複合多心構造をもつ超伝導線の
磁気的不安定性および交流損失に関する研究

平成11年 3月

伴 野 信 哉

1

学 位 論 文

複合多心構造をもつ超伝導線の
磁気的不安定性および交流損失に関する研究

平成 11 年 3 月

横浜国立大学大学院
工学研究科
電子情報工学専攻

伴 野 信 哉

学位論文

複合多心構造をもつ超伝導線の磁気的不安定性および交流損失に関する研究

要　約

実用超伝導導体の開発に向けての、複合多心超伝導線に関わる電磁気的な諸問題の解明と、高安定化、および低損失化のための導体・線材構造の提案が本研究の目的である。現在、実用レベルで開発が進められている超伝導コイル、例えば、大型核融合装置用コイル、磁気浮上式鉄道の車両搭載コイル、変圧器など、直流・パルス用、交流用コイルを問わず、そのほとんどでツイストの施された複合多心構造をもつ超伝導線が使われている。この多心ツイスト構造は、線に対して垂直方向の外部磁界（以下、横磁界と呼ぶ）による超伝導フィラメント同士の磁気的結合の抑制、および交流損失の低減に対し有効で、これまでに複合多心超伝導線に対する一様な外部横磁界変動による交流損失や、均一横磁界下での安定性についてはかなり明らかにされている。ところが、実用機器中で超伝導線が経験する磁界成分は横磁界成分だけでなく、線軸に対して同方向の磁界（以下、縦磁界と呼ぶ）成分が含まれる場合も多い。さらに、大容量化を目的に超伝導導体は多心超伝導線を多数本束ね、撚りの施された集合導体の形で使用されるため、各超伝導線が経験する磁界分布は一様ではなく、導体の撚りピッチに合わせて複雑に変動している。特に分布した外部磁界の安定性に与える影響を明確に示した例はない。本論文の前半は、液体ヘリウム温度において一般的に使用される金属系 NbTi 多心超伝導線に対し、大容量導体化の上で問題となる、縦磁界、および分布磁界の安定性に与える影響を明らかにし、導体・線材の高安定化について述べる。

一方、最近、液体窒素温度での使用も可能である酸化物系超伝導線（高温超伝導線）の開発も非常に活発化している。ここ数年で線材の製造技術が著しく向上し、Bi 系線材ではキロメートルオーダの長尺化も達成している。これまで酸化物超伝導線材は、臨界電流密度の向上と長尺化を中心に開発が行われ、特に Bi 系線材では複合多心

構造の線材が一般的となってきたが、フィラメントのツイストまでは行われていなかった。しかしながら、線材の低損失化を考えると、フィラメントのツイストは必須である。母材の高抵抗化もフィラメント同士の磁気的結合を切るためには欠かせない。最近では長尺化がある程度確立してきた Bi 系線材についてはツイスト線の開発も活発化してきており、電力用送電ケーブル等の高温超伝導体の実用的な交流応用分野において期待がもたれている。こうした背景から、酸化物系ツイスト多心線の交流損失の評価、および損失低減に関する提案は興味深いことである。本論文の後半は、酸化物系ツイスト多心線に対する交流損失の理論的評価方法の提案、定量化、および低損失化のための線材構造の提案を行う。

以下、各章の構成について述べる。

本論文で新しく取り上げる内容は、これまでなされてきた損失低減、安定性向上に関しての議論をふまえたものである。そこで第 1 章では、本論文の基礎となる事項を概説しておく。

交流用 NbTi 複合多心超伝導線の磁気的不安定性に対する縦磁界の影響は、これまでに理論、実験の両面から検討がされており、外部縦磁界がその向きによって安定性の向上、または低下に寄与することが調べられている。直流用 NbTi 超伝導線についても、同様な影響が推測できる。第 2 章は、直流・パルス用 NbTi 超伝導線に対し、縦磁界の影響による磁気的不安定性について、冷却と伝熱過程、および磁束の拡散を考慮した動的な理論解析と実験の両面から検討を行った内容について述べる。

第 3 章は、これまで明確に議論されることのなかった、交流用 NbTi 超伝導線における分布横磁界の安定性に及ぼす影響を理論解析と実験の両面から明らかにする。また、実際に高次多重撚り線を構成する場合を想定して、高安定化のためには、分布した磁界下においても、縦磁界効果を用いた素線内部の径方向電流分布の均一化が有効であることを示す。さらに、分布磁界下において、縦磁界成分（平均値）が変化した場合のクエンチ特性の変化を明らかにする。

第 4 章は、ツイストの施された酸化物超伝導線の解析モデルの提案、および有限要

素法への適用について詳しく述べる。開発した解析コードの妥当性を、丸線の結合損失の解析解と比較することにより検証する。また、その解析コードを用い、ツイストテープ線に対して外部磁界のみの環境下における損失特性を評価する。磁界の向きによって損失特性が大きく異なることを明らかにする。

ツイスト線の交流損失特性を考察する上で、重要なパラメータの一つに挙げられるものは結合時定数である。第 4 章で示すような磁界の向きによる損失特性の違いは、結合時定数によって評価することが可能である。これまで、円筒形の多心線、または長方形断面のフィラメント領域をもつ多心線の結合時定数は導出されてきたが、テープ線は通常多心丸線を圧延加工して作成されるので、フィラメント領域の断面形状は楕円で近似できる。第 5 章では、テープ線内部のフィラメント領域を楕円形で近似して、ツイスト多心テープ線における結合時定数、および結合損失を導出する。この結果を有限要素法による数値解と比較、検証する。

結合時定数が十分大きい場合には、フィラメント同士が磁気的に結合するため、多心線は単心線と同様な磁気的振る舞いを示す。従って損失特性に関して、多心線を単心線と見なして評価しても良い近似が得られる。これまでに、超伝導体のヒステリシス損失は、臨界状態モデルを仮定して解析的に導出されているが、酸化物超伝導体の場合ピン留め力が弱く、フラックスクリープの影響で、測定値が定量的には一致しないことが指摘されている。そこで第 6 章では、テープ線のフィラメント領域を楕円で近似し、さらに超伝導体の電流 – 電圧特性をべき乗則で近似して、ヒステリシス損失の評価式を導出する。得られた評価式は、有限要素法による数値解、および実験結果と比較し、妥当性を検証するとともに損失特性を考察する。

超伝導線の実用的な使用条件は、外部磁界下での通電である。第 7 章では、通電時の損失特性、特に外部磁界下で通電した場合の損失特性に与えるツイストの影響を中心に考察する。外部磁界振幅、輸送電流振幅、およびテープアスペクト比の影響を解析的に調べ、最小の交流損失を与える最適なツイストピッチが存在することを指摘する。

目　次

FIGURE CONTENTS

TABLE CONTENTS

第 1 章　複合多心超伝導線の基礎的電磁現象

1. 1　磁気的不安定性

バルクの超伝導線に通電した場合、超伝導体の抵抗率が極めて小さいため、自己磁界が内部まで侵入できず、導体表面に電流が集中し電流密度が臨界電流密度に達した飽和領域が形成される。臨界電流密度は導体温度に依存しており、通常温度上昇に伴って減少する。もし、何らかの擾乱によって導体温度がΔT上昇したとすると、臨界電流密度の減少に伴って内部に磁束が侵入する。磁束侵入は電界を誘起するので、飽和領域で発熱が生じ、導体の温度がさらに上昇する。このときの温度上昇を$\Delta T'$とする。もし$\Delta T'$がΔT以下であるならば、温度上昇は収束し、超伝導状態は維持されるが、$\Delta T'$がΔTを超える場合には、導体は先の熱サイクルを繰り返して急激に温度上昇し、ついには臨界温度を超えて常伝導転移（クエンチ）する。この現象は、磁束の急激な変化として観測されることから、Flux jump (磁束跳躍) と呼ばれる。閾値となるΔTは飽和領域の厚さに依存している。超伝導多心丸線の場合、ビーンモデルに従うと、その安定限界を与える飽和領域の厚さt_{uso}は、断熱条件の下では以下の式で与えられる [1]。

$$\frac{\mu_0\left(\lambda_{\mathrm{fr}}\, j_{\mathrm{c}}\right)^2}{\gamma C\left(T_{\mathrm{c}}-T_0\right)}=\frac{R_0^2}{R_{\mathrm{f}}^2}\ \Big/ \left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{R_{\mathrm{os}}}{R_{\mathrm{f}}}\right)-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{R_{\mathrm{os}}}{R_{\mathrm{f}}}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{R_{\mathrm{os}}}{R_{\mathrm{f}}}\right)^4\right] \qquad (1.\ 1)$$

$$t_{\mathrm{uso}}=R_{\mathrm{f}}-R_{\mathrm{os}} \qquad (1.\ 2)$$

ここで、λ_{fr}はフィラメント領域における超伝導体の占積率、j_{c}は超伝導体の臨界電流密度、γCは超伝導線の体積平均比熱、T_{c}は超伝導体の臨界温度、T_0は冷媒温度、R_0は多心線半径、R_{f}はフィラメント領域半径、R_{os}は飽和領域内半径を表す。

1. 2　外部横磁界下における超伝導バルクのヒステリシス損失

超伝導体に外部から磁界をかけると、内部に磁化電流（遮へい電流）が誘起される。超伝導体の抵抗はほぼ零と仮定できるから、この電流は半永久的に流れ続ける。この磁化電流（遮へい電流）に起因して、超伝導体は外部磁界変動に対してヒステリシス特性を持ち、損失が生じる。ビーンモデルに従うと、超伝導スラブの横磁界によるヒステリシス損失 P_h (J/m^3) は以下の式で与えられる [2]。

$$P_\mathrm{h} = \oint_{\mathrm{cycle}} M\,\mathrm{d}H = \frac{2\,\mu_0}{3}\frac{{H_\mathrm{m}}^3}{j_\mathrm{c}\,d} = \frac{2\,\mu_0\,{H_\mathrm{m}}^2}{3}\beta \qquad (H_\mathrm{m} < H_\mathrm{p}) \tag{1. 3}$$

$$P_\mathrm{h} = 2\,d\,\mu_0\,j_\mathrm{c}\,H_\mathrm{m}\left(1 - \frac{2}{3\,\beta}\right) \qquad \left(H_\mathrm{m} \geq H_\mathrm{p}\right) \tag{1. 4}$$

$$\beta = \frac{H_\mathrm{m}}{H_\mathrm{p}},\quad H_\mathrm{p} = j_\mathrm{c}\,d \tag{1. 5}$$

ここで、M は磁化、H_m は磁界振幅 (A/m)、H_p は中心到達磁界 (A/m)、$2d$ がスラブ平板の幅、β は中心到達磁界に対する磁界振幅の比を表す。またバルクの超伝導丸線の場合、磁界振幅が中心到達磁界より十分大きい場合には、以下のように簡単に与えることができる [2]。

$$P_\mathrm{h} = \frac{8}{3\pi}\,d_\mathrm{s} j_\mathrm{c} f B_{\mathrm{t}0} \tag{1. 6}$$

ここで、d_s は超伝導体直径、f は周波数、B_{t0} は磁界振幅 (T) を表す。

1. 3　複合多心構造とツイスト

以上の式からわかるように、磁気的不安定性の誘発やヒステリシス損失は導体幅、半径などのサイズに依存している。そのため、現在の超伝導線はほとんどが、極細の超伝導フィラメントを数千、数万と常伝導金属母材に埋め込んだ多心構造をとってい

る。ここでもし、長尺の多心線をこの状態で、つまり、フィラメントが線長手方向に平行に配置した状態で、外部横磁界を加えたとすると、多心線であるにもかかわらず、単心線と同様な磁気的振る舞いを示す。これは、超伝導フィラメントとそのフィラメント間を電流パスとする結合電流の減衰が極めて遅く、フィラメント同士が磁気的な結合状態にあるためである。これを防ぐため、多心線にはツイストが施される。丸線の場合には、結合電流の減衰時定数（結合時定数）τ_mは以下の式で与えられる [2]。

$$\tau_m = \left(\frac{\mu_0}{2\rho_\perp}\right) \cdot \left(\frac{l_{p0}}{2\pi}\right)^2 \tag{1.7}$$

ここで、$\rho_\perp$はフィラメント領域におけるフィラメント間の等価横方向抵抗率、l_{p0}はツイストピッチを表す。また、結合電流がフィラメント間の母材を横切ったときに生じる結合損失 P_c (W/m^3) は以下の式で与えられる [2]-[5]。

$$P_c = \frac{B_{t0}{}^2 \omega^2 \tau_m}{\mu_0 \left(1+\omega^2 \tau_m{}^2\right)} \frac{R_f}{R_0} \tag{1.8}$$

ここで、B_{t0}は磁界振幅 (T)、ω は角周波数、R_0は多心線半径、R_fはフィラメント領域半径を表す。これらの式からわかるように、結合損失を低減するためにはツイストピッチの縮小と、母材の高抵抗化の二通りの手段がある。交流用の NbTi 超伝導線は、高抵抗 CuNi 母材（抵抗率 10^7 Ωm 程度）の適用と、0.1 mm 程度のツイストピッチの縮小化を達成したことによって、商用周波数の交流磁界下でも結合電流の発生を無視しうるレベルまで抑制している。

酸化物超伝導多心線の場合には、フィラメント同士の、いわゆるブリッジングと呼ばれるフィラメント同士の物理的な結合が問題となっており、ツイストによって期待される十分な効果が得られていなかった。しかしながら、近年フィラメント周囲に熱処理時でも化学的に不反応性の高抵抗金属によるバリアを施し、フィラメント間の物

理的な結合を抑制するとともに、フィラメント間の横断抵抗を増加させ磁気的結合をも抑制して、結合損失を低減した例も報告されている [6], [7]。従って、酸化物多心超伝導線においても、今後ツイストを施すことによる交流損失の大幅な低減が期待できる。

1.4 直流・パルス用、交流用超伝導線における支配的な損失成分

外部変動横磁界下では、前節で示した超伝導体部におけるヒステリシス損失、フィラメント領域の母材部における結合損失、さらに母材部の渦電流損失（結合損失との違いは遮へい電流パスが母材のみにある点）が多心線内部で生じる。これまでの直流・パルス用複合多心超伝導線の交流損失は、このような横磁界損失によって見積もられることが多く、自己磁界の影響についてあまり注意が払われてこなかった。これは外部横磁界が数テスラ程度と大きく、全損失の中で外部横磁界変動によって生じる損失がほとんどであったため、ある程度妥当なものであった。ところが、超伝導変圧器、限流器、発電機などの交流応用において、交流用超伝導線がさらされる横磁界成分は1テスラ程度、もしくはそれ以下と小さく、さらに超伝導フィラメントが0.1ミクロンオーダーまで細線化されるようになり、母材が高抵抗化され、横磁界による損失の寄与分は非常に小さく押さえられるようになっている。一方、ツイストは自己磁界に対しては基本的に効果が小さく、交流用超伝導線の場合には、横磁界損失よりも自己磁界による損失の寄与分がより支配的になる。自己磁界損失 P_{Norris} (J/m) は Norris によって以下のように導出されている [8]。

$$P_{\mathrm{Norris}} = \frac{I_c{}^2 \mu_0}{\pi}\left[(1-F)\ln(1-F) + (2-F)\frac{F}{2}\right] \qquad (1.9)$$
$$F = I_t / I_c$$

ここで、I_c は超伝導線の臨界電流、I_t は輸送電流の振幅値を表す。ただしこの式では、ツイストの影響は考慮されていない。

1. 5　多心ツイスト線の電流分布に与える自己磁界、および外部縦磁界の影響

ツイストの施された多心線に通電した場合、電流がほぼらせん状のフィラメントに沿って流れるため、線長手方向の磁界（自己縦磁界）と周方向磁界が誘起される。Fig. 1.1 に示すように、それぞれの磁界成分は二つの隣接フィラメントによって構成される鎖交面に対し、正負逆向きに寄与する。この図からわかるように、自己縦磁界は外周部に誘起される電圧を抑制する働きをもち、逆に周方向磁界は外周部に電圧を誘起する働きをもつ。もし、周方向磁界が強すぎて外周部に電流が集中し、飽和領域が広く形成されるようになれば、交流損失は急激に増大し安定性が低下する。逆に自己縦磁界が強くなりすぎれば、中心部に電流が集中して同様に損失が急増し安定性が低下する。従って、ツイストピッチの調節によって、自己縦磁界と周方向磁界を制御することは、低損失化、および高安定化を図る上で重要である。しかし、現実的な丸線ではかなりツイストピッチを短くしないと、自己縦磁界によって低損失化を図ることは難しい。

一方外部縦磁界においては、その向きによって働きが逆になることは、上記の議論で明らかである。つまり、外部縦磁界が自己磁界と同方向であれば、損失の低減と安定性の向上が図られ、その向きが逆になると、損失の増大と安定性の低下をもたらす結果となる。素線の磁界環境がケーブル導体の自己磁界のみの場合には、素線に加えられる縦磁界成分をケーブルの撚り方向と撚りピッチを調節することによって制御ができる。従って、実用的な超伝導撚り線導体では、自己磁界と外部縦磁界（ケーブルの自己磁界）の合成磁界を考慮することによって、素線の損失低減のための最適化を図ることが可能である [9]-[11]。

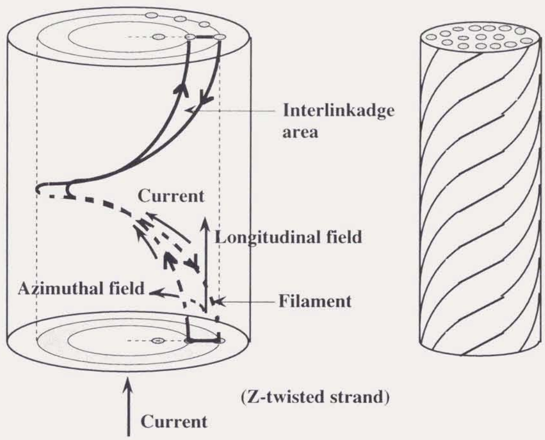


Fig. 1.1 Electric circuit consisting of inner and outer filaments

第 2 章　直流・パルス用 Cu/NbTi 超伝導線における縦磁界不安定性 [12]

第 1 章で概説したとおり、多心線の内部で飽和領域が広がり、その厚さがある閾値を超えると、自発的なフラックスジャンプが誘発される。縦磁界成分は、その向きによって外周部に集中する電流を抑制したり、また逆に中心部に集中する電流を抑制する効果を持ち、超伝導線の安定性と深く関わっている。交流用超伝導線の安定性に与える縦磁界成分の影響は、これまでに理論、実験両面から調べられており [13]、直流・パルス用超伝導線においても縦磁界の影響による安定性の劣化（縦磁界不安定性）が起こりうることが理論的に指摘されている [14]。ただし、断熱条件が仮定されていた。実用超伝導線は冷媒によって冷却されているため、実際には冷却、伝熱過程を考慮した動的な理論評価が必要である。本章は、Cu/NbTi 超伝導線を用い、縦磁界成分を有する外部磁界、及び素線電流を同時掃引した場合の直流・パルス用超伝導線の安定性を、冷却、伝熱過程、および磁束の拡散を考慮した動的な理論解析と実験の両面から調べた。

2. 1　実験手順

Fig. 2.1 にサンプル、及びマグネットの概略図を示す。線長は 492 mm でボビン軸に対して 45°の傾斜で、ボビンに巻き付けている。巻き線部には超伝導線の動きを押さえるため、数センチの間隔で小さい GFRP の角材を用いて上から超伝導線を押さえた。用いた超伝導線の諸元を Table 2.1 に示す。使用した外部超伝導マグネットは、最大 5 T まで、最高 5 T/s の掃引速度で立ち上げることが可能である。Fig. 2.2 にマグネット 5 T 印加時に、超伝導線が経験する磁界分布を示す。ただし超伝導線の中心を原点とし、超伝導線の長手方向を z 軸と定義する。

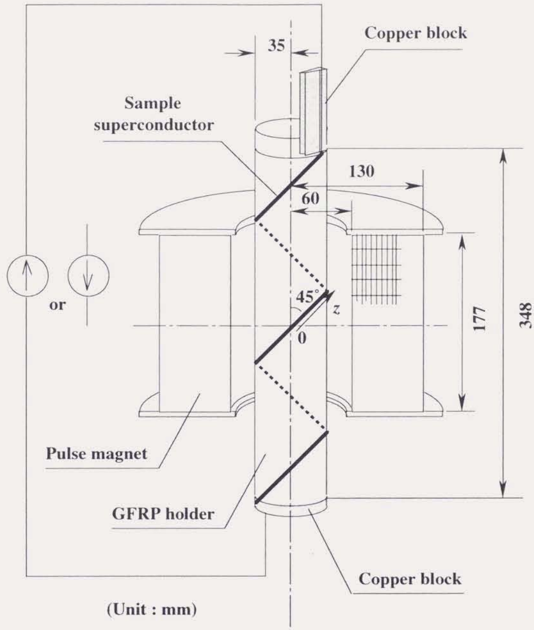


Fig. 2.1 Sample configuration

TABLE 2.1 Specifications of the sample multifilamentary superconductor

Diameter of strand(including insulation)	0.420 mm
Diameter of conductor(metal area)	0.395 mm
Copper/NbTi ratio	0.9
Diameter of filament	6.3 μm
Twist pitch	8.5 mm
Twist direction of filaments	S (anti-clockwise)

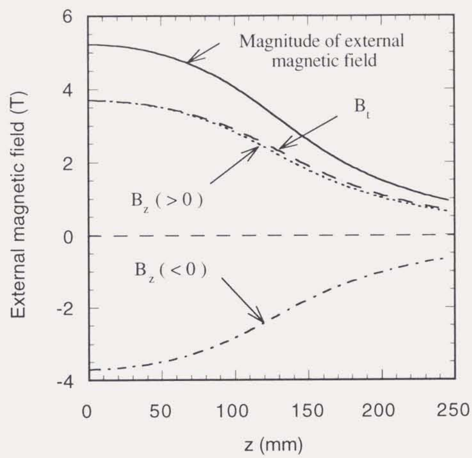


Fig. 2.2　Magnetic field distribution applied to sample strand

縦磁界不安定性は、通常のパルスコイルの使用条件を想定して、外部磁界と通電電流を同時に掃引する場合について調べた。測定回路図をFig. 2.3 に示す。遅延回路で微妙に制御しながら外部磁界、通電電流をそれぞれ 1～5 T/s、102～510 A/s で同時に立ち上げ、クエンチ電流値を測定した。磁界方向を反転させ、同様な測定を行うことにより、安定性に与える縦磁界の影響を調べた。

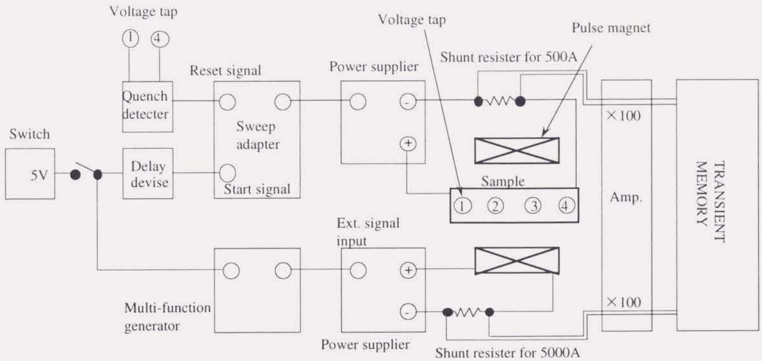


Fig. 2.3 Set-up for measurement of quench current at simultaneously ramping up transport current and magnetic field

2. 2 解析方法概略 [10], [15]

超伝導線に通電しクエンチに至るまでの過程は、熱解析、及び回路モデルを用いた電磁界解析を連成させることによってシミュレートする。解析方法については付録2.A で述べることにする。超伝導特性として、本解析ではビーンモデルが仮定されている。直流用超伝導線の n 値が数十程度あることを考えると、この仮定は妥当である。

銅マトリクスの熱伝導性がよく断面内での温度がほぼ一様と考えられるので、以下に示す一次元熱伝導方程式を用いて線長手方向の温度分布のみを計算する。

$$A\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right) - A\gamma C\frac{\partial T}{\partial t} - PH + AG = 0 \qquad (2.1)$$

ここで、A は素線断面積、κ は熱伝導率、P は冷却ペリメータ（周囲長）、γC は体積比

熱、G は発熱量、H は熱伝達特性を表す。本解析では、P は導体周囲長とした。銅の熱伝導率および比熱は文献 [16] を参考にした。特性式は付録 2.A で示す。また熱伝達特性 H は、測定データが少なく簡単のためFig. 2.4 に示されるような、典型的なCu/NbTi 丸線の折れ線近似による熱伝達特性を用いた [17]。G は、結合損失に加え、非飽和領域ではフィラメントのヒステリシス損失、および動的抵抗損失も考慮する。非飽和領域において損失瞬時値 p (W/m^3) は以下の式で与える。

$$
\begin{aligned}
p &= \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - M\dot{B}_{\mathrm{ex,t}} \\
&= j_{\mathrm{f}}E_{\mathrm{f}} + j_{\mathrm{r}}E_{\mathrm{r}} + \left(\frac{2\dot{B}_{\mathrm{i}}^{2}}{\mu_0}\right)\tau_{\mathrm{m}} + \frac{2}{3\pi}\lambda_{\mathrm{ft}}j_{\mathrm{c}}d_{\mathrm{s}}\left(1-(j_{\mathrm{z}}/j_{\mathrm{c}})^2\right)\dot{B}_{\mathrm{ex,t}} \qquad (2.\ 2) \\
& B_{\mathrm{ex,t}} = B_{\mathrm{ex,t0}}\sin\omega t \\
& \dot{B}_{\mathrm{i}} = \left[\frac{B_{\mathrm{ex,t0}}}{\left(\omega^2\tau_{\mathrm{m}}^{2}+1\right)^{1/2}}\right]\cos\left(\omega t-\delta\right) \\
& \tan\delta = \omega\tau_{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ここで、j_{f}、E_{f} はフィラメント方向の電流密度および電界、j_{r} は電流分布が長手方向に不均一であるときに母材を介して流れる半径方向の横断電流の電流密度、E_{r} は横断電流が流れたときに生じるフィラメント層間の電界、B_{i} は多心線内部への侵入磁界、μ_0 は真空透磁率、τ_{m} は結合時定数、$B_{\mathrm{ex,t}}$ は外部横磁界、M はフィラメントの磁化、j_z は素線軸方向の電流密度を表す。また、飽和領域において p は以下の式で与える。

$$
p = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = j_{\mathrm{f}}E_{\mathrm{f}} + j_{\mathrm{r}}E_{\mathrm{r}} + \left(\frac{2\dot{B}_{\mathrm{i}}^{2}}{\mu_0}\right)\tau_{\mathrm{m}} \qquad (2.\ 3)
$$

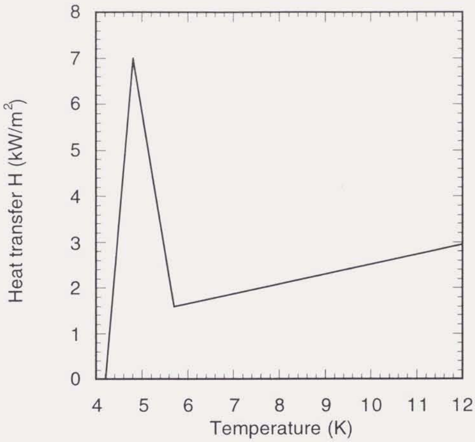


Fig. 2.4 Typical heat transfer characteristic on Cu/NbTi wire. *H* = 7 kW m^{-2} at *T* = 4.8 K, *H* = 1.6 kW m^{-2} at *T* = 5.7 K, *H* = 3 kW m^{-2} at *T* = 12.2 K [17].

