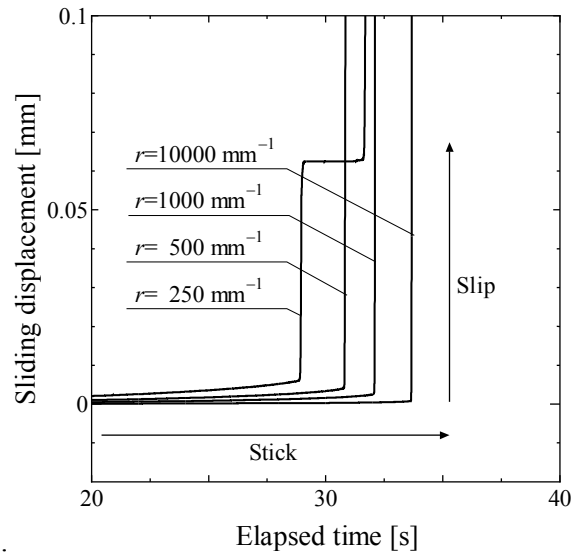


Fig.4.27. The transition process from the stick state to the slip state obtained by numerical analysis ( $K=6.87$  N/mm,  $V=0.02$  mm/s,  $M=2000$  g).

#### 4. 5 摩擦試験と摩擦モデルの関係に関する考察

有限要素法などの数値解析手法を用いて接触・摩擦現象の解析を行う際には、変形に関する構成モデルと同様に、精緻かつ汎用的な摩擦モデルが不可欠となる。特に、スティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦現象の数値解析では、Oden and Martins(1985)が指摘しているように、シンプルだが実験事実と乖離するような摩擦モデルよりは、寧ろ摩擦力とすべり速度の複雑な関係を記述し得るモデルが必要となる。3章で提案した速度依存性下負荷摩擦モデルや state variable モデル(e.g. Rice and Ruina, 1983; Rice et al., 2001)は、静止摩擦の時間依存性と摩擦係数の速度負勾配の競合を統一的に表現できるため、数値解析ではこれらのモデルの使用が望ましい。ここで重要となるのは、摩擦試験結果を基にした摩擦モデルのパラメータの決定方法である。一般に、変形に関する構成モデルのパラメータは材料試験結果（例えば、応力-ひずみ関係）とのフィッティングにて決定することができる。しかし、すべり摩擦に関しては、「摩擦モデルと摩擦試験の関係」は「材料の変形に関する構成モデルと材料試験の関係」と大きく異なる。これは、たびたび指摘されるように、すべり摩擦特性が速度依存性だけでなく、システム依存性を示すためである。したがって、摩擦モデルの妥当性のための摩擦試験結果との比較や、数値解析のためのパラメータの同定においては、このことに十分注意を払う必要がある。

本節では、摩擦試験と材料試験、そして境界値問題の関係性についての考察を行うとともに、摩擦モデルのパラメータ決定において留意すべき点を整理する。

#### 4. 5. 1 代表的な摩擦試験装置の機構

まず、代表的ないくつかの摩擦試験装置について概説する。図 4.28 に代表的な摩擦試験装置の機構を示す。ここに、対象とする摩擦モデルは摩耗現象には対応していないため、摩耗試験に関する記述は特に設けない。

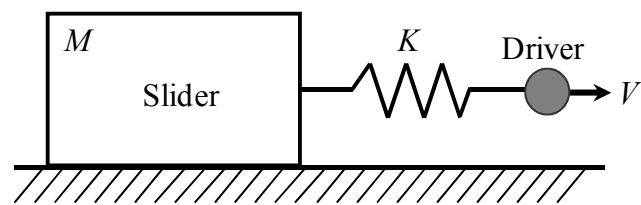
図4.28内のType Iは定駆動試験であり、図4.18の摩擦試験装置もこれに属する。ドライバの駆動速度 $V$ は試験中に一定であり、摩擦力は剛性 $K$ のバネの伸びから算出される。ただし、不安定すべりを生じる場合は加速度の影響を含むため、厳密にはバネ力として評価される。また、すべり変位は、バネの伸びとドライバの変位量から評価できる。本試験装置のメリットは動的条件（駆動速度 $V$ 、バネ剛性 $K$ 、スライダの質量 $M$ ）を自在に組み合わせることができる点が挙げられる。ただし、システムの柔性に影響を与えないように、ドライバとして利用するステージなどは高剛性のものが望ましい。なお、Type Iと等価な試験機構としてType I'がある。このような試験装置では、スライダに垂直荷重を作用させ、ベース側を駆動することで摺動させる。比較的高荷重条件下の測定を行う際に良く採用されているようである。両側から試験片を挟み、垂直荷重を作用させた状態で試験片を摺動する装置もこのタイプに属する。このような装置は、微小すべりの測定や繰返し（往復摺動）測定への適用性が優れていることから、フレットング問題などでも利用されている。また近年では、変位計の代わりに画像処理を用いてすべり速度やすべり変位を計測している装置も多数開発されている(Kartal, 2011)。

Type IIは接線荷重負荷一定試験であり、変位センサによりスライダの動きを測定する。本機構は傾斜板上にスライダ設置して滑らせ、その際の角度から摩擦係数を求める試験装置と等価である。本機構にて変更できる動的条件は、スライダの質量のみである。

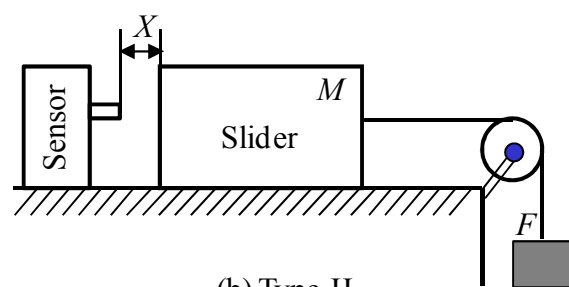
Type IIIはすべり出し試験であり、 $KV$ が一定である。ここに、Type IIIにおける剛性 $K$ はアクチュエータ（またはロードセル）の剛性である。アクチュエータの剛性は、固有振動数をハンマリング測定するなどして求めることができる。前節での比較に用いた Maegawa et al.(2010)の試験装置はこれに属する。

上述したように、摩擦モデルのパラメータを決定するには、摩擦係数とすべり速度、あるいは時間との関係が最低限必要となる。さらに、詳細な摩擦モデルを用いる場合は、弾塑性構成式の応力-ひずみ関係に相当する摩擦力-すべり変位関係の使用が望ましい。したがって、静止摩擦や動摩擦係数、あるいはそれらに基づくすべり面形状を求める用途以外では、Type IIの摩擦試験装置の使用は避けるべきである。厳密に言えば、Type IIで得られた結果は速度非依存型の摩擦モデルのパラメータ（例えば、定数としての摩擦係数）を決める際にのみ有効であり、適用できる境界値問題の種類も限定される。一方、Type IとType IIIの試験装置では、様々な動的条件( $K$ ,  $V$ ,  $M$ )下での摩擦力の経時変化や摩擦力-すべり変位関係、すべりモード

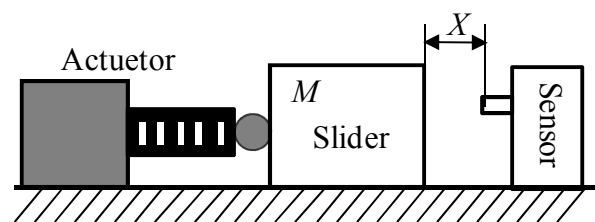
の分岐境界を得ることができる。



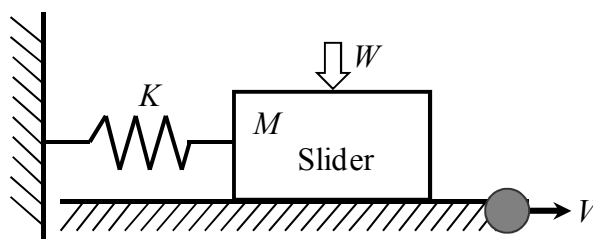
(a) Type I



(b) Type II



(c) Type III



(d) Type I'

Fig.4.28. Typical friction test apparatuses.

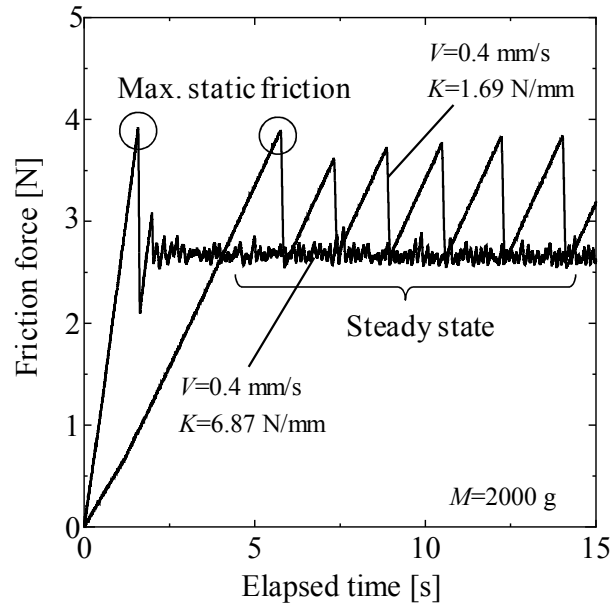


Fig. 4.29. Variation spring force with elapsed time for Bakelite—S45C contact.

図 4.29 に一例として, Type I に属する図 4.18 の試験装置を用いて測定した「Bakelite—S45C」間の摺動面における摩擦力の経時変化の測定例を示す. ここに,  $M=2000\text{ g}$  である. システムの剛性  $K$  が大きく, 駆動速度  $V$  が大きい場合には安定すべりとなり, スティックスリップが生じない (あるいは, スティックスリップ運動が生じても振幅・周期ともに小さい). このため, 定常状態では駆動速度  $V$  とすべり速度  $\bar{v}$  が一致し, すべり速度に対する動摩擦係数は容易に求まる. しかしながら, システムの動特性や供試材料によっては, スティックスリップ運動が発生してしまうため, パラメータの決定はより複雑となる場合もある. 各種動的条件下でのスティックスリップ運動と安定すべりのモード遷移傾向は, 1.1 節で述べた “dynamical phase diagram” を参考にすれば良い(cf. Baumberger et al., 1994; Persson, 2000).

#### 4. 5. 2 すべり面の同定

摩擦モデルのパラメータを決定する前に, 摩擦基準 (すべり面) の関数形を選択せねばならない. 境界値問題の解析で想定する材料や境界条件に応じた垂直荷重レベルで摩擦抵抗を測定し, Coulomb の摩擦基準やせん断摩擦基準, あるいは非線形の垂直荷重依存型の摩擦基準を選定する. なお, 極高垂直荷重レベルでの摩擦試験が困難な場合は, せん断摩擦則で用いられるカットオフ圧力の参照値として降伏応力の関数を採用する例もある (Bay and Wanheim, 1976; Petersen et al., 1997). 他方, 6 章で詳述するが, すべり摩擦の異方性がある場合には, 様々な方向に滑らせる際の摩擦抵抗を測定し, すべり面を決定する必要がある.

### 4. 5. 3 摩擦モデルのパラメータの同定に関する一考察

通常、すべり面の具体的関数形を決定した後、試験結果との比較により摩擦モデルのパラメータを決定する。本節では、変形に関する弾塑性構成式のパラメータ決定方法を参照しつつ、摩擦モデルのパラメータ決定方法について考察する。

一般に、物体の変形に関する非弾性構成式は、次式で記述される。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.16)$$

ここに、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  は客観性のある応力速度テンソル、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  はひずみ速度テンソル、 $\mathbf{D}$  は4階の弾塑性係数テンソルである。式(4.16)のような弾塑性モデル（あるいは、粘弾塑性モデル）のパラメータは、以下の手順で決められる。

- 1) 降伏関数を決定する（例えば、Mises の条件、Tresca の条件、Hill の直交異方性、etc.）。
- 2) 硬化則を決定する（例えば、等方硬化則、移動硬化則、回転硬化則、複合硬化則、etc.）。
- 3) 応力-ひずみ曲線（例えば、単調負荷、繰返し負荷、圧縮・引張・せん断・ねじり）と直接フィッティングする。
- 4) 必要に応じて数種類の負荷速度や温度条件下での結果とも比較する。

変形現象の有限要素解析に当たっては、荷重条件や負荷方式などの境界値条件、あるいは幾何条件によらずに、得られたパラメータ値を要素の積分点毎の構成式に導入すれば良い。

一方、摩擦モデルは次式のように記述される。3章で述べた弾塑性論に基づく摩擦モデルの場合は

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{v}} \quad (4.17)$$

あるいは、state variable モデル(Rice and Ruina, 1983; Rice et al., 2001)の場合は

$$f_i = \bar{S}(f_n, \bar{\mathbf{v}}, \theta, \dot{\theta}) \quad (4.18)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  は摩擦に関する2階の弾塑性係数テンソル関数である。また、式(4.18)の関数 $\bar{S}(\ )$  は摩擦力 $f_i$  がすべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$  と状態変数 $\theta$  およびその発展則 $\dot{\theta}$  の関数であることを意味している。これらのモデルには状態変数とその発展則が導入されているため、履歴依存性を示すすべり摩擦挙動を適切に評価できる。式(4.17)や(4.18)のような摩擦モデルのパラメータの決定の際に留意すべき点について、以下に述べる。

4.5.1 で述べた Type I と III の摩擦試験装置を数式で記述してみると、式(4.1)のような1自由度の運動方程式になる。すなわち、

$$M\bar{a}_i = K(U_i - \bar{u}_i) + S f_i$$

式(4.17)や(4.18)の摩擦モデルと上式(4.1)を比べてみると、その構造が明らかに異なることがわかる。式(4.17)や(4.18)は、式(4.1)の運動方程式の一項である $f_i$ を記述しているに過ぎない。

したがって、式(4.17)や(4.18)の摩擦モデルのパラメータは摩擦試験結果で得られる見かけの

摩擦（バネ）力変動と直接フィッティングすることはできないこととなる。これは変形に関する要素試験と異なり、摩擦試験は系の負荷方式や幾何条件、動的特性や材料特性によっては加速度項の影響が無視できないためである。

いま、摩擦試験において、スライダが等速運動（見かけ上の停止も含む）をしていると仮定すると、式(4.1)は

$$f_t = K(\bar{u}_t - U_t) \quad (4.19)$$

となる。この場合は、摩擦力とすべり変位（経過時間）の関係が得られるので、(4.17)や(4.18)などの摩擦モデルと摩擦試験をダイレクトに比較できる。また、ロードセル（あるいは、バネ）の剛性が非常に大きい場合には、定常状態では等速運動となるため、この場合も摩擦モデルと摩擦試験を直接比較できる。しかし、速度負勾配、あるいは速度依存性が見られる（静止摩擦と動摩擦が異なる）場合、剛性の低い摩擦試験装置を用いて幅広い駆動速度範囲で等速運動を実現することは難しい。また、等速運動のみで得られたモデルパラメータでは、これらを用いた境界値問題の数値解析により安定・不安定の両すべりモードを検討するには不十分であることに注意せねばならない。

以上をまとめると、摩擦試験装置は要素(*element*)や物質点(*material point*)としてではなく系(*system*)として捉えなければならず、摩擦モデル単独では無く運動方程式により記述しなければならないこととなる。言いかえると、摩擦試験は要素試験（材料試験）ではなく、境界値問題として考えねばならず、4.4節で述べたように、運動方程式を解くことで、摩擦モデルのパラメータのフィッティングを行わなければならないこととなる。すなわち、式(4.1)に式(4.17)や(4.18)の摩擦モデルを実装し、数値的にこれを解くことではじめて試験結果との厳密なフィッティングが可能となる。これより、摩擦特性の速度依存性やシステム剛性依存性、あるいは運動方程式に形式に対応する負荷方式依存性（側方押し出しや上方せん断、回転型による周期境界など）などを考慮できる。このことは、「材料の変形に関する構成式と材料試験の関係」と「摩擦モデルと摩擦試験の関係」の大きな相違点であり、すべり摩擦特性のシステム依存性の一因でもある。ここに、フィッティングは一種類の動的条件下では行うのではなく、数種類で行うのが望ましいのと、薄い試験片を準備して剛性の高いスライダやベースに貼り付けるなどの工夫をして、バルクの柔性的の影響を取り除いた条件下での試験を行うのが望ましい。なお、変形に関する要素試験では、標線間の変形は一様であるため（ひずみレベルがそれほど大きくない場合には）、ダイレクトなフィッティングの妥当性が保証されている<sup>註2)</sup>。

註 2) 材料試験の場合においても、せん断帯の発生や座屈などの分岐現象、あるいは塑性不安定現象が生じる場合は、もはや要素試験として保証されない。



## 4. 6 結 言

本章では、有限自由度の接触境界値問題の解析の前段として、1自由度バネ－質点系の運動方程式に Coulomb の摩擦基準に基づく速度依存性下負荷摩擦モデル実装することにより、スティックスリップ運動に対する新しいアプローチ手法を提案した。速度形の摩擦モデルに基づく本手法を rate form approach と称する。数水準の動的条件下（駆動速度  $V$ 、バネ剛性  $K$ 、スライダの質量  $M$ ）および種々の摩擦条件下でのスティックスリップ運動の数値実験を実施し、提案アプローチ手法の妥当性を検証した。その結果、既往の研究報告における定性的な傾向を記述し得ることを示し、提案手法の有効性を示した。また、すべりモードの不安定性は、系の動的条件のみならず、摩擦抵抗の速度依存性や巨視的すべり発生以前の微小すべりなどの摩擦特性にも密接に係ることを示した。さらに、スティックスリップと安定すべりモード間の遷移現象に関する考察を実施し、摩擦係数差  $\Delta\mu$  あるいはバネの伸びを用いた簡易なクライテリオンを提案した。動的条件が変化した場合の数値解析結果に適用した結果、提案クライテリオンを用いた方法の有効性が認められた。

次に、摩擦試験結果との比較を実施し、検討の範囲内においては、提案アプローチ手法が定量的な評価においても有効であることを示した。この結果より、速度依存性下負荷摩擦モデルは、種々の供試材料の組合せや動的条件下に対しても適用し得ると考えられる。

最後に、有限要素法などを用いたより一般的な境界値問題に際して不可欠となるモデルパラメータの決定方法に関する考察も実施した。乾燥あるいは境界潤滑条件下でのすべり摩擦現象は、物理的素過程と化学的素過程とが連成し、すべり弱化、摩擦のヒーリングおよびすべり速度弱化（速度負勾配）などの複雑な挙動を示すことに加え、システム依存性を示す場合があることが広く知られている。弾塑性構成式、速度依存性摩擦モデルおよび運動方程式を比較した考察に基づき、すべり摩擦挙動に関しては、「摩擦モデルと摩擦試験の関係」は「材料の変形に関する構成式と材料試験との関係」とは本質的に異なることに留意すべきであることを示した。そのため、要素試験と摩擦試験、そして境界値問題との関係性についてきちんと把握・整理しておくことは、すべり摩擦現象への CAE 利用において不可欠なことであると言える。

## 5章 異方性摩擦モデルへの拡張

### 5.1 緒言

機械システムにおける摺動面設計の更なる高度化を指向して、タイヤのラグ・トレッドパターン、鱗や獣毛あるいは指紋を模擬したバイオミメティクス型ロボットのように、テクスチャーと呼ばれる物体表面の微視的周期構造が様々な分野で利用されてきている。これらのテクスチャーは主に接触・摩擦現象に影響を及ぼすことでシステムの高機能化に寄与している。したがって、規則的なテクスチャー性状に依存した摩擦特性に対する数値解析手法の高精度化は重要な課題の一つとして挙げられる。

表面に規則的なテクスチャー加工を有する物体やフォームなどの複合材のすべり摩擦挙動は、通常、微視的凹凸の配向や傾きなどに起因した異方性を呈する(e.g. Hagman and Olofsson, 1998; Zmitrowicz, 2006; Antoni et al., 2007; Konyukhov, 2008; Wandersman et al., 2011)。すなわち、摩擦抵抗のすべり方向および経路依存性の発生、すべり方向と摩擦抵抗方向が一致しないといった異方性摩擦現象が観察される。

異方性すべり摩擦現象の特徴として、接触力空間における摩擦基準が Coulomb の摩擦錘のような円錐形とならず、扁平な形状や傾きを持った形状となる。また、摩擦力ベクトルの方向とすべり速度ベクトルの方向が異なる、いわゆるすべり摩擦の非共軸性を呈することも挙げられる。したがって、図 5.1 に例示しているようなテクスチャー加工(cf. Antoni et al., 2007)を有する物体の接触・摩擦解析には、Coulomb 則に代表される等方的な摩擦モデルはもはや適用できないこととなる。

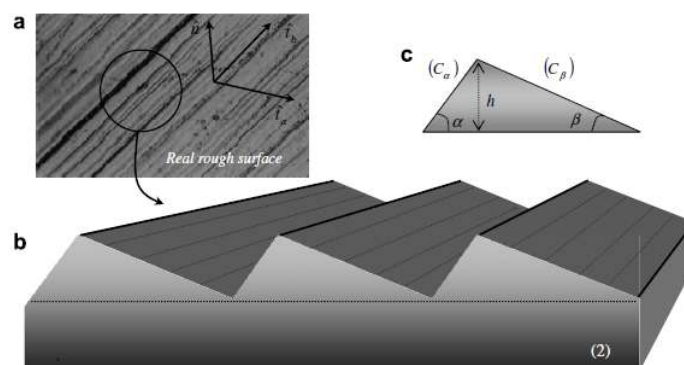


Fig. 5.1. Example of texture induced by mechanical processing (Fig.2 in Antoni et al., 2007).