2. 3 結果と考察

Fig. 2.5 に直流クエンチ電流の測定値を示す。また、Fig. 2.6 に直流の電流 – 電圧特性を示すが（電圧タップ間距離 164 mm）、今回の測定では、図に示されるように安定したフラックスフローが検出できず、10^{-13} や 10^{-14} Ωm 等の基準抵抗によって臨界電流値を得ることができなかった。これは、線の固定が十分でなかったことが考えられる。また、磁界方向によってクエンチ電流値 (I_q) に若干差違がみられているが、これは線に働くローレンツ力の向きに起因していると思われ、通電方向によってローレンツ力がボビンの中心に向かって働く場合は線の動きが小さく押さえられるため I_q の劣化が少なく、逆向きの場合には線の動きが大きくなって劣化が大きくとなったと考えられる。正確な解析を行うためには臨界電流値 (I_c) – 磁界 (B) 特性が必要となるが、今回の解析では、I_c – B 特性として、得られた直流 I_q - B 特性をFig. 2.5 のように近似して導入した。

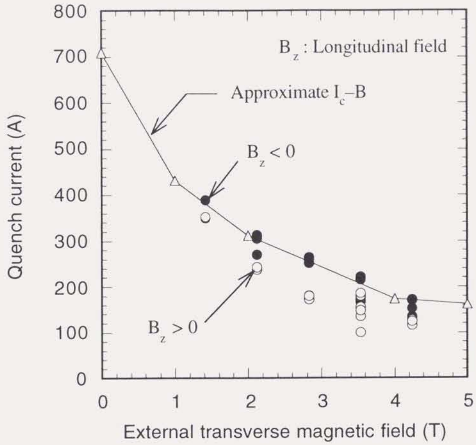


Fig. 2.5 DC quench current and approximate I_c–B curve used for calculations

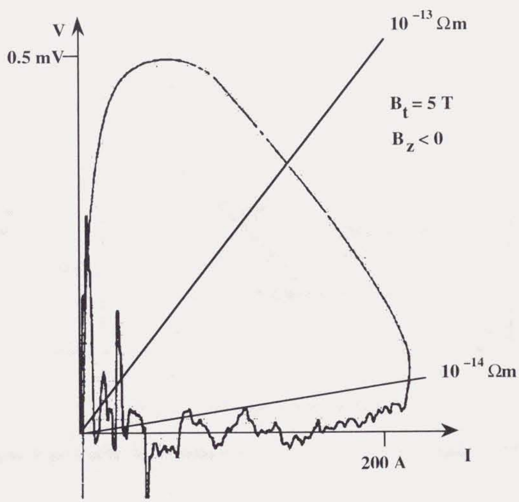


Fig. 2.6 V-I characteristic of Cu/NbTi wire measured in DC magnetic field

Fig. 2.7 に、実験および解析によって得られた、外部磁界、通電電流同時掃引時のクエンチ電流特性を示す。B_z は外部縦磁界成分を表しており、実験、解析ともに超伝導線が正の縦磁界成分を受ける場合に、掃引時間を短くするにつれて電流劣化の度合いが大きくなっている。Fig. 2.8 はそれぞれ正負の縦磁界成分が印加される場合の、多心線内部の径方向電流分布を示す。掃引時間は 1 秒である。時刻は通電開始から 0.42 秒後で、z = 21.3 mm の位置である。0.42 秒は正の縦磁界成分が印加される場合のクエンチ直前の時刻であり、z = 21.3 mm はそのときのクエンチ開始位置である。正の縦磁界下で飽和領域が増大していることがわかる。Fig. 2.9 はクエンチ過程における電流分布の時間変化であり、飽和領域における臨界電流密度が急激に低下している様子が確認できる。

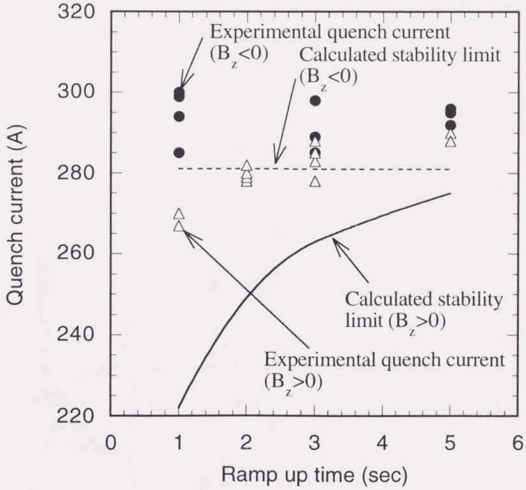


Fig. 2.7 Quench property at simultaneously ramping up magnetic field and transport current

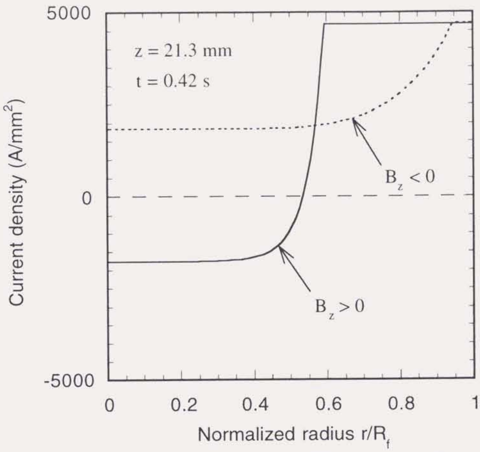


Fig. 2.8 Comparison of radial current profiles inside the strand between in the positive and in the negative longitudinal magnetic field at 0.42 s and z= 21.3 mm; 0.42 s is just before quench in the positive longitudinal magnetic field, and z = 21.3 mm is the point of quench initiation. Ramp rate of field is 5 T/s (ramp up time is 1 s).

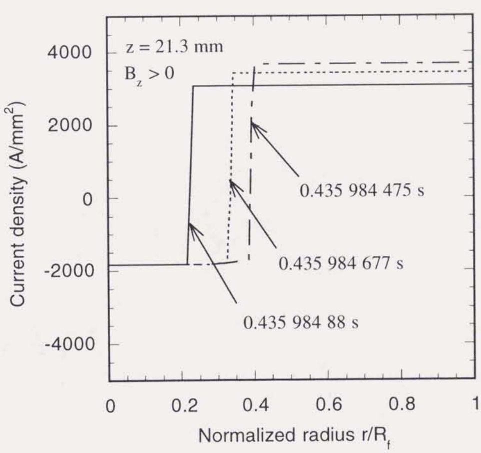


Fig. 2.9 Temporal current distributions in the strand in positive longitudinal magnetic field during quench process

Fig. 2.7 において、解析結果と実験結果は、定性的には一致しているが絶対値では最大で17 %程度の違いが見られた。この原因として、直流試験において I_c が得られなかったことが挙げられる。

2. 4 結論

Cu/NbTi 超伝導線における、外部磁界、および通電電流同時掃引時の磁気的不安定性を、理論・実験両面から調べた。解析結果は定性的に実験結果と一致し、同時掃引時の縦磁界方向の影響にクエンチ電流特性の違いを明らかにした。掃引時間 1 秒では、縦磁界の向きの違いによるクエンチ電流値の差は、測定値で10%程度であった。

第 3 章　交流用 CuNi/NbTi 超伝導線の分布磁界下での磁気的不安定性および安定化指針

超伝導発電機や超伝導変圧器、S/N 転移型限流器など超伝導電力機器実現を目指した 10 キロアンペア級導体の開発が進められている [18]-[20]。通常、大容量導体は線径が 0.2mm 程度の複合多心超伝導線を多数集合し、撚り合わせていく工程を数回経て構成される。このような導体構成に起因して、大容量化に伴い、偏流、線の動きなどの外部擾乱、素線自身の磁気的不安定性、交流損失の増大等が開発の上で問題となっている。特に素線本数が 100 を超える 3 次以上の導体構成においてそれらが顕在化し、通電可能な交流電流値の大幅な劣化につながっている。

ケーブル導体中の素線に着目すると、素線軸の方向とケーブル導体軸の方向の相対関係が複雑に変化するために、素線は縦・横成分を持った変動外部磁界にさらされる。このうち均一な横磁界下での磁気的不安定性（以下、一般的な磁気的不安定性と呼ぶことにする）や、磁気的不安定性に与える縦磁界成分の正負の向きや大きさの影響は、これまでにかなり詳しく検討されている [1], [9], [13], [21]。一方、分布した磁界環境が素線の安定性にどの程度影響を及ぼすものかを明確に扱った例はない。本章はまず、磁気的不安定性に及ぼす分布した横磁界の影響について実験と理論解析をもとに検討し、分布横磁界下で安定性がさらに劣化する（以下分布磁界不安定性と呼ぶことにする）ことを調べ、その原因を明らかにする [22]。

通常の多重撚り線導体は、素線の安定性を向上させるため、縦磁界効果を利用したケーブル撚りピッチの最適化が行われている。基本的に磁気的不安定性は素線内部の飽和領域をなくし、電流分布を均一化させることが有効である。これまでに Funaki らが均一磁界環境下に関して均流化条件を提案しているが [9]、分布磁界下でのその有効性を示し、さらに縦磁界成分が変化した場合のクエンチ特性について明らかにする。

3. 1　交流用 CuNi/NbTi 線の分布横磁界下における安定性の低下 [22]

Fig. 3.1 は、S/N 転移型超伝導限流器の限流コイル（諸元は文献 [23]）中の素線が、通電中に経験する磁界分布をビオ・サバールの式により計算した例である。導体に 2kA 通電し、素線全体に均等に電流が流れている場合を想定している。グラフの横軸は素線軸である。実用交流機器中で、超伝導線はこのように 1T 程度、もしくはそれ以下の脈動する磁界分布にさらされる場合がほとんどであるが、こうした分布磁界が素線の安定性にどう影響するかを定性的にまず考察する。

ケーブル導体を構成する各素線は、導体の中心軸と素線軸とのなす角が、導体の長手方向に渡って複雑に変化するために、一様な外部磁界下であっても、あるいはケーブルの自己磁界下でも、ケーブルの各次撚りピッチに対応した周期で空間的に脈動する磁界を経験することになる。超伝導線の電界 (E)–電流密度 (j) 特性は、Fig. 3.2 に示すような非線形性があり、低磁界領域では強い磁界依存性、特に横磁界依存性をもっているため、分布した磁界下では、素線は長手方向に渡って E-j 特性が不均一な状態で通電することになる。Fig. 3.2 における急激な電圧の上昇は、フラックスフロー抵抗の急激な増大が原因である。

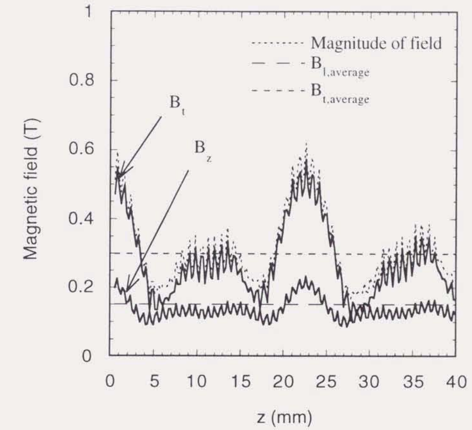


Fig. 3.1 Applied magnetic field to strand in resistive current limiter. *z*-axis is defined as strand axis. Strand diameter 0.214mm, 1st cable(strand × 6) twist pitch 7.5mm, 2nd cable (1st cable × 6) twist pitch 22mm, 1st layer φ220mm × 300mm, 2nd layer φ240mm × 300mm, Winding Pitch 8mm, 38 Turns / layer [23].

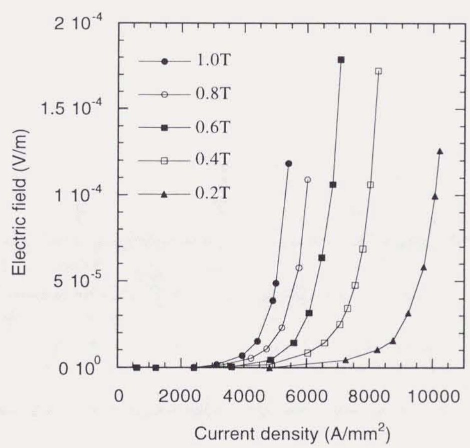


Fig. 3.2 Typical *E-j* characteristics of CuNi/NbTi wire

このような状態で通電を行えば、Fig. 3.3 に示すような、各位置でのフラックスフロー抵抗とマトリクスの横断抵抗で決まる電流の転移が、内外のフィラメント間に生じるが、マトリクス抵抗が大きい場合には、転移する電流は小さい。結果として超伝導線内部の径方向電流分布は、長手方向に渡ってほぼ同じ様になる。このときの径方向電流分布は、縦磁界の長手方向平均値と、横磁界の長手方向の近似的な平均値（フラックスフロー抵抗が外部磁界に線形比例せず、また、内外フィラメント間での電流の転移がゼロでないため、厳密な意味での平均値とはならない。）によって決められる。Fig. 3.2 からわかるように、もし電流密度が同じであれば、フラックスフロー抵抗は磁界の大きさとともに増大する。従って、電流分布が長手方向にほとんど同じであれば、横磁界が大きい位置では、電流がより大きなフラックスフロー抵抗に抗して流れることになり、そのため発熱も増大することになる。すなわち、横磁界の長手方向平均値が同じでも、横磁界の長手方向変動分が重畳していると、局所的に発熱の大きくなる部分が生じてしまう。この局所的発熱は、母材の熱伝導率が低い場合、局所的な温度上昇につながり、フラックスジャンプを誘発する可能性がある。これが、本章で扱う分布横磁界下での磁気的不安定性である。

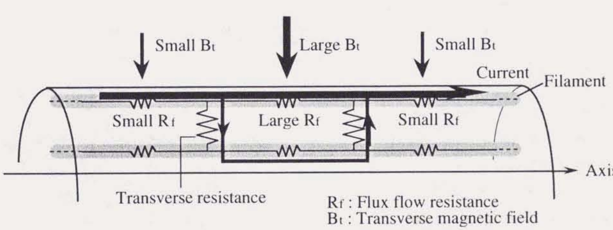


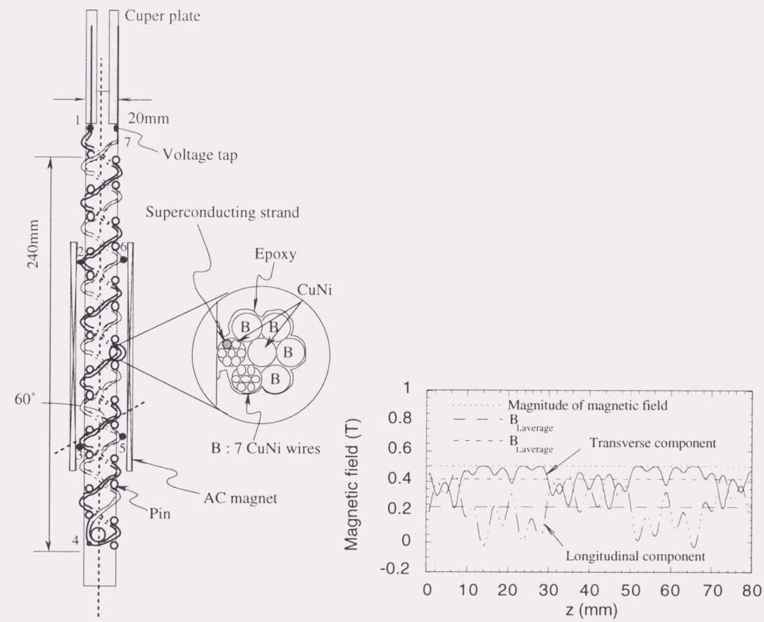
Fig. 3.3　Current flow inside superconductor under distributed transverse magnetic field

3. 2　サンプル構成及び測定方法

Fig. 3.4 (a) に、3 次撚り線中で素線が経験する磁界分布を模擬することを意図したサンプル（A とする）を示す。サンプル A は、一本のみ超伝導線でその他は CuNi 線で構成された 2 次ケーブルを、ボビン軸 に対して 60°傾け、ボビンに埋め込んだピンにより正弦波的にうねらせて巻かれている。導体諸元を Table 3.1 に示す。このサンプルに外部マグネットにより中心磁界で 0.5T を印加したとき超伝導素線が経験する磁界分布をFig. 3.4 (b) に示す。横軸は素線軸で、原点はマグネットの中心と高さが一致する。さらに、素線のみを使用し、より単純化して、縦磁界成分の平均値がほとんどないように構成したサンプル（B とする）をFig. 3.5 (a) に示す。素線は途中 GFRP のボビンの面上に 10mm 間隔で立てられたピンにより、うねらせて巻かれている。サンプル B における素線の経験磁界をFig. 3.5 (b) に示す。

TABLE 3.1　Specifications of strand and cable

NbTi wire	
Strand diameter	0.178 mm
Number of filaments	23749
Matrix metal	Cu-10%Ni
Matrix ratio	CuNi / Cu / NbTi = 2 / 0 /1
Filament diameter	0.67 μm
Twist pitch	1.34 mm / S-twisted (anti-clockwise)
Filamentary region diameter	0.178 × 0.89 m
Cable	
Composition of second stage cable	First stage cable × 6 + Center Cu-10%Ni wire × 1
Composition of main first stage cable	Insulated CuNi/NbTi wire × 1 + bare Cu-10%Ni wire × 6 (Center : CuNi wire)
Other first stage cables	Bare Cu-10%Ni wire × 7
Strand diameter (after insulation)	0.178 mm (0.205 mm)
Diameter of bare Cu-10%Ni wire	0.209 mm
Twist pitch of first stage cable	4.7 mm / S-twisted (anti-clockwise)
Twist pitch of second stage cable	13.2 mm / S-twisted (anti-clockwise)

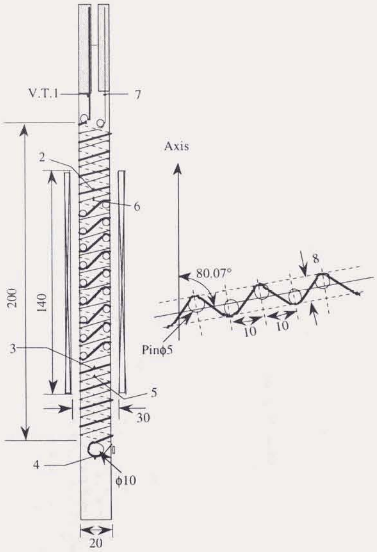


(a) (b)

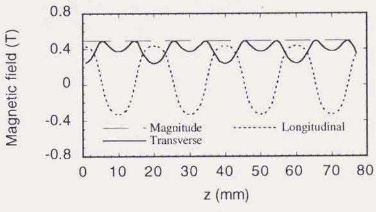
Fig. 3.4 (a) Sample A with doubly stacked cable and (b) applied magnetic field to the strand

この他に、外部マグネット中で縦磁界成分をほぼ零に押さえ、均一横磁界を経験するようなサンプル、及び均一な縦・横両磁界を経験するようなサンプルを用意した。それぞれをサンプルC、Dとし、Fig. 3.6 (a)、Fig. 3.7 (a) に示す。Cでは素線がボビン軸に対して 86°、D ではボビン軸に 66°で巻かれている。サンプル C、D で素線が経験する磁界分布をFig. 3.6 (b)、Fig. 3.7 (b) に示す。全てのサンプルにおける素線経験磁界の特徴を Table 3.2 にまとめておく。Table 3.2 に示すように、サンプル A と D で素線が経験する横磁界成分の最大値が等しいときに、サンプル D で経験する縦磁界成分

がサンプル A で経験する縦磁界成分 (Fig. 3.4 (b)) の長手方向平均値と等しくなるようにした。従って、外部縦磁界の長手方向分布によって誘導される結合電流が十分減衰していれば、サンプル A と D で、素線の安定性に与える縦磁界の影響はほぼ同じであると考えられる。従って、サンプル A と D の測定結果を比較することで、縦磁界成分を有する分布磁界下での安定性に与える正味の分布磁界の影響を調べることが可能である。サンプルCとDの比較では、安定性に与える縦磁界の影響を調べられるので、サンプル A、C、D の結果を比較することにより一般的な磁気的不安定性、分布磁界不安定性、縦磁界不安定性を比較することが可能である。

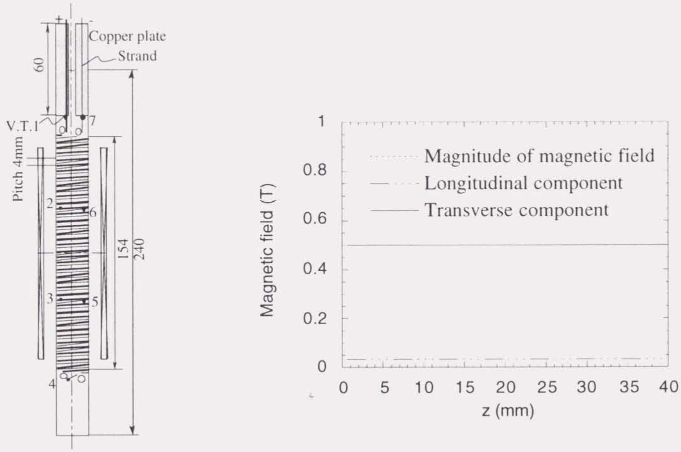


(a)



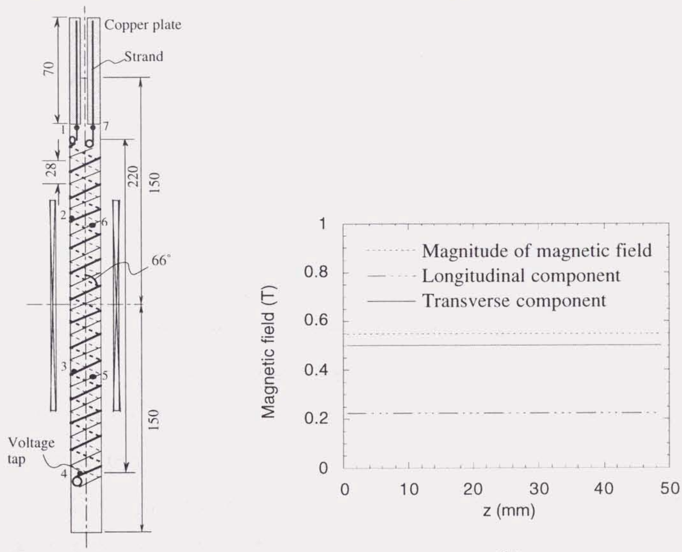
(b)

Fig. 3.5 (a) Sample B with single strand and (b) applied magnetic field to the strand



(a) (b)

Fig. 3.6 (a) Sample C with single strand and (b) applied magnetic field to the strand



(a) (b)

Fig. 3.7 (a) Sample D with single strand and (b) applied magnetic field to the strand

TABLE 3.2 Characteristics of applied magnetic field to sample A, B, C, D, when the maximum transverse magnetic field is 0.5T.

	*B*t (transverse)			*B*l (longitudinal)	
Sample	Maximum	Average	ΔBt*	Average	ΔBl*
A	0.5 T	0.4 T	0.1T	0.2T	0.3T
B	0.5 T	0.4 T	0.1T	0	0.4T
C	0.5 T	0.5 T	0	0	0
D	0.5 T	0.5 T	0	0.2T	0

* ΔB means the deference between maximum value of the transverse or longitudinal magnetic field and its average value.

サンプルは全て、導体が一方の電流リード接続用の銅板からボビンに巻かれ、折り返してまたボビンに巻かれもう一方の銅板に接続されるような無誘導巻きコイルを構成している。このため、導体は折り返しまでの往路と復路で通電方向に対し正負逆の縦磁界成分が外部マグネットより印加される。外部縦磁界成分の向きの違いによる、安定性の向上と劣化についてこれまでに調べられており [13]、本実験で使用した S 撚り超伝導線の場合には、正の縦磁界成分（電流方向と同方向磁界成分）が印加される場合に外周部飽和領域が増大しクエンチ電流値が低下する。本実験でも、サンプル A、C において全てのショットでクエンチが正の縦磁界を受けている側で発生しており、Fig. 3.4 ～Fig. 3.7 には正の縦磁界が加わる場合の素線の経験する磁界分布を示している。

全てサンプルは線がボビンに巻かれた後、エポキシ樹脂で含浸した。超伝導線と電流リードの接続用銅板は渦電流損を抑えるため、マグネットの中心から十分離したところに位置するようにした。サンプル A では、2 次ケーブルから超伝導線のみを取り出して銅板接続した。

マグネットを LC 共振を用いて素線電流と同相で励磁し、素線電流の振幅を徐々に増加させてクエンチを発生させた。このときの交流クエンチ電流値は、クエンチするまでに到達した最も高い電流振幅値で定義する。

3. 3　解析方法概略 [10], [15]

前章同様、多心線内部の電流分布、および温度分布の時間変化を、回路方程式と熱平衡方程式を連成して解くことにより求める。回路方程式は、多心線内部を軸対称なフィラメント層と、フィラメント層間の横断抵抗によってモデル化して導出される。またクエンチ電流値は、通電電流値を与えたときに電流、温度分布が定常状態に落ちつくか、さもなくば温度が急激な上昇を示すかどうかの閾値で定義する。計算方法は付録 2.A で説明し、以下には本計算における特徴的な点を述べるにとどめる。

3. 3. 1　電流分布解析

一般の交流用 NbTi 線では、電流密度が増すときに臨界状態モデルで示されるような急激な電界の立ち上がりは見られず、フラックスフローに起因する比較的緩やかな立ち上がりを示すことが知られている。そこで本解析では、多心線内部の局所的な E–j 特性は、直流試験で得られた線材の電圧－電流特性と相似であると仮定した。E - j 特性はべき乗則により n 値を用いて近似した。

さらに時間変動する磁界環境での通電であることから、フィラメントに沿って動的抵抗による電圧降下を考慮する [24]–[26]。ビーンモデルを用いると、フィラメントに生じる動的抵抗に伴う電界は以下の式で与えられる。

$$E = \frac{j}{j_{\mathrm{c}}} \frac{4}{3\pi} d_{\mathrm{s}} \left| \frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{ex,t}}}{\mathrm{d}t} \right|, \quad (j \le j_{\mathrm{c}}) \qquad (3.\ 1)$$

ここに d_s はフィラメント直径、$B_{ex,t}$ は外部横磁界を表す。j_c には、直流試験より超伝導体体積当たり 10^{-14} Ωm の抵抗率定義された電流密度を使用した。電流密度が j_c を超える電流領域（飽和領域）に対しては (3. 1) 式において $j / j_c = 1$ とした。

以上から、フィラメント方向に生じる電界 E_f を、フラックスフロー電圧と動的抵抗電圧の線形和であるとして、以下のように表す。

$$E_\mathrm{f} = \left(10^{-14}\, j_\mathrm{c} \left(\frac{j}{j_\mathrm{c}}\right)^n + \frac{j}{j_\mathrm{c}} \frac{4}{3\pi}\, d_\mathrm{s} \left|\frac{\mathrm{d}B_\mathrm{ex,t}}{\mathrm{d}t}\right|\right) \cos\alpha, \quad (j \le j_\mathrm{c}) \tag{3. 2}$$

$$E_\mathrm{f} = \left(10^{-14} j_\mathrm{c} \left(\frac{j}{j_\mathrm{c}}\right)^n + \frac{4}{3\pi}\, d_\mathrm{s} \left|\frac{\mathrm{d}B_\mathrm{ex,t}}{\mathrm{d}t}\right|\right) \cos\alpha, \quad (j \le j_\mathrm{c}) \tag{3. 3}$$

$$\cos\alpha = \frac{l_\mathrm{p0}}{\sqrt{l_\mathrm{p0}{}^2 + (2\pi r_i)^2}}$$

ここで、d_sはフィラメント直径、$B_\mathrm{ex,t}$ は外部横磁界、α は i 番目のフィラメント層（付録 2.A 参照）におけるフィラメントのツイスト角、l_p0 は素線のツイストピッチ、r_i は i 番目のフィラメント層の半径を表す。

3. 3. 2　発熱計算

飽和領域では、フィラメントの磁化損失を考慮する必要がないので、発熱量の計算は飽和領域と非飽和領域を区別して行う。飽和領域では、

$$p = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = j_\mathrm{f} E_\mathrm{f} + j_\mathrm{r} E_\mathrm{r} + \left(\frac{2\dot{B}_\mathrm{i}{}^2}{\mu_0}\right) \tau_\mathrm{m} \tag{3. 4}$$

$$B_\mathrm{ex,t} = B_\mathrm{ex,t0} \sin\omega t$$

$$\dot{B}_\mathrm{i} = \left[\frac{B_\mathrm{ex,t0}}{(\omega^2 \tau_\mathrm{m}{}^2 + 1)^{1/2}}\right] \cos(\omega t - \delta)$$

$$\tan\delta = \omega\tau_\mathrm{m}$$

によって計算し、非飽和領域においては磁化損失分を考慮しながら、次式により計算を行う [26], [27]。

$$\begin{aligned} p &= \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} - M\dot{B}_\mathrm{ex,t} \\ &= j_\mathrm{f} E_\mathrm{f} + j_\mathrm{r} E_\mathrm{r} + \left(\frac{2\dot{B}_\mathrm{i}{}^2}{\mu_0}\right) \tau_\mathrm{m} + \frac{2}{3\pi} \lambda_\mathrm{fr} j_\mathrm{c} d_\mathrm{s} \left(1 - (j_\mathrm{z} / j_\mathrm{c})^2\right) \dot{B}_\mathrm{ex,t} \end{aligned} \tag{3. 5}$$

ただし、j_f、E_f はフィラメント方向の電流密度および電界、j_r は電流分布が長手方向に不均一であるときに母材を介して流れる半径方向の横断電流の電流密度、E_t は横断電流が流れたときに生じるフィラメント層間の電界、B_i は多心線内部への侵入磁界、μ_0 は真空透磁率、τ は結合時定数、$\rho_\perp$はフィラメント層間の等価横方向抵抗率、l_{p0} は素線のツイストピッチ、$B_{ex,t}$は外部横磁界、M はフィラメントの横方向の磁化、λ_{fr}はフィラメント領域における超伝導体の面積率、j_zは超伝導フィラメントの素線軸方向の電流密度を表す。

3. 3. 3 温度分布解析

交流用 NbTi 線の線径が細いことから導体断面内で温度が一様であると仮定する。導体半径を a = 0.089 mm、CuNi の熱伝導率を κ = 1.6 W/(m·K)、比熱を γC = 1200 J/(m^3·K)として、仮に次式より熱拡散時定数を計算すると [1]

$$\tau_\theta = \frac{4a^2}{(\pi^2 D_\theta)} \qquad D_\theta = \kappa/\gamma C \tag{3. 6}$$

τ_θ= 2.4 μsec となり、扱う時間スケールに比較して十分小さく、この仮定はほぼ妥当であると考えられる。線長手方向における一次元の熱平衡方程式は以下の式で与えられる。

$$S\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right) - S\gamma C\frac{\partial T}{\partial t} - PK\,(T\text{-}T_0) + Sq = 0 \tag{3. 7}$$

ここに S は素線の断面積、κ は素線の平均熱伝導率、γC は素線の平均比熱、P は冷却周囲長、K は素線表面から冷媒までの熱通過率、q は素線内部の発熱量を表す。

q には (3. 4) および (3. 5) 式から計算される素線体積当たりの発熱量の瞬時値を代入する。CuNi の熱伝導率、比熱については文献 [28] を参考にした。特性式は付録 2.A で示す。また、NbTi の熱伝導率は無視し、体積比熱について文献 [16] を参考にした。

K はエポキシと導体間の境界熱抵抗 R_t と液体ヘリウムへの熱伝達係数 h を用いて以下の式で近似した [29]。

$$\frac{1}{K} = r_C \left(\frac{1}{r_H} R_t + \frac{1}{\kappa_{epoxy}} \ln \left(r_C / r_H \right) + \frac{1}{r_C h} \right) \tag{3. 8}$$

ここで r_C はエポキシ層の外半径、r_H はエポキシ層の内半径（素線半径に等しい）、κ_{epoxy} はエポキシの熱伝導率を表す。

エポキシ層の厚さ d、エポキシの熱伝導率 κ_{epoxy} およびエポキシと導体間の境界熱抵抗 R_t は以下の通り与えた [30]。

$$\left. \begin{aligned} & d = r_C - r_H = 0.14\mathrm{mm} \\ & \kappa_{epoxy} = 0.04\mathrm{W}/\left(\mathrm{m \cdot K}\right) \\ & R_t = \begin{cases} 0.0527 \times T^{-3} \ \left(\mathrm{m^2 \cdot K/W}\right) \left(T \leq 5.38\mathrm{K}\right) \\ 0.00182 \times T^{-1} \left(\mathrm{m^2 \cdot K/W}\right) \left(T > 5.38\mathrm{K}\right) \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{3. 9}$$

液体ヘリウムへの熱伝達係数についてはFig. 2.4 を用いた。

3. 4　結果 1　– サンプル A、C、D の比較 –

Fig. 3.8 に、直流磁界下で測定された NbTi 線の E–j 特性を示す。電界および電流密度は超伝導フィラメント当たりの値である。j_c は超伝導体の体積当たり $10^{-14}\Omega\mathrm{m}$ の抵抗発生点で定義した。図には $E = 10^{-14} j_c \, (j \, / \, j_c \,)^n$ による近似曲線も示してある。磁界が増すにつれて、n 値（傾き）がわずかに減少していく傾向が見られるが、解析では簡単のため全ての E–j 曲線において $n = 13$ として近似式を解析コードに組み込んだ。

Fig. 3.9 に、測定および数値解析により得られたサンプル A、C、D のクエンチ電流

値の磁界依存性を示す。横軸は素線に加わる横磁界の最大値にとってある。実際の超伝導線に加わる磁界は、絶対値は異なるがFig. 3.4～Fig. 3.7 と分布の形状は同じである。このような磁界の大きさを横磁界最大値で代表して表したのがFig. 3.9 の横軸である。(●) は、サンプル C による均一横磁界中での直流 I_q、(○) は $10^{-14}\Omega$m 定義の I_c である。直流試験においては安定したフラックスフローが観測された。(■) はサンプル C による均一横磁界中で測定された交流クエンチ電流値、(×) はサンプル D による均一縦・横磁界下での交流クエンチ電流測定値、さらに (▲) はサンプル A による分布磁界中での交流クエンチ電流測定値を示す。従って、Δq_1 は均一横磁界のみの場合の磁気的不安定性によるクエンチ電流値の低下、Δq_2 はいわゆる縦磁界不安定性による低下、さらに Δq_3 は分布磁界の影響による低下をそれぞれ表す。全てのサンプルで直流試験時には安定したフラックスフローが観測されており、交流通電時にクエンチが発生する通電電流の位相もほぼ揃っていた。従ってクエンチ特性への機械的な擾乱による影響は小さかったと考えられる。

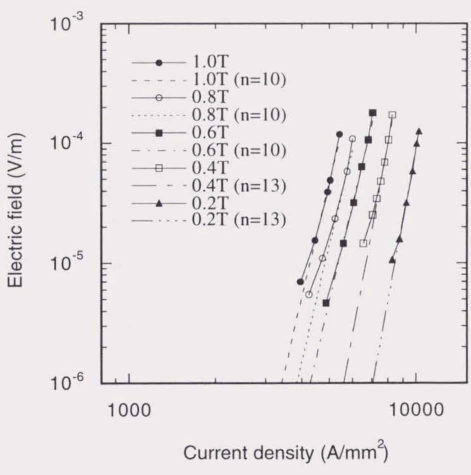


Fig. 3.8 ***E-j* characteristics of CuNi/NbTi wire measured in D.C. magnetic field**

外部磁界のない状態で測定されたサンプル A のクエンチ電流値はサンプル C、D の値より 10A 程度高くなったが、目視でもエポキシの含浸などで極度に冷却状態が悪化している箇所は見られていないので、これはサンプル A の素線は全体的に冷却状態が他のサンプルに比べて良かったためと考えられる。

Fig. 3.9 中の (……)、(– · –)、(—) はそれぞれサンプルC、D、A に対応する解析結果である。解析において各サンプルの冷却条件を設定する必要があるが、本解析では冷却周囲長や、エポキシ層の厚さ、ヘリウムへの熱伝達関数等のうち、代表して冷却周囲長をフィッティングパラメータとて 0.5 T 時の測定値と比較・一致させて設定した。従ってここでいう冷却周囲長は実際のサンプルでの素線の冷却周囲長とは異なる。冷却周囲長／導体周囲長を k として、サンプル A、C、D に対し k = 0.84、0.23、0.21 とすると、実験値と解析値がほぼ一致した。サンプル A の k だけ他と比べ非常に高いが、k は冷却状態の良否の目安と考えられるので、先に述べたように実験においてサンプル A の冷却状態が他のサンプルに比べてよかったことが、解析においても定性的に示されているといえる。サンプルの固定のために単独の素線を FRP のボビンの溝に直接エポキシ含浸したか、ケーブル導体をエポキシ含浸したかの違いが、素線の冷却状態の差の原因の一つと考えられる。

サンプル A と D では同レベルの縦磁界成分が影響していると考えられるので、(×) から (▲) へのクエンチ電流値の低下 (Δq_3) は、今回の測定条件で得られた分布横磁界の影響による正味の低下であるといえる。

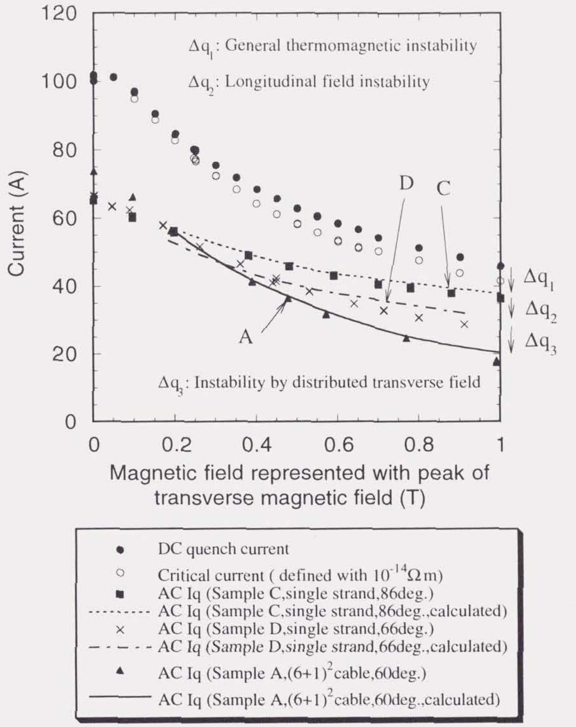


Fig. 3.9 *Measured and calculated quench current for sample* A, C, D as a function of transverse magnetic field. Longitudinal field is proportional to the transverse field and determined as shown in Fig. 3.4 to Fig. 3.7 for each sample.

3. 5 結果 2 – サンプル B、C の比較 –

Fig. 3.10 は、サンプル B と C のクエンチ電流特性を示したものである。(□) が均一な交流横磁界下 (サンプル C) で得られた交流クエンチ電流値で、(△) が分布した磁界下 (サンプル B) での交流クエンチ電流値である。(…■…) はサンプル C に対応した解析

におけるクエンチ電流値の計算値であり、(…▲…) はサンプル B に対応した解析におけるクエンチ電流の計算値である。サンプル B に対しては、*k*（冷却周囲長／導体周囲長）をサンプルCのそれと等しく0.23と設定した。

サンプル B におけるクエンチ電流値 (□) と サンプル B におけるクエンチ電流値 (△) が 0.1T 付近で交差し、(△) の方が 0T でのクエンチ電流値が大きくなっている。0T では外部磁界の影響がないことを考えると、これはエポキシのコーティング状態の違い等で、サンプル B の冷却状態が C よりも若干良好だったことが原因と見られる。サンプル B については、解析値 (…▲…) が測定値 (△) より若干低いが、これは解析ではサンプルBとサンプルCに対して同じ冷却条件が設定されているためである。

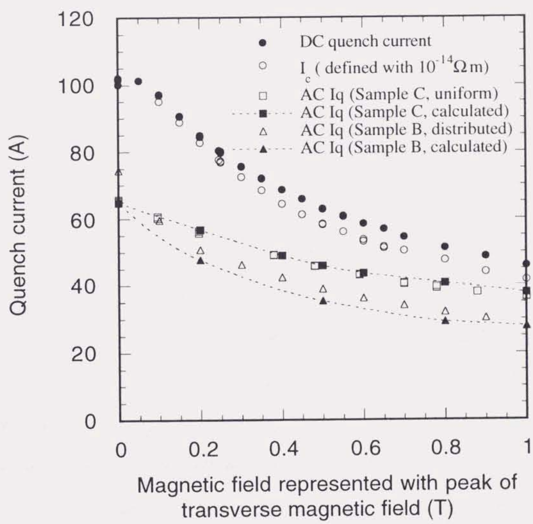


Fig. 3.10 Measured and calculated quench current for sample B, C as a function of transverse magnetic field. Longitudinal field is proportional to the transverse field and determined as shown in Fig. 3.5 to Fig. 3.6 for each sample

3.6 考察

定常状態とクエンチ時の各サンプルの計算結果をもとに、各サンプルのクエンチの原因について考察する。

まず、周波数を 51Hz、外部横磁界最大値を 0.5T、通電電流値を 0.5T における臨界電流値の 0.5 倍、k (冷却周囲長／導体周囲長) を 0.84 として、サンプル A、C、D の電流分布、発熱量及び温度分布を計算した。Fig. 3.11 に、位相 $\omega t = 88^\circ$ の時の各サンプルにおける素線内部の電流分布を示す。Fig. 3.12 (a)〜(c) に、各サンプルの素線内部の温度と発熱分布を示す。

Fig. 3.11 のサンプル C、D の電流分布を比較してわかるように、縦磁界の影響で外周部飽和領域が増大していることがわかる。Fig. 3.12 (a)、(b) に示されるように、サンプル D での発熱の増大が確認される。このような飽和領域の増大に伴う発熱の増大が、いわゆる縦磁界不安定性 (Δq_2) の最大の要因である。

Fig. 3.11 から、サンプル A の電流分布が分布磁界下での通電において長手方向に均一化されている様子が確認される。Fig. 3.13 は、サンプル A における経験磁界と発熱分布の関係を示しているが、横磁界成分の大きな位置での発熱の増大が確認される。さらにFig. 3.12 (c) より、局所的な発熱の増大に伴って局所的な温度上昇が起こっていることを確認できる。サンプル A の通電電流値を 0.5 T での臨界電流値に対し 0.62 倍として解析すると、線がクエンチする過程がシミュレートされるが、そのクエンチ直前での素線の温度と発熱分布の結果がFig. 3.14 である。急激な温度上昇を示す位置がクエンチ発生点であるが、超伝導線の熱伝導率が低いために、クエンチ過程においても、その発生箇所から熱がほとんど拡散されていないことがわかる。

サンプル A と D では、定常状態において交流損失の平均的なレベルはほとんど変わらない点にも注目すべきである。サンプル A で発生する発熱 (瞬時値) の体積平均値は、$\omega t = 88^\circ$ において 307.8 kW/m^3、D では 308.0 kW/m^{3}であり、1 周期平均の損失量

もサンプルAで454.2 kW/m³、Dで 454.3 kW/m³と計算され、全体量で両者はほとんど変わらない。すなわち平均された導体の交流損失を議論するだけでは、分布磁界の安定性に対する影響を知ることができないことも本解析で明らかとなった。

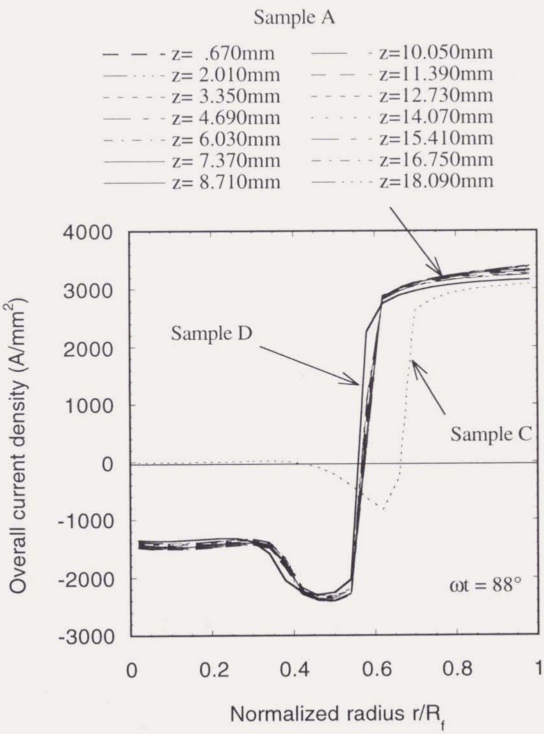
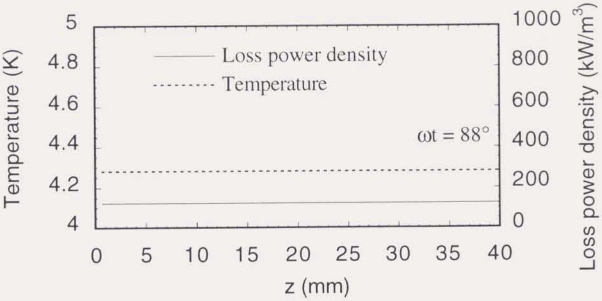
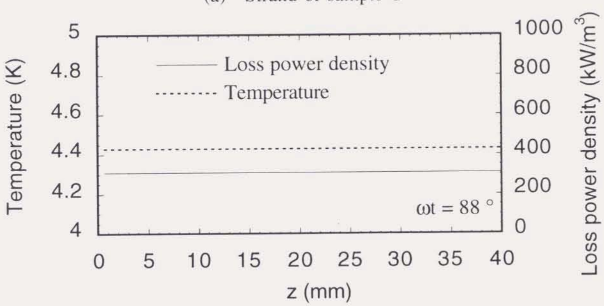


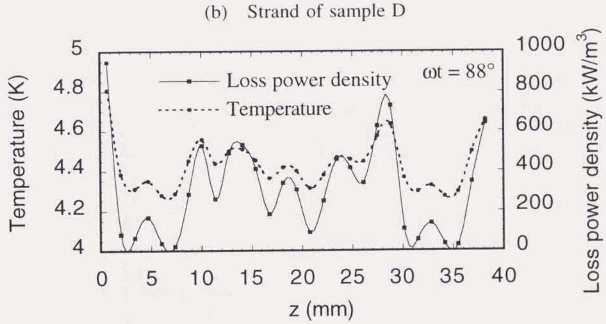
Fig. 3.11 Radial current distributions in strand of sample A, C, D. I_t/I_c=0.5.



(a) Strand of sample C



(b) Strand of sample D



(c) Strand of sample A

Fig. 3.12 Axial distributions of temperature and power density in strands. I_t/I_c=0.5.

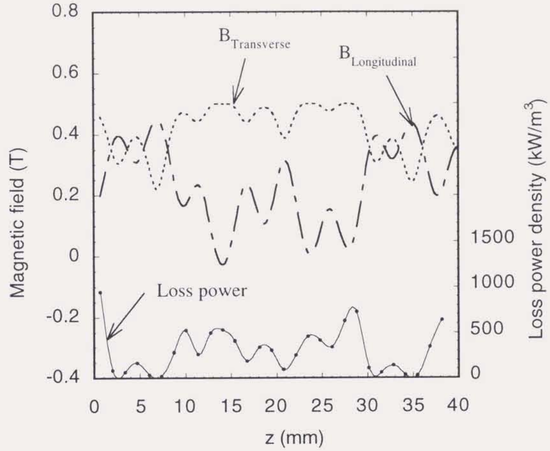


Fig. 3.13 Applied field and axial distribution of power density in strand of sample A at ωt = 88°. I_t/I_c=0.5.

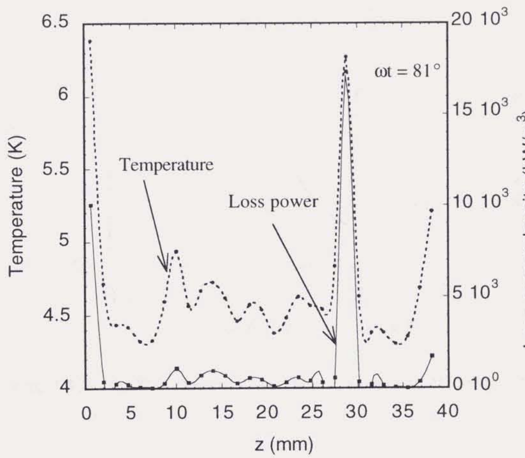


Fig. 3.14 Axial profiles of temperature and power density in strand of sample A just before quench. I_t/I_c=0.62.

サンプル B ついても同様に、電流分布、温度分布の計算結果を示しておく。Fig. 3.15 は、サンプル B における素線内部の径方向電流分布の計算結果である。外部磁界の振幅は0.5 Tで、素線の通電電流は 34.8 A（安定限界）である。Fig. 3.16 に外部磁界と素線内部の発熱の長手方向分布の計算結果を示す。径方向電流分布が長手方向に渡ってほぼ均一となるため、横磁界成分の強い位置で局所的な発熱が生じている。この結果、Fig. 3.17 に見られるように、素線の熱伝導性が悪いことと相まって、局所的に温度上昇が増大している。

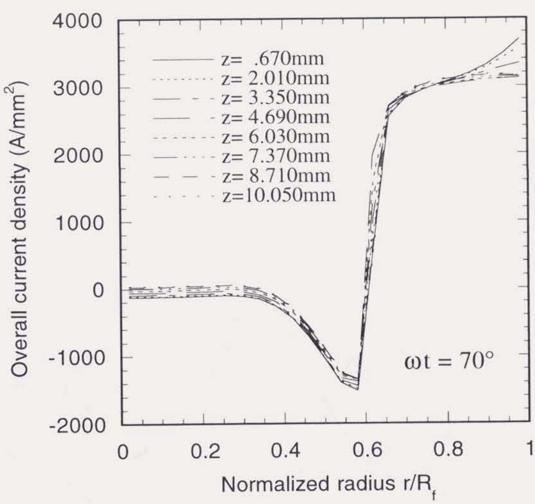


Fig. 3.15 Radial current distributions in strand of sample B

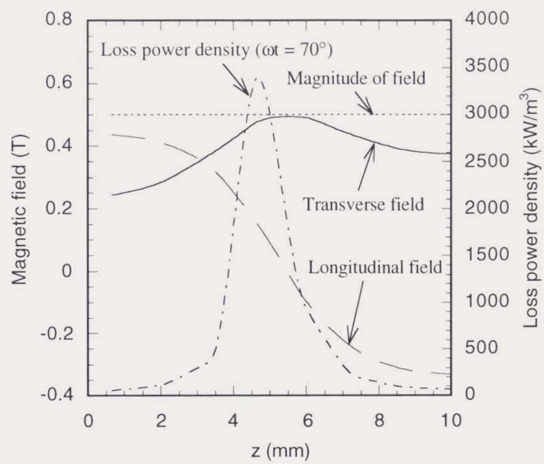


Fig. 3.16 External magnetic field and axial distribution of power density in strand of sample B

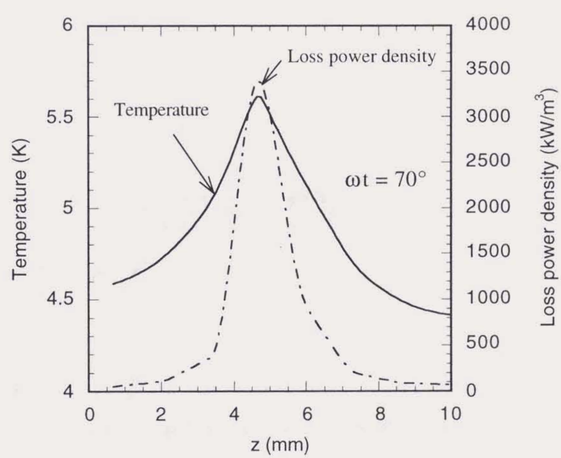


Fig. 3.17 Axial profiles of temperature and power density in strand of sample B

3.7　実際的磁界環境下における安定化指針

高次の撚りケーブルは、一般的に撚り方向と撚りピッチを調節して縦磁界効果による超伝導素線の安定性向上、および低損失化を図っている。従って、縦磁界効果が得られる環境下で、分布磁界不安定性がどの程度問題となるのかを評価し、分布磁界不安定性も考慮に入れた安定化指針を示す必要がある。基本的に磁気的不安定性は素線内部に形成される飽和領域が増大する場合に起きやすい。従って素線の高安定化は素線内部の飽和領域をなくし、電流分布を均一化することが最も効果的である。本節はまず、これまでに均一磁界を想定して導出されている、素線内部電流の均流化条件について紹介する。次に、直線状の$(6+1)^3$撚り線導体を対象に、実際に撚りピッチを調節して縦磁界による安定化を図る場合を想定し、理論解析を用いて縦磁界成分の変化に伴うクエンチ電流特性の変化を明らかにする。同時に先に述べた素線内部電流の均流化条件が分布磁界下での安定性確保に対しても有効であることを示す。

3.7.1　素線内電流の均流化条件

1 ピッチ分の内外の隣接フィラメントによって形成される閉ループにおいて、鎖交磁束が保存されるという条件の下で、多心線内部の非飽和領域における電流分布は以下のように導出されている [31]。

$$\frac{\partial j_{\mathrm{r}}}{\partial t} = D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j}{\partial r}\right) + \frac{4\pi}{\mu_0 l_{\mathrm{p}}}\left(\pm\dot{B}_{\mathrm{ex,z}} + \frac{\mu_0}{l_{\mathrm{p}}}\dot{I}_{\mathrm{t}}\right) \tag{3.10}$$

$$D = \frac{\sqrt{\pi}\, r_{\mathrm{f}}^2}{2\mu_0\lambda j_{\mathrm{c}}}\left|\dot{B}_{\mathrm{ex,t}}\right| \tag{3.11}$$

ここで、正負の符号は Z 撚り、S 撚りに対応する。Funaki らは、交流用超伝導線においてフィラメント径が極めて細く横磁界効果は通常無視できるとして、(3. 10) 式における拡散項を消去し、内部電流分布を以下のように導出している [9], [32]。

$$j_r = \frac{4\pi}{\mu_0\, l_p}\left(B_{ex,z} + \frac{\mu_0}{l_p} I_t\right) \tag{3. 11}$$

かっこ内の第二項目は自己縦磁界に相当する。ただし、外部縦磁界は自己縦磁界と同方向とする。つまり、Z 撚り素線ならば正の縦磁界、S 撚り素線ならば負の縦磁界が加えられるものとする。

外部磁界が通電電流と同周波数、かつ同位相で変化するとすると、(3. 11)式はさらに以下のように記述できる。

$$B_{ex,z} = B_{ex,z0} \sin\omega t \tag{3. 12}$$

$$I_t = I_{t0} \sin\omega t \tag{3. 13}$$

$$j_r = j_{r0} \sin\omega t \tag{3. 14}$$

$$j_{r0} = \frac{4\pi}{\mu_0\, l_p}\left(B_{ex,z0} + \frac{\mu_0}{l_p} I_{t0}\right) \tag{3. 15}$$

従って均流化の条件は、以下のように内部の電流分布が、通電電流値をフィラメント領域の断面積で割った値と等しくなる場合となる [9]。

$$j_{r0} = \frac{4\pi}{\mu_0\, l_p}\left(B_{ex,z0} + \frac{\mu_0}{l_p} I_{t0}\right) = \frac{I_{t0}}{\pi R_f^2} \tag{3. 16}$$

よって、最適な縦磁界成分は以下の式で与えられる。

$$B_{ex,z0} = \left(\frac{\mu_0\, l_p}{4\pi^2 R_f^2} - \frac{\mu_0}{l_p}\right) I_{t0} \tag{3. 17}$$

もし、外部磁界が素線電流に比例する（$B_{ex,z} = K_{ex,z}\, I_t$）ならば、(3. 17)は以下のように表され、$I_t$に依存せず最適な撚りピッチを決定することができる。

$$K_{ex,z0} = \frac{\mu_0 \, l_p}{4\pi^2 R_f^{\,2}} - \frac{\mu_0}{l_p} \qquad (3.18)$$

3.7.2 高次撚り線導体における撚りピッチの最適化

本項では$(6+1)^3$撚り線導体の撚りピッチの最適化について述べるが、そこで得られた知見は、原則的に高次撚り線の場合も同じである。解析対象の CuNi/NbTi 線の諸元はTable 3.1 と同じとする。この素線をFig. 3.18 のように理想的な配置で3次撚り線を構成する場合について取り上げる。このとき、1次、2次、3次ケーブルの撚りピッチをそれぞれl_{p1}、l_{p2}、l_{p3}とし、以下の比例関係が保たれるものとする。

$$l_{p1} : l_{p2} : l_{p3} = 1 : 3 : 9 \qquad (3.19)$$

例として、l_{p1} = 4 mm、および7 mm における素線経験磁界をFig. 3.19 (a)、および(b)に示す。z 軸は素線軸である。このように撚りピッチの調節によって縦磁界成分の大きさを調節でき、撚りピッチを短くする場合に縦磁界成分が強くなる。(3. 19) 式の条件の下で、撚りピッチを変化させた場合のクエンチ電流特性をに示す。さらに、各撚りピッチにおいて、縦磁界成分と横磁界成分がそれぞれ $B_{ex,z,average}$、$B_{ex,t,\ peak}$ に等しい一様外部磁界下でのクエンチ電流特性も示す。ここで、外部縦磁界による多心線内部の遮へい電流の誘導が磁界の拡散現象であることから、均一縦磁界成分として外部縦磁界の平均値 $B_{ex,z,average}$ を選んだ。また、超伝導体の j_c がほぼ横磁界の大きさによって決められることから、超伝導線の I_c を揃えるという観点に立ち、均一横磁界成分として外部横磁界のピーク値$B_{ex,t,\ peak}$を選んだ。

(3. 18) 式から最適な縦磁界成分は5.90 mT/A と得られる。これは撚りピッチ$l_{p1} \approx 7$ mm の場合における縦磁界成分の長手方向平均値と等しくなる。図から明らかなように、l_{p1} = 7 mm あたりでクエンチ電流値がほぼ最大となり、素線の内部電流の均流化が

分布磁界下での安定性確保に有効であることがわかる。しかしながら、均一磁界環境下でのクエンチ電流特性と異なり、縦磁界成分が最適値よりも大きくなると分布磁界不安定性の影響で急激な安定性低下が起こる。従って、素線がさらされる磁界環境を十分把握し、磁界環境に合わせて最適な撚りピッチを決定することが素線の安定性向上にとって重要といえる。

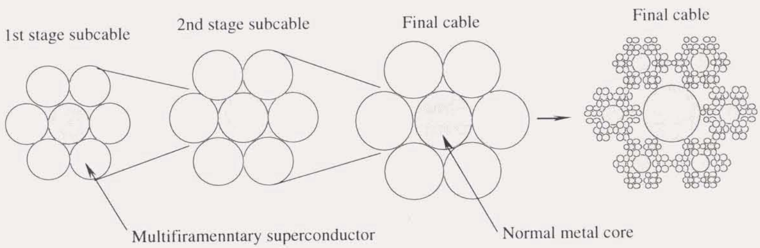
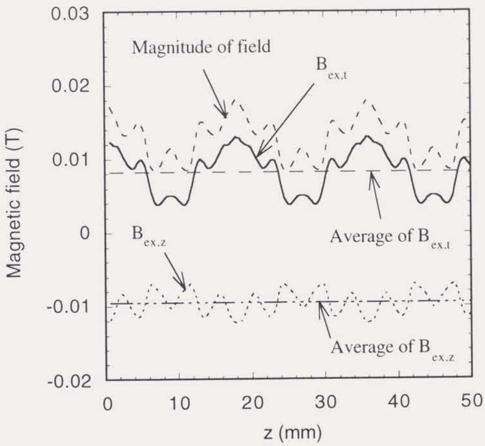
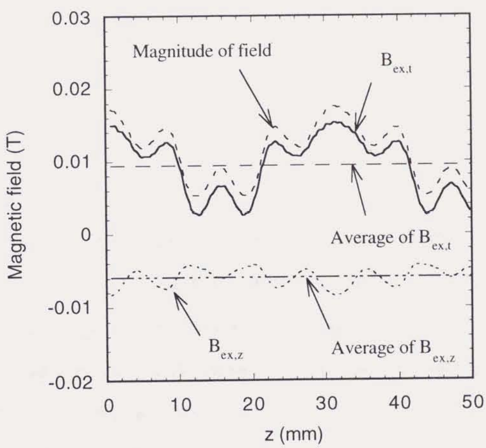


Fig. 3.18　Configuration of $(6+1)^3$ cable



(a)



(b)

Fig. 3.19 Applied magnetic fields to strand in $(6+1)^3$ cable at (a) l_{p1} = 4 mm and (b) l_{p1} = 7 mm.

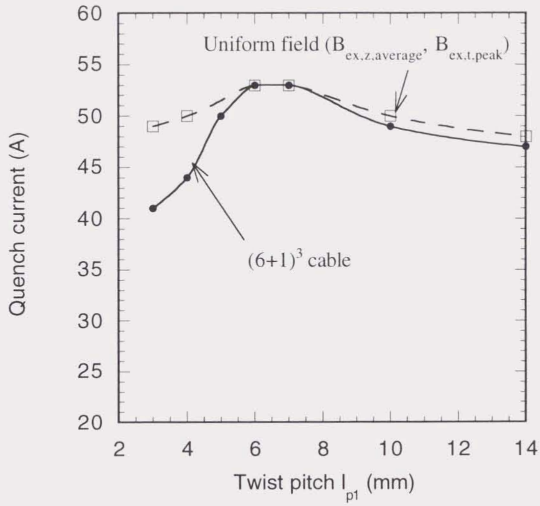


Fig. 3.20 Quench current of the strand in distributed and uniform magnetic field as a function of l_{p1}. $B_{ex,z}$ depends on l_{p1}: $B_{ex,z}$ becomes larger with reducing twist pitch of the cable.