他方、これまでに、有限要素法などの数値解析手法での利用を考慮して、弾塑性論に基づく多数の摩擦モデルが提案されている(2章参照)。特に、Hashiguchi et al., (2005)は、“固着”と“すべり”の滑らかな遷移を記述し得る下負荷面摩擦モデルを提案している。さらに、3章で述べたように、状態変数とその発展則を導入することで、これを拡張した速度依存性モデルが提案されている。本モデルでは、静止摩擦と動摩擦間の速度依存性相互遷移が表現され、スティックスリップ運動の解析などへの適用性が示されている(4章, 5章参照)。しかしながら、これらの弾塑性論に基づく摩擦モデルでは、等方的なすべり面を採用しており、異方性すべり摩擦現象への拡張が望まれている。

斯様な状況の下、境界値問題への適用を目指し、幾つかの異方性摩擦モデルが提案されている(Curnier, 1984; He and Curnier, 1993; Mroz and Stupkiewicz, 1994; Hjjaj et al., 2004a, 2004b; Feng et al., 2006; Konyukhov and Schweizerhof, 2006a, 2006b; Konyukhov et al., 2008)。これらのモデリングにおいても等方的な場合と同様に、弾塑性異方性構成式と類似の定式化が採用されており、接触・摩擦現象を制約条件として有限要素法へ導入している。異方性の定式化に当たっては、異方性変形に関する弾塑性モデルにおける異方性降伏条件の場合と同様に、接触応力空間にて異方性形状を呈するすべり面の導入や非関連すべり流動則を導入している。しかしながら、これらの異方性摩擦モデルでは、微小すべりや速度・状態依存性すべり摩擦挙動には対応できない。

そこで本章では、速度依存性下負荷摩擦モデルに直交異方性と回転硬化の概念を導入することで、速度・状態依存性に加えて異方性すべり摩擦現象をも記述し得る摩擦モデルを提案する。また、提案モデルの応答特性を調べるとともに、テクスチャーを有する供試材料を用いた試験結果との比較を実施し、その適用性を示す。なお、本章での異方性摩擦モデルの定式化においては、3章と同様の数式が重複して現れる場合があるが、便宜上、特に断らないこととしている。

## 5. 2 回転硬化を考慮した異方性摩擦モデルの定式化

表面のテクスチャーの勾配が非対称な場合、すべり摩擦の前後方向で摩擦抵抗が異なることが想定される。金属材料の Bauschinger 効果として知られている負荷・逆負荷時の降伏応力の相違は、降伏面の原点が背応力によって移動する移動硬化により記述される。しかしながら、摩擦性材料である土質材料の降伏面は常に原点を含まねばならず、移動硬化はもはや適用できない。斯様な状況の下、Hashiguchi and Chen (1998)は降伏面を原点回りに回転させる回転硬化の導入により、土質材料の固有/誘導異方性を合理的に記述する方法を見い出した。すべり摩擦に関する降伏条件に相当するすべり面は、土質材料のそれと同様に圧力(法線応力)依存性を示すため、回転硬化の概念を導入することが妥当であると考えられる。本節で

は、3章で述べた等方的な速度・状態依存性摩擦構成式について、回転硬化の概念を導入した定式化について説明する。

## 5. 2. 1 接触応力（速度）とすべり速度の加算分解

等方的な場合と同様に、接触物体間の相対速度は法線成分と接線成分に加算分解され、さらに弾性すべり速度と塑性すべり速度に加算的に分解できると仮定する。すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p = (\bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_t^e) + (\bar{\mathbf{v}}_n^p + \bar{\mathbf{v}}_t^p) \quad (5.1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &\equiv (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} = -\bar{v}_n \mathbf{n} \\ \bar{\mathbf{v}}_t &\equiv \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

接触物体に作用する接触応力  $\mathbf{f}$  は、法線接触応力  $\mathbf{f}_n$  と接線接触応力  $\mathbf{f}_t$  に分解される。すなわち、

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_n &\equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = -f_n \mathbf{n} \\ \mathbf{f}_t &\equiv \mathbf{f} - \mathbf{f}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = f_t \mathbf{t} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ここに、 $\mathbf{n}$  および  $\mathbf{t}$  は  $\mathbf{f}_n$  および  $\mathbf{f}_t$  の方向の単位ベクトルである。

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (5.5)$$

また、 $f_n$  および  $f_t$  はそれぞれ  $\mathbf{f}_n$  および  $\mathbf{f}_t$  の大きさである。つまり、

$$f_n \equiv -\|\mathbf{f}_n\| = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}, \quad f_t \equiv \|\mathbf{f}_t\| \quad (5.6)$$

ここに、 $f_n$  の符号は他の物体から圧縮される場合に正に取られている。なお、接線接触応力（摩擦応力）と接線滑り速度の方向は異なる場合もあり、また3次元すべり現象においては、 $\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \neq \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$  であることに留意すべきである。

接触応力の微分に関しては、次の諸式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{f}} &= \frac{\partial \{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}\}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{f}} &= \frac{\partial (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{f}} &= \frac{\partial \{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}\}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial (f_t / f_n)}{\partial \mathbf{f}} = \frac{f_n \mathbf{t} - f_t (-\mathbf{n})}{f_n^2} = \frac{1}{f_n} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{t}) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}_t / f_n}{\partial \mathbf{f}} = \frac{f_n (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{f}_t \otimes (-\mathbf{n})}{f_n^2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\eta}\|}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \|\boldsymbol{\eta}\|}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{f}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} = \frac{1}{f_n} \{(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\} \quad (5.10)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{f_n} \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0) \quad (5.12)$$

さて、弾性すべり速度は、等方モデルの場合と同様に、次の歪弾性式で与えられると仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}}_n^e = \frac{1}{\alpha_n} \dot{\mathbf{f}}_n, \quad \bar{\mathbf{v}}_t^e = \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}}_t \quad (5.13)$$

ここに、 $\dot{\mathbf{f}}_n$  および  $\dot{\mathbf{f}}_t$  は接触応力速度  $\dot{\mathbf{f}}$  の法線および接線成分である。(°)は客観性のある共回転速度を表している。なお、(·)は物質時間微分を表す。 $\alpha_n$  および  $\alpha_t$  は、接触表面の法線および接線方向の弾性係数である。

式(5.13)から次式を得る。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e \quad (5.14)$$

ここに、 $\mathbf{C}^e$  は次式で与えられる2階の接触弾性係数テンソルである。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^e &= \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{C}^{e-1} &= \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

## 5. 2. 2 正規すべり面およびすべり下負荷面

等方硬化および回転硬化を有する次のすべり面を仮定する。

$$\bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = \bar{F} \quad (5.16)$$

ここに、 $\bar{F}$  はすべり面の大きさを示す等方硬軟化関数である。すべり摩擦現象の異方性は、摩擦性材料としての土と同様に、本質的にはすべり面の回転で表される。 $\boldsymbol{\beta}$  は、すべり面の接触応力空間の原点回りの回転を表すベクトルであるが、異方性を表す内部状態変数であるので、法線成分を持たない。以後、簡単のため、定ベクトル、つまり  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$  と仮定する。したがって、次式が成り立つ。

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (5.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta} \quad (5.18)$$

ここに、 $\boldsymbol{\Omega}$  は接触平面の剛体回転スピンである。また簡単のため、 $\bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$  は  $\mathbf{f}$  の一次の同次関数であると仮定する。ゆえに、 $s$  は任意の正值のスカラー量として、

$$\bar{f}(s\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = s\bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) \quad (5.19)$$

を満たし、また、Euler の同次関数の定理により、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} = \bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) \quad (5.20)$$

これより、すべり面は  $\boldsymbol{\beta} = \text{const.}$  のとき、接触応力空間の原点に関して相似の形状および方向を維持する。

次に、等方モデルの場合と同様に、式(5.16)で表される曲面を“正規すべり面”と称し、微小すべり現象を表現し得るように下負荷面モデルの概念(Hashiguchi, 1980, 1989)を導入する。正規すべり比  $R$  を用いることで、すべり下負荷面は次式で表される。

$$\bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = R\bar{F} \quad (5.21)$$

式(5.21)を物質時間微分すると次式を得る。

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} = R\dot{\bar{F}} + \dot{R}\bar{F} \quad (5.22)$$

ここに、 $\mathbf{N}$  はすべり下負荷面の外向き法線、すなわち、

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{f}} \quad (5.23)$$

とである。

### 5. 2. 3 硬化関数と正規すべり比の発展則

等方モデルの場合と同様に、等方硬化関数および正規すべり比の発展則を規定する。

すべり摩擦の速度依存性を表現し得るように、硬化関数の発展則として次式が仮定される。

$$\dot{\bar{F}} = -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n \quad (5.24)$$

ここに、 $F_s$  および  $F_k$  ( $F_s \geq \bar{F} \geq F_k$ ) は、 $\bar{F}$  のそれぞれ最大および最小限界値を示すパラメータである。また、 $\kappa$  および  $m$  は塑性すべりに伴う  $\bar{F}$  の減少速度を規定するパラメータ、 $\xi$  および  $n$  は時間経過に伴う  $\bar{F}$  の回復速度を規定するパラメータで、 $\xi$  は一般に絶対温度の関数であると考えられる。なお、式(5.24)の第1項および第2項は、表面突起の凝着の破壊および回

復をそれぞれ表す。競合型の本発展則により、摩擦抵抗の速度負勾配が自然に表される。

正規すべり比の発展則として、次式を仮定する。

$$\dot{R} = U(R) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \text{ for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (5.25)$$

ここに、 $U(R)$ は次の条件を満たすような $R$ の単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} U(R) &\rightarrow +\infty \text{ for } R \rightarrow 0 \\ U(R) &= 0 \text{ for } R = 1 \\ U(R) &< 0 \text{ for } R > 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

関数 $U(R)$ の具体例として、次式が挙げられる。

$$U(R) = -r(\ln R) \quad (5.27)$$

$$U(R) = -r \cot\left(\frac{\pi}{2}R\right) \quad (5.28)$$

ここに、 $r$ はパラメータである。

#### 5. 2. 4 接触応力速度－すべり速度関係式

式(5.24)および式(5.25)を式(5.22)に代入して、次のすべり下負荷面に対する適応条件を得る。

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} = R \left\{ -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n \right\} + U \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \bar{F} \quad (5.29)$$

さて、塑性ひずみ速度の方向は接触面に平行で、また、すべり下負荷面と一定法線応力平面 $\mathbf{f}_n = \text{const.}$ との交線で作られる閉曲線の外向き法線方向、いうなれば接線関連すべり流動則 (tangential associated sliding-flow rule)を仮定する。つまり、

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \lambda \mathbf{t}_n \quad (\lambda > 0, \|\mathbf{t}_n\| = 1) \quad (5.30)$$

ここに、 $\lambda$ は比例係数であり、また、 $\mathbf{t}_n$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{t}_n \equiv \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N}}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N}\|} \quad (5.31)$$

式(5.30)を適応条件式(5.29)に代入して、正值の比例係数 $\lambda$ は次式で表される。

$$\lambda = \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \quad (5.32)$$

したがって、

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t}_n \quad (5.33)$$

ここに、

$$m^p \equiv -\kappa \left( \frac{\bar{F}}{F_k} - 1 \right)^m R + \bar{F}U \quad (5.34)$$

$$m^c \equiv \xi \left( 1 - \frac{\bar{F}}{F_s} \right)^n R \quad (\geq 0) \quad (5.35)$$

式(5.14)および式(5.33)を式(5.1)に代入して、すべり速度は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}^{e-1} \dot{\mathbf{f}} + \frac{\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \mathbf{t}_n \quad (5.36)$$

式(5.36)より、すべり流動則における正值の比例係数  $\lambda$  のすべり速度  $\bar{\mathbf{v}}$  による表現を記号  $\Lambda$  で示せば、 $\Lambda$  は次式で表される。

$$\Lambda = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n} \quad (5.37)$$

式(5.1), (5.14), (5.30)および式(5.37)より、接触応力速度は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \left( \bar{\mathbf{v}} - \left\langle \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n} \right\rangle \mathbf{t}_n \right) \quad (5.38)$$

ここに、 $\langle \rangle$  は McCauley のブラケットである。

### 5. 2. 5 負荷基準

塑性すべりの除荷・負荷判定は、3章で述べた等方モデルの場合と同様である。

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0}: \Lambda > 0 \\ \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}: \text{otherwise} \end{array} \right\} \quad (5.39)$$

### 5. 2. 6 すべり面の具体的関数形

本節では、すべり面式の具体的関数形について述べる。法線接触応力の増大に伴う摩擦係数の低下を表現し得るように、接線接触応力と法線接触応力を非線形関係を仮定する。先ず、

$$f(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = f_n \bar{g}(\hat{\chi}) \quad (5.40)$$

とにおいて、次の閉曲面の正規すべり面とすべり下負荷面を仮定する。

$$f_n \bar{g}(\hat{\chi}) = \bar{F}, \quad f_n \bar{g}(\hat{\chi}) = R\bar{F} \quad (5.41)$$

ここに、

$$\hat{\chi} \equiv \frac{\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|}{M}, \quad \hat{\boldsymbol{\eta}} \equiv \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{f}_t}{f_n} - \boldsymbol{\beta} \quad (5.42)$$

$M$  は  $f_t$  の最大点における接触応力比  $\eta (= f_t / f_n)$  を示す材料定数である。式(5.40)における関数  $\bar{g}(\hat{\chi})$  の具体例を次に示す。

$$\bar{g}(\hat{\chi}) = \exp(\hat{\chi}), \quad \bar{g}'(\hat{\chi}) = \exp(\hat{\chi}) \quad (5.43)$$



$$\bar{g}(\hat{\chi}) = 1 + \hat{\chi}^2, \quad \bar{g}'(\hat{\chi}) = 2\hat{\chi} \quad (5.44)$$

$$\bar{g}(\hat{\chi}) = \exp(\hat{\chi}^2 / 2), \quad \bar{g}'(\hat{\chi}) = \hat{\chi} \exp(\hat{\chi}) \quad (5.45)$$

$$\bar{g}(\hat{\chi}) = \frac{1}{1 - \hat{\chi}/2}, \quad \bar{g}'(\hat{\chi}) = \frac{1}{2(1 - \hat{\chi}/2)^2} \quad (5.46)$$

以上の諸式は,  $f_t = 0$ において, いずれも接触応力成分が  $f_n = 0$  および  $f_n = \bar{F}$  である点を通る軸対称閉曲面を呈する.

式(5.40)および(5.42)に対して, 式(5.7)~(5.10)は成り立つ. また次の諸式が成り立つ.

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\partial \mathbf{f}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}}{f_n} = \frac{1}{f_n} \{(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta})\mathbf{n} + \hat{\boldsymbol{\tau}}\} \quad (5.48)$$

ここに,

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}}{\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|} \quad (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = 0) \quad (5.49)$$

さらに, 式(5.7), (5.15), (5.47)および(5.48)から次式が成り立つ.

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \|\hat{\boldsymbol{\eta}}\| / M}{\partial \mathbf{f}} = \frac{1}{M f_n} \{(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta})\mathbf{n} + \hat{\boldsymbol{\tau}}\} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{N} = -\bar{g}(\hat{\chi})\mathbf{n} + f_n \bar{g}'(\hat{\chi}) \frac{1}{M f_n} \{(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta})\mathbf{n} + \hat{\boldsymbol{\tau}}\} = -\left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (5.51)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{f}} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \left[ -\left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right] = \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (5.52)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{t}_n \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e &= \left[ -\left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right] \cdot \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \} \\ &= -\alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n = \left[ -\alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \quad (5.55)$$

式(5.15)および式(5.50)~(5.55)を式(5.36)および式(5.38)に代入して, すべり速度-接触応力速度およびその逆関係は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} \dot{\mathbf{f}} + \frac{\left[ -\left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\mathbf{t}} \right] \cdot \dot{\mathbf{f}} - m^c}{m^p} \hat{\mathbf{t}} \\ &= \left( \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_t} \right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}) \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} \dot{\mathbf{f}} + \frac{-\left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}) + \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{f}}) - m^c}{m^p} \hat{\mathbf{t}}\end{aligned}\quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}} &= \left\{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} \bar{\mathbf{v}} - \left\langle \frac{\left[ -\alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} \hat{\mathbf{t}} \right] \cdot \bar{\mathbf{v}} - m^c}{m^p + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M}} \right\rangle \hat{\mathbf{t}} \\ &= (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{n} + \alpha_t \bar{\mathbf{v}} - \alpha_t \left\langle \frac{-\alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}) - \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \right\} (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - m^c}{m^p + \alpha_t \frac{\bar{g}'(\hat{\chi})}{M}} \right\rangle \hat{\mathbf{t}}\end{aligned}\quad (5.57)$$

他方, Coulomb の摩擦条件の円錐形をすべり面として採用した場合の定式化については, 後の数値解析で使用するため, 6.4 節で詳述する.

### 5. 3 直交異方性の導入

互いに反対方向の摩擦抵抗の違いは以上に定式化した回転異方性によって表現し得る. しかし, 回転異方性の導入のみによっては, 異なるすべり方向における摩擦抵抗の違いは表現できない. 以下では, 摩擦抵抗のすべり方向依存性を表現するため, 直交異方性の概念の導入したより一般化された定式化について述べる.

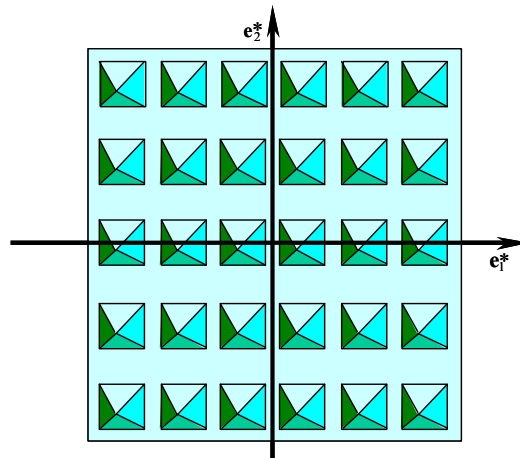


Fig. 5.2. Surface asperities model suggesting the rotational and the orthotropic anisotropy.

### 5. 3. 1 座標系の規定

異方性を考えるに当たって，図 5.2 に単純な表面突起モデルを示す．ここに，表面突起の傾きの非対称性は回転異方性をもたらし，また，これらの形状および間隔の方向による違いは直交異方性をもたらすと考えられる．いま， $\mathbf{e}_1^*$  および  $\mathbf{e}_2^*$  をそれぞれ最大および最小異方性主軸方向に，また， $\mathbf{e}_3^*$  を  $\mathbf{n}$  の方向に取り，右手系の基底  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$  を持つ座標系を採用すれば， $\mathbf{f}$  および  $\boldsymbol{\beta}$  は次式で表される．

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= f_1^* \mathbf{e}_1^* + f_2^* \mathbf{e}_2^* + f_3^* \mathbf{e}_3^* \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta_1^* \mathbf{e}_1^* + \beta_2^* \mathbf{e}_2^* + \beta_3^* \mathbf{e}_3^* \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

なお，基底  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$  のスピンは次式で表される．

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{e}}_r^* \otimes \mathbf{e}_r^*, \quad \dot{\mathbf{e}}_i^* = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_i^* \quad (5.59)$$

式(5.58)は， $f_1^* = f_{i1}^*$ ， $f_2^* = f_{i2}^*$ ， $f_3^* = -f_n$ ， $\beta_1^* = \beta_{i1}^*$ ， $\beta_2^* = \beta_{i2}^*$ ， $\beta_3^* = 0$  により，次のように記述できる．

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= f_{i1}^* \mathbf{e}_1^* + f_{i2}^* \mathbf{e}_2^* - f_n \mathbf{e}_3^* \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta_{i1}^* \mathbf{e}_1^* + \beta_{i2}^* \mathbf{e}_2^* \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

### 5. 3. 2 すべり面式およびすべり流動則

Mroz and Stupkiewicz (1994)の直交異方性を導入して，回転異方性を考慮した式(5.40)，(5.41)を次のように拡張してみる．

$$\bar{f}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = f_n \bar{g}(\hat{\chi}^*) \quad (5.61)$$

$$f_n \bar{g}(\hat{\chi}^*) = \bar{F}, \quad f_n \bar{g}(\hat{\chi}^*) = R\bar{F} \quad (5.62)$$

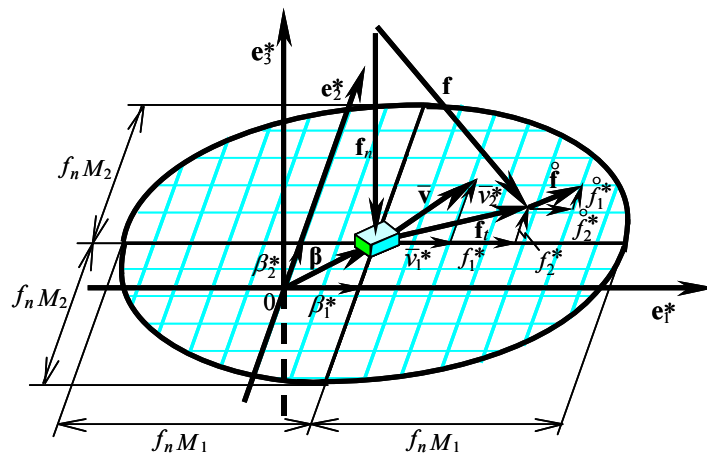


Fig. 5.3. Orthotropic and rotational anisotropic sliding surface.

ここに,

$$\hat{\chi} \equiv \sqrt{\hat{\chi}_1^{*2} + \hat{\chi}_2^{*2}}, \quad \hat{\chi}_1^* \equiv \frac{\hat{\eta}_1^*}{M_1}, \quad \hat{\chi}_2^* \equiv \frac{\hat{\eta}_2^*}{M_2} \quad (5.63)$$

$M_1$ および $M_2$ は, それぞれ最大および最小異方性方向の $M$ 値である. 図 5.3 に, 回転および直交異方性を有するすべり面を示す.

適応条件は, 式(5.29)と同様に, 式(5.21)を物質時間微分した次式に等方硬化関数の発展則(5.24)および正規すべり比の発展則(5.25)を代入することにより得られる. 適応条件の具体形には, すべり面式(5.61)の偏微分が必要となるが, それらは次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\chi}_i^*}{\partial f_{ii}^*} &= \frac{\partial(f_{ii}^* / f_n - \beta_i^*) / M_i}{\partial f_{ii}^*} = \frac{1}{f_n M_i} \\ \frac{\partial \hat{\chi}_i^*}{\partial f_n} &= \frac{\partial(f_{ii}^* / f_n - \beta_i^*) / M_i}{\partial f_n} = \frac{-f_{ii}^*}{f_n^2 M_i} = -\frac{\hat{\chi}_i^*}{f_n} \\ \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \hat{\chi}_i^*} &= \frac{1}{2\hat{\chi}^*} 2\hat{\chi}_i^* = \hat{\zeta}_i^* \\ \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial f_{ii}^*} &= \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \hat{\chi}_i^*} \frac{\partial \hat{\chi}_i^*}{\partial f_{ii}^*} = \frac{\hat{\chi}_i^*}{\hat{\chi}^*} \frac{1}{f_n M_i} = \frac{\hat{\zeta}_i^*}{f_n M_i} \\ \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial f_n^*} &= \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \hat{\chi}_1^*} \frac{\partial \hat{\chi}_1^*}{\partial f_n^*} + \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \hat{\chi}_2^*} \frac{\partial \hat{\chi}_2^*}{\partial f_n^*} = -\frac{1}{f_n} (\hat{\zeta}_1^* \hat{\chi}_1^* + \hat{\zeta}_2^* \hat{\chi}_2^*) \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

ここに,

$$\hat{\zeta}_i^* \equiv \frac{\hat{\chi}_i^*}{\hat{\chi}^*} \quad (5.65)$$

下添字 $i$ は, 1または2を取る. なお, 繰返し現れても総和は取らない. また, 式(5.64)より, 次の諸式を得る.

$$\frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial f_{11}^*} \mathbf{e}_1^* + \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial f_{22}^*} \mathbf{e}_2^* - \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial f_n} \mathbf{n} = \frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* + (\hat{\zeta}_1^* \hat{\chi}_1^* + \hat{\zeta}_2^* \hat{\chi}_2^*) \mathbf{n} \right\} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\partial(f_n \bar{g}(\hat{\chi}^*))}{\partial \mathbf{f}} \\ &= \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{f}} \bar{g}(\hat{\chi}^*) + f_n \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \frac{\partial \hat{\chi}^*}{\partial \mathbf{f}} \\ &= -\bar{g}(\hat{\chi}^*) \mathbf{n} + f_n \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* + (\hat{\zeta}_1^* \hat{\chi}_1^* + \hat{\zeta}_2^* \hat{\chi}_2^*) \mathbf{n} \right\} \\ &= -\bar{g}(\hat{\chi}^*) \mathbf{n} + \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* + (\hat{\zeta}_1^* \hat{\chi}_1^* + \hat{\zeta}_2^* \hat{\chi}_2^*) \mathbf{n} \right\} \\ &= \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \hat{\chi}_1^* + \hat{\zeta}_2^* \hat{\chi}_2^*) \right\} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.67)$$

すべり流動則については、式(5.30)および(5.31)と同様に、接線関連すべり流動則を仮定する。塑性すべり速度の方向を規定する単位ベクトル $\mathbf{t}_n$ は、

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \left[ \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \right\} \mathbf{n} \right] \\ &= \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) \end{aligned} \quad (5.68)$$

より、次式で与えられる。

$$\mathbf{t}_n = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) \quad (5.69)$$

最終的に、比例係数 $\Lambda$ は、式(5.37)で与えられるが、その具体式に必要な諸式は、式(5.15)および式(5.64)より、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e &= \left[ \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \right\} \mathbf{n} \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \alpha_t (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2^*) + \alpha_n \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_3^* \right\} \\ &= \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \right\} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n &= \left[ \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \alpha_n \left\{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \right\} \mathbf{n} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) \\ &= \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