3. 7. 3 銅の配置による安定性の向上

分布磁界不安定性は、熱伝導性の悪い素線において局所的な温度上昇が引き金となって起こる現象である。従って分布磁界不安定性は、銅などの高熱伝導性金属を素線内部に配置することによっても抑制が可能である。銅の配置には、主として二つの効果があり、一つは超伝導体の常伝導転移時における、銅への分流による温度上昇の抑制、それともう一つが、熱伝導性の向上による擾乱などが原因の局所的な温度上昇の抑制である。分布磁界不安定性の抑制は後者の効果を用いるものである。最近では、素線内部のフィラメント領域外周部や、中心部に銅を配置した素線の開発が行われている。擾乱による入熱は素線表面から行われるため、外周部の銅配置が有利と考えられている。一方、素線内部の損失による発熱にとっては、中心部における銅の配置も

有効である。本項では、中心部に銅を配置する場合を想定して、銅の比率を変えた場合のクエンチ電流特性を数値解析によって示す。ただし、断面内部の温度分布は一様とし、銅の最適な配置位置については議論しない。

解析対象の導体構造は、Table 3. 1 に示した素線において、中心部に Cu が CuNi 母材に埋め込まれた構造とする。フィラメント径、素線外径、フィラメント領域外径、フィラメント領域における超伝導体の占有率は同じである。素線断面図をFig. 3.21 に示す。また、磁界分布は 3. 2 節に示したサンプル B において素線が経験する分布とし、ピーク値は0.5 T とする。振幅は51 Hz である。

Fig. 3.22 に銅の体積率を変えた場合の、分布磁界下におけるクエンチ電流特性と熱拡散時定数を示す。時定数を計算する際には、Cu、CuNi、NbTi の比熱をそれぞれ 1200、1200、6000 J/m^{3}K、Cu、CuNi、NbTi の熱伝導率をそれぞれ 1000、1.6、0 W/mK とした（付録 2.A の特性式参照）。また、振幅0.5 T の一様横磁界が加えられる場合のクエンチ電流のレベルも示してある。この図から、3%程度の銅の配置によって、著しく熱拡散時定数が小さくなり（熱伝導性が改善され）、ほぼ分布磁界不安定性が解消されることが示されている。Fig. 3.23 には銅の体積率が 2.7%の場合の素線内部の温度、および発熱の軸方向分布を示す。通電電流は安定限界の電流値である。Fig. 3.17 と比較して、温度勾配が緩和されていることがわかる。

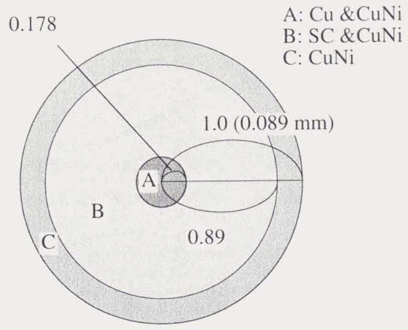


Fig. 3.21 Schematic of cross-section of strand having Cu in the center.

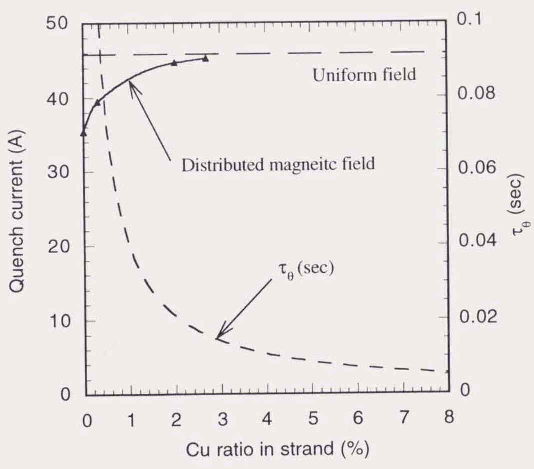


Fig. 3.22 Quench current and thermal diffusion time constant as a function of Cu ratio

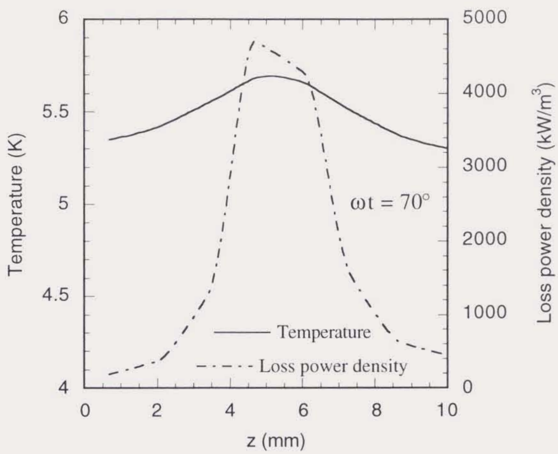


Fig. 3.23 Axial profiles of temperature and power density in strand having Cu. The transport current is the stability limit. The volume fraction of Cu is 2.7 %.

3. 8 結論

実際的な空間変動する磁界分布下での、複合多心超伝導線の磁気的不安定性を調べた。交流用 CuNi/NbTi 超伝導線において、一様磁界下で生じる一般的な磁気的不安定性によるクエンチ電流値の低下から、分布磁界下ではさらにクエンチ電流値が低下することを調べ（分布磁界不安定性）、その原因を明らかにした。分布磁界不安定性は、*E–j* 特性の長手方向の不均一さが起因していることを明らかにした。*E–j* 特性が長手方向に不均一になると局所的な発熱を生じ、さらに銅などが配置されていない場合には、熱伝導性が悪いために、局所的に温度上昇が生じ磁束跳躍が誘発される。

次に多重撚り線構造を想定して、ケーブルの撚りピッチを変化させた場合の素線の

クエンチ電流特性、および縦磁界効果による高安定化について明らかにした。これにより素線内部電流の均流化が、分布磁界下での安定性確保にも効果的で、これまでに提案されている均流化条件が有効であることが明らかとなった。しかしながら、縦磁界成分が、均流化条件を与える最適な縦磁界成分より大きくなる場合には、分布磁界磁界不安定性により急激に安定性が低下することが明らかとなった。従って、実際の多重撚り線導体の撚り行程においては、素線がさらされる磁界環境について十分配慮して最適撚りピッチを決定する必要がある。素線のクエンチ特性を知る方法の一つとしては、今回用いた回路モデルと熱伝導方程式の連成解析による解析方法は非常に有効である。

さらに、分布磁界不安定性の抑制には素線に銅などの高い熱伝導性を有する金属を配置することが有効で、銅の場合には体積率約３％で十分な効果があった。

第 4 章　酸化物ツイスト多心超伝導テープ線の電磁界解析モデルの構築 [33], [34]

これまで酸化物線材は、超伝導体部の臨界電流密度（コア j_c）の向上、および強度の向上のため多心化はされていたが、フィラメントのツイストまでは行われていなかった。しかしながら、線の低損失化を考えると、フィラメントのツイストは必須である。最近では長尺化がある程度確立してきた Bi 系線材についてはツイスト線の開発も活発化してきており [35], [36]、電力ケーブルなどの酸化物超伝導体の実用的な交流応用分野において注目を集めている。従来、ツイストをしても物理的にフィラメント結合（ブリッジング）が起こる問題があったが、最近バリア型のツイスト多心線の開発によってこの問題を克服し [6], [7]、ツイスト多心線が広く普及される可能性がでてきている。このような背景のもと、ツイスト多心テープ線の交流損失の定量化は、導体、およびシステム設計の上で重要となる。

酸化物線材の場合、結晶配向性を良好にして j_c の向上を図るため、一般的には圧延してテープ形状にされる。そのため、その形状効果や非線形的な E-j 特性のため、交流損失を定量化する上で、交流損失を解析的に求めることが極めて困難であり、有限要素法を用いた数値解析が適している。こうした背景の中で、有限要素解析による交流損失の評価が行われている。ツイストの施されていないテープ線のモデル化は、Amemiya らによってすでに行われ、実験により妥当性が検証されている [37], [38]。本章では、さらにツイストの施されたテープの電磁界数値解析モデルを提案し、そのモデルを適用した有限要素法による電磁界（交流損失）解析コードを構築した [33], [34]。コードの妥当性は、結合損失の解析解と比較することにより検証した。

酸化物超伝導線では n 値が 10～20 程度と、直流用の NbTi 線と比べて小さく、臨界状態モデルは損失特性を定性的には評価できるが、厳密な評価はできないことが指摘

されているため [40]-[42]、*E*-*j* 特性はべき乗則で取り入れる。またフィラメント領域は超伝導体と常伝導体の混合体として取り扱う。このモデルによって、導体の特性が線の長手方向に一様となり、均一な磁界下において二次元的な解析が可能である。

4. 1　超伝導体の *E*-*j* 特性と等価導電率

酸化物超伝導体はピン止め力が弱く、電流密度を上げていくと、超伝導状態から常伝導状態へ緩やかに遷移する。このような超伝導体の *E*-*j* 特性を、以下のようなべき乗則を用いて近似する。

$$E_{sc} = E_0\,(j_{sc}/j_c)^n \qquad (4.\ 1)$$

ここで、j_{sc} と j_c は超伝導体における電流密度と臨界電流密度、E_0 は $j_{sc}=j_c$ において超伝導体に発生する電界を表す。臨界電流密度 j_c、および n 値については、磁界依存性（6. 4. 1 項参照）や温度依存性を、折れ線近似や近似関数を用いて取り入れることも可能である。

本モデルは、フィラメント領域において超伝導体と母材の混合体モデルを採用している。従って扱う電界式は、フィラメント体積平均の電界式である。そのため、非飽和状態にある超伝導フィラメントに対して変動横磁界が加わる場合に、フィラメントに沿って誘起される動的抵抗に起因する電圧降下を別に考慮に入れる必要がある。つまり、ツイスト多心線の場合には、多心線が磁気的結合状態にあるのかないのか、すなわち内部に外部磁界が十分侵入しているのかいないのかによって、二通りの電界式を考えなければならない。

磁気的結合度を評価する重要なパラメータは結合時定数であり、結合時定数が場の変化の時間スケールに対して十分小さければ、結合電流が十分減衰して内部に外部磁界が侵入する。また、動的抵抗電圧は磁界がフィラメントに完全に侵入した状態で生じる。従って、E_{sc} として動的抵抗電圧を考慮しなければならない条件は以下のように

与えることができる。

$$\left.\begin{aligned}&\left|j_{\mathrm{sc}}\right|<j_{\mathrm{c}}\\&\tau_{\mathrm{m}}<<\frac{1}{4}f^{-1}\\&B_0>>B_{\mathrm{pf}}\end{aligned}\right\}\tag{4. 2}$$

ここで、fは周波数を表す。τ_{m}は結合時定数であり、以下の式で与えられる [43], [44]。

$$\tau_{\mathrm{m}}=\frac{\mu_0}{1+1/\alpha}\sigma_{\perp}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{l_{\mathrm{p}}}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{4}a^2\right]\tag{4. 3}$$

ここで、フィラメント領域は楕円に近似され、その 2 軸が x、y 軸に一致し、磁界は y 軸方向に加えられている場合が想定されている。この場合、αはx軸に対するy軸の比、$\sigma_{\perp}$はフィラメント領域の等価横方向抵抗率、a は x 軸の半径、l_{p}はツイストピッチを表す。この値については次章で詳しく述べる。B_{pf}はフィラメントの到達磁界である。実際には磁界が B_{pf} に到達した時点から、動的抵抗電圧が発生するが、磁界が B_{pf} 程度まで小さくなると、フィラメント内部の磁束密度分布が複雑になり、つまりフィラメント内部で磁束密度の折れ曲がり点が幾つか存在するようになり、後述する動的抵抗電圧の解析式では誤差が大きくなる。従って、後述の動的抵抗電圧の解析式を用いて妥当な解を得るためには、B_0 >> B_{pf}の条件が必要である。また B_{pf}は、フィラメントの輸送電流が変化するため、電気的中心線の位置が時間的に変化することになり一定値とならない。仮に、フィラメントの輸送電流がないとすれば、フィラメントの到達磁界は以下のように与えられる [45]。

$$B_{\mathrm{pf}}=\frac{\mu_0 j_{\mathrm{c}}w_{\mathrm{f}}}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{d_{\mathrm{f}}}{w_{\mathrm{f}}}\right)^2\right]+\frac{d_{\mathrm{f}}}{w_{\mathrm{f}}}\cot^{-1}\left(\frac{d_{\mathrm{f}}}{w_{\mathrm{f}}}\right)\right\}\tag{4. 4}$$

ただし、フィラメントは長方形断面に近似されており、w_f および d_f はフィラメントの幅、厚さをそれぞれ表す。ここで、磁界はフィラメント面に対して平行に加えられている場合が想定されている。もし磁界がフィラメント面に対して垂直に印加される場合には、w_f と d_f が入れ替えられる。また、フィラメントに輸送電流がある場合には、到達磁界は自己磁界の影響で (4. 3) 式より値が小さくなる。

動的抵抗電圧としては、ビーンモデルを用いて導出されている以下の式で与えることにする [24]-[26]。

$$E_{\mathrm{d}} = \left| \int_{-d_s/2}^{d_s/2} \dot{B}_{\mathrm{f}\perp}\,(x - x_0)\,\mathrm{d}x \,/\, d_s \right| \frac{j_{\mathrm{sc}}}{|j_{\mathrm{sc}}|}$$

$$= \left| \frac{1}{2}\, d_{\mathrm{s}} \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right) \dot{B}_{\mathrm{f}\perp} \right| \frac{j_{\mathrm{sc}}}{|j_{\mathrm{sc}}|}, \quad (|j_{\mathrm{sc}}| < j_{\mathrm{c}}) \qquad (4.5)$$

ここに、フィラメント断面は長方形に近似され、2 軸が x、y 軸に一致し、磁界は y 方向に印加されているものとする。$B_{f\perp}$は外部磁界のフィラメント軸に垂直な磁界成分を表す。磁界はフィラメントの到達磁界よりも十分大きいとする。x_0 は電気的中心線の位置であり、以下のように与えられる。

$$x_0 = -\left(\frac{d_{\mathrm{s}}}{2} \right) \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right) \qquad (4.6)$$

ここで、d_s は磁界に対し垂直な面の幅であり、磁界がフィラメント幅広面に平行か垂直かによって、それぞれ$d_s = d_f$、または$d_s = w_f$で与えられる。以上より、(4. 2) 式が満足される条件下で、E_{sc}を以下の式で与える。

$$E_{\mathrm{sc}} = \left(\left| E_0 \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right)^n \right| + \left| \frac{1}{2}\, d_{\mathrm{s}} \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right) \dot{B}_{\mathrm{f}\perp} \right| \right) \frac{j_{\mathrm{sc}}}{|j_{\mathrm{sc}}|} \qquad (4.7)$$

(4. 5) 式の動的抵抗電圧は、直流通電時に交流磁界が加わる場合に導出された電界式である。交流通電時に適用する場合には、フィラメント電流による自己磁界の変化の影響が無視されることになる。実際には、外部磁界は自己磁界に対して十分大きいので無視しうる。交流通電時の (4. 7) 式の妥当性は付録 4.A で検証する。

一方、自己磁界条件または $\tau_m >> f^{-1}/4$ となる条件では、フィラメントが磁気的結合状態になるので、E_{sc} として (4. 1) 式を用いるのが妥当である。さらに、外部磁界 B_0 が B_{pf} より十分大きくないが、自己磁界は存在するような場合でも (4. 1) 式が妥当である。それ以外の条件、つまり $\tau_m << f^{-1}/4$ であっても、$B_0 << B_{pf}$ であり自己磁界も存在しない場合では、E_{sc} を近似できず現モデルの適用範囲外となる。各条件について E_{sc} の表式をまとめたものを Table 4.1 に示す。

得られた E_{sc}、および j_{sc} により、超伝導体の等価導電率 σ_{sc} を以下のように定義する。

$$\sigma_{sc} = j_{sc}/E_{sc} \tag{4. 8}$$

TABLE 4.1 Electric field expressions for superconducting filament

	Saturated filament $(\lvert j_{sc}\rvert \geq j_c)$	Non-saturated filament $(\lvert j_{sc}\rvert < j_c)$		
		$\begin{cases}\tau_m << (1/4)f^{-1} \\ B_0 >> B_{pf}\end{cases}$	$\begin{cases}\tau_m << (1/4)f^{-1} \\ B_0 << B_{pf} \\ \text{no self - field}\end{cases}$	Otherwise
E_{sc}	$E_{sc} = E_0(j_{sc}/j_c)^n$	$E_{sc} = \left(\left\lvert E_0\left(\dfrac{j_{sc}}{j_c}\right)^n\right\rvert + \left\lvert\dfrac{1}{2}d_s\left(\dfrac{j_{sc}}{j_c}\right)\dot{B}_{f\perp}\right\rvert\right)\dfrac{j_{sc}}{\lvert j_{sc}\rvert}$	Unknown (out of model)	$E_{sc} = E_0(j_{sc}/j_c)^n$

* $\tau_m = \dfrac{\mu_0}{1+1/\alpha}\sigma_\perp\left[\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\left(\dfrac{l_p}{2\pi}\right)^2+\dfrac{1}{4}a^2\right]$, $B_{pf} = \dfrac{\mu_0 j_c w_f}{\pi}\left\{\dfrac{1}{2}\ln\left[1+\left(\dfrac{d_f}{w_f}\right)^2\right]+\dfrac{d_f}{w_f}\cot^{-1}\left(\dfrac{d_f}{w_f}\right)\right\}$

4. 2　フィラメント領域における非等方的なオームの法則と等価テンソル導電率 [33], [34]

本モデルでは、フィラメント領域は超伝導体と母材金属の混合体として扱われる。この場合、分割された各要素において導電率に異方性が存在する。ただし、ツイストの施されていない多心線で、かつ外部磁界が線軸に対して垂直に加えられる場合には、誘起電界が線軸方向のみで、さらに電流密度も電界に対して等方的となるので、導電率は一変数として扱うことができる。しかしながら、フィラメントにツイストが施されている場合には、線軸に対して垂直に磁界が加えられる場合でも、誘起電界が線軸方向のみにならず、さらに電流密度も電界に対して等方的とならない。すなわち、導電率がテンソル化される。本モデルの構築は、このようなテンソル化された導電率を用いた、非等方的なオームの法則を導出することに帰着される。ただし、ツイストの施されていない多心線の場合でも、外部磁界が線軸に対して垂直でない場合には、やはり導電率をテンソル化して取り扱う必要がある。以下、導電率のテンソル化について述べる。

フィラメント方向の等価導電率を σ_f で表すとすると、σ_f は並列抵抗の考え方から以下の式で与えられる。

$$\sigma_f = \lambda\sigma_{sc} + (1-\lambda)\sigma_m \qquad (4.\ 9)$$

ここで、λ はフィラメント領域における超伝導体の体積占有率、σ_m は母材金属の導電率を表す。また、フィラメントに対して垂直な方向の導電率に関しては、母材抵抗が支配的であると考え、以下の式で与える [46]。

$$\sigma_{\perp} \approx \left[\left(1+\lambda\right) / \left(1-\lambda\right) \right] \sigma_{\mathrm{m}} \tag{4.10}$$

これらを用い、フィラメント領域内部におけるフィラメントに沿った方向の電流密度$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}$、およびフィラメントの垂直方向の電流密度$\boldsymbol{j}_{\perp}$は以下の式で与えられる。

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} = \sigma_{\mathrm{f}} \left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} \cdot \boldsymbol{E} \right) \boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \left[\boldsymbol{E} - \left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} \cdot \boldsymbol{E} \right) \boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} \right] \tag{4.12}$$

ここで、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}$はフィラメント方向の単位ベクトルを表す。

超伝導体内部のフィラメント領域が円筒型の場合には、左撚り（Z 撚り）多心線の単位フィラメント方向ベクトル$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}'$は以下の式で与えられる。

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}' = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x}}' \\ v_{\mathrm{y}}' \\ v_{\mathrm{z}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\psi' \sin\theta' \\ \sin\psi' \cos\theta' \\ \cos\psi' \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$\psi' = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi r'}{l_{\mathrm{p}}} \right)$$

$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{y'}{x'} \right), \quad \left(x' \geq 0 \right)$$

$$\theta' = \tan^{-1}\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{y'}{x'} \right) + \pi, \quad \left(x' < 0 \right)$$

ここで、Ψ'はフィラメントのツイスト角、r'はその位置の半径、l_{p}はツイストピッチ、(x', y') は位置を表す。ただし、z軸は線軸である。通常テープ線がツイスト丸線を圧延して作成されることを考慮し、テープ線のフィラメント領域を楕円筒型で近似する。このときテープ線における単位フィラメント方向ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}$ は以下の式で与えられる[33]。

$$
\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x}} \\ v_{\mathrm{y}} \\ v_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \sin\psi' \ \sin\theta' \\ -\alpha \sin\psi' \ \cos\theta' \\ \cos \psi' \end{pmatrix} \tag{4. 15}
$$

$$
v = \sqrt{(\sin\psi' \ \sin\theta)^2 + (-\alpha \sin\psi' \ \cos\theta)^2 + (\cos\psi')^2}
$$

ただし、x、y 両軸は楕円フィラメント領域の 2 軸に一致し、α はフィラメント領域の x 軸に対する y 軸の比を表しており、Fig. 4.1 に示されるように y 軸に関してフィラメント領域が圧縮、または伸張された表式をしている。

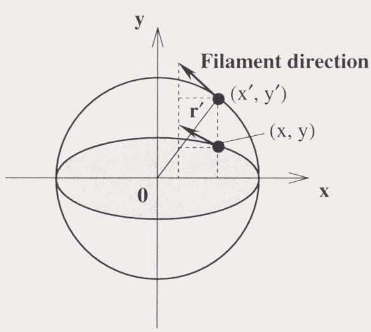


Fig. 4.1　Schematic of filament direction on *x*-*y* plane

(4. 12) ～ (4. 13) 式を x、y、および z 成分に分解すると、非等方的なオームの法則が以下の式のように与えられる。

$$
\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{j}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \\ (\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{j}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} \\ (\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{j}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{4.16}
$$

ここで、$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$は、それぞれ x、y、および z 軸方向の単位ベクトルである。σ はフィラメント領域における等価導電率を表すテンソルであり、以下の式で与えられる。

$$
\sigma = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x}}^2(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp})+\sigma_{\perp} & v_{\mathrm{x}}v_{\mathrm{y}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) & v_{\mathrm{x}}v_{\mathrm{z}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) \\ v_{\mathrm{x}}v_{\mathrm{y}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) & v_{\mathrm{y}}^2(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp})+\sigma_{\perp} & v_{\mathrm{y}}v_{\mathrm{z}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) \\ v_{\mathrm{x}}v_{\mathrm{z}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) & v_{\mathrm{y}}v_{\mathrm{z}}(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp}) & v_{\mathrm{z}}^2(\sigma_{\mathrm{f}}-\sigma_{\perp})+\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \tag{4.17}
$$

4. 3　有限要素解析への適用

4. 3. 1　支配方程式 [47], [48]

マクスウェル方程式は以下のように与えられている。

$$
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{4.17}
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.18}
$$

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.19}
$$

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{4.20}
$$

ただし、電束密度の時間変化、および真電荷は無視している。ここで、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、$\boldsymbol{E}$ は電界、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度 (T)、$\boldsymbol{H}$ は磁界 (A/m) を表す。(4. 20) 式に示されるように電流密度の発散は常に零であるので、ベクトル公式により以下に示す電流ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{T}$ を定義することができる [47], [48]。

$$
\nabla \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{j} \tag{4.21}
$$

(4. 17)、および (4. 21) 式より、スカラーポテンシャルΩの勾配とともに$\boldsymbol{H}$を以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{T} - \nabla \Omega \tag{4. 22}$$

Ωは磁気スカラーポテンシャルと呼ばれる。ここで、強制磁界（外部磁界）$\boldsymbol{H}_0$は強制電流$\boldsymbol{j}_0$を用いて以下の式で表される。

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{\boldsymbol{j}_0 \times \boldsymbol{r}}{r^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{4. 23}$$

ただし本解析では、外部磁界として$\boldsymbol{H}_0$を変数に用いながら一様磁界を与えている。外部磁界は、このように強制磁界$\boldsymbol{H}_0$で与えても良いし、Ωの勾配で与えても良い。

一般的に、このような電流ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{T}$と磁気スカラーポテンシャルΩを変数とする支配方程式を用いた方法を$\boldsymbol{T}-\Omega$法と呼ぶ。この方法では、4. 3. 4 項で後述するように、導体に与えられる通電電流を$\boldsymbol{T}$の境界条件として簡単に与えることができ、通電電流を有する導体の解析を行う場合に有利である。これら$\boldsymbol{T}$、およびΩを用いるとマクスウェル方程式（ファラデーの法則、および磁束密度に関するガウスの法則）は以下のように記述できる [47], [48]。

$$\nabla \times \left(\sigma^{-1} \nabla \times \boldsymbol{T}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \boldsymbol{H}_0 + \mu \boldsymbol{T} - \mu \nabla \Omega\right) \tag{4. 24}$$

$$\nabla \cdot \left(\mu \nabla \Omega\right) = \nabla \cdot \left(\mu \boldsymbol{H}_0 + \mu \boldsymbol{T}\right) \tag{4. 25}$$

本解析では、これらをガラーキン法によって離散化し [49]、全体節点方程式を導出し

て $\boldsymbol{T}$ の各成分、および Ω に関して解いている。また導体の透磁率 μ としては、簡単のため真空の透磁率 μ_0 を用いている。以下にガラーキン法による離散化について説明しておく。

4. 3. 2　ガラーキン法 (Galerkin method) による離散化

ガラーキン法は重みつき残差法の一種で、残差の係数となる重み関数として、後述する補間関数（形状関数）N_i を用いたものである。ここで i は節点番号を表す。補間関数 N_i は節点 i を共有する要素以外の領域では零となるため、重みつき積分は節点を共有する要素についてのみ行えばよい。ガラーキン法の一般式は以下のようにかける。

$$\int_{V_i} R \cdot N_i \, \mathrm{d}V = 0 \tag{4. 26}$$

ここで、R は残差、V_i は節点 i を共有する要素の総体積である。この定式化によって、全節点数分の一次方程式（全体節点方程式）を得ることができる。

実際に (4. 24)、(4. 25) 式に関して重みつき積分を実行する場合を考える。(4. 24) 式はベクトル量なので、重み関数もベクトル量となる。ここで、この重み関数を $\boldsymbol{w}_t$ (w_x, w_y, w_z) で表すことにする。ガラーキン法の場合、重み関数の各成分 w_x、w_y、w_z が全て補間関数 N_i で与えられるが、式変形の便宜上、一般化して $\boldsymbol{w}_t$ (w_x, w_y, w_z) を残して計算を進める。最終的に、w_x、w_y、w_z の各成分ごとに式を分割して、その段階で N_i を代入して積分を実行すればよい。(4. 25) 式についても、一般化するために重み関数を w_g と表して計算を進める。また実際の計算では、ある一つの要素について重み積分を実行して要素係数マトリクスを作成し、全要素について加え合わせて全体節点方程式が導出される。

ある要素において、(4. 24)、(4. 25) 式の重み積分を実行すると、以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{\mathrm{F},e} &= \int_{V_e} \boldsymbol{w}_{\mathrm{f}} \cdot \left\{ \nabla\times\left([\,\sigma\,]^{-1}\,\nabla\times\boldsymbol{T}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{T} - \nabla\Omega\right)\right\} \mathrm{d}V \\
&= \int_{V_e} \left\{ \nabla\times\boldsymbol{w}_{\mathrm{f}} \cdot \left([\,\sigma\,]^{-1}\,\nabla\times\boldsymbol{T}\right) + \mu\boldsymbol{w}_{\mathrm{f}}\,\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T} \right\} \mathrm{d}V \\
&+ \int_{V_e} \boldsymbol{w}_{\mathrm{f}} \cdot \mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}_0\,\mathrm{d}V + \int_{V_e} \boldsymbol{w}_{\mathrm{f}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\,\nabla\Omega\right)\mathrm{d}V \\
&- \int_{S_e} \boldsymbol{w}_{\mathrm{f}} \cdot \left([\,\sigma\,]^{-1}\,\nabla\times\boldsymbol{T}\right)\times\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{0} \qquad (4.\,27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{G},e} &= \int_{V_e} \nabla\cdot\left(w_{\mathrm{g}}\,\mu\,\boldsymbol{T}\right)\mathrm{d}V + \int_{V_e} \nabla\cdot\left(w_{\mathrm{g}}\,\mu\,\boldsymbol{H}_0\right)\mathrm{d}V \\
&- \int_{V_e} \nabla\cdot\left(w_{\mathrm{g}}\,\mu\,\nabla\Omega\right)\mathrm{d}V \\
&+ \int_{S_e} w_{\mathrm{g}} \left\{\mu\left(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{T} - \nabla\Omega\right)\right\}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (4.\,28)
\end{aligned}$$

ここで、eは要素番号、V_eは要素の体積、S_eは要素の境界を表す。ただし、上式の境界積分項は隣り合う要素どうしによって打ち消し合うため、計算領域の境界に接する要素以外では計算する必要はない。さらに、計算領域の境界上においても、境界条件を与えれば通常無視することができる。また、(4. 27) 式はベクトルの内積が零であることを意味するものではなく、以下に示すように、重みの各成分に関する項が全て零で与えられることを意味している。定式化の上でベクトル公式を用いて式変形する必要があるため、便宜的に上記のような表記が用いられている [50]。

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{f}}\cdot\boldsymbol{f} = 0 \rightarrow \begin{cases} G_{\mathrm{F,x},e}\left(w_{\mathrm{x}}\right) = 0 \\ G_{\mathrm{F,y},e}\left(w_{\mathrm{y}}\right) = 0 \\ G_{\mathrm{F,z},e}\left(w_{\mathrm{z}}\right) = 0 \end{cases} \qquad (4.\,29)$$