### 5. 3. 3 接触応力速度—すべり速度関係式

式(5.15)および式(5.67)～(5.71)を式(5.36)、(5.38)に代入して、すべり速度—接触応力速度およびその逆関係は次の諸式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{v}} &= \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1^* + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2^* - \dot{f}_n \mathbf{n}) \\
&+ \frac{\left[ \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \} \mathbf{n} \right] \cdot (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1^* + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2^* - \dot{f}_n \mathbf{n}) - m^c}{m^p} \mathbf{t}_n \\
&= \frac{1}{\alpha_t} (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1^* + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2^*) - \frac{1}{\alpha_n} \dot{f}_n \mathbf{n} \\
&+ \frac{\bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \dot{f}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \dot{f}_2 \right) + \{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \} \dot{f}_n - m^c}{m^p} \frac{\frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^*}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{f}} &= \left\{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2^*) \right\} \left( \bar{v}_1 \mathbf{e}_1^* + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2^* - \bar{v}_n \mathbf{n} - \right. \\
&\left. - \frac{\left\{ \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right) - \alpha_n \{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \} \mathbf{n} \right\}}{m^p + \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \right. \\
&\left. \frac{\bullet (\bar{v}_1 \mathbf{e}_1^* + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2^* - \bar{v}_n \mathbf{n}) - m^c}{m^p + \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \frac{\frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^*}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \right) \\
&= \alpha_t (\bar{v}_1 \mathbf{e}_1^* + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2^*) - \alpha_n \bar{v}_n \mathbf{n} \\
&- \frac{\left\{ \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \bar{v}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \bar{v}_2 \right) + \alpha_n \{ \bar{g}(\hat{\chi}^*) - \bar{g}'(\hat{\chi}^*) (\hat{\zeta}_1^* \chi_1^* + \hat{\zeta}_2^* \chi_2^*) \} \bar{v}_n - m^c \right\}}{m^p + \alpha_t \bar{g}'(\hat{\chi}^*) \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \\
&\frac{\alpha_t}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}} \left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^* \right)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

## 5. 4 Coulomb の摩擦基準に基づく定式化

前節までは、回転硬化ならびに直交異方性の概念を導入した速度・状態依存性摩擦モデル

の一般化された定式化について述べた。また、非線形すべり面式を仮定した際のすべり速度－接触応力速度関係式およびその逆関係を導出した。本節では、後の摩擦試験結果との比較や7章での有限要素解析にて使用する Coulomb の摩擦基準を仮定した際の摩擦モデルの定式化について詳述する。なお、本節では、記述の煩雑さを避けるため、異方性の主軸方向を基底とした座標系での物理量を意味する (\*) を省略する。

### 5. 4. 1 弾性関係

図 5.4 に示すように、まず、直交異方性の長軸および短軸方向の基底を  $\mathbf{e}_1$  および  $\mathbf{e}_2$  と定める。また、 $\mathbf{e}_3$  は接触面の外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{f}_n / \|\mathbf{f}_n\|$  と一致する。

上述の座標系に基づけば、接触応力ベクトルは次のように記述される。

$$\mathbf{f} = f_{t1}\mathbf{e}_1 + f_{t2}\mathbf{e}_2 - f_n\mathbf{n} \quad (5.74)$$

したがって、接触応力ベクトル  $\mathbf{f}$  の法線および接線成分は、次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_{t1} &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{f} = f_{t1}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_{t2} &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f})\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{f} = f_{t2}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_n &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} = -f_n\mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

すべり速度ベクトル  $\bar{\mathbf{v}}$  は法線成分と接線成分に加算分解されるとする。すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t \quad (5.76)$$

さらに、接線成分  $\bar{\mathbf{v}}_t$  は、座標系  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$  において次のように記述できる。

$$\bar{\mathbf{v}}_t = \bar{\mathbf{v}}_{t1} + \bar{\mathbf{v}}_{t2} = \bar{\mathbf{v}}_{t1}\mathbf{e}_1 + \bar{\mathbf{v}}_{t2}\mathbf{e}_2 \quad (5.77)$$

他方、すべり速度は弾性すべり速度と塑性すべり速度に加算分解されると仮定する。すなわち、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p = (\bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p) + (\bar{\mathbf{v}}_{t1}^e + \bar{\mathbf{v}}_{t1}^p) + (\bar{\mathbf{v}}_{t2}^e + \bar{\mathbf{v}}_{t2}^p) \quad (5.78)$$

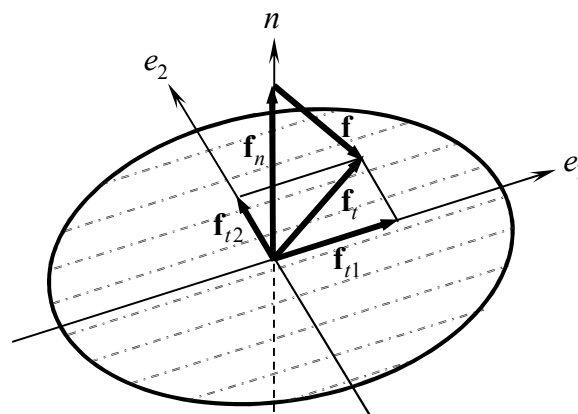


Fig. 5.4. Orthotropic sliding surface in coordinate system  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

弾性関係を次式で与える.

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e \quad (5.79)$$

ここに,

$$\mathbf{C}^e \equiv \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \quad (5.80)$$

## 5. 4. 2 正規すべり面およびすべり下負荷面

次に, 異方性下負荷摩擦モデルにおける正規すべり面とすべり下負荷面について述べる. Coulomb の摩擦基準に基づく本モデルでは, 図 5.5 に示されるように, 直交異方性と回転硬化を内包する次式の摩擦基準をすべり面として採用する.

$$\hat{\chi} = \mu \quad (5.81)$$

ここに,  $\mu$  は摩擦係数である.  $\hat{\chi}$  は接線接触応力空間上でのすべり面の形状を規定し, 次式で定義される.

$$\hat{\chi} \equiv \sqrt{\hat{\chi}_1^2 + \hat{\chi}_2^2}, \quad \hat{\chi}_1 \equiv \frac{\hat{\eta}_1}{C_1}, \quad \hat{\chi}_2 \equiv \frac{\hat{\eta}_2}{C_2} \quad (5.82)$$

ここに,  $\hat{\eta}_1$  と  $\hat{\eta}_2$  は次式で与えられる.

$$\hat{\eta}_1 = \eta_1 - \beta_1 = \frac{f_{t1}}{f_n} - \beta_1, \quad \hat{\eta}_2 = \eta_2 - \beta_2 = \frac{f_{t2}}{f_n} - \beta_2 \quad (5.83)$$

$C_1$  および  $C_2$  は, それぞれ長軸および短軸方向の直交異方性の程度を規定するパラメータである. 通常は  $C_1 = 1.0$  および  $C_2 \leq 1.0$  とし, すべり面の長軸方向を  $\mathbf{e}_1$  軸方向に選ぶと,  $\mu$  はその方向の摩擦係数を意味する. さらに図 5.5 に示すように, 原点回りにすべり面を回転させることで異方性を記述するパラメータ  $\boldsymbol{\beta}$  は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.84)$$

なお, 本論文では,  $\boldsymbol{\beta}$  は一定としている ( $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$ ). 以下では, 式(5.81)で表されるすべり面を正規すべり面と称す. ここに, 金属の変形に関する誘導異方性は背応力と移動硬化を用いて記述されることが多いが, その場合はすべり面が原点を含まないこととなる (図 5.6 参照). この場合, 法線接触応力が作用していても接触していないことになってしまう. 回転硬化を採用することにより, すべり面は原点を必ず含むため, このような矛盾を解消できる.

次に, 図 5.7 に示すように, 常に現接触応力点を通り, 接線接触応力平面 ( $f_{t1}, f_{t2}$ ) にて正規すべり面に対して相似形を有するすべり下負荷面を導入する. ここで, 接線接触応力空間における正規すべり面に対するすべり下負荷面の大きさの比を正規すべり比と称し,  $R$  ( $0 \leq R \leq 1$ ) で記述する. これより, すべり下負荷面は次式で与えられる.

$$\hat{\chi} = R\mu \quad (5.85)$$



式(5.82)より，上式は次のように表される.

$$\sqrt{\left(\frac{\hat{\eta}_1}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\eta}_2}{C_2}\right)^2} = R\mu \quad (5.86)$$

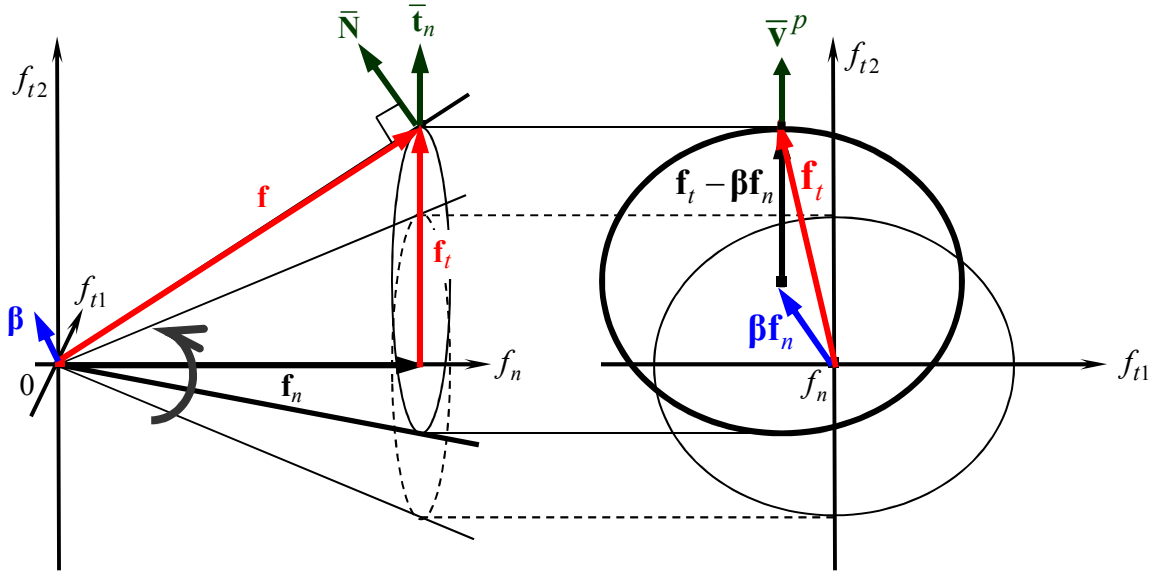


Fig. 5.5. Schematic diagram of rotational hardening with Coulomb's condition.

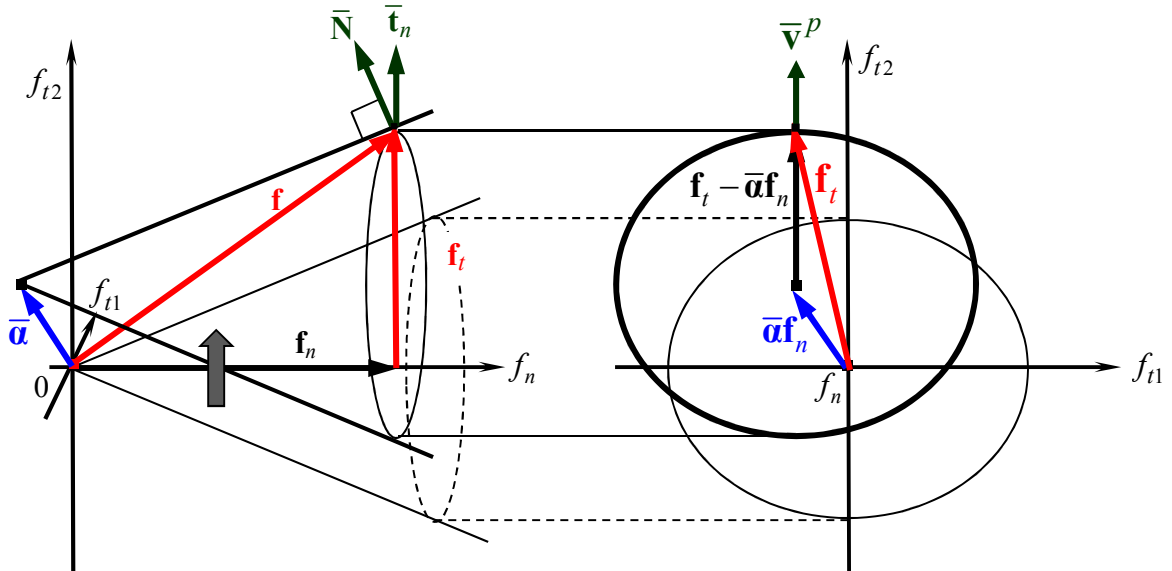


Fig. 5.6. Schematic diagram of kinematic hardening with Coulomb's condition, where  $\bar{\alpha}$  is a back contact traction.

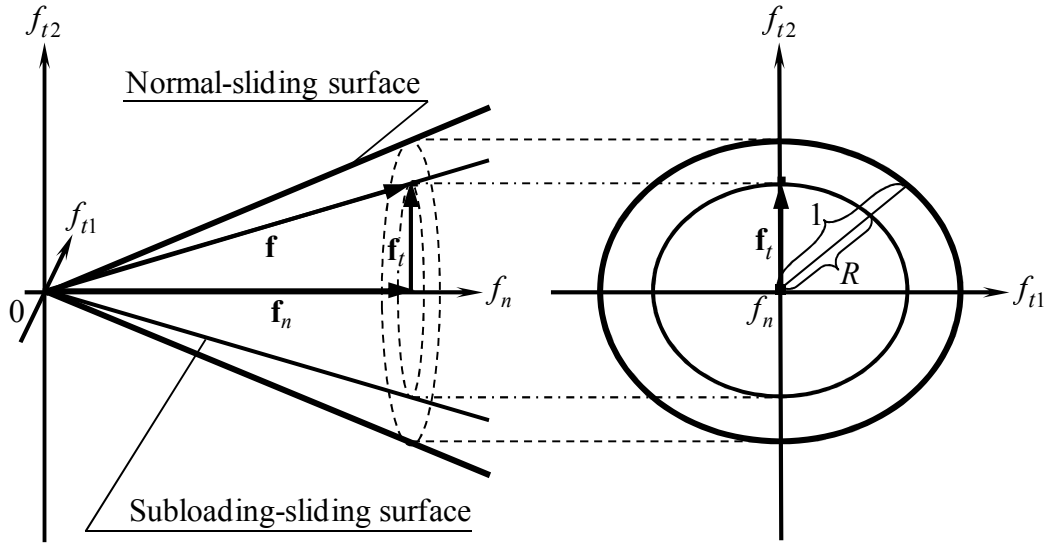


Fig. 5.7. Normal-sliding and subloading-sliding surfaces with orthotropy.

### 5. 4. 3 摩擦係数および正規すべり比の発展則

本摩擦モデルは弾塑性論に基づき定式化されているため，式(5.85)の物質時間微分に状態変数としての摩擦係数  $\mu$  および正規すべり比  $R$  の発展則を代入した適応条件式を導出する必要がある．摩擦係数と正規すべり比の発展則については，等方的なモデルの場合と同様のものを採用する．すなわち，摩擦係数の変化速度を塑性すべり速度と摩擦係数そのものの関数と仮定する．本概念に基づき，次式で与えられる関数を摩擦係数の発展則に採用する．

$$\dot{\mu} = -\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \quad (5.87)$$

ここに， $\mu_s$  および  $\mu_k$  はそれぞれ静止摩擦および動摩擦に対応する摩擦係数  $\mu$  の最大値および最小値である． $\kappa$  と  $m$  および  $\xi$  と  $n$  はそれぞれ摩擦係数の減少および増加を規定するパラメータである．繰り返しになるが，式(5.87)の右辺第1項は摩擦抵抗のすべり弱化，第2項は静止摩擦の時間依存性回復を表し，それぞれ接触面の微小アスペリティにおける凝着の形成 (healing) と破壊 (rejuvenation) の競合を意味している．この結果，式(5.87)により摩擦係数の速度負勾配が自然に記述される．

他方，多くのすべり摩擦試験によると，固着—すべりの遷移は不連続では無く，全体すべりの前に局所的な微小すべりの発生が観察される．このことを記述するため，次式で表される正規すべり比の発展則を規定する．

$$\dot{R} = -r(\ln R) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \quad \text{for } \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (5.88)$$

ここに、 $r$ は微小すべりの程度を規定するパラメータである。式(5.88)のもう一つの特性として、摩擦負荷時に接触応力ベクトルが正規すべり面に自動的に引き戻される機能が挙げられる。言うまでもなく、本機能は数値計算上の大きなメリットとなる。

#### 5. 4. 4 接触応力速度—すべり速度関係式

以下では、接触応力速度—すべり速度関係式を導出する。式(5.85)の物質時間微分は次のようになる。

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{f}} = \dot{R} \mu + R \dot{\mu} \quad (5.89)$$

式(5.82)の偏微分は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\chi}_i}{\partial f_{ii}} &= \frac{\partial (f_{ii} / f_n - \beta_i) / C_i}{\partial f_{ii}} = \frac{1}{f_n C_i} \\ \frac{\partial \hat{\chi}_i}{\partial f_n} &= \frac{\partial (f_{ii} / f_n - \beta_i) / C_i}{\partial f_n} = \frac{-f_{ii}}{f_n^2 C_i} = -\frac{\chi_i}{f_n} \\ \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{\chi}_i} &= \frac{1}{2 \hat{\chi}} 2 \hat{\chi}_i = \hat{\zeta}_i \\ \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial f_{ii}} &= \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{\chi}_i} \frac{\hat{\chi}_i}{\partial f_{ii}} = \frac{\hat{\chi}_i}{\hat{\chi}} \frac{1}{f_n C_i} = \frac{\hat{\zeta}_i^*}{f_n C_i} \\ \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial f_n} &= \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{\chi}_1} \frac{\hat{\chi}_1}{\partial f_n} + \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{\chi}_2} \frac{\hat{\chi}_2}{\partial f_n} = -\frac{1}{f_n} (\hat{\zeta}_1 \chi_1 + \hat{\zeta}_2 \chi_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

ここに、

$$\zeta_1 \equiv \frac{\hat{\chi}_1}{\hat{\chi}}, \quad \zeta_2 \equiv \frac{\hat{\chi}_2}{\hat{\chi}} \quad (5.91)$$

これより、式(5.89)内の $\mathbf{N}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial f_{i1}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial f_{i2}} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial f_n} \mathbf{n} = \frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 + (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\} \quad (5.92)$$

式(5.89)に式(5.78), (5.79), (5.87)および(5.88)代入することにより、次式のすべり下負荷面に対する適応条件が得られる。

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^p) = -r (\ln R) \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \mu + R \left\{ -\kappa \left( \frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \xi \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \right\} \quad (5.93)$$

次のすべり流動則を仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}}^p = \lambda \mathbf{t}_n \quad (5.94)$$

ここに、 $\lambda (> 0)$ は正值の比例係数である。図 5.5 に示すように、塑性すべり速度の方向を規定する単位ベクトル $\bar{\mathbf{t}}_n$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{t}_n = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N}}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\hat{\zeta}_1}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\zeta}_2}{C_2}\right)^2}} \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right) \quad (5.95)$$

ここに,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 + (\hat{\zeta}_1 \chi_1 + \hat{\zeta}_2 \chi_2) \mathbf{n} \right\} = \frac{1}{f_n} \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right) \quad (5.96)$$

図 5.4 および式(5.95)から確認できるように, 塑性すべり速度は現接触応力点に対するすべり下負荷面の外向き法線ベクトル  $\mathbf{N}$  を接線接触応力平面に射影した方向に発生する. これより, 接線接触応力ベクトルとすべり速度ベクトルの方向が一致しない, いわゆる非共軸性が記述されることとなる.

比例係数  $\lambda$  をすべり速度の関数として表したものを  $\Lambda$  と記せば, これは式(5.93)および(5.94)より, 次式のように導かれる.

$$\Lambda = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} - R\xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right)^n}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{t}_n - r(\ln R)\mu - R\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1\right)^m} \quad (5.97)$$

最終的に, 式(5.78), (5.79), (5.93)および(5.94)より, 接触応力速度—すべり速度関係式は次式のようになる.

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^p) = \mathbf{C}^e (\bar{\mathbf{v}} - \Lambda \mathbf{t}_n) = \mathbf{C}^{ep} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^c \mathbf{t}_n \quad (5.98)$$

ここに,

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e \left\langle \mathbf{I} - \left\langle \frac{\mathbf{t}_n \otimes (\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e)}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n - r(\ln R)\mu - R\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1\right)^m} \right\rangle \right\rangle \quad (5.99)$$

$$\mathbf{C}^c = \left\langle \frac{\mathbf{C}^e R\xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right)^n}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n - r(\ln R)\mu - R\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1\right)^m} \right\rangle \quad (5.100)$$

本摩擦モデルでは,  $C_1 = C_2$  および  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  とすることにより, 等方性のモデルに帰着する. また,  $\mu_s = \mu_k$  あるいは  $\kappa = \xi = 0$  とすることにより, 速度非依存モデルに帰着し, さらに  $r \rightarrow \infty$  とすることで古典摩擦モデル(Coulomb 則)に帰着する.

式(5.98)～(5.100)内のテンソル演算の具体式を導出し、すべり速度－接触応力関係式およびその逆関係式の closed-form を以下に示す。式(5.15)および式(5.90)より、次の諸式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e &= \frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 + (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\} \cdot \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \} \\ &= \frac{1}{f_n} \left\{ \alpha_t \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right) + \alpha_n (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\}\end{aligned}\quad (5.101)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{t}_n &= \frac{1}{f_n} \left\{ \alpha_t \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right) + \alpha_n (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\} \cdot \frac{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right)}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}} \\ &= \frac{\alpha_t}{f_n} \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}\end{aligned}\quad (5.102)$$

式(5.15), 式(5.36)および式(5.92)～(5.102)より、最終的に以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\alpha_t} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right\} (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2 - \dot{f}_n \mathbf{n}) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 + (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\} \cdot (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1^* + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2^* - \dot{f}_n \mathbf{n}) - m^c \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2}{m^p} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha_t} (\dot{f}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{f}_2 \mathbf{e}_2) - \frac{1}{\alpha_n} \dot{f}_n \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{f_n} \left\{ \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \dot{f}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \dot{f}_2 - (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \dot{f}_n \right\} - m^c \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \mathbf{e}_1^* + \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \mathbf{e}_2^*}{m^p} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1^*}{M_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2^*}{M_2} \right)^2}}\end{aligned}\quad (5.103)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}} &= \{ \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \alpha_t (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \} \left[ \bar{v}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2 - \bar{v}_n \mathbf{n} - \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{\frac{1}{f_n} \left\{ \alpha_t \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right) + \alpha_n (\hat{\zeta}_1 \hat{\chi}_1 + \hat{\zeta}_2 \hat{\chi}_2) \mathbf{n} \right\} \cdot (\bar{v}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2 - \bar{v}_n \mathbf{n}) - m^c}{m^p + \frac{\alpha_t}{f_n} \sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}} \right\rangle \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}} \right] \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_t (\bar{v}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{v}_2 \mathbf{e}_2) - \alpha_n \bar{v}_n \mathbf{n} \\
&- \alpha_t \left\langle \frac{\frac{1}{f_n} \left\{ \alpha_t \left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \bar{v}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \bar{v}_2 \right) - \alpha_n (\hat{\zeta}_1 \chi_1 + \hat{\zeta}_2 \chi_2) \bar{v}_n \right\} - m^c}{m^p + \frac{\alpha_t}{f_n} \sqrt{\left( \frac{\zeta_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\zeta_2}{C_2} \right)^2}} \right\rangle \frac{\frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \mathbf{e}_2}{\sqrt{\left( \frac{\hat{\zeta}_1}{C_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\zeta}_2}{C_2} \right)^2}}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

## 5. 5 摩擦試験との比較

前節までに述べた異方性一速度・状態依存性摩擦モデルの応答特性について、Coulomb の摩擦基準を用いた場合の数値実験例を用いて示す。また、異方性摩擦モデル表面に周期的なテクスチャー構造を有する材料を対象とした実試験結果との比較結果について述べる。

### 5. 5. 1 基本的応答特性

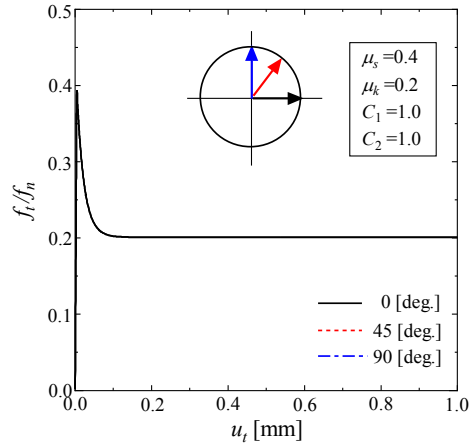
先ず、数値実験を通して提案摩擦モデルの応答特性を示す。ここに、数値実験では、異方性すべり摩擦の特徴を把握しやすいように、一定垂直荷重下における直線すべり運動を想定している。したがって、剛体回転が無視でき $(\dot{\theta}) = (\dot{\phi})$ となる。計算に当たって、次のような3次元座標系 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ を採用する。

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.105}$$

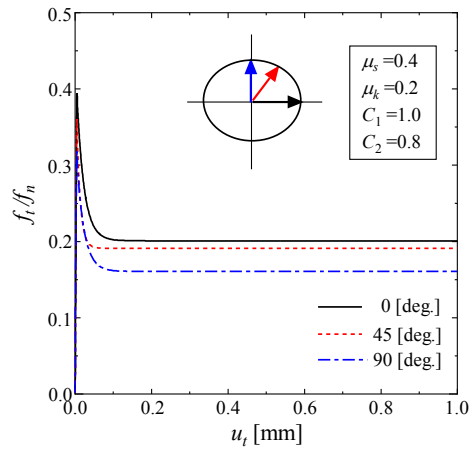
Coulomb の摩擦基準を採用した場合、11つのパラメータ $\mu_s, \mu_k, \kappa, \xi, m, n, C_1, C_2, \beta, r$ および $\alpha (= \alpha_n = \alpha_t)$ と初期値 $\mu_0$ が必要となる。ただし、 $C_1$ と $C_2$ については $C_1$ を基準値(=1.0)とし、もう片方を異方性の程度に合わせれば良い(ただし、 $C_2 \leq 1.0$ )。また、速度依存性への対応は、 $m = n = 1$ で十分であることは3および4章で既に述べた通りである。

Table 5.1 Material parameters for basic mechanical response of anisotropic subloading-friction model.