ここに、$\boldsymbol{f}$ は重みつき積分を実行するもとのベクトル関数、$G_{\mathrm{F,x},e}$、$G_{\mathrm{F,y},e}$、$G_{\mathrm{F,z},e}$は重み関

数の各成分 w_x、w_y、w_z に関連して分解された項を表す。また、記号 "→" は、左の等式が右の等式によって定義されていることを表す。

ここで、導電率 σ を以下のように定義する。

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{4.30}$$

これより抵抗率 ρ が以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}=\rho=&\frac{1}{\begin{array}{c}-\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{31}+\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}+\sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32}\\ -\sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32}-\sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{33}+\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\end{array}}\\ &\times\begin{pmatrix}-\sigma_{23}\sigma_{32}+\sigma_{22}\sigma_{33} & \sigma_{13}\sigma_{32}-\sigma_{12}\sigma_{33} & -\sigma_{13}\sigma_{22}+\sigma_{12}\sigma_{23}\\ \sigma_{23}\sigma_{31}-\sigma_{21}\sigma_{33} & -\sigma_{13}\sigma_{31}+\sigma_{11}\sigma_{33} & \sigma_{13}\sigma_{21}-\sigma_{11}\sigma_{23}\\ -\sigma_{22}\sigma_{31}+\sigma_{21}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{31}-\sigma_{11}\sigma_{32} & -\sigma_{12}\sigma_{21}+\sigma_{11}\sigma_{22}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.31}$$

ρ の各成分を用いて、実際に $G_{\mathrm{F},e}$ を計算すると以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\mathrm{F},e}=\int\Bigg[&\left(\frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial y}-\frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial z}\right)\left\{\rho_{11}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y}-\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z}\right)+\rho_{12}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z}-\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)\right.\\ &\left.\qquad+\rho_{13}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x}-\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y}\right)\right\}\\ &+\left(\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial z}-\frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)\left\{\rho_{21}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y}-\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z}\right)+\rho_{22}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z}-\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)\right.\\ &\left.\qquad+\rho_{23}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x}-\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y}\right)\right\}\\ &+\left(\frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial x}-\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial y}\right)\left\{\rho_{31}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y}-\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z}\right)+\rho_{32}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z}-\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)\right.\\ &\left.\qquad+\rho_{33}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x}-\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$+ w_{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial t} \mu T_{\mathrm{x}} + w_{\mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial t} \mu T_{\mathrm{y}} + w_{\mathrm{z}} \frac{\partial}{\partial t} \mu T_{\mathrm{z}} \Bigg] \mathrm{d}V$$

$$+ \int \left\{ w_{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu H_{0,\mathrm{x}} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + w_{\mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu H_{0,\mathrm{y}} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right.$$

$$\left. + w_{\mathrm{z}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu H_{0,\mathrm{z}} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \right\} = \mathbf{0} \qquad (4.32)$$

従って、w_x、w_y、w_zに関して分解し、以下のような条件式が得られる。

$$G_{\mathrm{F,x},e} = \int_{V_e} \left[\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial z} \left\{ \rho_{21} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y} - \frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z} \right) + \rho_{22} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z} - \frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x} \right) \right. \right.$$

$$\left. + \rho_{23} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x} - \frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y} \right) \right\}$$

$$- \frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial y} \left\{ \rho_{31} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y} - \frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z} \right) + \rho_{32} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z} - \frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x} \right) \right.$$

$$\left. + \rho_{33} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x} - \frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y} \right) \right\}$$

$$\left. + w_{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial t} \mu T_{\mathrm{x}} + w_{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu H_{0,\mathrm{x}} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right] \mathrm{d}V = 0 \qquad (4.33)$$

$$G_{\mathrm{F,y},e} = \int_{V_e} \left[- \frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial z} \left\{ \rho_{11} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y} - \frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z} \right) + \rho_{12} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z} - \frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x} \right) \right. \right.$$

$$\left. + \rho_{13} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x} - \frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial x} \left\{ \rho_{31} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y} - \frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z} \right) + \rho_{32} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z} - \frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x} \right) \right.$$

$$\left. + \rho_{33} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial x} - \frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial y} \right) \right\}$$

$$\left. + w_{\mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial t} \mu T_{\mathrm{y}} + w_{\mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu H_{0,\mathrm{y}} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}V = 0 \qquad (4.34)$$

$$G_{\mathrm{F,z},e} = \int_{V_e} \left[\frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial y} \left\{ \rho_{11} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial y} - \frac{\partial T_{\mathrm{y}}}{\partial z} \right) + \rho_{12} \left(\frac{\partial T_{\mathrm{x}}}{\partial z} - \frac{\partial T_{\mathrm{z}}}{\partial x} \right) \right. \right.$$

$$\left. + \rho_{13} \left(\frac{\partial T_{y}}{\partial x} - \frac{\partial T_{x}}{\partial y} \right) \right\}$$

$$
-\frac{\partial w_z}{\partial x}\left\{\rho_{21}\left(\frac{\partial T_z}{\partial y}-\frac{\partial T_y}{\partial z}\right)+\rho_{22}\left(\frac{\partial T_x}{\partial z}-\frac{\partial T_z}{\partial x}\right)\right.
$$

$$
\left.+\rho_{23}\left(\frac{\partial T_y}{\partial x}-\frac{\partial T_x}{\partial y}\right)\right\}
$$

$$
\left.+w_z\frac{\partial}{\partial t}\mu T_z+w_z\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu H_{0,z}-\mu\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V=0 \qquad (4.35)
$$

ここまでは、要素の形状、補間関数によらない一般式である。

本解析では、Fig. 4.2 に示すように、各要素に対して一次四辺形要素（長方形要素）を適用する。この場合、各節点の補間関数 N_{ie} $(ie = 1, \cdots, 4)$ は以下のように与えられる。

$$
\left.\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y)\\
N_2 &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)\\
N_3 &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y)\\
N_4 &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.36)
$$

ただしここでは、(x, y) はFig. 4.2 に示されるように要素の中心を原点とした座標である。

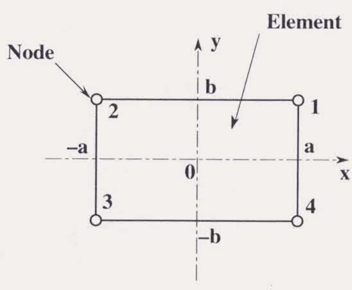


Fig. 4.2　Shape of element

これらを用いると、要素内の電流ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{T}$、および磁気スカラーポテンシャル Ω はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} T_{\mathrm{x}} &= \sum_{ie=1}^{4} N_{ie}\, T_{\mathrm{x},ie} \\ T_{\mathrm{y}} &= \sum_{ie=1}^{4} N_{ie}\, T_{\mathrm{y},ie} \\ T_{\mathrm{z}} &= \sum_{ie=1}^{4} N_{ie}\, T_{\mathrm{z},ie} \end{aligned}\right\} \tag{4. 37}$$

$$\Omega = \sum_{ie=1}^{4} N_{ie}\, \Omega_{ie} \tag{4. 38}$$

ここで、ie は各要素で定義される節点番号、$T_{\mathrm{x},ie}$、$T_{\mathrm{y},ie}$、$T_{\mathrm{z},ie}$、Ω_{ie} は節点 ie におけるポテンシャル値を表す。これらを (4. 33)〜(4.35) 式に代入し、さらに重み関数 w_{x}、w_{y}、w_{z} に形状関数 N_{ie} を代入して、節点 ie ごとに以下の条件式が得られる。

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{F,x},ie} = \int_{v_e} \Biggl[\frac{\partial N_{ie}}{\partial z} \Biggl\{ & \rho_{21} \left(\sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} T_{\mathrm{z},je} - \sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial z} T_{\mathrm{y},je} \right) \\ & + \rho_{22} \left(\sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial z} T_{\mathrm{x},je} - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial N_{j}}{\partial x} T_{\mathrm{z},je} \right) \\ & + \rho_{23} \left(\sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} T_{\mathrm{y},je} - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} T_{\mathrm{x},je} \right) \Biggr\} \\ - \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \Biggl\{ & \rho_{31} \left(\sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} T_{\mathrm{z},je} - \sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial z} T_{\mathrm{y},je} \right) \\ & + \rho_{32} \left(\sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial z} T_{\mathrm{x},je} - \sum_{je=1}^{4} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} T_{\mathrm{z},je} \right) \end{aligned}$$

$$+\rho_{33}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{y,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{x,je}\right)$$

$$+N_{ie}\frac{\partial}{\partial t}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{x,je}$$

$$+N_{ie}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,x,je}-\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{j}}{\partial x}\Omega_{je}\right)\Bigg]\mathrm{d}V=0\quad(ie=1\sim4)$$

(4. 39)

$$G_{F,y,ie}=\int_{V_e}\Bigg[-\frac{\partial N_{ie}}{\partial z}\Bigg\{\rho_{11}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{z,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{y,je}\right)$$

$$+\rho_{12}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{x,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{z,je}\right)$$

$$+\rho_{13}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{y,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{x,je}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{\partial N_{ie}}{\partial x}\Bigg\{\rho_{31}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{z,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{j}}{\partial z}T_{y,je}\right)$$

$$+\rho_{32}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{x,j}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{z,je}\right)$$

$$+\rho_{33}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{y,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{x,je}\right)\Bigg\}$$

$$+N_{ie}\frac{\partial}{\partial t}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{y,je}$$

$$+N_{ie}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,y,je}-\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}\Omega_{je}\right)\Bigg]\mathrm{d}V=0\quad(ie=1\sim4)$$

(4. 40)

$$G_{F,z,ie}=\int_{V_e}\Bigg[\frac{\partial N_{ie}}{\partial y}\Bigg\{\rho_{11}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{z,je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{y,je}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\rho_{12}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{\mathrm{x},je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{\mathrm{z},je}\right)\\
&+\rho_{13}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{\mathrm{y},je}-\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{\mathrm{x},je}\right)\Bigg\}\\
-\frac{\partial N_{ie}}{\partial x}\Bigg\{&\rho_{21}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{\mathrm{z},je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{\mathrm{y},je}\right)\\
&+\rho_{22}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}T_{\mathrm{x},je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{\mathrm{z},je}\right)\\
&+\rho_{23}\left(\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}T_{\mathrm{y},je}-\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}T_{\mathrm{x},je}\right)\Bigg\}\\
+N_{ie}&\frac{\partial}{\partial t}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{\mathrm{z},je}\\
+N_{ie}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,\mathrm{z},je}-\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}\Omega_{je}\right)\Bigg]\mathrm{d}V=0\quad(ie=1\sim 4)
\end{aligned}
\tag{4. 41}
$$

ここで、$G_{\mathrm{F,x},ie}$、$G_{\mathrm{F,y},ie}$、$G_{\mathrm{F,z},ie}$は、ファラデーの法則 (4. 24) 式の要素 e の節点 ie に関する重みつき積分（すなわち $G_{\mathrm{F,x},e}$、$G_{\mathrm{F,y},e}$、$G_{\mathrm{F,z},e}$の節点 ie に関する成分）を表す。

一方、$G_{\mathrm{G},i}$も同様にして(4. 28) 式を展開すると以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{G},e}=&\int_{V_e}\left\{\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial x}(\mu T_{\mathrm{x}})+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial y}(\mu T_{\mathrm{y}})+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial z}(\mu T_{\mathrm{z}})\right\}\mathrm{d}V\\
&+\int_{V_e}\left\{\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial x}(\mu H_{0,\mathrm{x}})+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial y}(\mu H_{0,\mathrm{y}})+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial z}(\mu H_{0,\mathrm{z}})\right.\\
&\left.-\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial x}\mu\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial y}\mu\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{\partial w_{\mathrm{g}}}{\partial z}\mu\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right\}\mathrm{d}V=0
\end{aligned}
\tag{4. 42}
$$

この式は、要素の形状、補間関数によらない一般式である。(4. 37)~(4. 38) 式を代入し、節点 ie ごとに以下の条件式を得る。

$$G_{\mathrm{G},ie}=\int_{V_e}\left\{\left(\frac{\partial N_{ie}}{\partial x}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{\mathrm{x},je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial y}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{\mathrm{y},je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial z}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}T_{\mathrm{z},je}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{\partial N_{ie}}{\partial x}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,\mathrm{x},je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial y}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,\mathrm{y},je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial z}\mu\sum_{je=1}^{4}N_{je}H_{0,\mathrm{z},je}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial N_{ie}}{\partial x}\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial x}\Omega_{je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial y}\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial y}\Omega_{je}+\frac{\partial N_{ie}}{\partial z}\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}\Omega_{je}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial N_{ie}}{\partial z}\mu\sum_{je=1}^{4}\frac{\partial N_{je}}{\partial z}\Omega_{je}\right)\right\}\mathrm{d}V=0\qquad(ie=1\sim4)$$

(4. 43)

ここに $G_{\mathrm{G},ie}$ は、ファラデーの法則 (4. 24) 式の要素 e の節点 ie に関する重みつき積分（すなわち $G_{\mathrm{G},e}$ の節点 ie に関する成分）を表す。

さらに、時間微分項には以下のような後退差分を適用する。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=g\ \rightarrow\ \frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=g^{n+1}\tag{4. 44}$$

ここで、f、g は任意関数で、Δt は計算の時間幅、n は各時間ステップを表す。

次に、(4. 44) 式を考慮しながら、(4. 39)～(4. 41) 式、および (4. 43) 式の補間関数の積分を実行して要素係数マトリクスを作成する。補間関数の積分の一例を以下に挙げておく [51]。

$$\iint_{S_e}\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{4ab}\right)^2\int_{-a}^{a}(a+x)^2\,\mathrm{d}x\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\frac{a}{b}\tag{4. 45}$$

また、本解析では z 軸方向に一様な磁界環境を想定している。従って、任意関数を f と

して$\partial f/\partial z = 0$となる。このように積分を実行していくと、以下のような要素係数マトリクスを得ることができる。

$$
[S_e]\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},ie} \\ T_{\mathrm{y},ie} \\ T_{\mathrm{z},ie} \\ \Omega_{ie} \end{bmatrix}^{n+1} + [M_e]\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},ie} \\ T_{\mathrm{y},ie} \\ T_{\mathrm{z},ie} \\ \Omega_{ie} \end{bmatrix}^{n+1} + [G_e]\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},ie} \\ T_{\mathrm{y},ie} \\ T_{\mathrm{z},ie} \\ \Omega_{ie} \end{bmatrix}^{n+1}
$$

$$
= [M_e]\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},ie} \\ T_{\mathrm{y},ie} \\ T_{\mathrm{z},ie} \\ \Omega_{ie} \end{bmatrix}^{n} - [M_e]\begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},ie} \\ H_{0,\mathrm{y},ie} \\ H_{0,\mathrm{z},ie} \\ 0 \end{bmatrix}^{n+1} + [M_e]\begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},ie} \\ H_{0,\mathrm{y},ie} \\ H_{0,\mathrm{z},ie} \\ 0 \end{bmatrix}^{n} - [G_e]\begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},ie} \\ H_{0,\mathrm{y},ie} \\ H_{0,\mathrm{z},ie} \\ 0 \end{bmatrix}^{n+1} \tag{4.46}
$$

ここで、$[G_e]$は (4. 43) 式の積分を実行して得られる係数行列、$[M_e]$は時間微分項の係数を積分して得られる係数行列、$[S_e]$はそれ以外の積分を実行して得られる係数行列を表し、$[S_e]$、$[M_e]$、$[G_e]$は四辺形要素の場合、16×16 の係数行列となる。(4. 46) 式を全要素について加え合わせれば以下のように全体節点方程式が得られる。

$$
([S]+[M]+[G])\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},i} \\ T_{\mathrm{y},i} \\ T_{\mathrm{z},i} \\ \Omega_{i} \end{bmatrix}^{n+1} =
$$

$$
[M]\left(\begin{bmatrix} T_{\mathrm{x},i} \\ T_{\mathrm{y},i} \\ T_{\mathrm{z},i} \\ \Omega_{i} \end{bmatrix}^{n} - \begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},i} \\ H_{0,\mathrm{y},i} \\ H_{0,\mathrm{z},i} \\ 0 \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},i} \\ H_{0,\mathrm{y},i} \\ H_{0,\mathrm{z},i} \\ 0 \end{bmatrix}^{n}\right) - [G]\begin{bmatrix} H_{0,\mathrm{x},i} \\ H_{0,\mathrm{y},i} \\ H_{0,\mathrm{z},i} \\ 0 \end{bmatrix}^{n+1} \tag{4.47}
$$

ここに、$[S]$、$[M]$、$[G]$は $(4i \times 4i)$ の係数行列となり、それぞれ$[S_e]$、$[M_e]$、$[G_e]$を全

要素について加え合わせた行列を表す。また、$[S]$、$[M]$、$[G]$はほとんどが零要素であるので、プログラミングの際には変数の保存容量節約のために保存範囲を小さく抑える工夫が必要となる。

さらに境界条件を代入し、得られた全体節点第二方程式を解くことによって、T_x^{n+1}、T_y^{n+1}、T_z^{n+1}、Ω^{n+1}を得ることができる。ただし、$[S]$は後述するように、$\boldsymbol{T}$に依存した係数を含んでいるため、反復的に$[S]$を調節しながらT_x^{n+1}、T_y^{n+1}、T_z^{n+1}、Ω^{n+1}を計算する必要がある。

4. 3. 3　境界条件の与え方 [38], [52]

計算領域を十分広く取ることで、有限の境界を設けたことによる誤差の影響を小さく抑えることができる。このときの$\boldsymbol{T}$、Ωに関する境界条件は、通電電流の有無、外部磁界の有無、さらに磁界方向によって与え方が変わる。本稿では、外部磁界がΩの勾配ではなく、$\boldsymbol{H}_0$で与えられる場合の境界条件について説明する。Fig. 4.3 に示すような計算領域を設定して、各条件に分けて説明する。

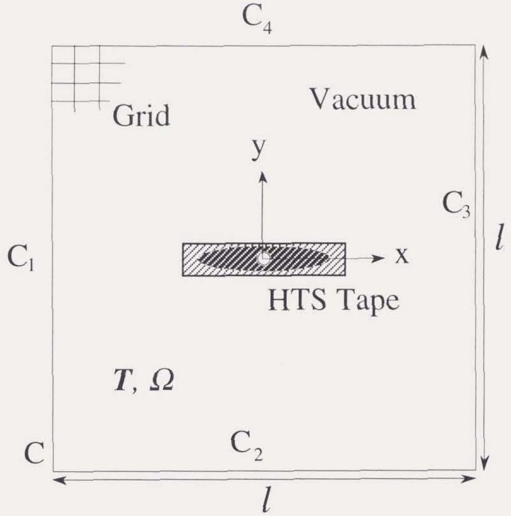


Fig. 4.3 Region for FEM calculation

A. 外部磁界がなく、通電電流がある場合（自己磁界条件）

ストークスの定理、および (4. 21) 式から、通電電流は以下のような関係式で表される。

$$I_0 = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \int_S \nabla\times\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = T_0\oint_C \mathrm{d}s \qquad (4.48)$$

このように、通電電流は $\boldsymbol{T}$ の境界条件として簡単に与えることができる。計算領域が十分広くとられているときは、全ての境界上では磁界が平行であると近似できる。磁界 $\boldsymbol{H}$ は (4. 22) 式で定義されているから、C_1 および C_3 では T_x、T_z は零と与えられる。T_y は C_1 および C_3 の境界上で一定値として与える。また、C_2 および C_4 では T_y、T_z が零

と与えられ、T_xはそれぞれの境界上で一定値として与える。(4. 48) 式を考慮しながら、Table 4.2 のように境界条件を設定する。一方、Ωについてはこの場合境界条件を設定しない。

TABLE 4.2 Boundary condition for self-field condition

C_1	C_2	C_3	C_4
$T_x = 0$	$T_x = I_0/(4l)$	$T_x = 0$	$T_x = -I_0/(4l)$
$T_y = -I_0/(4l)$	$T_y = 0$	$T_y = I_0/(4l)$	$T_y = 0$
$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$

B. 通電電流がなく、外部磁界がx軸方向に印加される場合

この場合、C_1およびC_3に対し磁界が垂直になる。磁界$\boldsymbol{H}$は (4. 22) 式で定義され、通電電流がないので、全ての境界上で、T_x、T_y、T_zは零となり、C_1およびC_3でΩが一定値（零でよい）として与えられる（Table 4.3）。

TABLE 4.3 Boundary condition when the conductor has no transport current and external magnetic field is applied to x-direction.

C_1	C_2	C_3	C_4
$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$
$\Omega = 0$		$\Omega = 0$	

C. 通電電流がなく、外部磁界がy軸方向に印加される場合

この場合、C_2およびC_4に対し磁界が垂直になり、全ての境界上で、T_x、T_y、T_zは零、C_2およびC_4でΩが一定値（零でよい）として与えられる（Table 4.4）。

TABLE 4.4 Boundary condition when the conductor has no transport current and external magnetic field is applied to *y*-direction.

C_1	C_2	C_3	C_4
$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$	$T_z = T_y = T_z = 0$
	$\Omega = 0$		$\Omega = 0$

D. 通電電流があり、かつ外部磁界が x 方向に印加される場合

計算領域を十分広くとる場合には、境界上では外部磁界に対し自己磁界が十分小さいと仮定できる。この場合、C_1 および C_3 に対し磁界が垂直であると見なせる。磁界 $\boldsymbol{H}$ は (4. 22) 式で定義されるので、C_1 および C_3 上で T_y、T_z は零となり、Ω が一定値（零でよい）として与えられる。また、C_2 と C_4 上で磁界 $\boldsymbol{H}$ が平行となるので、C_2 と C_4 上でも T_y、T_z は零となる。通電電流を与えるために、C_2 および C_4 上での T_x を (4. 48) 式を考慮しながら、Table 4.5 のように与える。

TABLE 4.5 Boundary condition when the conductor carries a transport current and external magnetic field is applied to *x*-direction.

C_1	C_2	C_3	C_4
$T_x = 0$	$T_x = I_0/(2l)$	$T_x = 0$	$T_x = -I_0/(2l)$
$T_y = 0$	$T_y = 0$	$T_y = 0$	$T_y = 0$
$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$
$\Omega = 0$		$\Omega = 0$	

E. 通電電流があり、かつ外部磁界が y 方向に印加される場合

先と同様な議論で、Table 4.6 のように境界条件が与えられる。

TABLE 4.6 Boundary condition when the conductor carries a transport current and external magnetic field is applied to *y*-direction.

C_1	C_2	C_3	C_4
$T_x = 0$	$T_x = 0$	$T_x = 0$	$T_x = 0$
$T_y = -I_0/(2l)$	$T_y = 0$	$T_y = I_0/(2l)$	$T_y = 0$
$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$	$T_z = 0$
	$\Omega = 0$		$\Omega = 0$

F. 磁界に z 方向成分が含まれる場合

磁界に z 方向成分が含まれる場合には、z 成分を除く磁界成分に対して、上記条件 A～E の境界条件を考慮すればよい。

4. 3. 4 真空の導電率について [38], [52]

導体境界と、計算領域の境界間に存在する真空領域の導電率を零（抵抗率無限大）で与えることはできないので、本解析では、導体の導電率より十分小さい値として 1 S/m を与えている。

4. 3. 5 反復法による収束計算

等価導電率 σ は、電流密度 $\boldsymbol{j}$、すなわち $\boldsymbol{T}$ に依存しており、本解析は非線形解析となる。つまり、時間ステップ n の σ^n、$\boldsymbol{T}^n$、Ω^n を用いて、(4. 47)、および (4. 8) 式（σ_{sc}^{n+1} を求める）により計算されたステップ$(n+1)$の σ^{n+1}、$\boldsymbol{T}^{n+1}$、Ω^{n+1} が、そのままでは(4. 24)、(4. 25) 式を満足しない。従って、σ を調節しながら、反復的に (4. 8)、(4. 24)、(4. 25) 式を収束条件以内で満足するまで計算を行う必要がある。

反復計算は、基本的に$(i+1)$回目の反復時に使用する $\sigma_{sc,i+1}$ を、$\sigma_{sc,i}$ を用いて補間しな

がら行われる。本解析では、以下に示す過小緩和法によって $\sigma_{sc,i+1}$ を決定している [53]。

$$\sigma_{sc,i+1} = (1-k)\,\sigma_{sc,i} + k\,\sigma_{sc,i}' \tag{4.49}$$

ここで、$\sigma_{sc,i}'$は i 回目に求まった電流ベクトルポテンシャルを用いて計算された等価導電率、k は減衰係数である。この方法はプログラムが簡単であるという長所を有するが、k の値によっては解が発散するおそれがある。この値としては慣例的に 0.1 などが用いられ、本解析でも 0.1 程度で解が発散することはなかった。

収束判定は以下の式で行い、ε には 10^{-2}～10^{-3} 程度を設定している。

$$\left|\frac{\sigma_{sc,\,i+1} - \sigma_{sc,\,i}}{\sigma_{sc,\,i}}\right| \le \varepsilon \tag{4.50}$$

4. 4　交流損失の計算

先の解析モデルによって計算された電流密度 $\boldsymbol{j}$、および電界 $\boldsymbol{E}$ をフィラメント方向成分とフィラメントに垂直な成分とに分解する。これによって、損失成分を、超伝導体部で発生する損失 P_s、結合損失 P_c、および渦電流損失 P_e に分解することができる。ただし、フィラメント同士の磁気的結合が十分抑制されている場合（Table 4. 1 参照）には、P_s に非飽和フィラメントにおける磁化損失を考慮しなければならない。非飽和フィラメントの磁化を M_f と定義すると、非飽和フィラメント部における損失の瞬時値 p_f は以下の式で表せる。

$$p_f = j_{sc}\,E_{sc} - M_f\,\dot{B}_y \tag{4.51}$$

従って、全損失は以下の式のように表され、

$$P = f\int_0^T \left[\int_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t/V_0 = P_\mathrm{s} + P_\mathrm{c} + P_\mathrm{e} \quad , \tag{4.52}$$

$$P_\mathrm{c} = f\int_0^T \left[\int_V j_\perp E_\perp \mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t/V_0 \quad , \tag{4.53}$$

$$P_\mathrm{e} = f\int_0^T \left[\int_V \left\{(1-\lambda)\, j_\mathrm{mf} E_\mathrm{f} + \boldsymbol{j}_\mathrm{ms}\cdot\ \boldsymbol{E}_\mathrm{ms}\right\}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t/V_0 \quad , \tag{4.54}$$

under the condition of (4. 2)

$$P_\mathrm{s} = f\int_0^T \left[\int_V \lambda\left(j_\mathrm{sc} E_\mathrm{sc} - M_\mathrm{f}\dot{B}_{\mathrm{f}\perp}\right)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t/V_0 \quad , \tag{4.55}$$

$$\left.\begin{array}{l} |j_\mathrm{sc}| < j_\mathrm{c} \\ \tau_\mathrm{m} << \dfrac{1}{4} f^{-1} \\ B_0 >> B_\mathrm{pf} \end{array}\right\} \quad , \tag{4.2}$$

otherwise,

$$P_\mathrm{s} = f\int_0^T \left[\int_V \lambda\, j_\mathrm{sc} E_\mathrm{sc}\ \mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t/V_0 \tag{4.56}$$

ここで、f は周波数、V_0 は導体の体積を表す。j_sc、j_mf はフィラメント領域における超伝導体でのフィラメント方向の電流密度と母材でのフィラメント方向の電流密度を表す。また、$j_\perp$はフィラメント領域におけるフィラメントに垂直な方向の電流密度を表す。E_sc、$E_\perp$は超伝導フィラメントにおけるフィラメント方向の電界と、フィラメント領域におけるフィラメントに垂直な方向の電界を表す。E_sc はフィラメント領域におけるフィラメント方向の電界と等しい。また、$\boldsymbol{j}_\mathrm{ms}$、$\boldsymbol{E}_\mathrm{ms}$は外周部母材の電流密度と電界を表す。$M_\mathrm{f}$は非飽和フィラメントの磁化であり、フィラメントを長方形近似し、ビーンモデルを適用すると以下のように近似できる [24]-[26]。

$$M_{\mathrm{f}} = 2\int_{-d_{\mathrm{s}}/2}^{x_0} j_{\mathrm{c}}\, x\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} j_{\mathrm{c}}\, d_{\mathrm{s}} \left[1 - \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right)^2 \right] \qquad (4.\ 57)$$

$$x_0 = -\left(\frac{d_{\mathrm{s}}}{2} \right) \left(\frac{j_{\mathrm{sc}}}{j_{\mathrm{c}}} \right) \qquad (4.\ 6)$$

ここで、磁界は y 方向に印加される場合を想定している。また、d_sは磁界に対し垂直な面の幅であり、磁界がフィラメント幅広面に平行か垂直かによって、それぞれ $d_s = d_f$、または $d_s = w_f$ で与えられる。x_0は電気的中心線の位置を表す。(4. 51) 式の妥当性は付録 4.A で検証する。

4. 5　数値解析による結合損失と解析解との比較

Fig. 4.4 に、多心丸線の結合損失の解析解 (1. 8) 式、および FEM（Finite Element Method、有限要素法）による計算値を比較したグラフを示す。磁界振幅は 0.5 T、母材導電率 3.0×10^8 S/m、ツイストピッチは 2 mm である。また、超伝導体の E–j 特性は $E = 10^{-4}\ (j/10^8)^{15}$ で与えた。線径は 1 mm とした。本章の FEM 解析では動的抵抗電圧が考慮されていないが、フィラメント同士の磁気的結合が十分抑制されて、内部の個々のフィラメントが担う電流がほとんど零である場合には、動的抵抗は無視できる。従って電流分布には無視した影響はほとんど現れない。ただし、フィラメントの磁化損失の計算は行われていない。Fig. 4.4 において解析解と FEM による数値解がよく一致している。

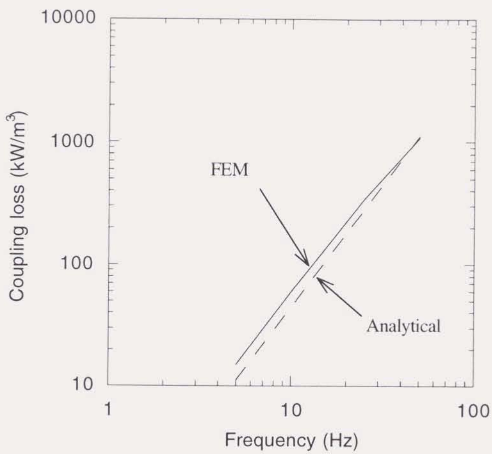


Fig. 4.4 Comparison between numerical and analytical results of coupling loss in cylindrical multifilamentary superconducting wire as a function of frequency. The amplitude of the magnetic field is 0.5 T. The conductivity of the matrix is 3×10^{8} S/m, and the twist pitch is 2 mm. $E = 10^{-4}\,(j/10^{8})^{15}$. The diameter of the wire is 1 mm.