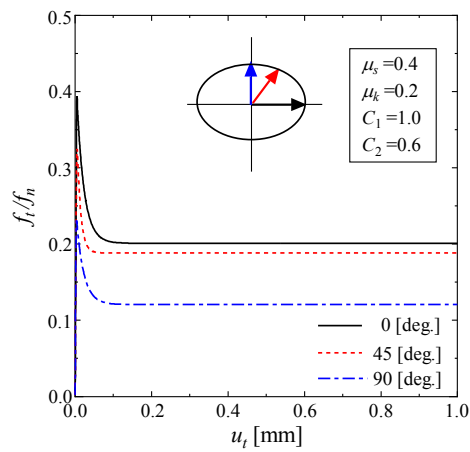
$\mu_0 = \mu_s$	0.4	$\mu_k$	0.2
$\alpha$	1000 N/mm <sup>3</sup>	$r$	1000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	10 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	0.1 s <sup>-1</sup>



(a)  $C_1 = C_2 = 1.0$



(b)  $C_1 = 1.0$ ,  $C_2 = 0.8$



(c)  $C_1 = 1.0$ ,  $C_2 = 0.6$

Fig. 5.8. Variations of the traction ratio  $\|\boldsymbol{\eta}\|$  with the tangential sliding displacement  $\|\bar{\mathbf{u}}_t\|$  for various sliding directions ( $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ).

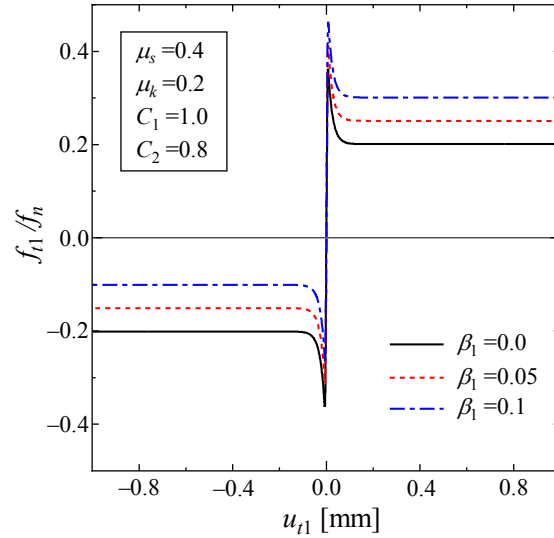


Fig. 5.8. Influence of the parameter  $\beta$  on the variation in the traction ratio  $\|\boldsymbol{\eta}\|$  under  $C_1 = 1.0$  and  $C_2 = 0.8$ , where forced sliding velocity is  $\bar{v}_{t1} = \pm 0.1$  mm/s .

計算においては、表 5.1 に示すようなパラメータ値を採用する。また、法線接触応力は  $f_n = 10$  MPa とし、 $\mu_0 = \mu_s$  とした。パラメータの決定においては、最初に  $\mu_s$ 、 $\mu_k$  および  $\alpha$  を適当に決定した。次に、静止摩擦が数十秒で回復すると仮定して  $\xi$  を決定し、 $\kappa$  はスティックスリップ運動の振幅から決定する。また、 $r$  は微小すべりの程度から決定する。速度依存性に関するパラメータの詳細については、3 章を参照されたい。

図 5.8 に接触応力比  $\|\boldsymbol{\eta}\| = \|\mathbf{f}_t\|/f_n$  とすべり変位  $\|\bar{\mathbf{u}}_t\|$  の関係を示す。ここに、直交異方性に関するパラメータ  $C_1$  と  $C_2$  について 3 種類の組み合わせをセットし、回転硬化パラメータは  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  としている。計算では、一定のすべり速度  $\|\bar{\mathbf{v}}_t\| = 1.0$  mm/s を  $\mathbf{e}_1$  方向から  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  および  $90^\circ$  の方向に与えている。図に示されているように、直交異方性の影響により、摩擦応答特性はすべり速度の方向に依存して変化している。また、速度依存性も考慮されているため、静止摩擦から動摩擦への滑らかな遷移が表現されている様子がわかる。

次に回転硬化の影響について述べる。図 5.9 は接触応力比  $\|\boldsymbol{\eta}\| = \|\mathbf{f}_t\|/f_n$  とすべり変位  $\|\bar{\mathbf{u}}_t\|$  の関係に及ぼすパラメータ  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1 \ \beta_2 \ 0\}$  の影響を示したものである。ここに、直交異方性パラメータを  $C_1 = 1.0$ 、 $C_2 = 0.8$  とセットし、回転硬化パラメータ  $\beta_1$  を 0.0、0.05 および 0.1 の 3 種類、 $\beta_2$  をゼロとしている。計算では、一定のすべり速度  $\|\bar{\mathbf{v}}_t\| = 1.0$  mm/s をそれぞれ前後反対の方向に与えている。図から確認できるように、前後反対のすべり方向に対して摩擦応答特性が異なっている。前後反対のすべり方向の摩擦係数の相違の記述は、鋸型の機械加工痕、鱗や獣毛などを模したバイオミメティクス型テクスチャー、及びオフロード車両やロボットの駆動機構において重要である。



上述の数値実験結果からわかるように、微小すべりや速度依存性を含む基本的な異方性すべり摩擦挙動について、異方性下負荷摩擦モデルを用いることにより適切かつ統一的に記述し得ることが確認できる。

## 5. 5. 2 摩擦試験概要

ここでは、テクスチャーを有する試験片を対象とした異方性すべり摩擦試験の概要について説明する。

図 5.9 に試験装置の概略図を示す。様々な材料での試験が容易に行え、且つ摩耗の影響を極力除外できるため、4 章のスティックスリップ運動の検討で用いた装置と同様のシステムを採用している。図に示すように、固定された下部をベース、稼働する側の上部をスライダと称する。また、このスライダが重りの役割を果たすと同時に、その表面にテクスチャー加工を施した試験片を様々な方向に接着して滑らすことで異方性すべり摩擦の影響を調べることができる。ここに、スライダの質量は 0.25 kg である。本解説では、スライダに接着するテクスチャー材として MC ナイロンとネオプレンゴムを採用し、図 5.10 に示すような 3 種類のテクスチャーパターンを準備した。Type I と Type II は MC ナイロン(直径 35 mm, 厚さ 5 mm, 硬度 120 HS), Type III はネオプレンゴム(直径 35 mm, 厚さ 5 mm, 硬度 70 HS) である。一方、ベース表面にはボード紙や黒天然ゴムを接着し、試験の回数に応じて新しいものに交換して試験を継続した。また、試験の前に試験片をエタノールにて洗浄し、摺動面を十分になじませて一定時間放置した後に計測を行った。

試験では、スライダは速度 5 mm/s で駆動する高剛性の X ステージの先端に取り付けられた板バネによって移動させられる。ここで、板バネの剛性は装置の他の部分と比べて十分に小さいため、板バネのバネ定数をこの駆動装置の剛性で見なして良い。ここに、バネ定数は 4.1 および 56 N/mm のものを採用した。スライダが滑る際に板バネがたわむが、このたわみ量を渦電式変位計で測定することで摩擦力(厳密には慣性力の影響を含んでいるが、スティックスリップ運動が生じない安定すべりの場合は、バネ力と摩擦力はほぼ等しいと見なせる)を評価できる。なお、スライダと板バネの接触部には半円柱が取り付けられており、線接触状態となっている。また、潤滑剤を塗布することにより、スライダと半円柱の摩擦は無視できるほど小さくしている。

次に、一連の摩擦試験で得られた結果の整理方法について述べる。一度の摩擦試験では、図 5.11 に示すような摩擦力-すべり変位関係が得られる。本解説では、最初のピークを静止摩擦、その後のほぼ一定になったところの平均値を動摩擦として採用する。また、テクスチャーに対して様々な方向に滑らせた際に得られるこれらの値を無次元化された接線接触応力空間にプロットすることですべり面(摩擦錘)を作成できる。

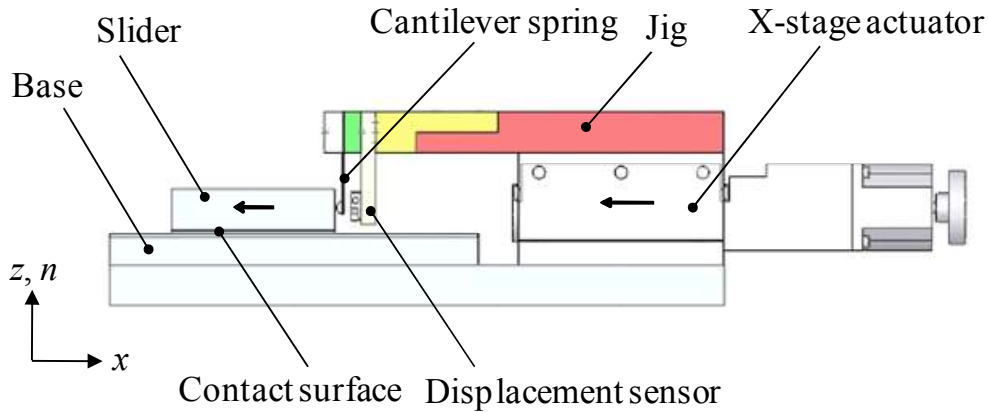


Fig. 5.9. Experimental setup (same as Fig. 4.18).

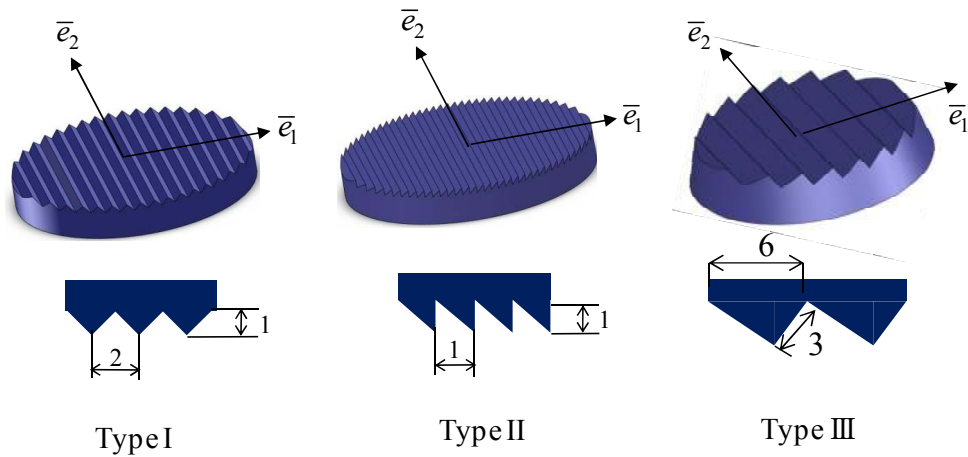


Fig. 5.10 Texture patterns. Test pieces of type I and type II are made by MC Nylon (hardness 120 HS). Test piece of type III is made by Neoprene rubber (70 HS). All specimens have a diameter of 35 mm and a thickness of 5 mm.

### 5. 5. 3 試験結果との比較

図 5.12～5.14 に、試験片 Type I～III を用いた試験で得られたすべり面をそれぞれ示す。ここに、各プロット値は垂直荷重で無次元化してあり、静止摩擦係数  $\mu_s$  と動摩擦係数  $\mu_k$  を意味している。また、グラフの縦軸と横軸は、図 5.4 に示したテクスチャーの主軸方向  $\mathbf{e}_1$  および  $\mathbf{e}_2$  に一致させてあり、すべり面の対称性を考慮して 1/4 あるいは 1/2 領域のみ示している。ベース表面の素材は、図 5.12 および 5.13 が黒天然ゴム、図 5.14 がボード紙である。また、ばね定数は図 5.12 および 5.13 が 4.1 N/mm, 図 5.14 が 56 N/mm である。なお、図 5.14 に関しては、最初のピークは現れなかったため、 $\mu_s = \mu_k$  としている。

図 5.12 の結果をみてみると、すべり面が楕円形状に扁平化し、テクスチャーの垂直方向 ( $e_1$  方向) に滑らせた場合の方が、平行方向 ( $e_2$  方向) の場合よりも摩擦抵抗が大きいことがわかる。すなわち、摩擦抵抗の直交異方性が現れていることが確認できる。他方、図 5.13 および 5.14 の結果を見てみると、すべり面の中心が移動していることがわかる。これは、図 5.10 に示したテクスチャーの非対称性により、負荷・逆負荷方向での摩擦抵抗の相違が生じているためである。通常、すべり面は摩擦力ゼロの原点を含むため、これらの結果はすべり面が平行移動しているのではなく、原点回りに回転していると解釈できる。

ここで、式(5.81)の妥当性について検討してみる。図 5.12~5.14 の実験データに対して、式(5.81)のすべり面形状に関するパラメータ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\beta$  を最小二乗法を用いて近似的に決定し、併せて図に描画してみる。図 5.12~5.14 の破線で示されているように、直交異方性と回転硬化を導入したすべり面式(5.81)を用いることで、テクスチャー性状に起因したすべり面 (摩擦錘) の異方性を表現できていることがわかる。

次に、得られたすべり面形状を用いることで、摩擦力変動の試験結果についても比較を行ってみる。図 5.15~5.17 は、各すべり方向 ( $e_1$  方向をゼロ度として定義) の摩擦力の時系列変化を表わしている。ここに、図 5.15~5.17 の試験条件は図 5.12~5.14 にそれぞれ対応している。そのため、時系列応答の比較には、図 5.12~5.14 の結果で同定したパラメータ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\beta$  と  $\mu_s$ ,  $\mu_k$  の値を用いることとなる。なお、比較に際しては速度依存性に関するパラメータ  $\kappa$ ,  $\xi$ , 微小すべりに関するパラメータ  $r$ , および接触弾性係数 (ペナルティ係数)  $\alpha$  を新たに決定した。図 5.13~5.15 には、式(5.98)で表される異方性下負荷摩擦モデルの応答特性を併せて実線で表示している。図から、テクスチャーに起因したすべり方向に対する摩擦抵抗の相違を十分に表わしていることが確認できる。なお、計算では、板バネの影響を考慮していないため、試験結果の初期の立ち上がりは合わせていない。系の剛性の影響も考慮する場合は、スティックスリップ運動の解析 (4 章参照) と同様に、式(5.98)を運動方程式に実装することで対応できる。

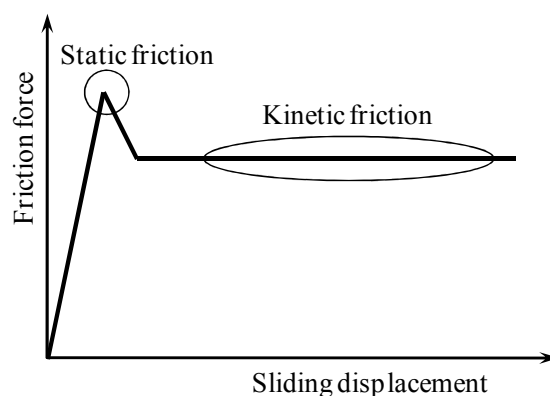


Fig. 5.11 Schematic diagram of typical relationship between friction force and sliding displacement.

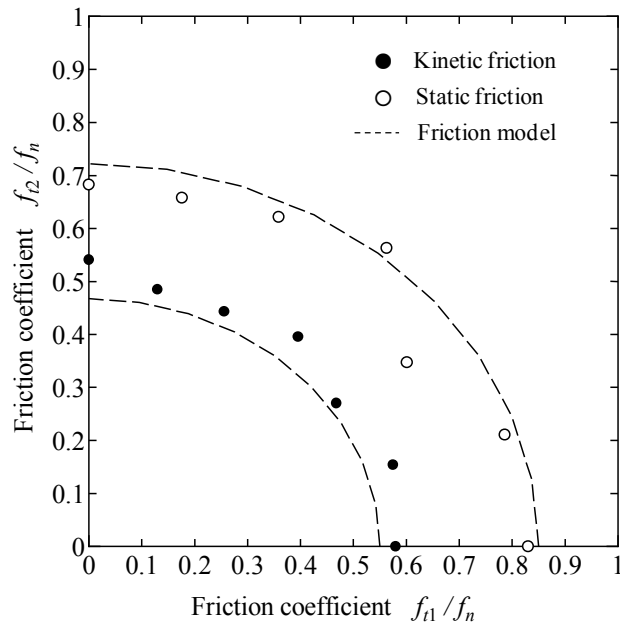


Fig. 5.12 The friction coefficient  $\mu_s$  and  $\mu_k$  in various sliding directions for type I texture. The model parameters are as follows:  $C_1 = 1.0$ ,  $C_2 = 0.86$ ,  $\beta = \{0 \ 0 \ 0\}$ ,  $\mu_s = 0.82$ ,  $\mu_k = 0.6$ .

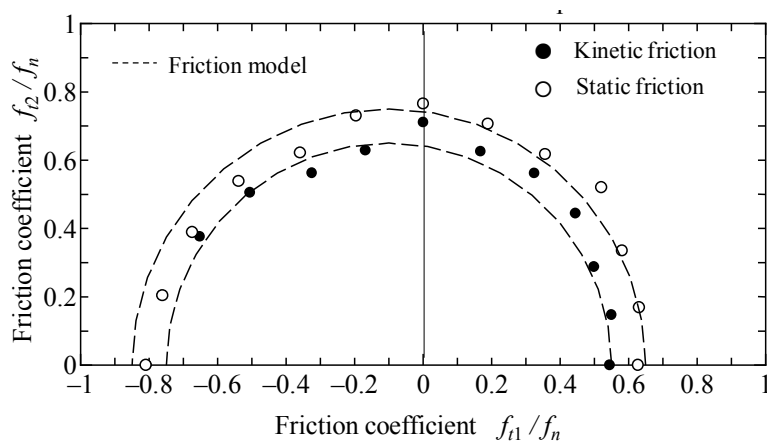


Fig. 5.13 The friction coefficient  $\mu_s$  and  $\mu_k$  in various sliding directions for type II texture. The model parameters are as follows:  $C_1 = 1.0$ ,  $C_2 = 0.98$ ,  $\beta = \{-0.1 \ 0 \ 0\}$ ,  $\mu_s = 0.85$ ,  $\mu_k = 0.55$ .

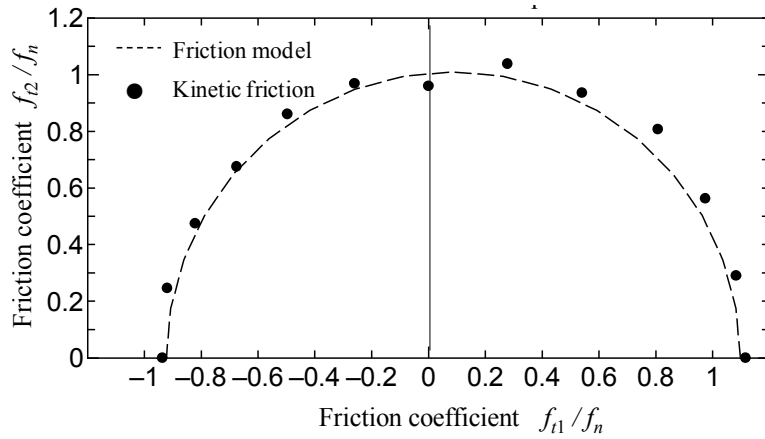


Fig. 5.14 The friction coefficient  $\mu_s$  and  $\mu_k$  in various sliding directions for type III texture. The model parameters are as follows:  $C_1=1.0$ ,  $C_2=1.0$ ,  $\beta = \{-0.09 \ 0 \ 0\}$ ,  $\mu_s = \mu_k = 1.0$ .

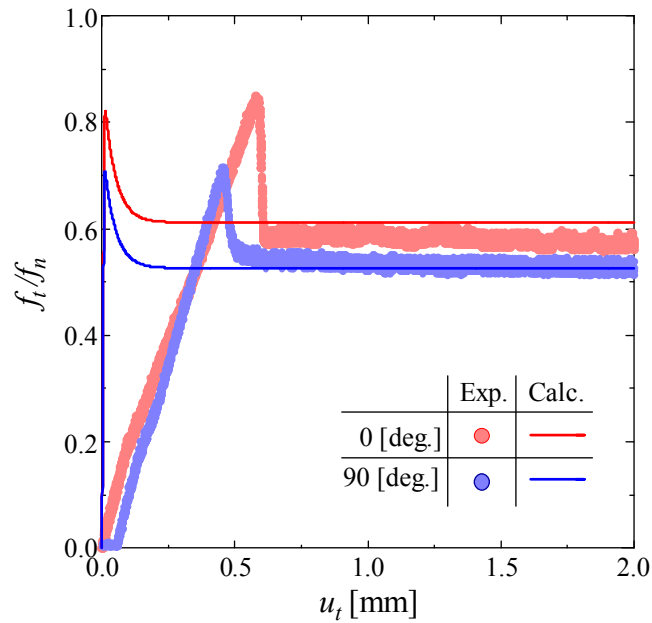


Fig. 5.15 Comparison of the traction ratio  $f_t / f_n$  vs. the sliding displacement  $\bar{u}_t$  curves by anisotropic subloadig-friction model with test results as shown in Fig.6.12, where material parameters are selected as follows:  $\kappa = 10 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $r = 10000 \text{ mm}^{-1}$  and  $\alpha = 10000 \text{ N/mm}^3$ .

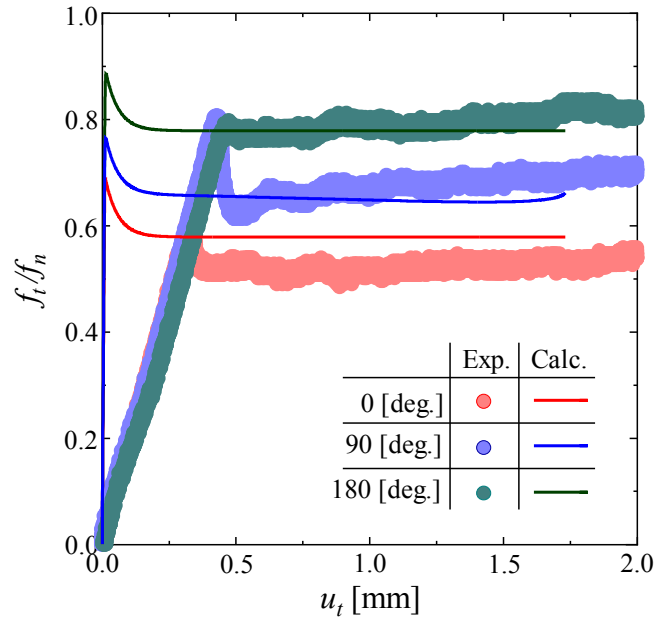


Fig. 5.16 Comparison of the traction ratio  $f_t / f_n$  vs. the sliding displacement  $\bar{u}_t$  curves by anisotropic subloadig-friction model with test results as shown in Fig.6.13, where material parameters are selected as follows:  $\kappa = 10 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $r = 10000 \text{ mm}^{-1}$  and  $\alpha = 10000 \text{ N/mm}^3$ .

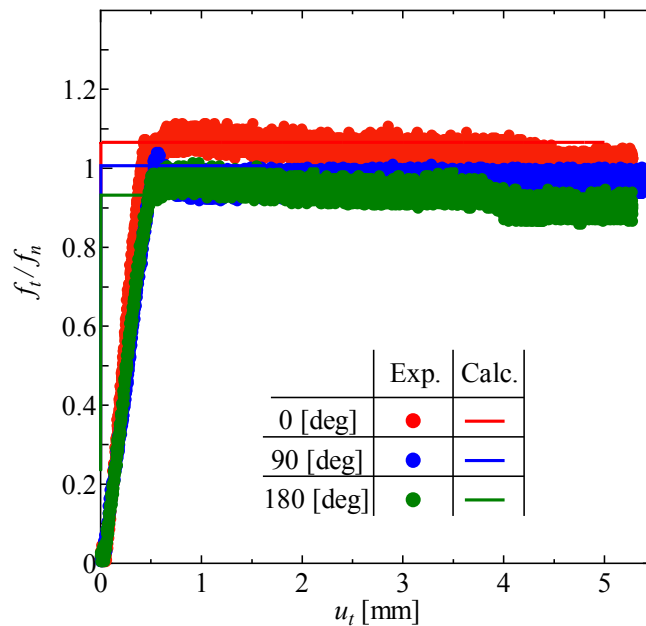


Fig. 5.17 Comparison of the traction ratio  $f_t / f_n$  vs. the sliding displacement  $\bar{u}_t$  curves by anisotropic subloadig-friction model with test results as shown in Fig.6.14, where material parameters are selected as follows:  $\kappa = 0 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\xi = 0 \text{ s}^{-1}$ ,  $r = 10000 \text{ mm}^{-1}$  and  $\alpha = 10000 \text{ N/mm}^3$ .

## 5. 6 結 言

本章では、テクスチャーを有する物体の接触問題において重要となる異方性すべり摩擦現象に関して、先ず、摩擦抵抗の方向依存性および非共軸性といった異方性すべり摩擦現象の特徴を整理した。次に、直交異方性と回転硬化の概念を導入することで、表面のテクスチャー構造に起因した異方性すべり摩擦現象を記述し得る下負荷摩擦モデルについて、一般化すべり面式を用いた定式化について述べた。また、すべり面の具体式として、Coulomb の摩擦基準に準じた場合の定式化を説明し、接触応力速度－すべり速度関係式を導出した。提案した異方性下負荷摩擦モデルによると、異方性すべり摩擦現象に加え、微小すべりおよび速度依存性すべり摩擦現象を合せて記述可能となる。さらに、異方性下負荷摩擦モデルの基本的応答特性を示すとともに、周期的なテクスチャー加工を施した試験片を用いた摩擦試験結果との比較を行い、実問題への適用性を示した。なお、異方性摩擦モデルを運動方程式に実装した際の応答特性については、次章の有限要素解析例にて述べる。

## 6章 有限要素解析への適用

### 6.1 緒言

開発期間の短縮やコスト削減を目的として、数値実験としての CAE(Computer Added Engineering)や、CAD(Computer Added Design)および CAM (Computer Added Manufacturing)をも包括した DE (Digital Engineering)は、現時、モノづくりのあらゆる段階において積極的に活用されている。特に、有限要素法は CAD データを容易に利用することができるため、部品単体に加え、アセンブリされたシステムの強度・動作解析などにも有効である。しかしながら、摺動面のすべり摩擦を考慮したアセンブリシステムの検討を行う場合、汎用ソフトの一般的な設定に基づく接触・摩擦解析では対応できない点もある。例えば、幅広いスケール・分野において観察され、摺動システムの機能や安定性を損なう主要因となるスティックスリップ運動や繰返し微小すべり現象などがそうである。これらの速度・状態依存の不安定すべり摩擦現象は、システムの摩耗・疲労・騒音発生などはもちろん、寿命や故障発生率にも深刻な影響を与えることが知られている。したがって、摺動面のすべり摩擦に関する構成式について、物体内部の非弾性構成式と同等のレベルまで引き上げることができれば、これまで個別に検討されてきたシステムの強度・剛性と摺動面のトライボロジー特性を連続体の枠組みで同時に検討することが可能となり、ひいては機械システムの設計・管理・制御手法のさらなる高度化が期待できる。

機械システムや構造物の振動特性については、時系列解析とは別に、固有値解析や周波数応答解析を利用するケースが多い。しかしながら、これらの解析手法では非線形方程式をある瞬間の剛性を用いて疑似的に線形化して解析を行う。一般に、構造解析において非線形を引き起こす要因は、材料非線形性、幾何学的変形（変位－ひずみ関係の非線形性）、そして境界非線形性（接触・摩擦、移動境界）の3つが挙げられる。したがって、本論文が対象とする速度依存性すべり摩擦現象を含む境界値問題も強い非線形性を有することとなるため、通常固有値解析や周波数応答解析は適用できない。また、すべり摩擦を伴う振動現象を扱う場合、剛性マトリクスは非線形、且つ非対称となるため、固有値解析自体も困難となることは言うまでも無い。そのため、すべりモードの遷移過程も含めたスティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦境界値問題の検討は、現在のところ、時刻歴応答解析（過渡応答解析）で行うことが望ましい。

他方、機械システムにおける摺動面設計の更なる高度化を指向して、タイヤのトレッドパターン、鱗や獣毛あるいは指紋を模擬したバイオミメティクス型機器のように、テクスチャーと呼ばれる物体表面の微視的周期的構造が様々な分野で利用されてきている。これらのテクスチャーは主に接触・摩擦現象に影響を及ぼすことでシステムの高機能化に寄与している。



また、機械加工痕を有する物体やフォームなどの複合材などの表面もある種のテクスチャーと見なすことができる。したがって、広範な対象材料において、テクスチャー性状に依存した摩擦特性に対する数値解析手法の高精度化は重要な課題として位置付けられる。

有限要素法に代表される数値解析技術は、テクスチャー表面の摩擦接触現象には効果的であるが、テクスチャー特性に依存したすべり摩擦挙動の取り扱いが不可欠となる。テクスチャー表面を有する物体間の接触・摩擦問題の数値解析手法には、大きく分けて2通りの手法が考えられる。1つ目の手法は、微視的スケールでのテクスチャーを厳密に要素で離散化し、直接接触解析を行う手法である。2つ目の手法は、テクスチャーパターンの挙動を反映した現象論的な摩擦モデルを均質表面に適用し、解析を行うものである。1つ目の手法ではより厳密な解析が可能となるが、膨大な前処理時間や計算時間が必要となり、系統的な検討には適用できないなどの懸念がある。一方、2つ目の手法は系統的な検討が必要となる概念設計やリアルタイム制御などに適用可能であり、現在のところ、こちらの手法の方が実用性が高いと考えられる。しかしながら、この手法では、単純だが実験事実を適切に記述できない摩擦モデルよりも、寧ろある程度複雑でも実験事実から剥離しない、テクスチャーパターンの影響を適切に反映できる摩擦モデルが必要となる。事実、周期的テクスチャー構造を有する接触面では、微視的凹凸の配向や傾きなどに起因して、摩擦抵抗のすべり方向および経路依存性の発生、すべり方向と摩擦抵抗方向が一致しないといった異方性摩擦現象が観察される(e.g. Hagman and Olofsson, 1998; Zमितrowicz, 2006; Antoni et al., 2007; Konyukhov et al., 2008; Wandersman, et al., 2011)。したがって、テクスチャー形状を有する物体間の接触・摩擦解析では、Coulomb 則のような等方的な摩擦モデルはもはや適用できないこととなる。

前章までにおいて、非古典弾塑性論の枠組みに基づき、状態変数とその発展則を導入することで、「微小すべり」、「速度負勾配」および「静止ー動摩擦遷移」を表現し得る速度依存性下負荷摩擦モデルを提案している。また、提案摩擦モデルを質点系の運動方程式に実装するとともに、スティックスリップ運動のベンチマーク解析を実施し、摩擦試験との比較等を通してその有効性を示している。さらに、摩擦抵抗の方向依存性や摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの非共軸性といった異方性現象も対応し得るように、速度依存性下負荷摩擦モデルを拡張している。しかし、様々な幾何特性を有するバルク体を対象とした具体的な境界値問題に対する提案アプローチ手法の適用性との検証は不十分なままである。

以上を踏まえ本章では、まず、速度依存性下負荷摩擦モデルを有限要素法に実装することで、有限自由度の動的接触・摩擦境界値問題に対する新しい時刻歴応答解析手法を提案する。また、繰返し微小すべり現象や典型的なスティックスリップ運動の数値解析を通じて、その妥当性を実証する。次に、実験結果との比較により妥当性が示されている異方性下負荷摩擦モデルを有限要素法に実装し、摩擦抵抗のすべり方向依存性やすべり摩擦の非共軸性につい

ての有限要素解析を実施する。ここに、対象とする問題はすべり面の非線形性が無視し得る圧力レベルであるため、Coulomb の摩擦基準を採用する。

## 6. 2 有限要素解析の仕様

本節では、バネ-質点系の支配方程式を用いて、有限要素法での制約条件としての接触・摩擦現象の取り扱い、並びに提案摩擦モデルの有限要素法への具体的実装方法について述べる。

### 6. 2. 1 有限要素法での接触・摩擦の取り扱い

市販されている多くの汎用ソフトにおいて、接触・摩擦現象を含んだ時刻歴応答解析が可能となっている。特に有限要素法では、接触・摩擦現象を制約条件として取り扱う場合が多い(e.g. Kikuchi and Oden, 1988; Laursen, 2001; Wriggers, 2003)。以下に、その具体的取り扱い方法について述べる。

2章でも述べたが、接触表面間の距離（ギャップ量） $g_n$  と法線接触力  $f_n$  との間に次式のような Kuhn-Tucker 型の制約条件が成り立つ。

$$f_n \geq 0, g_n \geq 0, f_n g_n = 0 \quad (6.1)$$

ここに、 $g_n$  はギャップ量とも称される。上式の意味を図 6.1 に示すような、バネ-質点系の接触問題を用いて説明する。

多くの有限要素法は変分原理に基づいており、仮想仕事の原理は系のエネルギーの極値を求める問題と等価である。床が無い場合は、バネは質点の位置エネルギーを受け止めるまで伸びることができ、その際の停留伸び量  $u_{ss}$  において系のエネルギーは最小値  $\Pi_{\min}$  をとる。一方、床との接触がバネの伸びを邪魔する場合、ばねの伸びは  $u = h$  となり、その際の系は質点の位置エネルギーとばねの弾性エネルギーに接触力仕事を加えた  $\Pi_{\min}^c$  の状態でつり合う。したがって、式(6.1)は2つの制約条件を意味していることとなる。一つは幾何学的制約条件

$$g_n(u) = h - u \geq 0 \quad (6.2)$$

であり、もう一つは力学的制約条件

$$f_n \geq 0 \quad (6.3)$$

である。接触している場合は  $g_n(u) = h - u = 0$  および  $f_n > 0$  となり、接触していない場合は  $g_n(u) = h - u > 0$  および  $f_n = 0$  となり、 $g_n$  と  $f_n$  の積は必ずゼロとなる。

上述の制約条件を有限要素法（あるいは仮想仕事の原理）に導入するに当たり、条件付き極値問題の考え方を援用する方法が一般的である(e.g. Kikuchi and Oden, 1988; Laursen, 2001;

Wriggers, 2003). 代表的な手法として, Lagrange の未定乗数法や penalty 法などが挙げられる. 以下では, 図 6.2 とともに, これらの手法を概説する.

Lagrange の未定乗数法では, 接触力と等価な未定乗数  $\hat{\lambda}$  を導入し, 系のエネルギーを次のように記述する.

$$\Pi(u, \hat{\lambda}) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \hat{\lambda}g(u) \quad (6.4)$$

独立変数が 2 つあるため, これを最小にする条件は,

$$\left. \begin{aligned} ku \cdot \delta u - mg \cdot \delta u + \hat{\lambda} \cdot \delta u &= 0 \\ g(u) \cdot \delta u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

となる. ここに,  $\delta u$  は変分 (仮想変位に相当) である. 式(6.5)を連成させることにより, 接触力を厳密に算出できる. 接触している場合は,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda} &= kh - mg = f_n \\ u &= h \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

となり, 非接触の場合は

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda} &= f_n = 0 \\ u &= mg/k \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

となる.

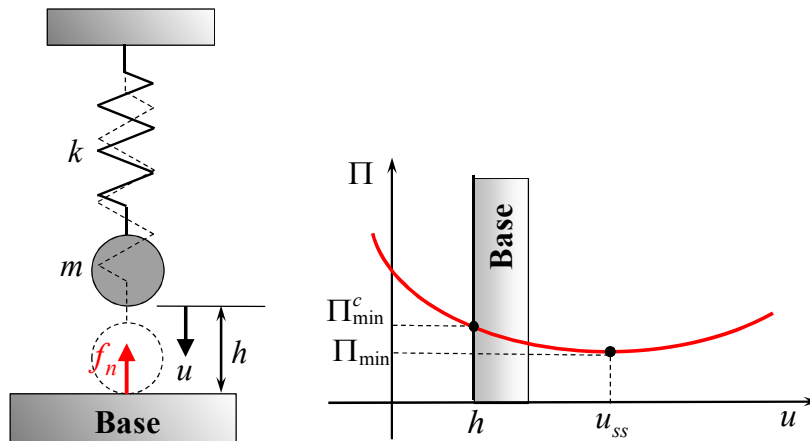


Fig. 6.1. Point mass supported by spring and energy of the mass-spring system.

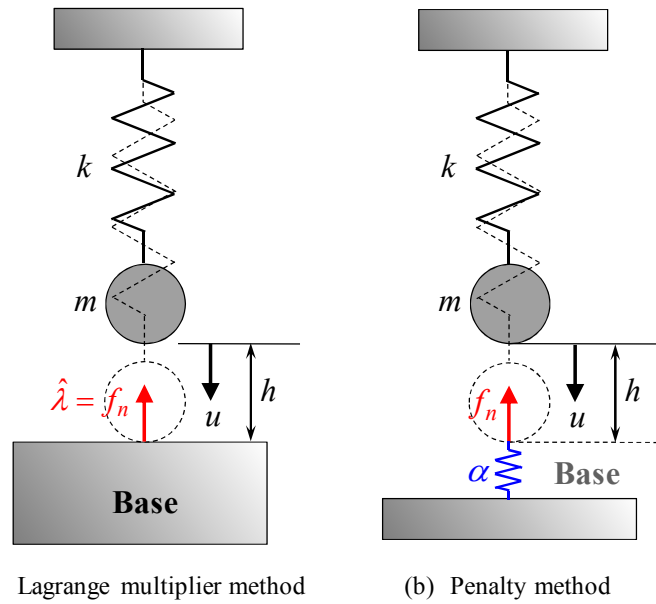


Fig. 6.2. Treatment of contact constrained condition: (a) Free body diagram for the Lagrange multiplier method; (b) Penalty spring due to the penalty term.

Penalty 法では，接触表面間に仮想的な弾性バネを仮定し，幾何学的な制約条件(6.2)を侵した分だけ力を加える．これより，接触時のエネルギーは次式で表される．

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \frac{1}{2}\alpha[g(u)]^2 \quad (6.8)$$

ここに， $\alpha > 0$  はバネ定数 (penalty 係数) である．上式を微分することにより，仮想仕事の原理が得られる．

$$ku \cdot \delta u - mg \cdot \delta u - \alpha g(u) \cdot \delta u = 0 \quad (6.9)$$

これより剛性方程式は

$$(k + \alpha)u = mg + \alpha h \quad (6.10)$$

となる．また，幾何学的制約条件は

$$g(u) = h - u = \frac{kh - mg}{k + \alpha} \quad (6.11)$$

となり，ペナルティ係数  $\alpha$  が大きいほど，満たされることとなる．

ラグランジュの未定乗数法では厳密な解が得られるが，移動境界値問題など，接触境界が時々刻々と変化する場合は，剛性マトリクスの再構築が必要となる．他方，penalty 法では，幾何学的な制約条件を力学的な制約条件へと置き換えることで接触問題を解いており，剛性マトリクスの自由度は変化しない．このため，取り扱いも容易となる．ただし，計算された接触力は厳密では無く，penalty 係数の値によっては貫通が生じたり，計算が不安定

(*ill-condition*)に陥ったりする。より詳細な解説や、その他の先進的な方法については、参考文献(cf. Larusen, 2001; Wriggers, 2003)や汎用ソフトの理論マニュアル等を参照されたい。

なお、すべり摩擦に係る接線方向についても、基本的な取り扱い方法は上述の内容と同じである。ただし、摩擦基準(すべり面)を満たしているか否かの判定が加わる。Coulomb の摩擦基準を例にしてみると、接触時の制約条件は

$$\left. \begin{array}{l} f_n > 0, \quad g_n = 0, \quad f_n g_n = 0 \\ |f_t| \geq 0, \quad |g_t| = 0, \quad f_t g_t = 0 \end{array} \right\} \text{for } \|\mathbf{f}_t\| < \mu f_n : \text{stick} \quad (6.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n > 0, \quad g_n = 0, \quad f_n g_n = 0 \\ |f_t| = \mu f_n, \quad |g_t| > 0 \end{array} \right\} \text{for } \|\mathbf{f}_t\| = \mu f_n : \text{sliding} \quad (6.13)$$

となる。また、接触・摩擦を含む場合は非線形問題となるが、上述の内容を速度形(あるいは増分形)に置き換えることで対応できる。

弾塑性論に基づく非古典摩擦モデルを用いた有限要素解析については、上述の方法を用いて微小すべりや非線形すべり面の影響を検討し得ることが示されている(Ozaki et al., 2007a, 2007b)。

## 6. 2. 2 摩擦モデルの有限要素法への実装

次に、速度依存性摩擦構成式の有限要素法汎用ソフトへの実装について述べる。本論文では、汎用ソフトとしてLS-DYNA Ver.971 (LSTC, 2012)を採用する。図 6.3 に示すように、2 章、3 章および 5 章で述べた摩擦構成式の応答特性と接触に係る制約条件には類似性が見られる。汎用ソフトへの実装はユーザーサブルーチンを使用することとなるが、引数としてすべり増分(あるいはギャップ量増分)が与えられ接触剛性を返す場合には、penalty 係数として摩擦構成式の剛性係数テンソルを代用すれば良いこととなる。他方、すべり増分が与えられ、接触力増分を返す場合には、接触応力速度-すべり速度関係式の増分形を用いて接触力増分を計算すれば良い。

ここで、接触面を有限要素を用いて離散化した場合、接触・摩擦の取り扱いを節点あるいは要素面間で行わなければならない。代表的な離散化手法には、*node-to-node*, *node-to-surface*, *surface-to-surface* などのアルゴリズムがあるが、すべりが発生する場合には、*node-to-surface* あるいは *surface-to-surface* が望ましい。ただし、弾塑性解析と同様に、解析結果は接触面の離散化(メッシュサイズ)の影響を受ける場合がある。本論文では詳細な説明は行わないが、近年になって、b-spline 関数を用いた Isogeometric 法など(Temizer, et al., 2011, 2012), より先進的な離散化アルゴリズムが提案されているため、実際の解析に当たってはこれらの参考文献を参照されたい。

速度依存性摩擦構成式の汎用ソフト LS-DYNA での取り扱い（ユーザーサブルーチンを含むアルゴリズム）について、ペナルティ法を用いた動的陰／陽解法の場合の一例を以下に概説する（図 6.4 参照）。

- 1) 式(6.1)を用いて接触判定を行う（ $g_n > 0$ ：非接触， $g_n \leq 0$ ：接触）。
- 2) ギャップ量ベクトル  $\mathbf{g}$  から算出されたすべり変位増分（速度）ベクトルを引数として受け取る。この際、接触節点情報、現在の接触力ベクトル、単位法線ベクトルおよびユーザー定義した履歴変数なども合せて受け取る。
- 3) 単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて、法線方向および接線方向のすべり速度ベクトル  $\bar{\mathbf{v}}_n$  および  $\bar{\mathbf{v}}_t$  を計算する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}_n &= (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{v}}_n \\ \dot{\mathbf{g}}_t &= \dot{\mathbf{g}} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{v}}_t \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

- 4) すべり流動則の比例係数  $\lambda$  を計算し、負荷基準の評価を行う。
- 5) 接触応力速度－すべり速度関係式を用いて接触力増分（速度）ベクトルを計算する。
- 6) 接触面上の局所座標系 ( $t_1, t_2, n$ ) から全体座標系 ( $x, y, z$ ) へと成分を変換し、接触力ベクトルを更新する。
- 7) 次ステップのための乖離判定を行う（ $f_n > 0$ ：接触， $f_n = 0$ ：非接触）。
- 8) 履歴変数を保存する。
- 9) 更新された接触力ベクトル，あるいは接触力増分ベクトルを剛性方程式に追加する。

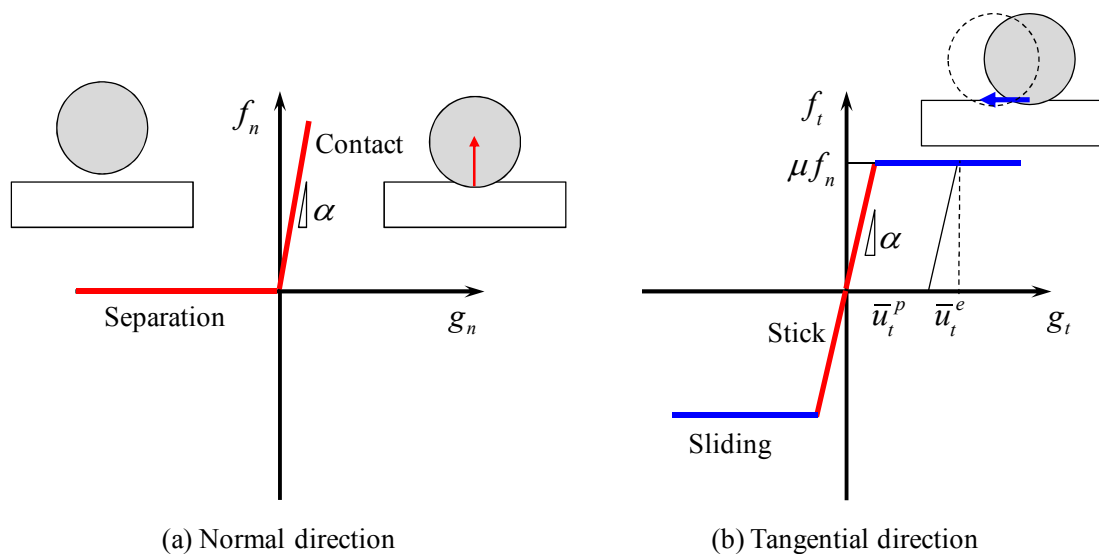


Fig. 6.3. Analogy of elastoplasticity and constrained condition.