4. 6 外部交流横磁界下における交流損失のツイストピッチ依存性

第 1 章で概説したとおり、外部横磁界下にあるツイスト多心線の交流損失低減のためには、主としてツイストピッチの縮小化、母材の高抵抗化の二通りが挙げられる。外部磁界がテープ面に対し平行である場合、および垂直である場合について、母材抵抗率が異なる二種類のテープ導体を想定して、交流外部磁界下での損失特性を評価する。ただし、本解析では動的抵抗電圧を考慮していない。従って、磁気的結合が十分緩和され、内部に外部磁界が十分侵入する環境下での非飽和フィラメントにおける磁化損失が見積もられていないことを付記しておく。

Fig. 4.5 に、マトリクス抵抗の異なる 2 種類の多心テープ線における交流損失のツイストピッチ依存性を示す。テープ諸元を Table 4.7 に示す。外部磁界振幅は 0.1 T で、

周波数は50 Hzである。

TABLE 4.7 Specifications of the two kinds of HTS tapes

	Type (i)	Type (ii)
Tape size	3 mm × 0.2 mm	3 mm × 0.2 mm
Matrix conductivity	3×10^{8} S/m	3×10^{7} S/m
Volume fraction of SC in filamentary region	50 %	50 %
E–j characteristics	$E = 10^{-4}\,(j/10^{8})^{15}$	$E = 10^{-4}\,(j/10^{8})^{15}$
Major and minor axes of filamentary region	2.4 mm, 0.16 mm	2.4 mm, 0.16 mm

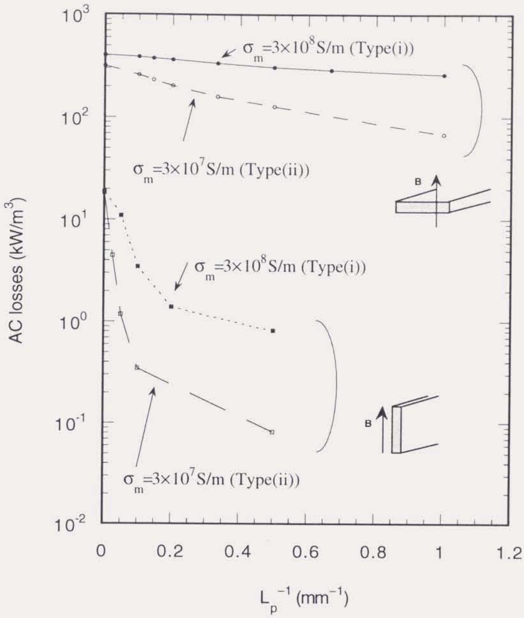


Fig. 4.5　AC losses in two kinds of tapes as a function of twist pitch. The conductivities of the matrix of the two wires are 3×10^8 and 3×10^7 S/m, respectively. The amplitude of the magnetic field is 0.1 T and its frequency is 50 Hz.

現状の製造技術においては、ツイストピッチL_pは10 mm程度が現実的で、それ以上の縮小は線材の臨界電流密度を著しく低下させてしまう。外部磁界がテープ面に対し平行に加えられる場合は、ツイストピッチが10 mm程度においてもツイストによる損失の低減効果が十分に見られる。これに対し、テープ面に対し垂直に磁界が加えられる場合には、10 mm程度ではツイストによる損失の低減効果がほとんど見られていない。

Fig. 4.6 はType (i) のHTSテープ線の各損失成分のツイストピッチ依存性を示して

いる。L_p = 10 mm では超伝導体部での損失 P_s が支配的で、フィラメント同士が磁気的結合状態にあることがわかる。

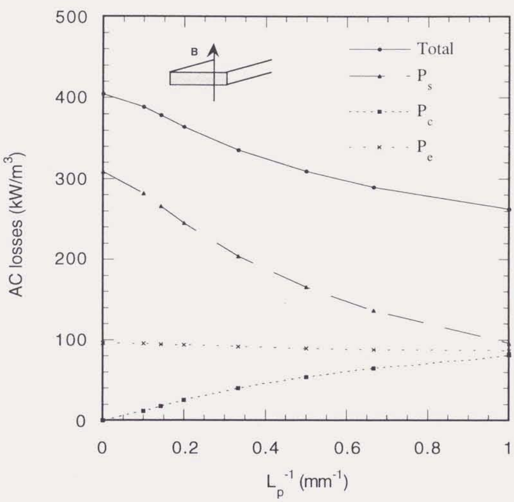


Fig. 4.6 Loss components in Type (I) HTS tape as a function of L_p^{-1} in magnetic field perpendicular to the tape face.

4.7　結論

酸化物系ツイスト多心テープ線材における電磁界解析のための理論モデルを提案した。本モデルでは E–j 特性はべき乗則によって表現され、さらにその磁界依存性が取り入れられる。効率的なツイスト構造のモデル化として、フィラメント領域においてテンソル表現された導電率を採用する。また、フィラメント同士の磁気的結合が十分抑制される場合には、外部横磁界によって非飽和フィラメントに誘起される動的抵抗について考慮される。

このモデルを、実際に有限要素法に適用しその詳細について述べた。本コードは、実用的な使用条件下での損失特性を効率的に計算することが可能である。特に外部磁界が長手方向に一様である場合には、２次元的な解析が可能である。

第 5 章　酸化物ツイストテープ線の結合時定数と結合損失の解析的評価 [43], [44]

多心線のツイストは、外部横磁界によるフィラメント同士の磁気的結合の抑制に、効果的であることはすでに説明したとおりであるが、前章で示したようにテープ線の場合、磁界方向に対してその磁気遮へい電流の減衰特性が大きく異なる。このような減衰特性を表す最も重要なパラメータは結合時定数である。先の磁界方向による特性の違いは結合時定数がテープ線のアスペクト比にも依存しているとも言い換えられる。

これまでに、多心丸線、および矩形断面のフィラメント領域を持つ多心線に対する結合時定数および結合損失は導出されてきたが [2]-[5], [54], [55]、通常多心テープ線は丸線を圧延加工して作成されるので、フィラメント領域の断面形状は楕円で近似するのが妥当に思われる。Murphy らが楕円フィラメント領域を持つ多心線の結合損失を導出しているが、結合時定数は零を仮定している [56]。そこで、本章では多心線内部のフィラメント領域を楕円で近似した場合の結合時定数を導出し、併せて結合損失を与える解析式を提案する。この解析式を、前章で示した有限要素法による数値解析結果と比較し、妥当性を検証する。

5. 1　一般的な結合損失の表式

x、y、z 軸をFig. 5.1 のように定義する。x、および y 軸は楕円形フィラメント領域の長軸と短軸に一致し、z 軸は導体軸に一致している。また、外部磁界は y 方向に加えられるものとする。外部磁界下での損失（ヒステリシス損失も、結合損失も基本的に同型である）は、一般的に以下のように表される。

$$Q_c = \mu_0 \oint H_0 \, \mathrm{d}M \quad (\mathrm{J/m^3/cycle}) \tag{5.1}$$

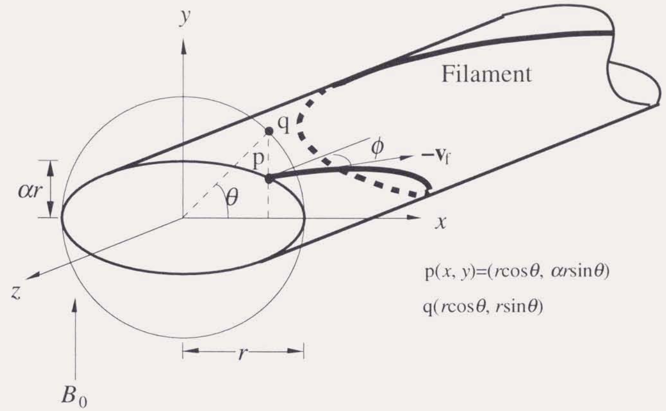


Fig. 5.1 Schematic of elliptical filamentary region and filament direction

Campbell はこの式から一般的な結合損失の表式を以下のように導出している [54]。

$$\overline{B_0 \dot{M}} = \frac{n_\mathrm{s} {B_0'}^2 \omega^2 \tau}{2\mu_0 \left(1+\omega^2 \tau^2\right)} \tag{5. 2}$$

ここで、$B_0 = B_0' \exp\,(\mathrm{j}\omega t)$ は外部印加磁界、M は導体の磁化、n_s は形状に依存するパラメータ、τ は遮へい電流の減衰時定数である。この式は、導体の形状に依存するパラメータ、および遮へい電流の減衰時定数（結合時定数）の二つのパラメータによって特性づけられている。ただし、n_s は反磁界係数 N によって以下のように定義される。

$$n_\mathrm{s} = (1 - N)^{-1} \tag{5. 3}$$

一般的な楕円体の反磁界係数は Osborn によって解析的に得られており [57]、楕円柱

の場合は以下の式で与えられる。

$$N = (1 + \alpha)^{-1} \tag{5.4}$$

ここで、α は x 軸に対する y 軸の比を表す。

5. 2　結合時定数および結合損失表式の導出

以下、フィラメント領域を超伝導体と母材の混合体として扱う。導体の透磁率は、真空透磁率とする。第一近似として、導体内部の磁界が y 方向で、かつ一様であると仮定する。このとき、(x, y, z)での導体軸方向の電界成分 E_z は、ファラデーの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}} \tag{5.5}$$

から、直ちに以下の式のように得ることができる。

$$E_z = \dot{B}_i\, x \tag{5.6}$$

ここで、B_i はフィラメント領域内部の磁界を表す。他の成分 E_x、E_y は、以下に述べるように、フィラメント方向の電界を零とする条件、および $\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = 0$ の条件から求められる。

Fig. 5.1 に示すようにフィラメントが、Z 方向（右ねじの方向）に撚られている場合、フィラメント方向 $\boldsymbol{v}_f$ は次式で与えられる [33]。

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{1}{v}\begin{pmatrix} \sin\phi'\sin\theta \\ -\alpha\sin\phi'\cos\theta \\ \cos\phi' \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$v = \sqrt{(\sin\phi'\sin\theta)^2 + (-\alpha\sin\phi'\cos\theta)^2 + (\cos\phi')^2}$$

$\phi' = \tan^{-1}(2\pi r/l_p)$

$r = \sqrt{x^2 + (y/\alpha)^2}$

ここで、θはFig. 5.1 のように定義され、$\theta = \tan^{-1}(y/\alpha x)$ である。また、l_p はツイストピッチを表す。$\boldsymbol{v}_f$を用いて、フィラメントのツイスト角 ϕ は以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{v}_f \cdot \boldsymbol{e}_z = |\boldsymbol{v}_f| \cos\phi = \cos\phi \quad (5.8)$$

ここで、$\boldsymbol{e}_z$は z 方向の単位ベクトルである。(5. 7) 式を代入すると、(5. 8) 式は以下のように変形される。

$$\tan\phi = \tan\phi' \sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta} \quad (5.9)$$

ここで、Fig. 5.2 で示すように、x–y 平面において $\boldsymbol{v}_f'$、θ'、η、ψ を定義する。$\boldsymbol{v}_f'$は$\boldsymbol{v}_f$の x–y 平面への投影ベクトルを表す。θ'は、x 軸と軌道 AB 上の法線ベクトルとのなす角であり、$\theta' = \tan^{-1}(\alpha^{-1}\tan\theta)$で与えられる。また η は、$\eta = \tan^{-1}(\alpha\tan\theta)$で与えられる。$\psi$は、$\boldsymbol{v}_f'$と x–y 平面上の電界 $(E_x, E_y, 0)$ とのなす角として定義されるが、この時点では未確定である。

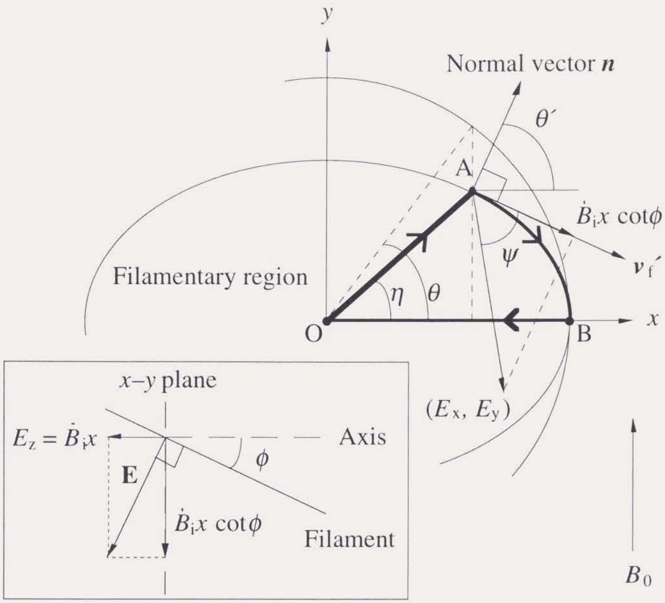


Fig. 5.2　Electric field and filament direction on *x*-*y* plane

Fig. 5.2 に示されるように、フィラメントに沿った電界成分が零であるという条件から、電界 $\boldsymbol{E}$ の $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}'$ 方向の成分が、E_z 成分を補償するために $\dot{B}_{\mathrm{i}}x\cot\phi$ として与えられる。この成分は以下の式で表される。

$$\dot{B}_{\mathrm{i}}\,x\cot\phi = \frac{\dot{B}_{\mathrm{i}}\cos\theta\left(l_{\mathrm{p}}/2\pi\right)}{\sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta}} \qquad (5.10)$$

従って、E_{x}、E_{y} は以下のように書ける。

$$E_x = \left(\frac{\dot{B}_i x \cot\phi}{\cos\psi}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta' + \psi\right)$$

$$= \frac{\dot{B}_i \cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta}} \cdot \frac{l_p}{2\pi}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)\tan\psi\right\} \qquad (5.\ 11)$$

$$E_y = -\left(\frac{\dot{B}_i x \cot\phi}{\cos\psi}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta' + \psi\right)$$

$$= -\frac{\dot{B}_i \cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta}} \cdot \frac{l_p}{2\pi}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)\tan\psi\right\} \qquad (5.\ 12)$$

未確定変数 ψ を決定するために、Fig. 5.2 に示すループ OAB に沿った電界の線積分を考える。v_i'、および電界成分 $\dot{B}_i x \cot\phi$ は x/y の関数であり、さらにこれらの変数は導体のサイズに依存しない。従って、E_x、E_y も x/y の関数となり、ψ もまた x/y の関数となる。これは、軌道 OA に沿って、E_x、E_y、ψ が一様であることを意味している。一方、AB に沿っての電界成分は $\dot{B}_i x \cot\phi$ で与えられており、BO 上の E_x 成分は電界分布の対称性から零となる。結局、閉ループ OAB 上の電界の線積分は以下の式で与えられる。

$$(E_x\cos\eta + E_y\sin\eta)\frac{\cos\theta}{\cos\eta} + \int_\theta^0 -\dot{B}_i x \cot\phi \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} d\theta = 0 \qquad (5.\ 13)$$

ここで、第二項目の積分項は以下のように計算される。

$$\int_\theta^0 -x\cot\phi \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} d\theta$$

$$= \int_\theta^0 \left[-\cos\theta\left(\frac{l_p}{2\pi}\right) / \sqrt{\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta}\right]\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} d\theta = \frac{l_p}{2\pi}\sin\theta \qquad (5.\ 14)$$

従って、(5. 13) 式は以下のように簡素化される。

$$(E_x + E_y \tan\eta)\cos\theta + \dot{B}_i\,(l_p/2\pi)\sin\theta = 0 \qquad (5.15)$$

上式を満たす解 ψ は、$\psi = \theta'$ となる。結局、電界もまた、y 方向でかつフィラメント領域内部で一様となる。すなわち

$$E_x = 0 \qquad (5.16)$$

$$E_y = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\dot{B}_i \qquad (5.17)$$

これらの成分は、$\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = 0$ を満たしている。

結合電流は、内部磁界の時間変化 $\dot{B}_i$ に比例しているので、遮へい電流（結合電流と等価）の z 方向成分によって作られる磁界もまた $\dot{B}_i$ に比例する。結合電流の減衰時定数を τ とすると、内部磁界 B_i は外部磁界 B_0 と以下の関係にある。

$$B_0 - B_i = \tau\,\dot{B}_i \qquad (5.18)$$

外部磁界が正弦波的に変化する場合には、B_i は以下の式で与えられる。

$$B_i = B_0/(1+j\omega\tau) \qquad (5.19)$$

上式を (5. 17) 式に代入し、結合損失 (J/m^3/cycle) が以下のように計算される。

$$Q_c = f\left[\int_0^{1/f} 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0} \sigma_\perp\left(E_y{}^2+E_z{}^2\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\right] / \pi\alpha a^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\sigma_\perp\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2\right]\frac{\omega^2 B_0{}'^2}{1+\omega^2\tau^2} \qquad (5.20)$$

$$r_0 = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\theta + \left((1/\alpha)\sin\theta\right)^2}}$$

ここで、$\sigma_\perp$はフィラメント領域における等価横方向導電率、r_0はフィラメント領域の半径、aはフィラメント領域のx軸の半径を表す。

この式は (5. 2) 式と等価であるので、(5. 2) 式と(5. 20) 式とを比較することによって結合時定数が以下のように得られる。

$$\tau = \frac{\mu_0}{1 + 1/\alpha}\sigma_\perp\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2\right] \tag{5. 21}$$

(5. 21) 式の結合時定数を用いてQ_c (J/m^3/cycle) を整理すると以下のようになる。

$$Q_c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\mu_0}\frac{\omega^2 B_0'^2 \tau}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{5. 22}$$

5. 3 結合損失の解析解と数値解の比較

Fig. 5.3 に (5. 22) 式、FEM、およびMurphy らによって得られた結合損失のアスペクト比α依存性を示す。外部磁界振幅は5 mT で周波数は50 Hz とする。アスペクト比は変わるが、断面積は0.15 π mm^2 で一定とする。アスペクト比が十分大きい場合は、テープ面に平行な磁界が加えられている場合に相当し、逆にアスペクト比が小さい場合は、テープ面に垂直な磁界が加えられている場合に相当する。フィラメント領域における等価横方向導電率$\sigma_\perp$は、母材の導電率をσ_m (= 3.0×10^8 S/m) として以下のように与えた。

$$\sigma_\perp = \frac{(1 + \lambda)}{(1 - \lambda)}\sigma_m \tag{5. 23}$$

ここで、λはフィラメント領域における超伝導体の体積占有率を表し、本解析では λ = 0.5とした。Fig. 5.3 には同時に結合時定数も示す。

有限要素解析において、Bi 系線材の E–j 特性を以下のようにべき乗則で与えられている。

$$E = E_0\,(j/j_{\rm c})^n \qquad (5.\,24)$$

本節では、E_0、j_c、および n 値を典型的な値として、10^{-4} V/m、2.0×10^{8} A/m^2、15 で与えている。このように FEM では、超伝導体の非線形的な特性が導入されており、より妥当性がある。

本章で導出された解析式 (5. 22) は定性的に FEM による解と一致している。一方、Murphy による解は低いアスペクト比の領域で特性が異なる。これは、時定数が考慮されていないことに起因している。

アスペクト比が低い領域では、結合時定数が場の変化の時間スケールよりもかなり大きくなるために、外周部のフィラメント層で電流が飽和し、ある厚みをもった遮へい電流領域が形成される。(5. 22) 式はその内側の領域において適用されるべきである。Fig. 5.3 の計算では、アスペクト比が低い領域でも遮へい電流層が厚くならないよう、磁界振幅を 5 mT と低い値を選んだが、それでも本条件では (5. 22) 式は低アスペクト比領域において実際の結合損失よりも高い値を示した。もし、外部磁界がさらに大きくなれば、外周部に飽和領域が形成され、フィラメント領域のかなりの部分を占めるようになる。この場合には、結合損失の寄与分がさらに減少し、代わりに外周部飽和領域におけるヒステリシス損失が増大する。

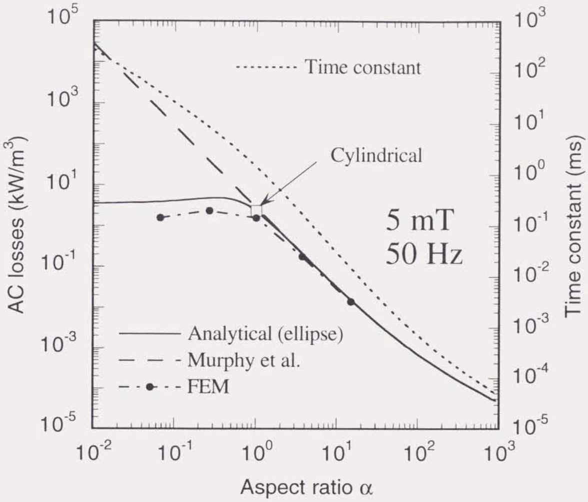


Fig. 5.3 Coupling loss and coupling time constant as a function of aspect ratio α. $\sigma_{\perp}$ = 9 × 10^8 S/m, λ = 0.5. The amplitude of the magnetic field is 5 mT. *E-j* characteristic is represented with $E = 10^{-4}\,(j/j_c)^{15}$, where $j_c = 2 \times 10^8$ A/m^2.

5. 4 結論

ツイスト多心線において、結合時定数は損失特性を知る上で極めて重要なパラメータである。本章ではテープ線内部のフィラメント領域を楕円で近似し、結合時定数を導出した。さらに併せて結合損失の解析式を示した。

外部磁界振幅が小さい場合、アスペクト比が小さくなる領域においても、導出した結合損失と有限要素法による数値解析とは定性的に一致し、有効性が示された。

第 6 章　酸化物テープ線のヒステリシス損失 [44], [58]

Fig. 6.1 は、磁界振幅を 50 mT とした時の FEM よって得られた導体内部の電流密度分布であるが、広範囲で飽和領域が形成されているのが確認される。ここで、$\alpha = 0.2 / 3.0$、$\omega t = 54°$である。この場合、飽和領域におけるヒステリシス損失が、結合損失よりも著しく増大する。Fig. 6.2 は磁界振幅 50 mT 時の FEM および (5. 22) 式によって得られた結合損失とヒステリシス損失のアスペクト比依存性を示したものである。ヒステリシス損失が低アスペクト比領域で支配的となっていることがわかる。

このように結合時定数が十分大きく、フィラメント同士が磁気的に結合している状態では、多心線は単心線と同様な磁気的振る舞いを示す。従って損失特性に関して、多心線を単心線と見なして評価しても良い近似が得られる。多心丸線に対しては、ビーンモデルを仮定したヒステリシス損失の評価式は導出されているが [2], [5]、テープ線のフィラメント領域は円とは大きく異なり、さらに損失に対するフラックスフロー抵抗の影響も指摘されている [40], [42], [59], [60]。

有限要素法などの数値計算は、ヒステリシス損失の定量的な評価に対して極めて有効であるが、一方で単純な解析解は前章の結合損失と同様、損失特性を理解する上で便利である。フラックスクリープの影響を考慮したヒステリシス損失は、$\iint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}V\mathrm{d}t$ によって評価する必要があるが、適切な E および j 分布の計算は複雑で、FEM 等の数値解析を必要とする。本章では、外部磁界振幅がテープ線の中心到達磁界より十分大きい場合について、フィラメント領域を楕円に近似しながら、超伝導体の n 値を考慮したヒステリシス損失を導出する。得られた解析解は、有限要素法による数値解析結果、および実験結果と比較し、妥当性を検証するとともに損失特性を検討する。

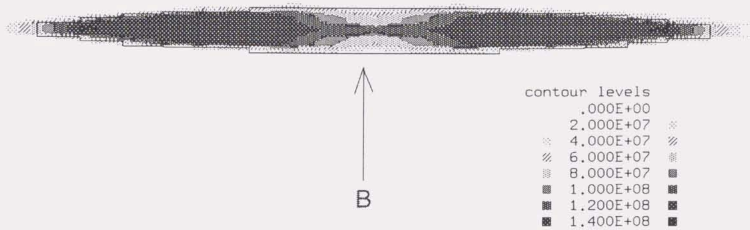


Fig. 6.1 Current distribution in filamentary region in magnetic field perpendicular to the tape face. The amplitude is 50 mT and $\omega t = 54°$.

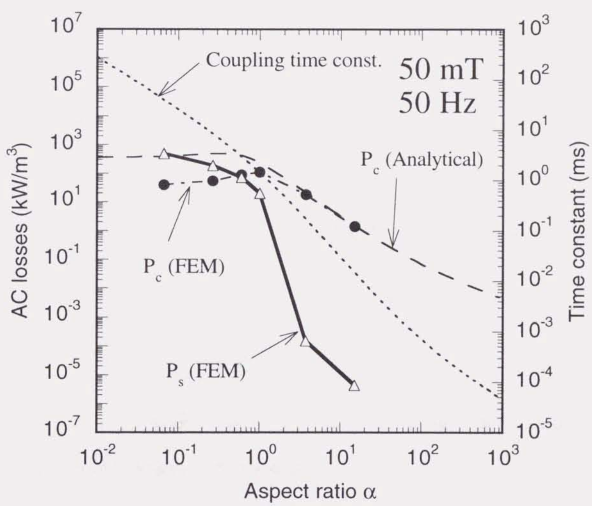


Fig. 6.2 Comparison between hysteresis loss and coupling loss as a function of aspect ratio. P_c and P_s denotes the coupling loss and hysteresis loss.

6. 1　楕円フィラメント領域を持つテープ線の中心到達磁界 [44]

まず、外部磁界を印加したときにツイストテープ線内部の磁界がちょうど中心に到達するときの磁界、すなわち中心到達磁界 B_{p} を求める。フィラメント領域は楕円形に近似される。外部磁界を印加したときに、外周部に局在する遮へい電流によって内部に誘起される磁界は、完全には一様ではないが、第一近似として一様であると仮定する。外部磁界が y 軸方向に加えられ、磁界が中心にちょうど到達ときに、遮へい電流によって中心軸上に誘起される磁界 B_{s} は、ビーンモデルを用いて以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
B_{\mathrm{s}} &= 4\int_0^{r_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0\lambda j_{\mathrm{c}}}{2\pi r}\cos\theta\, r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\mu_0\lambda j_{\mathrm{c}}}{2\pi}\int_0^{\pi/2} r_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (6.\ 1)
\end{aligned}
$$

ここで、フィラメント領域の半径 r_0 は、円筒座標形において以下のように与えられる。

$$
r_0 = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\theta + \left((1/\alpha)\sin\theta\right)^2}} \qquad (6.\ 2)
$$

ここで、a はフィラメント領域の x 軸の半径である。α は x 軸に対する y 軸の比である。従って、(6. 1) 式の積分を実行して以下を得る。

$$
B_{\mathrm{s}} = \frac{4\mu_0\lambda j_{\mathrm{c}}}{2\pi} I \qquad (6.\ 3)
$$

for $\alpha > 1$

$$
I = \int_0^{\pi/2} r_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{a\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta + (1/\alpha)^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta
$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1-\left(1-(1/\alpha)^2\right)\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1/\alpha)^2}} \int_0^{\sqrt{1-(1/\alpha)^2}} \frac{a}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{a\sin^{-1}\sqrt{1-(1/\alpha)^2}}{\sqrt{1-(1/\alpha)^2}} \tag{6. 4}$$

for $\alpha = 1$

$$I = a \tag{6. 5}$$

for $\alpha < 1$

$$I = \int_0^{\pi/2} r_0 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta+(1/\alpha)^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1+\left((1/\alpha)^2-1\right)\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(1/\alpha)^2-1}} \int_0^{\sqrt{(1/\alpha)^2-1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(1/\alpha)^2-1}} \log\left|\sqrt{(1/\alpha)^2-1}+1/\alpha\right| \tag{6. 6}$$

磁界が到達した時に、B_sは外部磁界と内部磁界との差（$B_0 - B_i = \tau\dot{B}$）に対して、大きさが等しく、向きが正反対になるという条件から以下の式が導かれる。

$$-\frac{\omega\tau B_0'}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} + \frac{2\mu_0\lambda j_c}{\pi} I = 0 \tag{6. 7}$$

B_0'が、すなわちB_pであるから、上式から以下のように得られる。

$$B_p = \frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{\omega\tau} \cdot \frac{2\mu_0\lambda j_c}{\pi} I \tag{6. 8}$$

6. 2　ヒステリシス損失評価式の導出 [44], [58]

Fig. 6.3 のように、超伝導テープ線が外部磁界に対して斜めに置かれている場合を考える。もし、外部磁界が B_p よりも十分大きいのであれば、内部磁界の時間変化 $\dot{B}_i$ は、外部磁界の時間変化 $\dot{B}_0$ にほぼ一致するとみなして良い。つまり、形状効果と磁化の時間変化が無視できる。さらにこの場合、内部の磁束線が外部磁界に対して平行で、同時に内部の電気的中心線の外部磁界に対して平行であると近似できる。従って、内部に誘起される電界は以下のように記述できる。

$$E_z = x\dot{B}_0 \tag{6. 9}$$

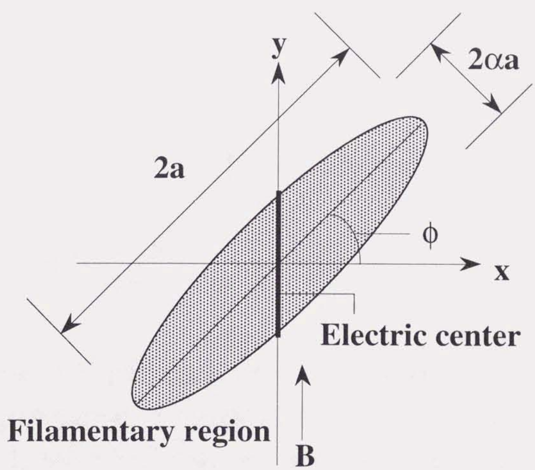


Fig. 6.3　Cross-section of filamentary region in a tape and a direction of an applied magnetic field

E_zは以下のようにべき乗則で与えられる。

$$E_z = E_0\,(j_z/j_c)^n \tag{6. 10}$$

従って、フィラメント領域における損失の瞬時値は以下のようになる。

$$\lambda j_z E_z = \lambda j_c\,(E_z/E_0)^{1/n} E_z \tag{6. 11}$$

ここで、j_cの磁界依存性をKimモデルに従って以下のように与える [61]。

$$j_c = j_{c0}\,B_c\,/\,(B + B_c) \tag{6. 12}$$

ただし、j_{c0}は無外部磁界下における臨界電流密度で、B_cは磁界の方向に依存する定数である。(6. 9) から (6. 12) 式を整理して、一周期、単位体積当たりのヒステリシス損失Q (J/m^3/cycle) は以下のように与えられる。

$$Q = \frac{\lambda j_{c0}}{\alpha a^2 \pi E_0^{1/n}} \left(2\pi f B_0'\right)^{1+1/n} 4 \iint_{S_{FR}} x^{1+1/n}\, \mathrm{d}S$$
$$4 \int_0^{\frac{1}{4f}} \frac{B_c}{B_0' \sin(2\pi f t) + B_c} \cos^{1+1/n}(2\pi f t)\; \mathrm{d}t \tag{6. 13}$$

ここで、B_0'は磁界振幅、fは周波数、S_{FR}はフィラメント領域断面積を表す。また、n値の磁界依存性は簡単のため、ここでは無視する。さらに、上式の面積分はFig. 6.4 に示されるように修正された楕円断面に関する面積分と等価となる。ここに、修正された楕円領域のx軸半径b、およびx軸に対するy軸の比βは以下の式で与えられる。

$$b = \alpha a \sqrt{\cos^2(\pi/2-\phi) + \left(\alpha^{-1}\sin(\pi/2-\phi)\right)^2} \qquad (6.\ 14)$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\left(\cos^2(\pi/2-\phi) + \left(\alpha^{-1}\sin(\pi/2-\phi)\right)^2\right)^{-1} \qquad (6.\ 15)$$

従って、(6. 13) 式における面積分は以下のように変形できる。

$$\iint_{S_{\mathrm{FR}}} x^{1+1/n}\,\mathrm{d}S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r_0} r^{2+1/n}\ \cos^{1+1/n}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \qquad (6.\ 16)$$

$$r_0 = \frac{b}{\sqrt{\cos^2\theta + \left(\beta^{-1}\ \sin\theta\right)^2}}$$

(6. 16) 式を (6. 13) 式に代入し、もし、n 値が 1 より十分大きい場合には、以下のように Q が計算される。

$$Q = \frac{\lambda j_{c0}}{\alpha a^2 \pi E_0^{1/n}}\left(2\pi f B_0'\right)^{1+1/n} 4\int_0^{\frac{1}{4f}} \frac{B_c\cos(2\pi ft)}{B_0'\sin(2\pi ft) + B_c}\,\mathrm{d}t$$

$$4\,\frac{n}{3n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\left(\cos^2\theta + \left(\beta^{-1}\cos\theta\right)^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{16\lambda j_{c0}}{\pi E_0^{1/n}}\,\frac{n}{3n+1}\left(bB_0'\right)^{1+1/n}(2\pi f)^{1/n}\,\frac{B_c}{B_0'}\left(\log\frac{B_0' + B_c}{B_c}\right) \qquad (6.\ 17)$$

j_c の磁界依存性が無視できる場合には、以下のようになる。

$$Q = \frac{16\lambda j_{c0}}{\pi E_0^{1/n}}\,\frac{n}{3n+1}\left(bB_0'\right)^{1+1/n}(2\pi f)^{1/n} \qquad (6.\ 18)$$

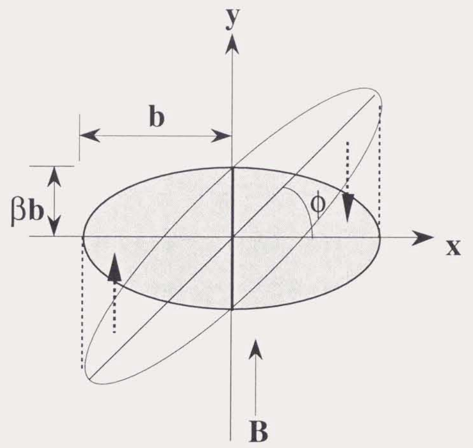


Fig. 6.4　Modified filamentary region for calculation

6. 3　数値解との比較

Fig. 6.5 に、ツイストピッチ 10 mm のテープ線に対し外部磁界がテープ面に垂直に加えられた場合に、内部で発生するヒステリシス損失の FEM による数値解析結果、ビーンモデルを用いた超伝導平板のヒステリシス損失 Q_h、および (6. 17) 式による解析解 (Q (ellipse, E-j)) を示す。外部磁界周波数は 50 Hz とする。また、FEM における解析ではフィラメント領域は楕円形に近似されており、幅、厚さはそれぞれ 3.0 mm、および 0.2 mm である。E–j 曲線は $E = 10^{-4}\ (j/j_c)^n$ とし、j_c は $j_c = 2\times10^8 \times 0.045\ /\ (B_\perp + 0.045)$ A/m^2 に近似する。ただし、n 値は 15 で一定値とする。結合時定数は 40 ms 程度になるので、損失特性には、ツイストされているにもかかわらず、単心超伝導線と同様な特性がみられている。スラブ近似は、到達磁界も大きく異なり、E–j 特性も考慮されないため、Q_h は FEM による数値解と全体的に大きく特性が異なる。一方、(6. 17)

式は到達磁界以降で良い一致を示している。

Fig. 6.6 は、同じ導体におけるヒステリシス損失の周波数依存性を示したものである。磁界振幅は50 mT でテープ面に垂直に加えられている。FEM による損失の数値解も、(6. 17) 式同様に周波数fに対して、ほぼ$f^{1/m}$に比例増加している。

また、ツイストが施されてないテープ線について、テープ面に対して平行に磁界を加えた場合のヒステリシス損失をFig. 6.7 に示す。j_c は $j_c = 2\times10^8 \times 0.38 / (B_\perp + 0.38)$ A/m^2 で近似した。この場合には FEM、スラブ近似、(6. 17) 式の結果に大きな違いは見られていない。

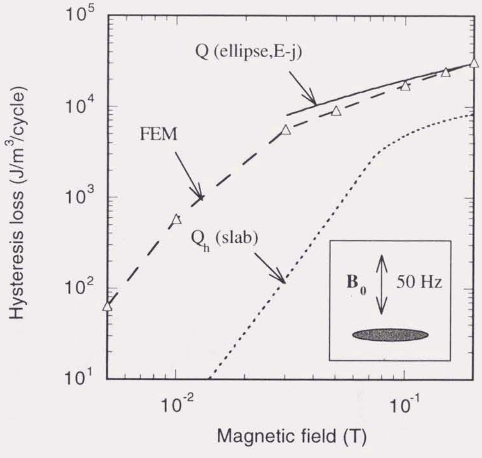


Fig. 6.5 Hysteresis loss as a function of magnetic field amplitude. The magnetic field is applied perpendicular to the wide face at 50 Hz. l_p = 10 mm.

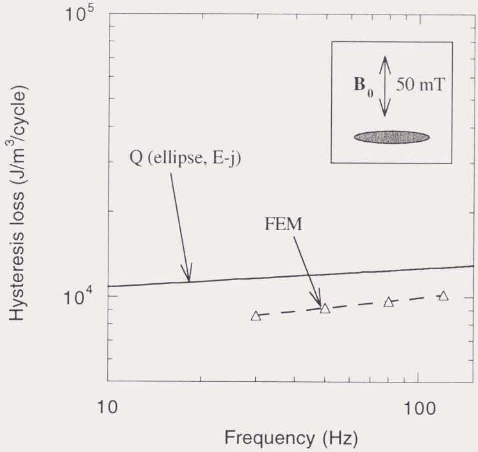


Fig. 6.6 Hysteresis loss as a function of frequency. The magnetic field is applied perpendicular to the wide face at 50 mT. l_p = 10 mm.

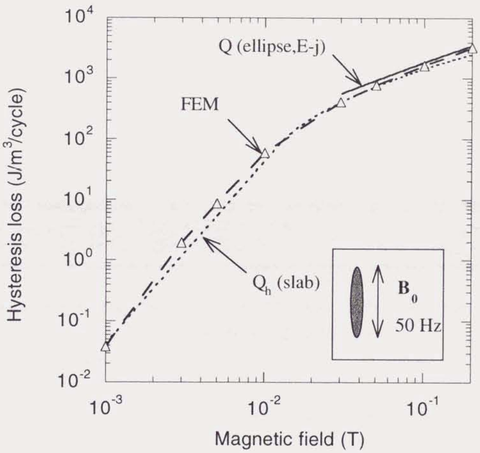


Fig. 6.7 Hysteresis loss as a function of magnetic field amplitude. The magnetic field is applied parallel to the wide face at 50 Hz.

6. 4　測定値および有限要素法による数値結果との比較 [58]

先に導出した解析解を、測定結果および有限要素法による数値結果と比較して妥当性を検証する。サンプルはツイスト無しの銀シース Bi-2223 テープ線 (Fig. 6.8)で、テープサイズは3.5 × 0.23 mm²、超伝導体の断面積は0.22 mm²である。また、計算の上で必要となるフィラメント領域の幅と厚さ（ただし、フィラメント領域は楕円形に近似される）は、3.15 mm、0.225 mm に設定した。これによって、フィラメント領域における超伝導体占有率は39.5 %となる。

E–j 特性（V–I 特性）は一般的な四端子法によって測定した。電圧タップ間は50 mm である。また、I_c は1 μV/cm の電界基準で決定した。ヒステリシス損失は、鞍型形状のピックアップコイルを用いて、磁化電流の時間変化に起因する電圧信号をロックインアンプを通して測定した [62], [63]。

さらに、測定によって得られた j_c、および n 値の磁界依存性を考慮した有限要素解析による数値計算結果と合わせて、磁界が斜めに印加される場合の損失特性について考察する。

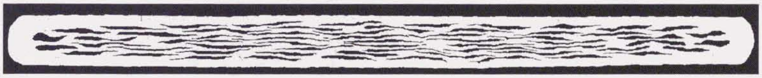


Fig. 6.8　Cross-section of Ag-sheathed Bi-2223 tape conductor. Tape size is 3.5 × 0.23 mm². Cross-sectional area of the superconductor is 0.22 mm².

6. 4. 1 j_cおよびn値の磁界依存性

Fig. 6.9 (a)、(b) に測定で得られたj_cおよびn値の磁界依存性を示す。測定データは、以下の式を用いてフィッティングした。

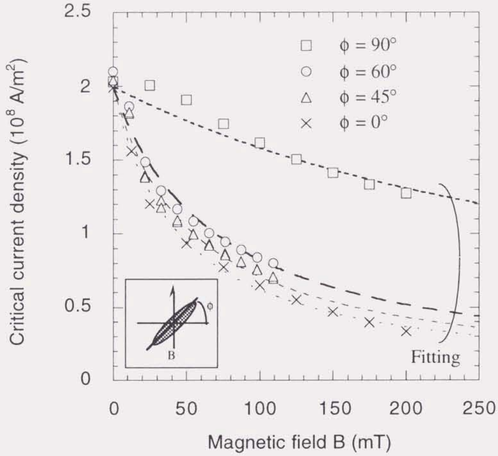
$$j_c = j_{c0}\, B_c \,/\, (B + B_c) \tag{6. 19}$$

$$n = n_0\, B_{cn}/(B + B_{cn}) \tag{6. 20}$$

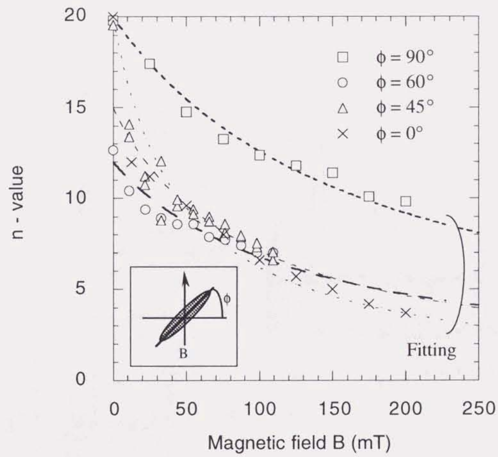
ここで、j_{c0}、B_c、n_0、B_{cn}は一定値で、Table 6.1 のように与えられる。

TABLE 6.1　Fitting parameters on j_c-B and n-B characteristics

ϕ (deg)	j_{c0} (A/m^2)	B_c (T)	n_0	B_{cn} (T)
0	2×10^8	0.045	20	0.045
45	2×10^8	0.055	15	0.09
60	2×10^8	0.07	12	0.13
90	2×10^8	0.38	20	0.17



(a)



(b)

Fig. 6.9 (a) Critical current density (core j_c) and (b) n–value of BSCCO tape as a function of magnetic field. The magnetic field is applied to several orientations to the tape face.

6.4.2 ロックインアンプによる磁化損失測定

ロックインアンプの基本的な構造は、反転と非反転を参照信号の周波数で切り替えるためのスイッチ、平均化回路、および直流電圧計で構成されている。基本的には入力信号から参照信号に対する同相成分の実効値を検出する計測器であると考えても良い。このため、ロックインアンプは対雑音性に優れており、超伝導体の磁化等による微少な電圧信号の検出に適している。本章の磁化損失測定は、このロックインアンプを用いた測定を採用している。以下、ロックインアンプによる磁化損失測定について概説する。サンプル構成、および測定回路はFig. 6.10 に示す。

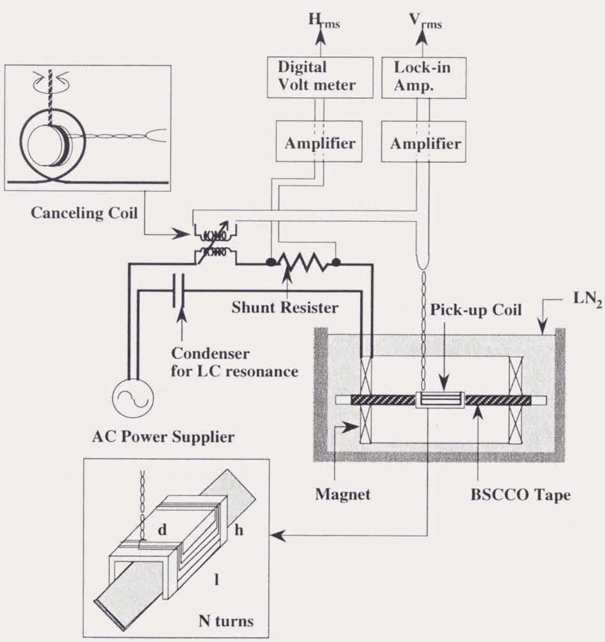


Fig. 6.10 Experimental set-up for measurement of magnetization loss

検出コイル（pick-up coil）内部で消費される一周期・単位体積当たりの磁化損失（J/m^3/cycle）は以下の式で与えられる。

$$Q = \mu_0 \oint_{1\ \mathrm{cycle}} H_0\, \mathrm{d}M_0 = \mu_0 \oint_{1\ \mathrm{cycle}} H_0 \frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mu_0 \oint_{1\ \mathrm{cycle}} (H_\mathrm{m} \sin 2\pi f t\,) \frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad (6.21)$$

ここで、H_0 は外部印加磁界、H_m はその振幅、M_0 はサンプルの体積平均磁化を表す。$\mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$ は $2\pi f$ の周期関数で、かつ$-\infty$〜$+\infty$において連続的であるので、$-\infty$〜$+\infty$においてフーリエ級数展開が可能である。従ってこの積分値は、外部磁界の実効値と $\mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$ の外部磁界に対する同相成分（フーリエ級数展開した場合の $\sin(n2\pi ft)$の奇数次高調波に当たる成分）の実効値の積と等価となる。回路的な立場でこの損失量について簡単に考察しておくと、サンプル導体はRL回路と等価であるので、完全反磁性、つまり抵抗が零であれば、サンプル導体内部に磁束が全く侵入せず、$M_0 = C\sin(n2\pi ft)$となって、マグネット電源側でエネルギー損失は生じない（簡単な回路方程式から導ける）。一方抵抗 R がある場合には、サンプル導体の内部に磁束が侵入し、誘導電流（磁化電流）の位相が遅れて、マグネット電源からエネルギー供給が行われることになる。このとき超伝導体の抵抗Rが線形ではないので、単純に $M_0 = C\sin(n2\pi ft-\delta)$と書くことはできない。また、磁化電流の位相が $\pi/2$ ずれることは抵抗無限大以外あり得ない、つまり磁化電流が流れている限りあり得ないことも付記しておく。

一方、ピックアップコイルに誘導される電圧はコイルの鎖交磁束の時間変化に比例するので、

$$U(t) = \mu_0 N \left[\int_S \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}S + \int_S \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}S \right] = \mu_0 N \left[\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} S + \int_S \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}S \right] \qquad (6.22)$$

ここで、Nはコイル巻き数、Hは磁界を表す。ここでいう磁界は、外部磁界ではなく、あくまでサンプル周囲の不均一な磁界であることに注意を有する。また、サンプル内部の磁化$\boldsymbol{M}$は、サンプル内部に誘起した磁化電流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$と以下の関係にあることも付記しておく。

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \nabla\times\boldsymbol{M} \tag{6. 23}$$

ピックアップコイルの幅を、サンプルの幅より十分大きく、さらにピックアップコイルの高さをサンプルの磁化による磁界の乱れが無視し得るまで大きく取ってある場合には、検出コイルに鎖交する磁界の総和が、外部磁界 H_0（厳密には均一でないが、その誤差は極めて小さい）×断面積 S×巻き数 N に一致する。従ってピックアップコイルで検出される電圧は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} U(t) &= \mu_0 N\, S\ \left(\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \mu_0 N\, S\ \frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} + \mu_0 N\, S\ 2\pi f\, H_{\mathrm{m}} \cos(2\pi f t) \end{aligned} \tag{6, 24}$$

このように、ピックアップコイルに誘導される電圧 $U(t)$は、$\mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$ で表される磁化の時間変化に伴う電圧成分と、外部磁界と位相が90°ずれた電圧成分の和で与えられるので、$U(t)$の外部磁界と同相の成分の実効値は、$\mu_0 NS\ \mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$ における外部磁界と同相の成分の実効値に等しくなる。従って、ロックインアンプによって、ピックアップコイルに誘起された電圧の中で、外部磁界と同相の電圧成分を検出すれば、その実効値$U_{\mathrm{in_rms}}$と外部磁界の実効値H_{rms}との積を用いて磁化損失が (6. 21) 式から見積もられる。結局 (6. 21)、(6. 24) 式より、交流一周期当たりでサンプル単位体積当たりの磁化損失は以下のように与えられる。

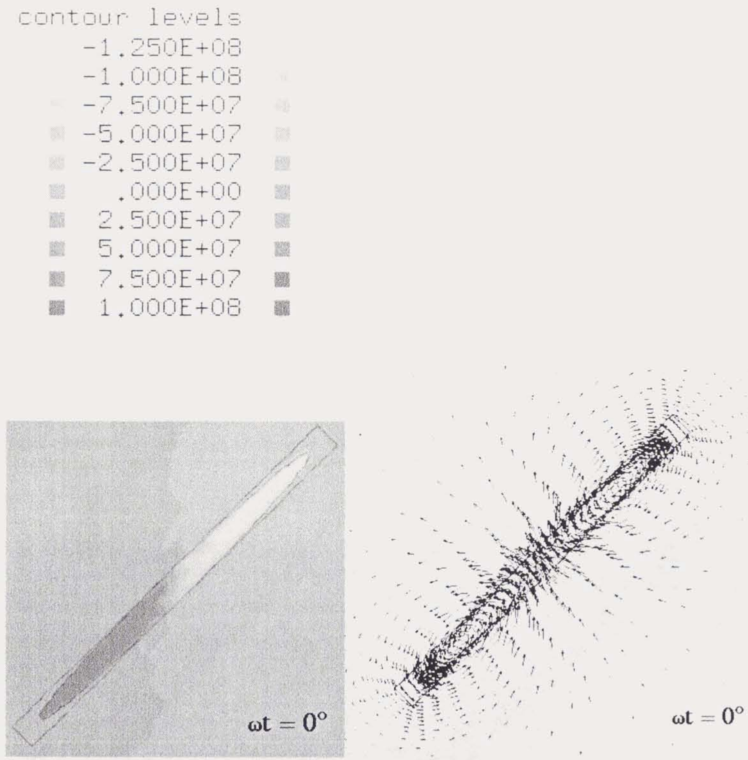
$$Q = \frac{U_{\mathrm{in\_rms}} H_{\mathrm{rms}}}{N S f} \frac{S h}{V_{\mathrm{sample}}} \tag{6. 25}$$

ここで、h はコイルの高さ、V_{sample} はサンプル導体の体積、T は交流磁界の時間周期を表す。もし、ピックアップコイルの幅を十分大きく取らなければ、導体の反磁界の影響で、ピックアップコイルの鎖交磁界による誘導電圧成分（(6. 22) 式の右辺第二項）に$-C\mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$（$C$は任意定数）の成分を含む電圧成分が混入することになる。つまり(6.24) 式に$-\mathrm{d}M_0/\mathrm{d}t$ に比例した電圧成分が付加されることになる。これは、もっと端的にいえば、磁化電流の時間変化に伴ってピックアップコイルに鎖交する磁界が変化している、つまりピックアップコイル内部からの漏れ磁界が磁化電流の時間変化に従って変化していることが原因となっている。そのため、ピックアップコイルの幅を十分大きく取らない場合には、$U_{\mathrm{in_rms}}$が減少し (6. 25) 式で見積もられた損失値は真値より小さくなる。

さらに、ピックアップコイルによる測定値が、導体の磁化損失と一致するためには、ピックアップコイルの高さを十分大きくとる必要がある。ここで、Fig. 6.11 (a)～(v) に FEM によって得られたテープ線内部における電流分布と磁束密度分布の時間変化を示す。Fig. 6.12 に計算のメッシュ分割図を示しておく。外部磁界の振幅および周波数は70 mT、60 Hz で、外部磁界はテープ面（法線）に対して45°で印加されるものとする。Fig. 6.11 (b)や(v)に示されるように、もしピックアップコイルの高さを十分大きく取らなければ、ピックアップコイル上面と下面の磁界が垂直に鎖交せず、ピックアップコイル内にポインティングベクトルの流入出が行われる。実験で使用した鞍型のピックアップコイルでは、ピックアップコイル側面のポインティングベクトルしか測定することができないため、高さが不十分の場合には誤差が大きくなる。高さが十分取られる場合には、ピックアップコイル上下面の磁界が外部磁界と一致し、面に垂直に入射するため、上下面でポインティグベクトルの流入出は零となる。このような考察

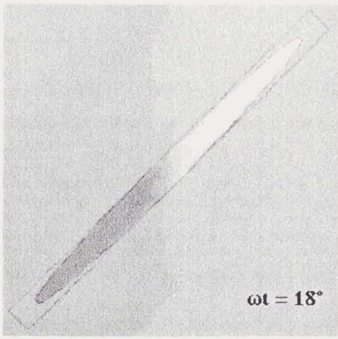
のもとで、本実験ではピックアップコイルの高さをサンプル高さの 4〜5 倍程度まで大きくし測定を行っている。このようなピックアップコイルによる測定では、後述するように FEM による計算値と測定値が定量的に一致し、測定結果の妥当性が示されている。

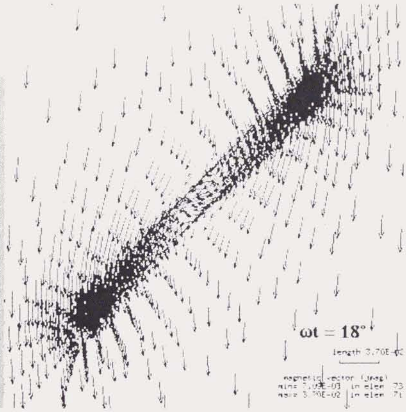
また、実際の測定では、外部磁界と位相が 90°ずれた電圧成分が同相成分よりも極めて大きいので、同相電圧成分の S/N 比を向上させるために、測定回路の中に位相が 90°ずれた電圧成分を補償するための補償用コイル (canceling coil) を設置している。



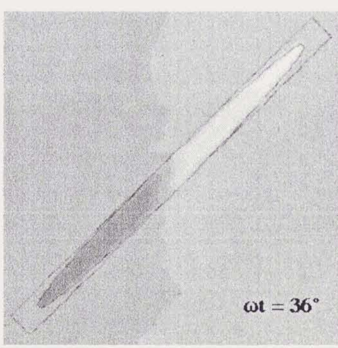
(a) (b)

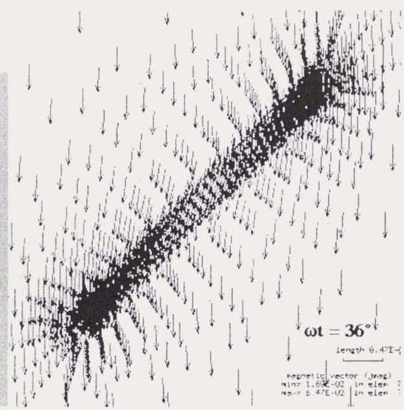
Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.





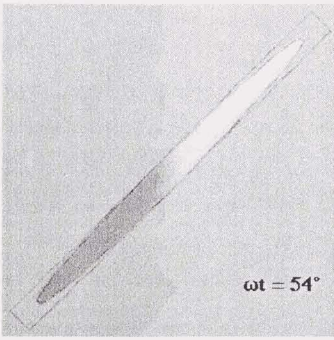
(c) (d)



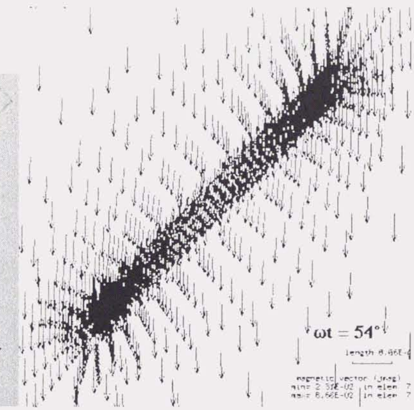


(e) (f)

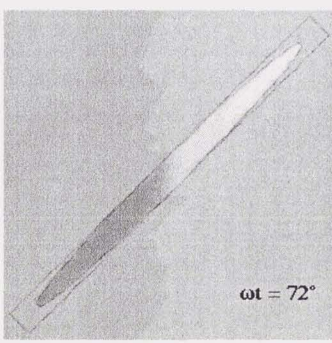
Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.



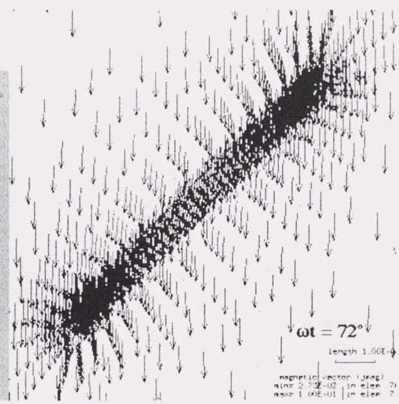
(g)



(h)

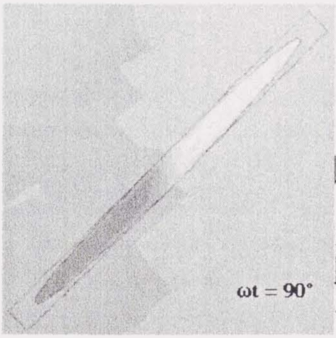


(i)

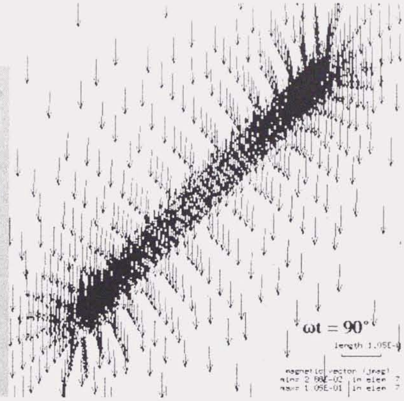


(j)

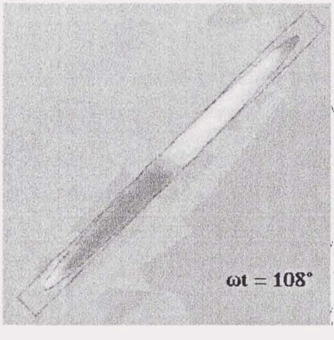
Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.