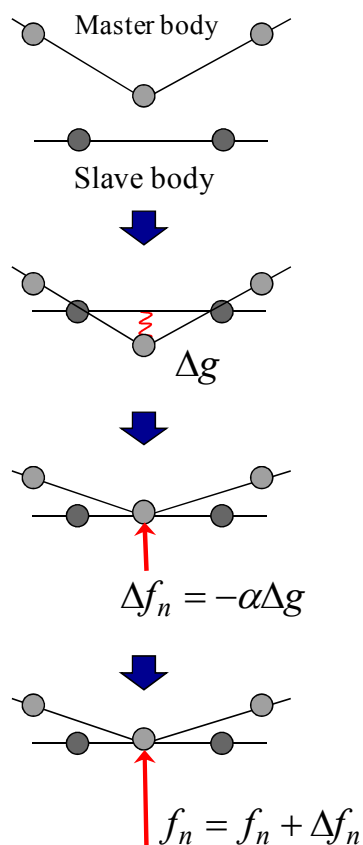


Fig. 6.4. Node-to-surface algorithm in FEM.

### 6. 3 速度依存性すべり摩擦現象の有限要素解析例

本節では、上述した内容に基づき摩擦構成式を有限要素法へ実装し、有限自由度の変形現象と速度依存性すべり摩擦現象を同時に考慮した数値解析例を示す。具体的には、直線すべり運動とスティックスリップ運動の2種類の問題について述べる。

#### 6. 3. 1 解析モデルと境界条件

汎用ソフト LS-DYNA Ver.971 (LSTC, 2012)のユーザーサブルーチン機能 `usrfric` を利用し、速度依存性下負荷摩擦モデルを有限要素法に導入する。本研究では、接触・摩擦の取り扱いには `one way surface-to-surface` に基づく離散化手法と `penalty` 法を採用し、座標系は単純に  $(x, y, z) = (t_1, t_2, n)$  と設定する。また、時間方向の離散化手法として Newmark の  $\beta$  法に基づく動的陰解法を採用し、`updated Lagrangian method` により大すべりを含む幾何学的非線形性も考慮する。

第1の解析モデルとして、有限要素法における速度依存性下負荷摩擦モデルの応答特性を示すために、図 6.5 に示す直線すべり運動モデルを採用する。モデルは8節点ソリッド要素

で離散化された2つの直方体により構成されている。下側の直方体は剛体(master body)とし、 $x$ 方向以外は固定としている。上側の弾性体(slave body)は長さ×幅×高さが $1 \times 1 \times 0.1$  mmで、ヤング率が $E = 210$  GPa、ポアソン比が $\nu = 0.2$ であり、垂直方向以外は固定としている。境界条件としては、上側の弾性体に一定の垂直荷重 $F_n = 20$  Nを与えた状態で、下側の剛体に繰返しを含む強制速度 $V_x$ を与えている。

図 6.6 に示す第 2 の解析モデルはスティックスリップ運動を解析するためのものであり、こちらも 2 つの物体から構成されている。また同様に、8 節点ソリッド要素により離散化されている。上側の物体は厚さ  $a$  mm、幅 10 mm、高さ 25 mm の弾性体(slave body)である。スティックスリップ運動に及ぼす幾何条件の影響を検討するために、幅や高さを固定した状態で厚さ  $a$  を変化させて計算を行う。また、材料特性の影響を検討するために、ヤング率  $E$  を変化させて計算を行う。なお、ポアソン比は $\nu = 0.2$ と固定している。計算ではまず、上側の弾性体の表面の  $x$  および  $y$  方向を固定した状態で垂直荷重  $F_n$  を与え、2 物体を接触させる。その後、他の方向への変位は固定したまま  $x$  方向への強制速度  $V_x$  を下側の剛体(master body)に与える。接触面の弾性体のメッシュサイズは  $x = 0.2$  mm  $y = 1.0$  mm である。また、接触面を構成する要素数は 100 個で、弾性体と剛体の  $x$  方向の要素長さの比はおおよそ 1 : 0.8 である。

以降の計算では、特に断らない限り、速度依存性下負荷摩擦モデルのパラメータは表 6.1 に示すものを用いる。なお、有限要素法において摩擦構成式の接触弾性係数と等価と見なせる penalty 係数 $\alpha (= \alpha_n = \alpha_t)$ については LS-DYNA 内のデフォルト値を用いる。すなわち、ソリッド要素に対しては次式で与えられる。

$$\alpha = 0.1 K_v A^2 / V_e \quad (6.15)$$

ここに、 $K_v$ は体積弾性係数であり、 $A$ は接触面（セグメント）の面積である。また、 $V_e$ は要素体積である。

Table 6.1 Friction model parameters for FE analyses.

$\mu_s = \mu^0$	0.6	$\mu_k$	0.3
$\alpha$	default	$r$	10000 mm <sup>-1</sup>
$\kappa$	10 mm <sup>-1</sup>	$\xi$	0.1 s <sup>-1</sup>



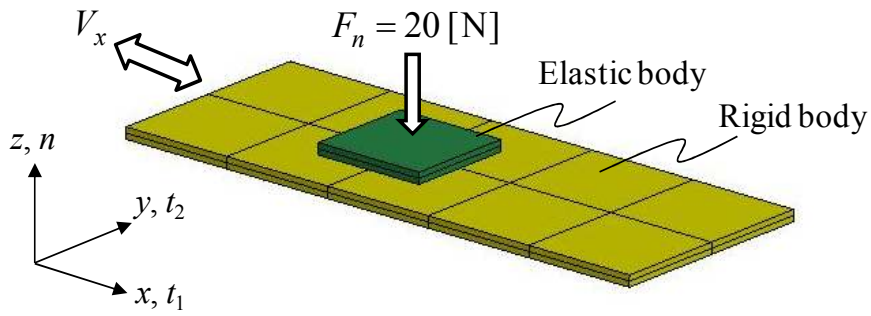


Fig. 6.5. FE model for analysis of linear sliding motion.

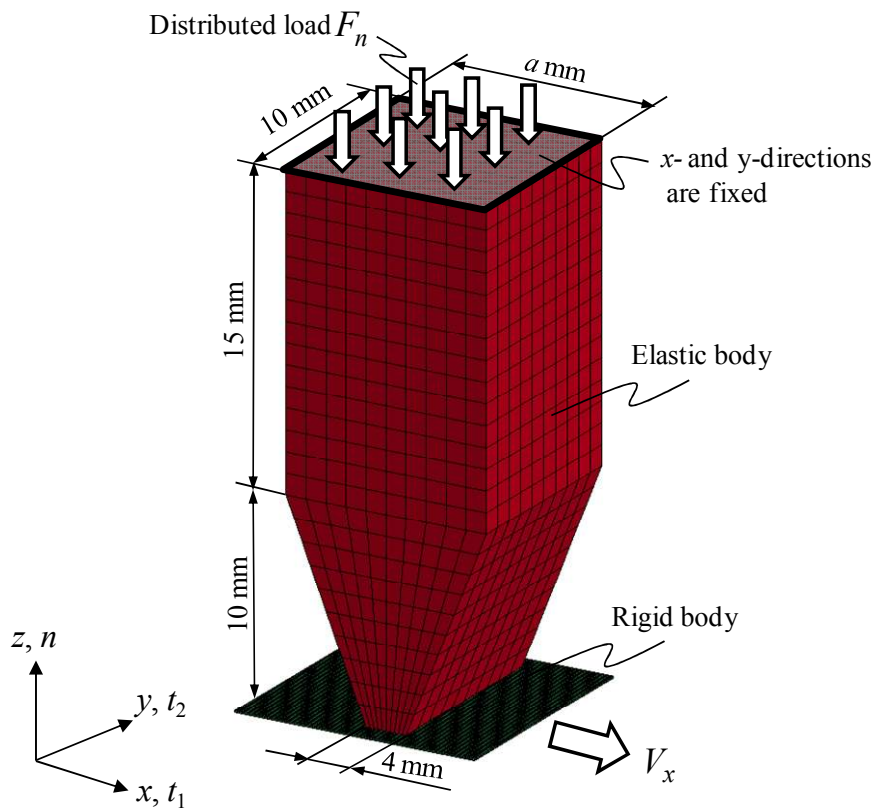


Fig. 6.6. FE model for the analysis of stick-slip motion.

### 6. 3. 2 解析結果

先ず、図 6.5 のモデルを用いた解析結果について述べる。様々なすべり速度を与えた場合における摩擦力の変動を図 6.7 に示す。図 6.7(a)の解析では、一定のすべり速度  $V_x$  を与えている。一方、図 6.7(b)の解析では、すべりを最初に与え、その後、一旦停止させる。さらに一定時間放置した後、同じすべり速度を再び与えている。これらの結果には、静止摩擦から動摩擦への遷移現象が表現されており、さらに、すべり速度（強制速度）の増加とともに摩擦抵抗が減少する速度負勾配も表現されている。また図から確認できるように、一定時間停止することにより静止摩擦が回復しており、その程度は停止時間とともに対数的に増加している。これは、3 章で述べた実験で観察されている傾向と同様である(e.g. Brockley and Davis, 1968; Kato et al., 1972; Ferrero and Barrau, 1997; Persson, 2000; Panait et al., 2004; Maegawa et al., 2010)。

図 6.8 に繰返し負荷に対するすべり変位の集積現象の解析結果を示す。ここに、微小すべりの影響を強調するために、正規すべり比  $R$  の発展則のパラメータ  $r$  を 500, 1000 および 10000  $\text{mm}^{-1}$  と設定している。図 6.8 に示されている応答の計算では、すべり速度  $V_x$  を与え、その後、すべり速度の方向を反転させている。すなわち、 $-V_x$  を与える。摩擦力がゼロよりも小さくなった後、最初のすべり速度  $V_x$  を再び与える。これらの処置による摩擦負荷を繰り返している。有限要素法に導入している速度依存性摩擦モデルは下負荷面の概念に基づいており、正規すべり面内部での接触応力の変化によっても塑性すべり速度の発生を表現できる。そのため、古典的な摩擦モデルでは適切に表現し得ない、微小すべりの集積が予測されている。以上に示した有限要素解析結果は、3 章でも述べた基本的な速度依存性すべり摩擦現象を連続体力学の枠組みで解析できることを実証している。

次に、図 6.6 の有限要素解析モデルを用いたスティックスリップ運動の解析結果について述べる。図 6.9 に接触力の経時変化を示す。ここに、下側の剛体の強制速度は  $V_x = 0.01 \text{ mm/s}$ 、上側の弾性体に作用させた垂直荷重は  $F_n = 5 \text{ N}$  である。また、上側の弾性体の厚さは  $a = 10 \text{ mm}$ 、ヤング率は  $E = 200 \text{ MPa}$  である。さらに図 6.10 に、スティック状態（図 6.9 のポイント A）とスリップ状態（図 6.9 のポイント B）におけるせん断応力分布と速度ベクトル分布のコンター図を示す。図に示されているように、速度依存性下負荷摩擦モデルを用いた有限要素法により、一定速度の入力条件の下でも自然にスティックスリップ運動を解析できている。さらに図 6.9 および 6.10 から確認できるように、スティック状態時にせん断応力が卓越し、それがスリップ状態時に開放されている。このように、運動や力の経時変化のみならず、スティックスリップ運動を呈する有限自由度のバルク体内部の応力分布と変形場の数値解析が可能となっている。

4 章の 1 自由度運動方程式の解析で述べたように、スティックスリップ運動の振幅や周期はシステムの剛性の影響を受ける。そこで、上側の弾性体の剛性に関わる断面二次モーメン

ト、すなわちヤング率と厚さの影響について解析を行ってみる。図 6.11(a)および 6.11(b)はヤング率 $E$ と厚さ $a$ を変化させた際のスティックスリップ運動の経時変化を示したものである。ここに、下側剛体の移動速度は $V_x = 0.01 \text{ mm/s}$ である。また、垂直荷重はそれぞれ 10 N と 5 N である。図に示されているように、スティックスリップ運動の周期はシステムの剛性（ヤング率、厚さ）の増加とともに減少している。このように、有限要素法を用いることにより、速度依存性すべり摩擦と材料条件および幾何形状が相互に及ぼす影響を検討できる。

有限要素法を用いた非線形過渡応答解析の特徴の一つとして、ランプ荷重のように境界条件が時々刻々と変わる場合にも対応できる点が挙げられる。そこで最後に、下側剛体の移動速度 $V_x$ と垂直荷重 $F_n$ が計算中に変動する場合の解析を行ってみる。図 6.12 は剛体の移動速度がゼロから線形的に増加する場合の解析結果を示している。また、図 6.13 は垂直荷重が線形的に減少する場合とランダムに変動する場合の解析結果を示している。他の解析条件は、 $E = 500 \text{ MPa}$ 、 $a = 10 \text{ mm}$ である。すべりモードは駆動速度とともに連続的に遷移している様子が図から確認できる。すなわち、スティックスリップ運動は移動速度の増加とともに安定すべりへと遷移している。さらに、4 章の摩擦試験結果でも示したように、速度依存性下負荷摩擦モデルを導入した有限要素解析でも垂直荷重の低下とともにスティックスリップ振幅や周期も減少する様子を再現できている。

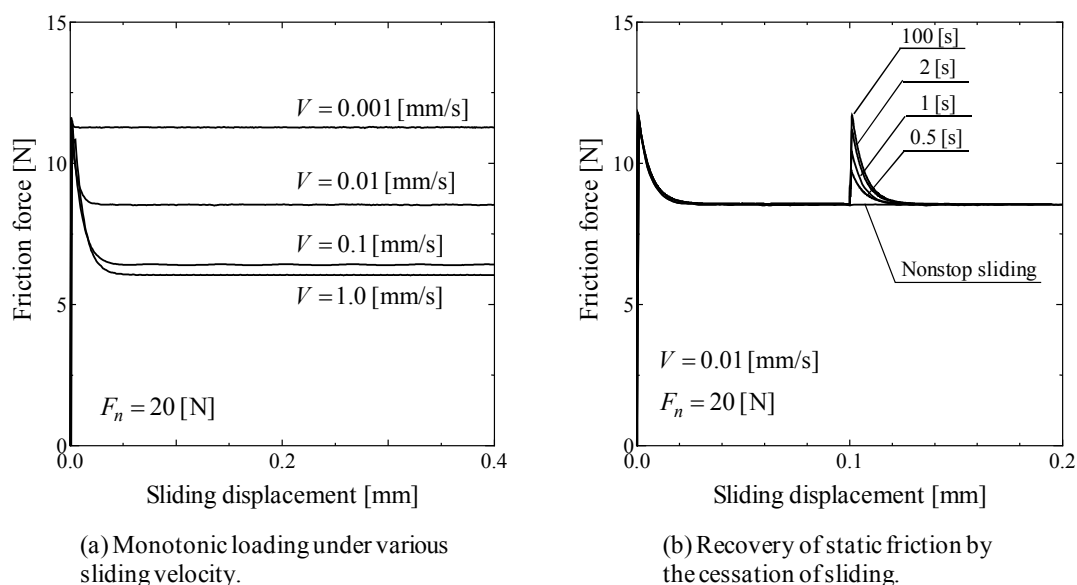
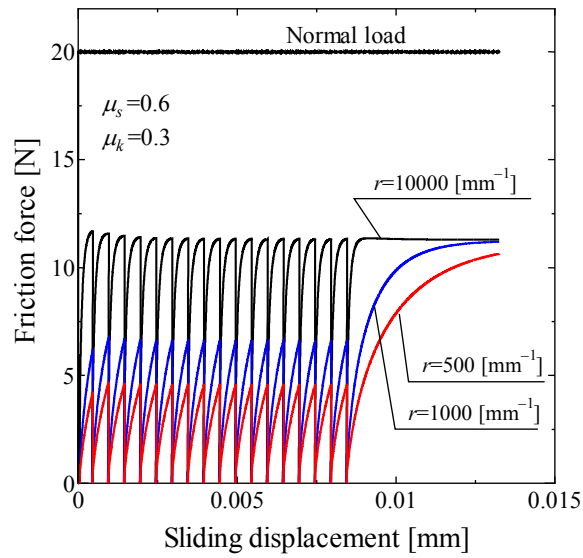
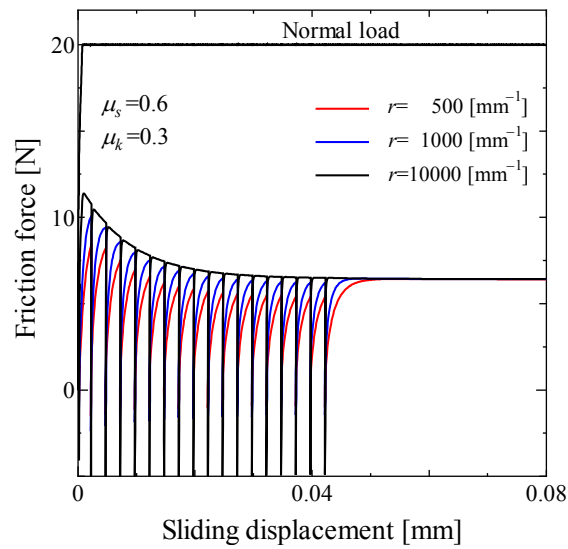


Fig. 6.7. Variation of friction force with sliding displacement, and recovery of static friction with time t elapses after sliding stops.



(a)  $V_x = \pm 0.001$  mm/s .



(b)  $V_x = \pm 0.1$  mm/s .

Fig. 6.8. Accumulation of sliding displacement under cyclic loading.

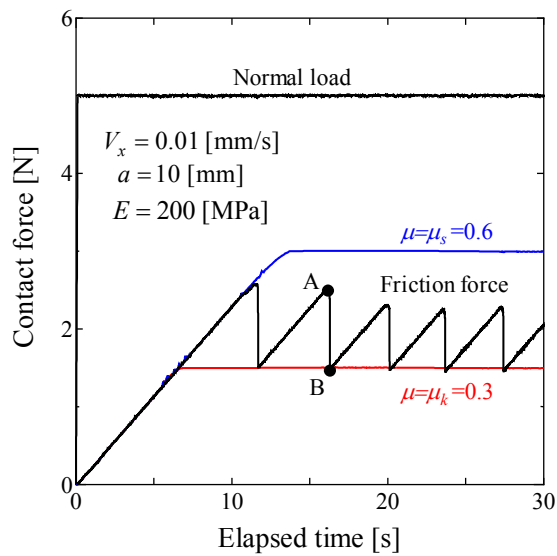


Fig. 6.9. Relations of contact forces with elapsed time:  $V=0.01$  mm/s,  $F_n=5$  N.

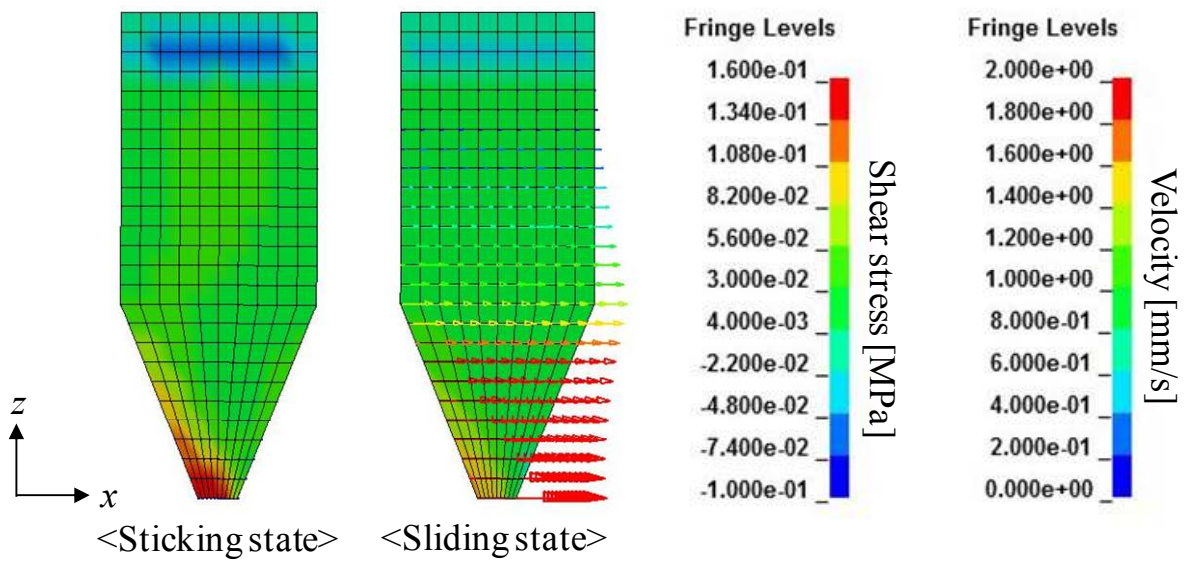
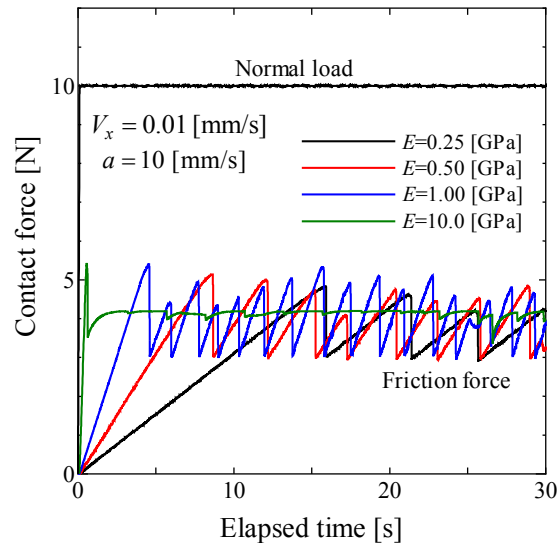
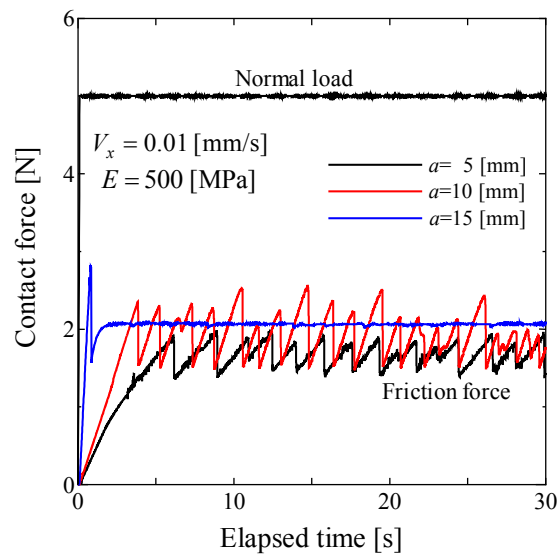


Fig. 6.10. Distributions of shear stress and nodal velocity in  $x$ -direction.



(a) Effect of Young's modulus.



(b) Effect of thickness.

Fig. 6.11. Influences of stiffness on stick-slip amplitude and period.

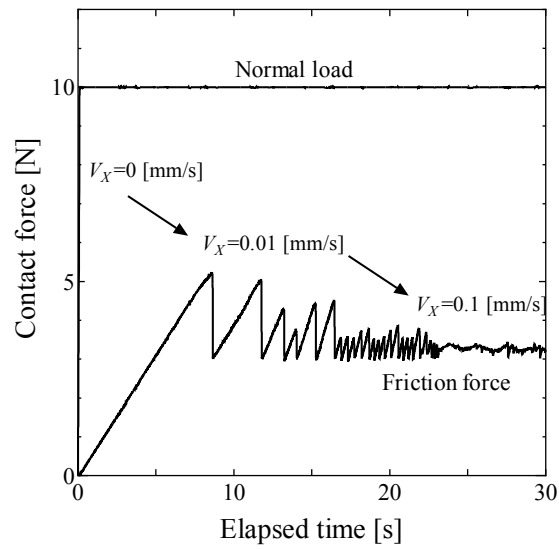


Fig. 6.12. Relations of friction force with elapsed time during linear change in driving velocity from zero.

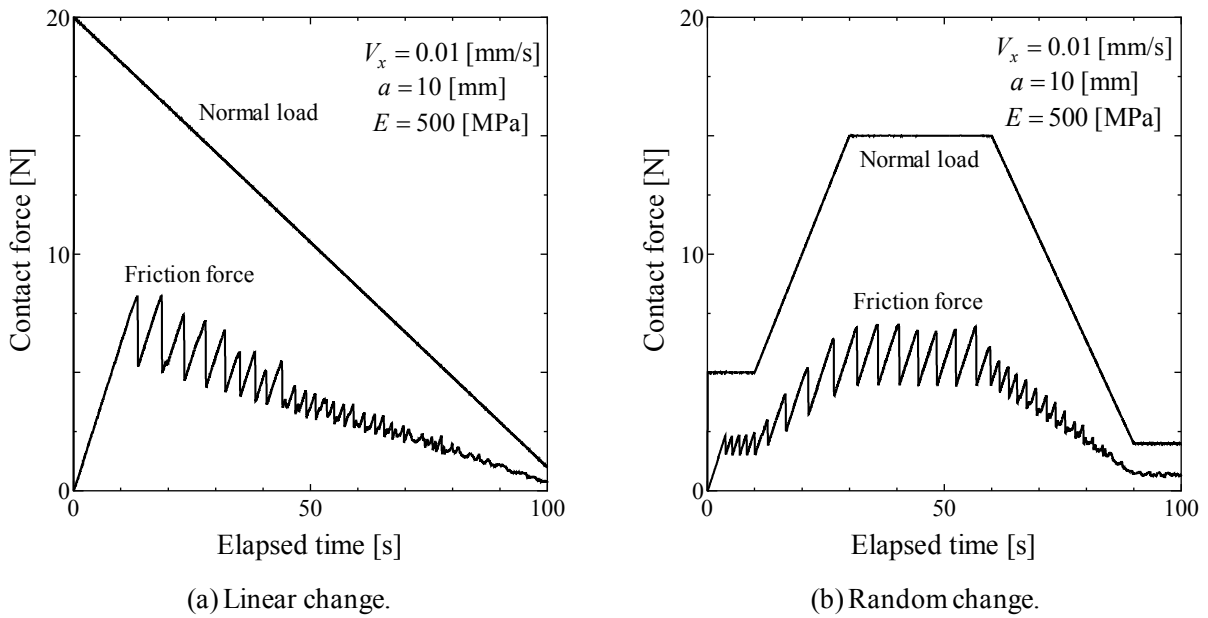


Fig. 6.13. Relations of contact forces with elapsed time during change in normal load.

## 6. 4 異方性すべり摩擦現象の有限要素解析例

本節では、速度依存性摩擦モデルの場合と同様に、異方性下負荷摩擦モデルを有限要素法に実装して、典型的な異方性すべり摩擦現象の境界値問題の解析を行う。なお、以降では、すべり摩擦の異方性に焦点を当てるため、 $\mu_s = \mu_k = \mu$ 、 $\kappa = \xi = 0$ とする。したがって、式(5.98)は速度非依存型の次式となる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^{ep} \bar{\mathbf{v}} \quad (6.16)$$

ここに、

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e \left( \mathbf{I} - \left\langle \frac{\bar{\mathbf{t}}_n \otimes (\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^e)}{\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \bar{\mathbf{t}}_n - r(\ln R)\mu} \right\rangle \right) \quad (6.17)$$

また、速度依存性に関わるパラメータは使用しないため、6つのパラメータ  $\mu$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $\beta$ 、 $r$  および  $\alpha$  のみが必要となる。

### 6. 4. 1 解析モデルと境界条件

異方性摩擦モデルの場合も接触・摩擦の取り扱いには penalty 法を、大すべりを含む幾何学的非線形性の取り扱いには updated Lagrangian method を採用する。また、時間方向の離散化手法としては、Newmark の  $\beta$  法に基づく動的陰解法を採用する。簡単のため、すべり摩擦挙動が記述される局所座標系 ( $e_1$ ,  $e_2$ ,  $n$ ) を全体座標系 ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) に一致させている。これらの座標系を一致させない場合の解析ももちろん可能であるが、サブルーチン内で使用および計算される局所座標系での節点変位および接触力と全体座標系でのそれらを相互変換するプロセスが必要となる。

具体的な解析内容としては、剛体回転が無視でき ( $\dot{(\cdot)} = \dot{(\cdot)}$ ) となる2種類の解析モデルを作成し、摩擦抵抗のすべり方向依存性や、摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの非共軸性について検討を行う。ここに、基本的な摩擦モデルのパラメータについては、 $\mu = 0.3$ 、 $r = 10000 \text{ mm}^{-1}$  とし、また  $\alpha$  には LS-DYNA のペナルティ係数のデフォルト値を採用している(式(6.15)参照)。この条件の下、直交異方性に関するパラメータ  $C_1$  および  $C_2$ 、回転硬化パラメータ  $\beta$  の及ぼす影響について検討を行う。

1つ目のモデルとして、図 6.14 に示すブロックで構成された解析モデルを採用する。上側の物体は、ヤング率 210 GPa、ポアソン比 0.28 の弾性体(slave body)で、そのサイズは 1 mm × 1 mm × 0.1 mm である。一方、下側の物体は剛体(master body)とし、全方向に完全拘束としている。上部の物体に垂直荷重 1 N を与えた状態の下、2種類の強制速度  $\bar{\mathbf{v}} = \{\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ 0\} \text{ mm/s}$  を与えて計算を行う。

2つ目のモデルとして、図 6.15 に示すようなシリンダの接触問題を採用する。このような



問題はベンチマークテストして多くの研究者に採用されている(e.g. Hjjaj et al., 2004a, 2004b; Feng et al., 2006). シリンダは弾性体(slave body)でヤング率は 100 MPa, ポアソン比は 0.49 である. また, その直径は 100 mm, 高さは 50 mm である. 下側の物体は剛体平板(master body)で, 全方向に完全拘束してある. 他方, 弾性シリンダと剛体平板は 8 節点ソリッド要素を用いてそれぞれ 1332 個および 324 個の要素で離散化してある. 計算では, シリンダの上面に強制変位を与えて 0.5% 圧縮させ, シリンダの接触面の節点の変位の分布について検討を行う.

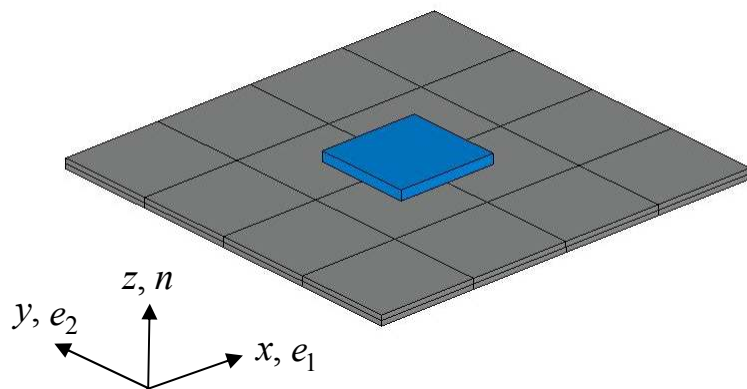


Fig. 6.14. FE models and its boundary conditions of sliding block model.

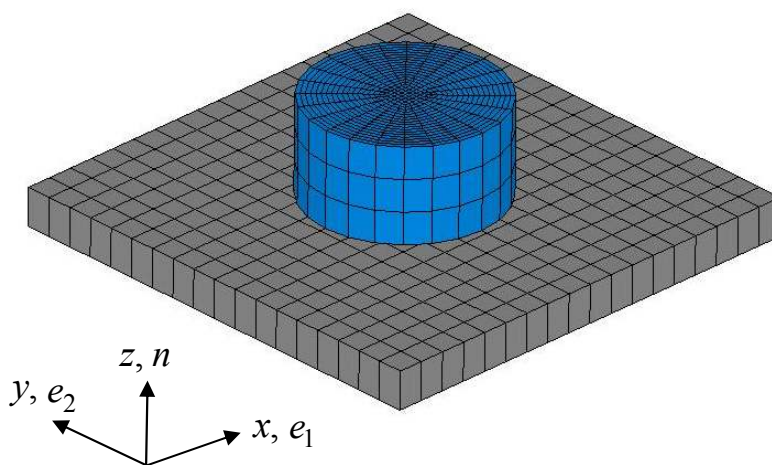


Fig. 6.15. FE models and its boundary conditions of cylindrical contact model.

## 6. 4. 2 解析結果

図 6.16 にすべり方向を前後に繰返し変更した際の摩擦力とすべり変位の関係の解析結果を示す。ここに、解析モデルは図 6.14 のブロックモデルである。また、異方性に関するパラメータは次のように設定している。

$$C_1=1.0, C_2=0.8; \beta_1=0.05, 0.1, \text{ and } 0.15, \beta_2=0$$

なお、図には等方性の摩擦モデル( $C_1=C_2=1.0, \beta=0$ )を用いた場合の解析結果も併せて示している。計算は、強制速度 $\bar{v}_{11}=0.25$  mm/s ( $\bar{v}_{12}=0$  mm/s)を  $x$  方向に与えて滑らせた後、逆方向へと反転させ、これを繰り返したものである。図 5.8 に示したような摩擦力とすべり変位の関係が有限要素法の枠組みの中でも再現されていることが図から確認できる。加えて、下負荷面の概念の特徴でもある負荷基準の単純化により、繰返し異方性すべり摩擦現象の解析を合理的に行えることがわかる。

次に、すべり摩擦の非共軸性について解析を行ってみる。図 6.17(a)および 6.17(b)は無次元化された摩擦力ベクトルとすべり変位ベクトルの軌跡を示したものである。ここに、それぞれのベクトルの方向を比較し易いように、グラフは 2 軸のものを用いている。計算は、 $x$  方向と  $y$  方向の中間(斜め)方向に滑らすために、強制速度 $\bar{\mathbf{v}}=\{0.25 \ 0.25 \ 0.0\}$  mm/s を与えたものである。異方性下負荷摩擦モデルでは、直交異方性と回転硬化を考慮したすべり面に対して非関接続線すべり流動則を採用しているため、その影響により摩擦力ベクトルの軌跡は変位ベクトルのそれと徐々に乖離している様子が図から確認できる。言うまでもなく、等方的な摩擦モデル( $C_1=C_2, \beta=0$ )の場合には、すべり方向と摩擦抵抗の方向は互いに一致している。また、摩擦力ベクトルとすべり方向ベクトルの非共軸性へのすべり面形状の影響は、直交異方性( $C_1 \neq C_2$ )の場合にはすべりの進展とともに徐々に大きくなり、回転硬化( $\beta \neq 0$ )がある場合には、すべり始めに大きく表れる様子がわかる。しかしながら、上述のようなすべり摩擦の非共軸性は、実際の材料や複雑な負荷条件下ではより繊細になると考えられる。したがって、Mroz and Stupkiewicz (1994)や Konyukhov (2008)が行っているような解析や実験を実施し、塑性ポテンシャル関数を含めたすべり流動則に関するより詳細な検討が求められる。

図 6.15 のモデルでの解析結果を図 6.18 に示す。ここに、グラフは 0.5 %圧縮時のシリンダ接触面節点の半径方向の分布を示したものである。また、それぞれのプロットは底面の内、中、外と三段階の節点群の分布を示している。分布特性への異方性の影響を調べるために、数種類の  $C_1, C_2, \beta$  の組み合わせについて解析を行っている。またこれらの図には、比較のために等方的なモデルでの結果も併せて示してある。弾性体のシリンダに垂直変位を与えた場合、ポアソン効果によって半径方向に広がるが、接触面での広がりには摩擦の影響を受ける。その

ため、底面の形状は異方性摩擦によってゆがむと考えられる。図 6.18 から確認できるように、直交異方性を与えた場合の分布は等方的な場合に比べて縦長の楕円になっていることがわかる。これは、 $u_{t2}$  方向の方が  $u_{t1}$  方向に比べ摩擦抵抗が小さいため、同程度の接触圧力下では、節点が摩擦抵抗の小さい  $u_{t1}$  方向に広がるためである。直交異方性と回転硬化を同時に与えた場合について見てみると、回転硬化ベクトル  $\beta$  の逆方向へのすべり分布が卓越していることが確認できる。

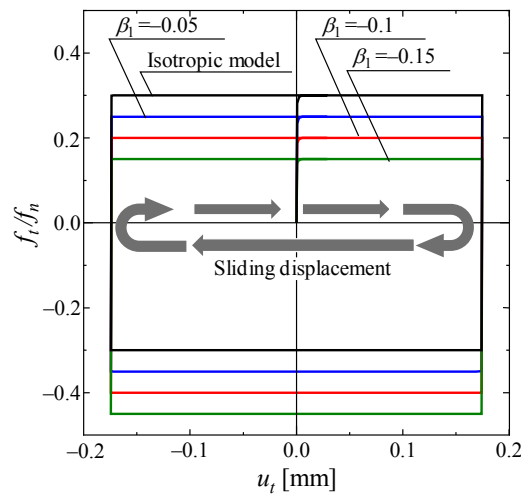
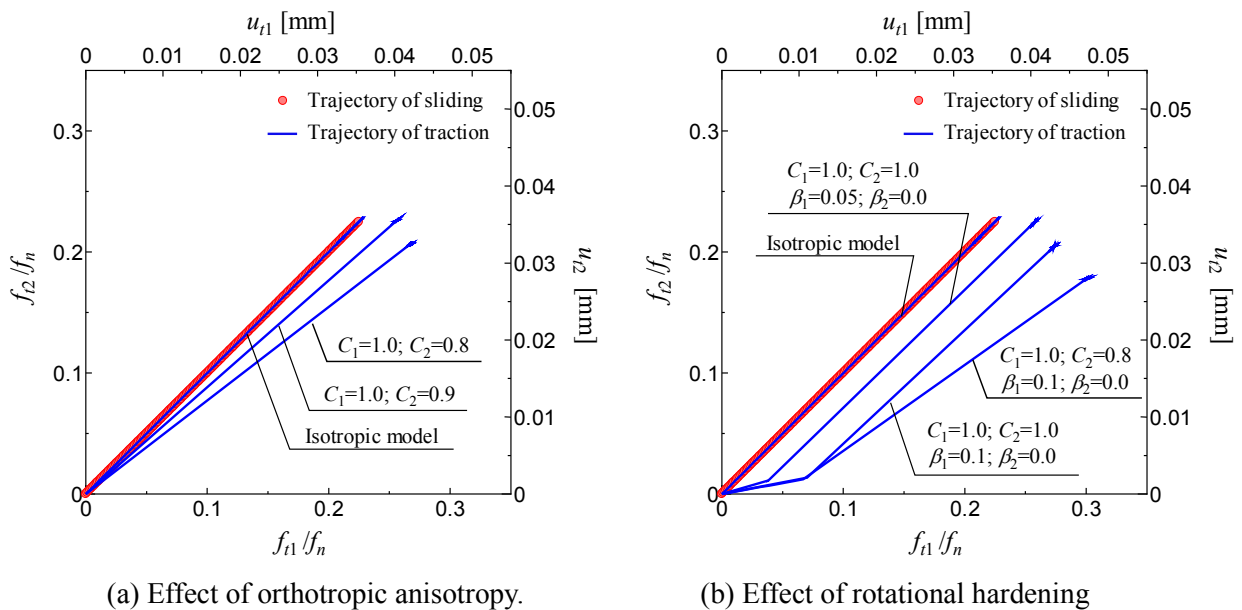


Fig. 6.16. Variations of the traction ratio  $f_t / f_n$  with the tangential sliding displacement  $\bar{u}_t$  under forward and reverse sliding.



(a) Effect of orthotropic anisotropy.

(b) Effect of rotational hardening

Fig.6.17. Trajectories of friction force and sliding displacement.

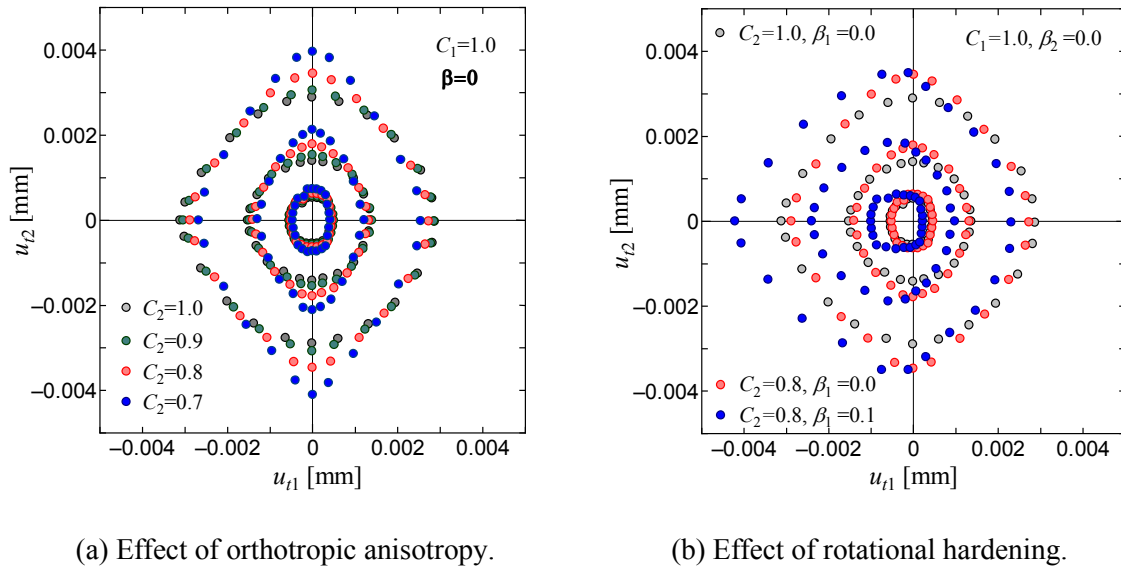


Fig. 6.18. Radial spread of bottom of cylinder at 0.5% compression:

## 6. 5 結 言

本章では、先ず、接触・摩擦現象の有限要素法への制約条件としての導入方法について概説した。次に、ユーザーサブルーチンを用いて、速度依存性下負荷摩擦モデルを有限要素法汎用ソフトに実装し、線形すべり現象とスティックスリップ運動の解析を実施した。Rate form approach 手法に基づく有限要素解析結果より、連続体解析の枠組みにおいて基本的な速度・状態依存性すべり摩擦現象を考慮し得ることを示した。また、スティックスリップ運動の解析においては、動的条件の影響のみならず、バネ・質点系の解析では困難であった接触物体の材料特性や幾何学的特性を容易に考慮できることを示した。さらに、提案アプローチ法に基づく有限要素解析は、境界条件が時々刻々と変化する場合にも対応し得ることを示した。加えて、接触力やすべり変位などのトライボロジー特性とバルク内部の応力・ひずみ場も同時に検討し得るため、より現実的な境界値問題にも本手法は適用し得ると考えられる。しかしながら、本章での数値解析においては、弾性体と剛体の接触・摩擦現象という非常にシンプルな問題を対象としている。今後、塑性や超弾性などの非線形材料物性や複雑な幾何形状を有する変形体どうしの接触・摩擦問題を含んだ、より一般的な有限要素モデルを用いたすべりモードの解析に取り組む必要がある。さらに、本論文の数値解析においては、動的特性の一つである減衰の影響を考慮していない。安定すべりと不安定すべりのモード遷移に対して、減衰は極めて重要な影響を及ぼす可能性があるため、その影響を含めた解析を行う必要

があるが、提案アプローチ手法を用いて検討することは十分に可能であると考えられる。

次に、実問題への応用の前段階として、ユーザーサブルーチン機能を用いて異方性摩擦モデルを有限要素法に実装し、ベンチマーク的な問題の解析を実施した。具体的には、異方性に関するパラメータについてのケーススタディを行い、異方性下負荷摩擦モデルを導入した有限要素解析が任意のテクスチャー構造を有する一般的な材料の解析に適用し得ることを示唆した。しかしながら、オフロード車両やバイオミメティクス型ロボット、機械加工痕を有する材料、指紋認証システム等への応用には、より詳細な摩擦試験を実施するとともに、すべり流動則に関する塑性ポテンシャルの厳密な規定が不可欠である。今後、この面での発展が待たれる。

## 7章 総括

本論文では、先ず、機械システムや構造物における実務設計やメンテナンスの高度化に対するすべり摩擦現象の理解と制御の重要性について、特に、乾燥条件下でのスティックスリップ運動に代表される不安定すべりと異方性すべり摩擦について概説した。これらの現象を適切に評価するためには、摺動面におけるトライボロジー特性のみならず、接触物体の幾何学的特性や材料特性を同時に考慮する必要がある。以上の背景の下、摩擦モデルの発展と数値解析手法との関係性を踏まえ、弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦構成式（摩擦モデル）を提案した。さらに、異方性すべり摩擦現象にも対応し得るよう提案摩擦モデルを一般化した。他方、連続体力学の枠組みでスティックスリップ運動や異方性すべり摩擦現象を検討し得るよう、提案モデルに基づき、接触・摩擦境界値問題に対する新しいアプローチ手法を提案した。以下、本論文に関する結論を章ごとに列挙する。

2章では、既存の摩擦モデルをトライボロジーモデル、state variable モデル、メゾスケールEQモデルおよび弾塑性論に基づく摩擦モデルの4つのカテゴリーに分類するとともに、その特徴について概説した。特に、スティックスリップ運動や異方性すべり摩擦現象の検討に必要な記述能力について整理するとともに、構成式としての要件および数値解析手法との親和性の観点からの評価も併せて行った。その結果、下負荷面の概念を導入した非古典弾塑性論に基づく摩擦モデルが適当であると結論付け、これに基づき速度・状態依存性摩擦モデルおよび異方性摩擦モデルを提案することとした。

第3章では、弾塑性論に基づく速度・状態依存性摩擦モデルの定式化について述べた。先ず、固着/すべり時の接触面の微小アスペリティの振る舞いを仮定し、速度・状態依存性摩擦モデルの定式化にて不可欠となる状態変数とその発展則に関する基本的考察を行い、競合型の発展式のコンセプトを導出した。本発展則は、すべり弱化（すべり軟化）と静止摩擦の時間依存性回復(healing)の2項からなり、これらが競合する形としてすべり速度弱化（速度負勾配）が自然に表される。

次に、すべり速度の加算分解、弾性式、適応条件、すべり流動則および負荷基準など、弾塑性構成式の定式化に必要な諸式を導出し、速度・状態依存性摩擦モデルの一般化式の定式化を行った。また、法線接触応力依存の非線形すべり面（摩擦基準）およびCoulombの摩擦基準などの具体的な関数形に基づいた接触応力速度-すべり速度関係式を導出した。通常、摩擦応力-すべり変位関係は1対1で対応させることはできないが、本モデルはそれぞれの速度どうしを1対1で対応付ける速度形(rate form)の関係式を呈する。このため、静止-動摩擦遷移や繰返しすべり現象にも対応し得る。なお、本モデルは降伏面（すべり面）内部を純弾性域としない非古典弾塑性論に属する下負荷面モデルの概念が導入されており、速度依

存性下負荷摩擦モデルと称され、速度依存性現象のみならず巨視的なすべり以前の微小すべり現象も記述し得る。最終的に、直線すべり運動の数値実験を実施し、単調摩擦負荷および繰返し摩擦負荷に対する提案モデルの基本的な応答特性を示すとともに、摩擦試験結果との比較により、その妥当性を検証した。

第4章では、最もシンプルな摩擦系である1自由度バネ-質点系の運動方程式に提案した速度依存性下負荷摩擦モデルを実装し、境界値問題としてのスティックスリップ運動の数値解析を実施した。なお、弾塑性論に基づく速度形の摩擦モデルを用いる本手法を既往の“*state variable approach*”と区別して“*rate form approach*”と称する。提案アプローチ手法を用いて、1自由度のバネ-質点系でのスティックスリップ運動に及ぼす駆動速度・バネ剛性・垂直荷重といった動的条件の影響およびモデルパラメータの影響について検討を行った。その結果、既往の実験的報告との整合性が十分に確認できた。また、提案アプローチ手法に基づき、不安定すべりと安定すべりに関するすべりモードの分岐条件について考察した。その結果、系のスティックスリップ運動の周期と振幅は、次の動的条件下では減少することを示した。すなわち、

- a) 駆動速度  $V$  が増加した場合
- b) バネ定数  $K$  が増加した場合
- c) スライダの質量  $M$  が減少した場合
- d) 静止摩擦係数と動摩擦係数の差が減少した場合

次に、スティックスリップ運動に付随した摩擦力振幅の制御方法に関する数値解析的検討を実施した。既に報告のある「垂直荷重の微小変動を利用して摩擦抵抗の速度負勾配を見かけ上の正勾配にする方法」と新たに試みた「真実接触面積の凝着の回復時にすべり速度を印加し、静止摩擦と動摩擦の差を小さくする方法」の2種類の制御方法について検討を実施し、提案アプローチ法により、摩擦力振幅抑制のための制御指針を検討し得る可能性があることを示唆した。

また、摩擦試験と材料試験（要素試験）の類似点と相違点について整理し、「摩擦試験と摩擦モデルの関係」は「材料試験と弾塑性構成式の関係」とは異なり、境界値問題として捉えねばならないことを示した。これを踏まえて、種々の供試材料の組合せを対象としたスティックスリップ運動の試験結果との比較を行い、提案摩擦モデル、ひいてはアプローチ手法の妥当性を検証した。その結果、供試材料、試験装置の動的条件および試験装置の種類によらずに提案アプローチ手法が適用できることを示した。

次の第5章では、第3章で提案した速度依存性下負荷摩擦モデルを異方性すべり摩擦現象にも対応し得るように一般化した。ここでの異方性すべり摩擦とは、接触表面の微小テクスチャーの形状・勾配・間隔に起因した「見かけの摩擦抵抗の方向依存性」および「摩擦力ベ

クトルとすべり速度ベクトルの方向が異なる非共軸性」を意味する。異方性下負荷摩擦モデルの定式化に当たっては、接線接触応力空間にてすべり面を扁平化させる直交異方性ならびに接触応力空間にてすべり面を原点回りに回転させる回転硬化の概念を新たに導入した。また、非共軸性を記述するための非関連接線すべり流動則を定義した。

次に、法線接触応力依存の非線形すべり面（摩擦基準）および Coulomb の摩擦基準などの具体的な関数形に基づいた接触応力速度－すべり速度関係式を導出するとともに、数値実験により異方性すべり摩擦現象の記述能力を示した。また、3種類の周期的なテクスチャー加工を施した試験片を用いた摩擦試験結果との比較例を示し、異方性下負荷摩擦モデルの実問題への適用性を示した。

続く第6章では、第4章での質点系で妥当性を示した rate form approach を有限要素法へと展開した。すなわち、第3章および第5章で提案した摩擦モデルを有限自由度の連続体力学の枠組みでの境界値問題の解析へと適用した。先ず、接触・摩擦現象の有限要素法への制約条件としての導入方法について概説した後、ユーザーサブルーチンを用いて、提案摩擦モデルを有限要素法汎用ソフトに実装した際のアルゴリズムについて述べた。

速度・状態依存性すべり摩擦現象の有限要素解析では、安定すべりとスティックスリップ運動の両方を条件に応じて検討し得ることを示した。特に、スティックスリップ運動の解析では、動的条件の影響のみならず、バネ－質点系の解析では困難であった接触物体の材料特性や幾何学的特性を容易に考慮できることを示した。したがって、提案アプローチ手法により、有限自由度の物体の変形現象といった材料力学特性とスティックスリップ運動を含む速度依存性すべり摩擦現象といったトライボロジー特性を同時に検討し得る可能性が示された。

また、異方性すべり摩擦現象の有限要素解析では、提案アプローチ手法により、典型的な異方性すべり摩擦現象の境界値問題の数値解析例を通して、摩擦抵抗の方向依存性や摩擦力ベクトルとすべり速度ベクトルの非共軸性を検討し得ることを示した。

以上のように、本論文は、非古典弾塑性論に基づき定式化された速度・状態依存性摩擦モデルを有限要素法に実装することにより、微小すべりの集積現象やすべりモードの分岐現象、あるいは異方性すべり摩擦現象など、一般的な汎用ソフトの設定では検討し得ない現象についても有限自由度の連続体の枠組みの中で解析し得ることを示したものである。ここで問題となるのは、乾燥あるいは境界潤滑条件下でのすべり摩擦現象は、物理的素過程と化学的素過程とが連成して複雑な挙動を示すとともに、システム依存性や雰囲気環境依存性を示す場合が多々あることである。そのため、すべり摩擦現象への CAE 利用の有効性については、別途、議論の必要があろう。ただし、現段階においても、システムの材料力学的特性とトライボロジー特性の同時検討に対する CAE の有効な利用法はあると考えられる。例えば、トライボロジー特性を入力条件として材料強度の問題を予測することや、あるいはその逆パターン



に主眼を置くことではなく，簡便なモデルよりも，寧ろ多少複雑でも汎用的な摩擦モデルを用いて材料条件・幾何条件・運動条件・摩擦条件に対する系統的な検討を行い，その結果をフィードバックすることによりバックキャスト型の摺動面設計や機構設計に取り組むことは一つの CAE 活用法であると考えられる．

## 参考文献

- Anand, L., 1993. A constitutive model for interface friction. *Computational Mech.* **12**, 197-213.
- Antoni, N., Ligier, J.-L., Saffre, P., Pastor, J., 2007. Asymmetric friction; Modelling and experiments. *Int. J. Eng. Sci.* **45**, 587-600.
- Barquins, M., 1993. Friction and wear of rubber-like materials. *Wear* **160**, 1-11.
- Baumberger, T., Berthoud, P., Caroli, C., 1999. Physical analysis of the state- and rate- dependent friction law: Dynamic friction. *Phys. Rev. B* **60**, 3928-3939.
- Baumberger, T., Caroli, C., 2006. Solid friction from stick-slip down to pinning and aging. *Advances in Physics* **55**, 279-348.
- Baumberger, T., Heslot, F., Perrin, B., 1994. Crossover from creep to inertial motion in friction dynamics. *Nature* **30**, 544-546.
- Bay, N., Wanheim, T., 1976. Real area of contact and friction stresses at high pressure sliding contact. *Wear* **38**, 201-209.
- Berthoud, P., Baumberger, T., 1998. Shear stiffness of a solid-solid multicontact interface. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **454**, 1615-1634.
- Berthoud, P., Baumberger, T., Sell, C.G., Miver, J.M., 1999. Physical analysis of the state- and rate- dependent friction law: Static friction. *Phys. Rev. B* **59**, 313-327.
- Bhattacharyya, P. and Chakrabarti, B.K., (Eds.), 2006. Modelling Critical and Catastrophic Phenomena in Geoscience, A Statistical Physics Approach, Lecture note in physics, *Springer*.
- Bowden, F.P., Tabor, D., 1950. The friction and lubrication of solids. *Oxford: Clarendon*.
- Brockley, C.A., Davis, H.R., 1968. The time-dependence of static friction. *J. Lubr. Tech. (ASME)* **90**, 35-41.
- Braun, O.M., Naumovets, A.G., 2006. Nanotribology: Microscopic mechanism of friction. *Surface Science Reports* **60**, 79-158.
- Braun, O.M., Tosatti, E., 2009. Kinetics of stick-slip friction in boundary lubrication. *EPL, A Lett. J. Exploring the Frontiers of Physics* **88**, 48003.
- Bureau, L., Baumberger, T., Caroli, C., Ronsin, O., 2001. Low-velocity friction between macroscopic solids. *C. R. Acad. Sci. Paris, Series IV, Different faces of Tribology* **2**, 699-707.
- Courtney-Pratt, J.S., Eisner, E., 1957. The effect of a tangential force on the contact metallic bodies. *Proc. Roy. Soc. A* **238**, 529-550.
- Cheng, J.-H., Kikuchi, N., 1985. An incremental constitutive relation of uniaxial contact friction for large deformation analysis. *J. Appl. Mech. (ASME)* **52**, 639-648.

- Curnier, A., 1984. A theory of friction. *Int. J. Solids Struct.* **20**, 637-647.
- Dafalias, Y.F., Popov, E.P., 1975. A model of nonlinearly hardening materials for complex loading. *Acta Mech.* **21**, 173-192.
- Dafalias, Y.F., Herrmann, L.R., 1980. A bounding surface soil plasticity model. *Proc. Int. Symp. Soils under Cyclic Trans. Load., Swansea*, 335-345
- Derjaguin, B.V., Push, V.E., Tolstoi, D.M., 1957. A theory of stick-slipping of solids. *Proc. Conf. Lubr. and Wear, Inst. Mech. Eng., London*, 257-268.
- Dieterich, J.H., 1972. Time-dependent friction in rocks. *J. Geophys. Res.* **77**, 3690-3697.
- Dieterich, J.H., 1979. Modeling of rock friction: 1. Experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.* **84**, 2161-2168.
- Dokos, S.J., 1946. Sliding friction under extreme pressure –I. *ASME* **68**, A148-156.
- Drucker, D.C., 1988. Conventional and unconventional plastic response and representation. *Appl. Mech. Rev. (ASME)* **41**, 151-167.
- Dunkin, J.E., Kim, D.E., 1996. Measurement of static friction coefficient between flat surfaces. *Wear* **193**, 186-192.
- Feng, Z-Q., Hjiqj, M., de Saxce, G., Mroz, Z., 2006. Influence of frictional anisotropy on contacting surfaces during loading/unloading cycles. *Int. J. Non-linear Mech.* **41**, 936-948.
- Ferrero, J.F., Barrau, J.J., 1997. Study of dry friction under small displacements and near-zero sliding velocity. *Wear* **209**, 322-327.
- Filippi, S., Akay, A., Gola, M.M., 2004. Measurement of tangential contact hysteresis during microslip. *J. Tribology (ASME)* **126**, 482-489.
- Fredriksson, B., 1976. Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. *Comput. Struct.* **6**, 281-290.
- Gearing, B.P., Moon, H.S., Anand, L., 2001. A plasticity model for interface friction: application to sheet metal forming. *Int. J. Plasticity* **17**, 237-271.
- Greenwood, J.A., Williamson, J.B.P., 1966. Contact of nominally flat surfaces, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **295**, 300-139.
- Olofsson, U., Hagman, L., 1997. A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic bodies. *Tribol. Int.* **30**, 599-603.
- Hagman, L.A., Olofsson, U., 1998. A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic asperities-parametric study and experimental investigation. *Tribol. Int.* **31**, 209-217.
- Hashiguchi, K., 1980. Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition. *J.*

- Appl. Mech. (ASME)* **47**, 266-272.
- Hashiguchi, K., 1989. Subloading surface model in unconventional plasticity. *Int. J. Solids Struct.* **25**, 917-945.
- Hashiguchi, K., 2007. General corotational rate tensor and replacement of material-time derivative to corotational derivative of yield function. *Comput. Model. Eng. Sci.* **17**, 55-62.
- Hashiguchi, K., Chen, Z.-P., 1998. Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* **22**, 197-227.
- Hashiguchi, K., Ozaki, S., Okayasu, T., 2005. Unconventional friction theory based on the subloading surface concept. *Int. J. Solids Struct.* **42**, 1705-1727.
- Hashiguchi, K., 2008. Elastoplasticity theory. *Lecture notes in Applied and Computational Mechanics* **42**, Springer.
- He, Q.C., Curnier, A., 1993. Anisotropy dry friction between two orthotropic surface undergoing large displacement. *Eur. J. Mech. A: Solids* **12**, 631-666.
- Heslot, F., Baumberger, T., Perrin, B., 1994. Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experimental and a heuristic model. *Phys. Rev. E* **49**, 4973-4988.
- Hjiaj, M., Feng, Z.-Q., de Saxce, G., Mroz, Z., 2004a. Three-dimensional finite element computations for frictional contact problems with non-associated sliding rule. *Int. J. Numerical Meth. Eng.* **60**, 2045-2076.
- Hjiaj, M., Feng, Z.-Q., de Saxce, G., Mroz, Z., 2004b. A variational-inequality based formulation of the frictional contact law with a non-associated sliding rule. *Int. J. Eng. Science* **42**, 1013-1034.
- Iwan, W. D., 1967. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. *J. Appl. Mech. (ASME)* **34**, 612-617.
- Kartal, M.E., Mulvihill, D.M., Nowell, D., Hills, D.A., 2011. Measurements of pressure and area dependent tangential contact stiffness rough surfaces using digital image correlation. *Tribol. Int.* **44**, 1188-1198.
- Kato, S., Sato, N., Matsubayashi, T., 1972. Some considerations on characteristics of static friction of machine tool sideway. *J. Lubr. Tech. (ASME)* **94**, 234-247.
- Kikuchi, N., Oden, J.T., 1988. Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods, *SIAM, Philadelphia*.
- Konyukhov, A., Vielsack, P., Schweizerhof, K., 2008. On coupled models of anisotropic contact surfaces and their experimental validation. *Wear* **264**, 579-588.
- Konyukhov, A., Schweizerhof, K., 2006a. Covariant description of contact interfaces considering anisotropy for adhesion and friction. Part 1. Formulation and analysis of the computational model.

- Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **196**, 103-117.
- Konyukhov, A., Schweizerhof, K., 2006b. Covariant description of contact interfaces considering anisotropy for adhesion and friction. Part 2. Linearization, finite element implementation and numerical analysis of the model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **196**, 289-303.
- Krieg, R. D., 1975. A practical two surface plasticity theory. *J. Appl. Mech. (ASME)* **42**, 641-646.
- Lapusta, N., Rice, J.R., Ben-Zion, Y., Zheng, G., 2000. Elastodynamic analysis for slow tectonic loading with spontaneous rupture episodes on faults with rate-and state dependent friction. *J. Geophys. Res.* **105**(B10) 23,765-789.
- Laursen, T.A., 2001. Computational contact and impact mechanics: Fundamentals of modeling international phenomena in nonlinear finite element analysis. *Springer*.
- LSTC, 2012. Keywords manual & Theory manual. *LS-DYNA Ver.971*.
- Maegawa, S., Nakano, K., 2009. Mechanism of stick-slip motion associated with Schallamach waves, *Wear* **268**, 924-930.
- Marone, C., 1998. Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. *Ann. Rev. Earth Planet Sci.* **26**, 643-696.
- Michalowski, R., Mroz, Z., 1978. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Archiv. Mech.* **30**, 259-276.
- Mroz, Z., 1967. On the description of anisotropic workhardening. *J. Mech. Phys. Solids* **15**, 163-17534.
- Mroz, Z., Stupkiewicz, S., 1994. An anisotropic friction and wear model. *Int. J. Solids Struct.* **31**, 1113-1131.
- Mroz, Z., Stupkiewicz, S., 1998. Constitutive model of adhesive and ploughing friction in metal-forming processes. *Int. J. Mech. Sci.* **40**, 281-303.
- Nakano, K., 2006. Two dimensionless parameters controlling the occurrence of stick-slip motion in a 1-DOF system with Coulomb friction. *Tribol. Lett.* **24**, 91-98.
- Nakano, K., Maegawa, S., 2009. Stick-slip in sliding systems with tangential contact compliance. *Tribol. Int.* **42**, 1771-1780.
- Nakano, K., Maegawa, S., 2010. Occurrence limit of stick-slip: dimensionless analysis for fundamental design of robust-stable systems. *Lubrication Science* **22**, 1-18.
- Oden, J.T., Martins, J.A.C., 1986. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **52**, 527-634.
- Oden, J.T., Pires, E.B., 1983a. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. *Comput. Struct.* **19**, 137-147.

- Oden, J.T., Pires, E.B., 1983b. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. Appl. Mech. (ASME)* **50**, 67-76.
- Olofsson, U., 1995. Cyclic micro-slip under unlubricated conditions. *Tribol. Int.* **28**, 207-217.
- Ozaki, S., 2013. On the rate-dependent friction model. *The 62nd Nat. Cong. of Theoretical & Applied Mechanics*, OS21-03 (in Japanese).
- Ozaki, S., Hashiguchi, K., Okayasu, T., Chen, D.H., 2007a. Finite element analysis of particle assembly-water coupled frictional contact problem. *Comput. Model. Eng. Sci.* **18**, 101-119.
- Ozaki, S., Hashiguchi, K., Okayasu, T., Chen, D.H., 2007b. Finite element analysis of a wheel-soil interaction phenomenon by unconventional elastoplastic and friction models. *JSAE Transaction* **38**, 9-16.
- Panait, A., He, Q.-C., Saada, R.A., Bary, B., 2004. Cossavella, M., Norcant, K., Experimental investigation of the time-dependent dry frictional behavior of glass and aluminium. *Wear* **257**, 271-278.
- Peric, D., Owen, R.J., 1992. Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **35**, 1289-1309.
- Persson, B.N.J., 1995. Theory of friction: Stress domains, relaxation, and creep. *Phys. Rev. B* **51**, 13568-13585.
- Persson, B.N.J., 2000. Sliding friction: Physical principles and application, second ed. *Springer*.
- Petersen, S.B., Martines, P.A.F., Bay, N., 1997. Friction in bulk metal forming: a general friction model vs. the law of constant friction. *J. Mater. Process. Technol.* **66**, 186-194.
- Putelat, T., Dawes, J. H.P., Wills, J.R., 2007. Sliding modes of two interacting frictional interfaces. *J. Mech. Phys. Solids* **55**, 2073-2105.
- Rabinowicz, E., 1951. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *J. Appl. Phys.* **22**, 1373-1379.
- Rabinowicz, E., 1958. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proc. Phys. Soc.* **71**, 668-675.
- Ranjith, K., Rice, J.R., 2001. Slip dynamics at an interface between dissimilar materials. *J. Mech. Phys. Solids* **49**, 341-361.
- Rice, J.R., Ruina, A.L., 1983. Stability of steady frictional slipping. *J. Appl. Mech. (ASME)* **50**, 343-349.
- Rice, J.R., Lapusta, N., Ranjith, K., 2001. Rate and state dependent friction and the stability of sliding between elastically deformable solids. *J. Mech. Phys. Solids* **49**, 1865-1898.
- Richardson, R.S.H., Noll, H., 1976. Surface friction under time-dependent loads. *Wear* **37**, 87-101.

- Roscoe, K.H., Burland, J.B., 1968. On the generalized stress-strain behavior of “wet” clay. *Engineering Plasticity* (eds. Heyman, J. and Leckie, F.A.). *Cambridge, Cambridge Univ. Press*, 535-608.
- Ruina, A.L., 1983. Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.* **88**, 359-370.
- Schallamach, A., 1971. How does rubber slide?. *Wear* **17**, 301-313.
- Schmacber, R.T., Garoff, S., 1996. Bowing with a glass bow, *CAS Journal* **3**, 9-17.
- Schofield, A.N., Wroth, C.P., 1968. *Critical State Soil Mechanics*. London, *McGraw-Hill*.
- Scholz, C.H., 2002. *The mechanics of earthquakes and faulting*. *Cambridge University Press*.
- Seguchi, Y., Shindo, A., Tomita, Y., Sunohara, M., 1974. Sliding rule of friction in plastic forming of metal. *Compt. Meth. Nonlinear Mech.*, University of Texas at Austin, 683-692.
- Smith, J.H., Woodhouse, J., 2000. The tribology of rosin. *J. Mech. Phys. Solids* **48**, 1633-1681.
- Tadokoro, K., Nakano, K., 2005. A suppression method of friction-induced vibration by controlling small dynamic load. *J. Japan Soc. Tribologists* **50**, 799-807 (in Japanese).
- Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T.J.R., 2011. Contact treatment in isogeometric analysis with NURNUS. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **200**, 1100-1112.
- Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T.J.R., 2012. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in Isogeometric analysis with NURNUS. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **209-211**, 115-128.
- Wandersman, W., Candelier, R., Debregeas, G., Prevost, A., 2011. Texture-induced modulations of friction force: the fingerprint effect. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 164301.
- Watanabe, I., Terada, K., 2010. A method of predicting macroscopic yield strength of polycrystalline metals subjected to plastic forming by micro-macro de-coupling scheme. *Int. J. of Mech. Sci.* **52**, 343-355.
- Wriggers, P., 2003. *Computational contact mechanics*. *John Wiley, Chichester*.
- Zmitrowicz, A., 2006. Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction. *Int. J. Solids Struct.* **43**, 4407-4451.

## 謝 辞

本論文の結びに際し、著者の博士論文の主査を快く引き受けて頂いた、横浜国立大学大学院工学研究院 教授 眞田一志先生に心より感謝申し上げます。先生におかれましては、御多忙中にも関わらず、多方面にわたり数々の御助言を頂くとともに、学位論文の作成に際して特段の御勾配を賜りました。重ねて深甚なる謝意を表します。

本論文の作成にあたり、それぞれの御専門の御立場から閲読頂き、貴重な御意見や御助言を賜った横浜国立大学大学院工学研究院 教授 秋庭義明先生、同教授 宇高義郎先生、同教授 高木純一郎先生、同教授 松本裕昭先生、同教授 藪田哲郎先生、横浜国立大学大学院環境情報研究院 教授 山田貴博先生に心より厚く御礼申し上げます。先生方の幅広い視野から頂いた御意見や御助言は、本論文の作成に当たり、大変有意義なものとなりました。重ねて深甚なる謝意を表します。

著者の九州大学時代からの恩師である同大学名誉教授 橋口公一先生には、弾塑性論の基礎理論から連続体力学に至る全般にわたって御指導頂き、本研究の遂行に際して多大なる御支援を頂きました。特に、昼夜を問わず交わさせて頂いた先生との御議論は、本論文の作成に当たり不可欠なものであったことに加え、それを通して研究者としての真理の探究に対する姿勢や取り組み方を学ばせて頂きました。ここに記して深く感謝申し上げます。また、著者の東京理科大学工学部 助教時代において、恵まれた環境の中で公私共に懇切かつ厳格な御指導を賜った、東京理科大学工学部 教授 陳 玳珩先生に心より感謝申し上げます。先生には、終始惜しめない御指導と御鞭撻を頂きました。

また、横浜国立大学大学院環境情報研究院 准教授 中野 健先生には、トライボロジーの専門家としての御立場から、摩擦に関わる基礎理論から最新の応用に渡って幅広く御熱心に御教示頂きました。心より厚く御礼申し上げます。また、トヨタ自動車 眞鍋和幹博士、名古屋工業大学 研究員 前川 覚博士には、摩擦実験に際して多大なるご支援を頂くとともに、氏らとの白熱した議論内容は、本研究における考察において不可欠なものとなりました。ここに記して感謝の意を表します。さらに、民間企業の御立場から本研究に関して大変有意義な御助言を賜った、オイレス工業 宮武正明博士、日本発条株式会社 富永 潤博士には厚く御礼申し上げます。

なお、本研究の遂行に当たっては、横浜国立大学工学府 尾崎研究室の齊藤勝光氏（現 JR 東海）、伊藤千紘氏（現 日本発条）、津田 兼氏（現 川崎重工）、北村佳彬氏（現 カヤバ工業）、疋田和希氏（現 日本発条）、津久井 祐徳氏（現 富士重工）をはじめとした学生諸氏に多大なるご協力を頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

最後に、著者の研究と生活を支え、いつも暖かく見守ってくれた両親と妻 円理子に深く感謝申し上げます。

2013年7月  
尾崎 伸吾