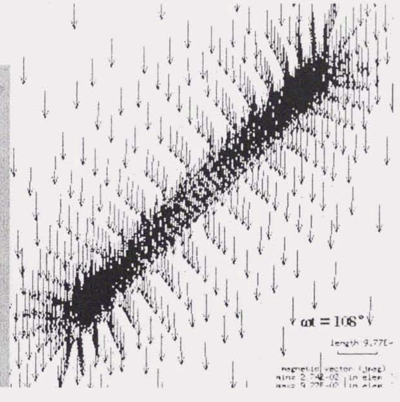
(k)



(l)

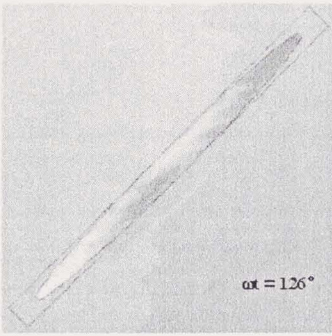


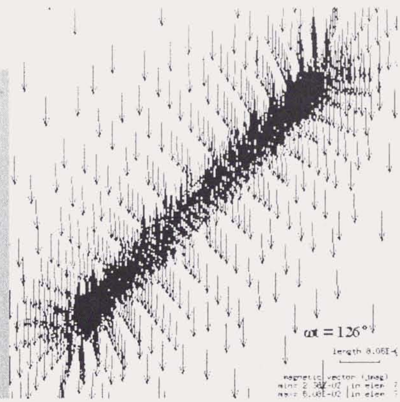
(m)



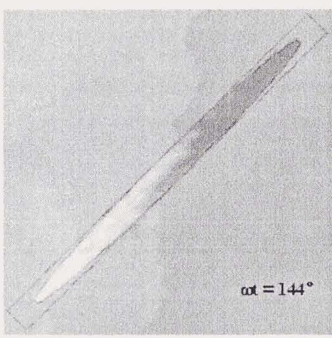
(n)

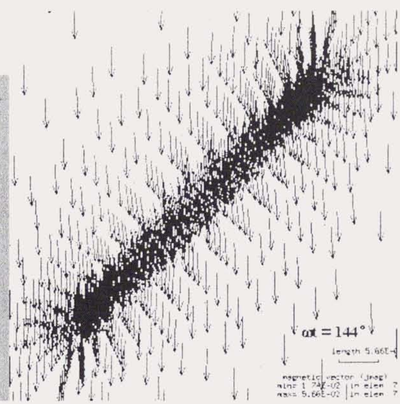
Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.





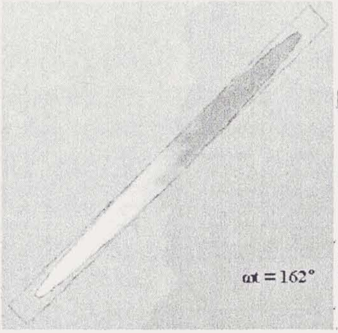
(o) (p)



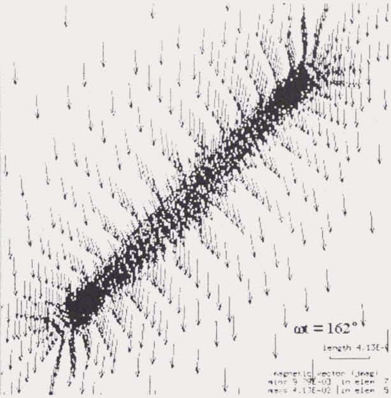


(q) (r)

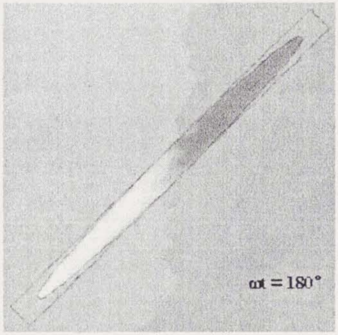
Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.



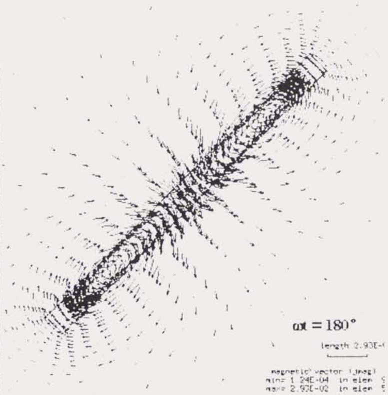
(s)



(t)



(u)



(v)

Fig. 6.11 Current distribution and magnetic flux distribution, when the magnetic field is applied to 45° to the tape face. The amplitude is 70 mT and the frequency is 60 Hz.

s

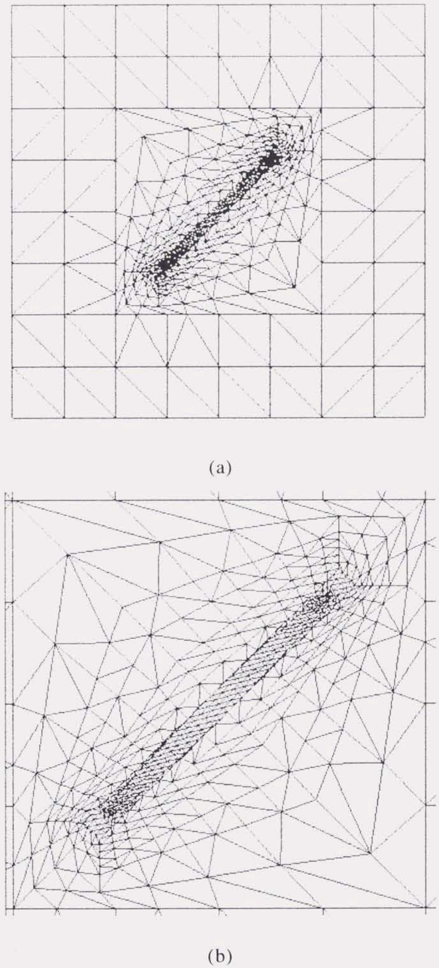


Fig. 6.12 Finite element meshes for the tape. (a) Whole region. (b) Enlarged part near the tape.

6. 4. 3　損失測定値との比較 [58]

A. 磁化損失の磁界振幅依存性

Fig. 6.13 にヒステリシス損失の磁界振幅依存性を示す。周波数は60 Hz に設定されている。ただし、測定値には母材部での渦電流損失も含まれるが、超伝導体部のヒステリシス損失に比べ十分小さいと見なせる。ϕ = 45°の場合の測定結果とFEM による計算結果が定量的に一致し、測定結果の妥当性が示されている。いずれの磁界角度の場合も、中心到達磁界よりも十分大きい磁界領域では、測定値と解析式 (6. 17) が一致した。ただし、ϕ = 0°、およびϕ = 90°以外の場合には、ϕ = 0°、およびϕ = 90°に比べより大きな磁界領域にならないと解析式が測定結果と一致しないことが示されている。これは、解析式を導出する際の”内部磁界の時間変化が外部磁界の時間変化に等しい”とした仮定が、低い磁界領域では粗いことが原因である。このことを検証するために、Fig. 6.14で、FEM によって計算された、ϕ = 45°で磁界振幅が30 mT と70 mT の場合の磁界分布を比較する。周波数は60 Hz である。振幅30 mT の場合には、反磁界の影響でテープ線周辺の磁界がテープ面に沿うようになり、先の仮定が粗いことが示されている。この仮定による誤差は、Fig. 6.14 (b) に示されるように、外部磁界が大きくなると小さくなる。従って磁界が大きい場合には、斜め磁界下でも解析式 (6. 17) は妥当性をもつ。

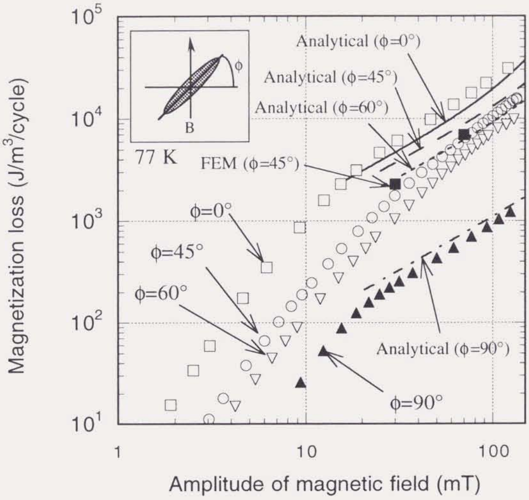
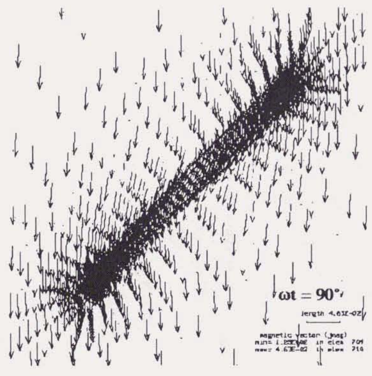
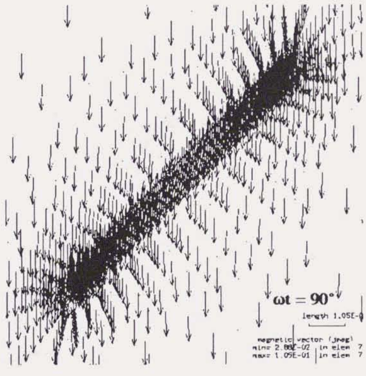


Fig. 6.13 Magnetization loss in non-twisted BSCCO tape as a function of amplitude of magnetic field. The magnetic field is applied to several orientations at 60 Hz.



(a) Magnetic field amplitude 30 mT



(b) Magnetic field amplitude 70 mT

Fig. 6.14 Magnetic field distribution at ϕ = 45° calculated by FEM.

B. 磁化損失の周波数依存性

Fig. 6.15 に磁化損失の周波数依存性を示す。解析式は測定された損失特性をよく表している。

ビーンモデルを仮定した解析解は、測定結果と定性的に一致するが、弱ピン止め力の影響で、厳密な損失特性を示すことができないことが報告されている [40]-[42]。ビーンモデルを仮定した場合には、周波数特性を示すことができないが、実際の通電損失やヒステリシス損失は周波数に依存している。導出した解析解によれば、ヒステリシス損失は周波数 f の (1/n) 乗 ($f^{1/n}$) に比例しており、本測定によってこれを実験的に確認できた。

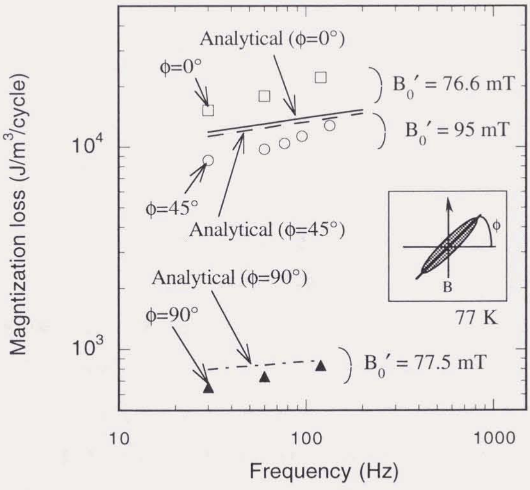


Fig. 6.15 Magnetization loss in non-twisted BSCCO tape as a function of frequency.

6. 5　フィラメントのヒステリシス損失への適用

フィラメント形状を楕円で近似する場合には、フィラメントのヒステリシス損失として (6. 17) 式を適用することが可能である。(6. 17) 式における a に対して、フィラメント半径を代入することによって、フィラメント領域当たりのフィラメントのヒステリシス損失 Q_{f} (J/m^3/cycle) が以下のように与えられる。

$$Q_{\mathrm{f}} = \frac{16\lambda j_{\mathrm{c0}}}{\pi E_0^{1/n}} \frac{n}{3n+1} \left(\frac{d_{\mathrm{s}}}{2} B_0'\right)^{1+1/n} (2\pi f)^{1/n} \frac{B_{\mathrm{c}}}{B_0'} \left(\log \frac{B_0' + B_{\mathrm{c}}}{B_{\mathrm{c}}}\right) \tag{6. 26}$$

ここで、d_{s} はフィラメントの幅、または厚さを表す。j_{c} の磁界依存性が無視できる場合には、以下のように書ける。

$$Q_{\mathrm{f}} = \frac{16\lambda j_{\mathrm{c0}}}{\pi E_0^{1/n}} \frac{n}{3n+1} \left(\frac{d_{\mathrm{s}}}{2} B_0'\right)^{1+1/n} (2\pi f)^{1/n} \tag{6. 28}$$

6. 6　結論

テープ線内部のフィラメント領域を楕円で近似し、べき乗則で表現された E–j 特性を考慮に入れたヒステリシス損失の解析式を導出した。この解析式は中心到達磁界よりも十分大きい磁界振幅の場合に適用できる。

磁界がテープ面に垂直、および平行の場合に、有限要素法による数値結果との比較では、解析解はよく一致した。また、測定結果ともよく一致している。ただし、磁界が斜めに加えられる場合は、解析式と測定値が一致する磁界領域が、平行・垂直磁界に比較してより大きい磁界振幅値に現れる。これは、テープ形状に起因する反磁界効果と磁界印加角度が影響しているためである。

また、ヒステリシス損失が周波数に対して、$f^{1/n}$ に比例して増加することが示された。

第 7 章　酸化物ツイストテープ線の通電時の損失特性 [65]

基本的に、ツイストの縮小化によって交流外部磁界下での損失が低減される。つまり外部磁界による損失に対しては、ツイストピッチをできる限り小さくした方が損失が低減される。しかしながら、自己磁界損失の場合には、ツイストピッチの縮小化が必ずしも損失の低減に結びつくとは限らない。

ツイスト線に通電した場合、内部電流はフィラメントに沿ってらせん状に流れる。このとき、周方向磁界と縦磁界成分が誘起される。このうち周方向磁界は、第 1 章で概説したとおり、外周部に電流を追いやる働きを持ち、逆に自己縦磁界は外周部電流を減少させようとする働きをもつ。従って、これらの磁界成分の比が、内部の電流分布、および損失特性に影響を及ぼす。この比は導体サイズ、導体形状、ツイストピッチ、通電電流値等に依存している。

また、多くの実用交流機器において、超伝導線は交流磁界下での交流通電を要求される。このような条件下では、電気的手法による損失測定は、適切なピックアップコイルや電圧タップの取り付けが難しいため困難であり、損失の定量化にとって有限要素法等の数値解析が有利である。また、導体設計の効率化にとっても有効である。本章は、先に示した有限要素解析用コードを用いて、ツイストの施された Bi 系テープ線の自己磁界損失特性、および自己・外部両磁界下での損失特性を明らかにし、特にツイスト、アスペクト比の影響を議論する。これにより損失を最小化する最適ツイストピッチを提案する。

7. 1　自己磁界下での通電損失特性

計算対象のテープ線は銀シースBi系線材で、その諸元を典型的な値としてTable 7.1のように設定した。

TABLE 7.1　Specifications of typical BSCCO tape for numerical analysis

Tape size	3 mm × 0.2 mm
Major and minor axes of elliptical filamentary region	2.4 mm, 0.16 mm
Filament size	300 μm × 20 μm
Volume fraction of SC in filamentary region	50 %
Matrix to SC ratio	2.98
Matrix (Ag) conductivity	3.3 × 108 S/m
I_c (critical current) at $B_0 = 0$ T	30.15 A
(j_c at $B_0 = 0$ T)	(2×10^8 A/m^2)

まず、自己磁界下での通電損失特性をFig. 7.1 に示す。ツイスト線のツイストピッチは10 mmをした。Norrisの解析解も併せて示している。$I_t/I_c < 0.5$ の範囲ではツイストテープ線の全損失が Norris の解析値よりも低い特性を示しており、フィラメントツイストが通電損失の低減にも有効であることが示された。

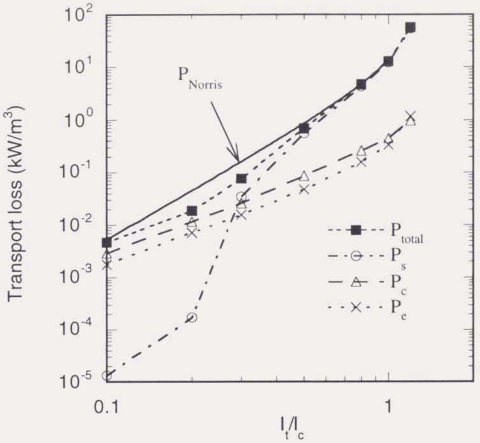


Fig. 7.1 Transport loss in non-saturated tape by Norris and transport loss in twisted tape by FEM in self-field mode. The frequency is 50 Hz. The twisted pitch is 10 mm.

7. 2 外部横磁界下における通電時の損失特性

計算対象のテープ線諸元はTable 7.1 の通りである。ツイストピッチは10 mm である。まずFig. 7.2 (a) に、外部交流磁界（振幅50 mT）下での損失の通電電流依存性を示す。外部磁界はテープ面に平行に加えられ、通電電流と同相で 50 Hz である。(5. 21) 式から、結合時定数が15.0 μsと計算され、フィラメントの到達磁界が (4. 3) 式から 2.5 mT と計算される。従って (4. 2) 式の条件が満たされるので、動的抵抗電圧と非飽和フィラメントの磁化損失が考慮される。Fig. 7.2 (b) にテープ線内部の電流密度分布を示すが、外周部に電流が同心円状に局在しており、外部磁界がフィラメント領域に十分侵入し、外部磁界によるフィラメント結合が十分抑制されていることが判る。

ツイストテープ線において、テープ面に対し平行な磁界が加えられている場合の、テープ体積当たりにおけるフィラメントのヒステリシス損失 P_f (W/m³)、および結合損

失 P_{ac} (W/m^3) は第5章、6章で示したとおり、以下の式で与えられる [44]。

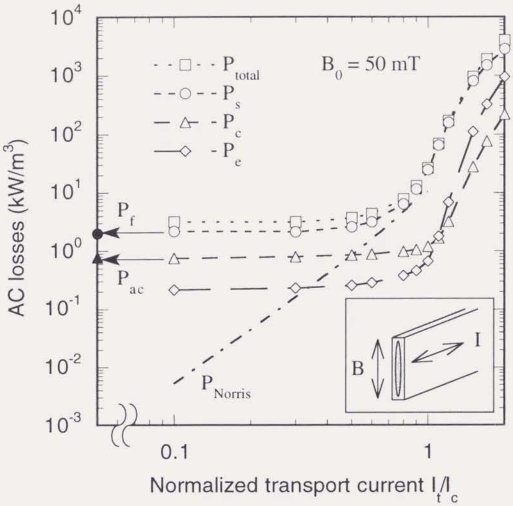
$$P_f = \frac{16\lambda j_{c0}}{\pi E_0^{1/n}} \frac{n}{1+3n} \left(\frac{d_f}{2} B_0\right)^{1+1/n} (2\pi f)^{1/n}$$
$$\frac{B_c}{B_0} \log\left(\frac{B_c + B_0}{B_c}\right) f \frac{0.25\pi w d}{w_t d_t} \tag{7. 1}$$

$$P_{ac} = \frac{1}{2\mu_0} \left(1 + \frac{d}{w}\right) \frac{(2\pi f B_0)^2 \tau_m}{1 + (2\pi f \tau_m)^2} \frac{0.25\pi w d}{w_t d_t} \tag{7. 2}$$

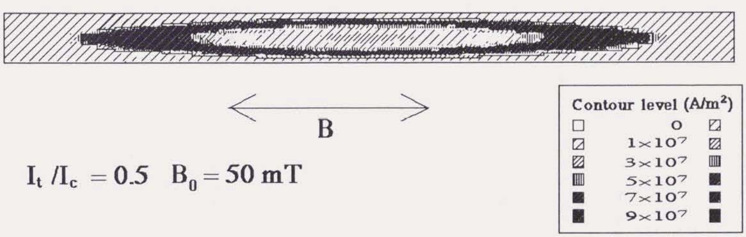
ここで、w_t、d_tはテープの幅と厚さをそれぞれ表す。E–j 特性は $E = 10^{-4} (j/j_c)^n$ で与えられ、j_cおよびn 値は (6. 19)、(6. 20) 式のように与えられる。また、Norris による楕円モデルの通電損失 (W/m^3) は以下の通り与えられている [8]。

$$P_{Norris} = \frac{I_c^2 \mu_0}{\pi} \left[(1-F)\ln(1-F) + (2-F)\frac{F}{2}\right] f \frac{1}{w_t d_t} \tag{7. 3}$$
$$F = I_t / I_c$$

(7. 1)～(7. 3) 式による解析解もFig. 7.2 (a) に示している。Fig. 7.2 (a) に示されるように、FEM による損失計算値 P_s、および P_c が I_t/I_c が減少するにつれ、(7. 1)、および (7. 2) 式に収束していく様子が確認される。



(a)



(b)

Fig. 7.2 (a) Loss as a function of I_t/I_c, where I_t and I_c are an amplitude of a transport current and a critical current density, and (b) calculated current distribution inside the tape at I_t/I_c, = 0.5 at $2\pi ft$ = 90°. The external magnetic field with amplitude of 50 mT is applied parallel to the tape face. The frequency is 50 Hz.

またFig. 7.3 に、通電電流をI_t/I_c = 0.5 に設定して、外部磁界の振幅値を変化させた場合の損失特性を示す。外部磁界はテープ面に平行で、周波数は同相で50 Hz とする。動的抵抗電圧は、磁界振幅が B_{pf} (= 2.5 mT) 以上の場合に考慮することにする。図には、(7. 1)~(7. 3) 式による解析解も示す。この場合、磁界振幅を小さくしていっても、FEM によるP_sが Norris の解析解と一致せず、$P_s < P_{Norris}$となっている。これは、ツイストによる自己縦磁界の影響による。また、Fig. 7.4 には、テープ面に対して垂直に磁界を加えた場合の損失特性を示す。この場合、結合時定数が 44.3 ms であり、フィラメントが結合状態となるため損失特性は複雑になる。

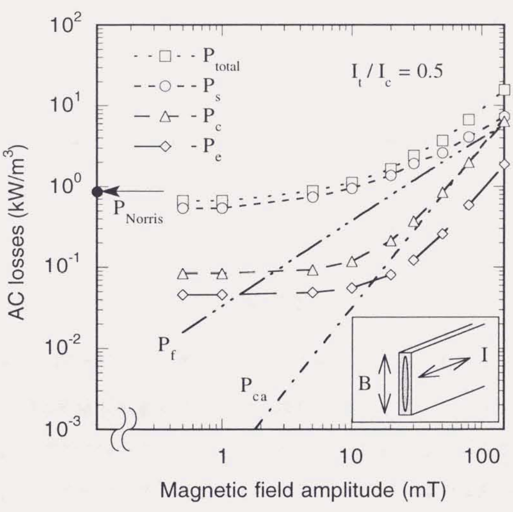


Fig. 7.3 Loss as a function of the amplitude of the external magnetic field. The magnetic field is applied parallel to the tape face. I_t/I_c = 0.5. The frequency is 50 Hz.

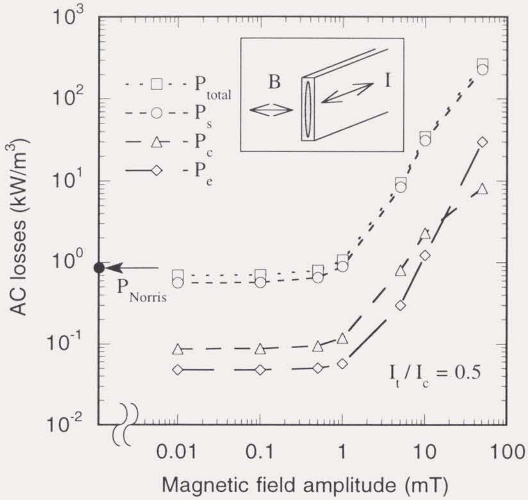


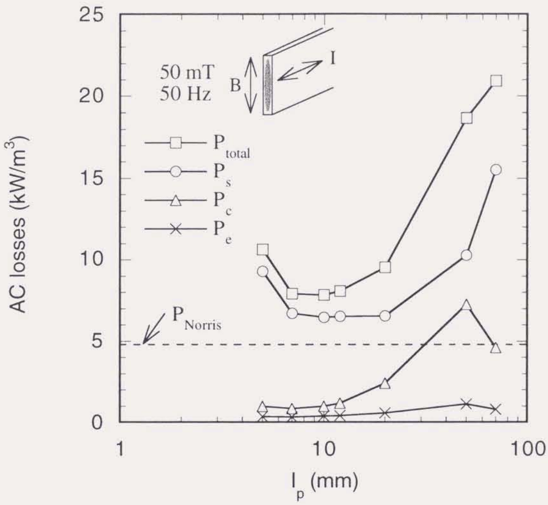
Fig. 7.4　Loss as a function of the amplitude of the external magnetic field. The external magnetic field is perpendicular to the tape face. $I_t/I_c = 0.5$. The frequency is 50 Hz.

7. 3　テープ線ツイストピッチの最適化

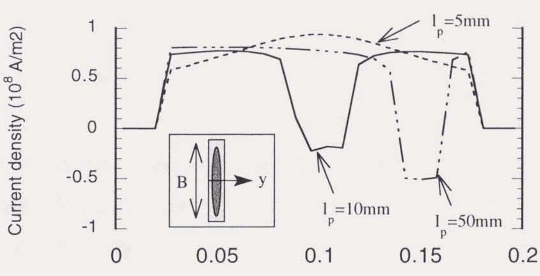
テープ面に垂直に磁界が加わる場合には、ツイストピッチが 10 mm であってもフィラメント同士が磁気的結合状態にあり、損失低減のためにはよりいっそうツイストピッチを縮小化しなければならない。しかしながら、そのような短いツイストピッチは線の劣化が著しくなり現実的ではない。そこで本節では、一般的な銀シース線に対して外部磁界がテープ面に対して平行に加わる場合に限って、交流損失のツイストピッチ依存性を調べることにする。

Fig. 7.5 (a)、(b)は損失、および内部の電流密度分布のツイストピッチ依存性を計算

した結果である。ただし、テープ線には振幅 I_t/I_c = 0.8 の交流電流が通電され、磁界振幅 50 mT の外部交流磁界がテープ面に対して平行に加えられている。周波数は 50 Hz である。ツイストピッチが 70 mm ときに結合時定数 τ_m が 0.65 ms となり、また B_{pt} が 2.5 mT となって条件 (4. 2) が満たされるので、一連の計算において動的抵抗電圧とフィラメントの磁化損失を考慮している。Fig. 7.5 (a) が示すように、交流損失を最小化するツイストピッチが 10 mm 程度に存在することが判る。Fig. 7.5 (b) に示されるように、ツイストピッチを小さくしすぎると中心部の電流密度が増大して、かえって損失を増大させる結果となる。



(a)



(b)

Fig. 7.5 (a) Twist pitch dependence of losses and (b) current distributions in twisted tapes carrying the transport current under external magnetic field. I_t/I_c = 0.8 and its frequency is 50 Hz. The magnetic field with the amplitude of 50 mT is applied parallel to the tape face at 50 Hz.

磁界振幅を変えた場合の損失のツイストピッチ依存性をFig. 7.6 に示す。I_t/I_c = 0.8 とする。この場合、最適なツイストピッチは、磁界振幅にあまり依存せず10 mm 当たりにあることが示されている。

また、通電電流の振幅を変えた場合の損失のツイストピッチ依存性をFig. 7.7 に示す。磁界振幅は30 mT でテープ面に平行に加えられている。この場合、電流振幅の増加に伴い、最適ツイストピッチが増大する傾向があるが、ツイストピッチが10 mm 程度ならば、損失は最小値に近い。

Fig. 7.8 には、テープのアスペクト比を変えた場合の損失のツイストピッチ依存性を示す。ただし、テープの断面は 0.6 mm^2 で一定値とする。また、フィラメントサイズはテープサイズの 1/10 に設定する。磁界振幅は30 mT で、I_t/I_c = 0.8 とする。周波数は50 Hz である。最適ツイストピッチが、アスペクト比 w/d の減少に伴って減少する傾向にある。

7.4 考察

前節では、ツイストピッチの最適化について、特に外部磁界がテープ面に対して平行に加わる場合について議論した。しかしながら、もし外部磁界がそれ以外の方向に加えられる場合には、最適ツイストピッチは変化する。特に、実際の交流機器では無視できない縦磁界成分が加わることも多い。外部縦磁界成分は、縦磁界成分と周方向磁界成分の比に直接影響し、損失特性に大きな影響を及ぼす。この場合、縦磁界成分の大きさも考慮に含めながら最適ツイストピッチを見いだす必要がある。

またテープ線の場合、最適ツイストピッチに、強いアスペクト比依存性があるが、これはフィラメント角がアスペクト比に依存しているためである。アスペクト比が大きくなると、テープ面側でフィラメント角が大きくなる。このことが、実質的な縦磁界成分と周方向磁界成分の比（各位置の縦磁界と周方向磁界の比は異なる）を変化させている。結果として、アスペクト比が大きいほど最適ツイストピッチがより大きい値に現れる。

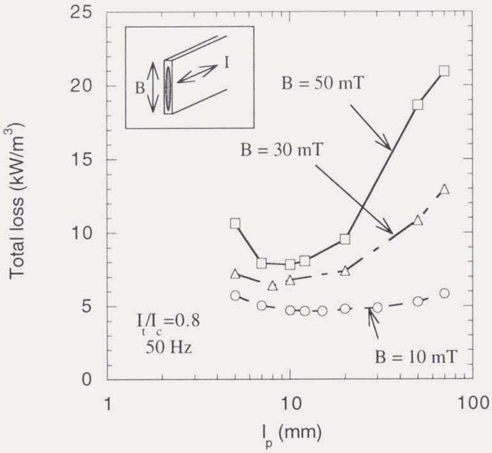


Fig. 7.6 Total loss in different amplitude of the external magnetic field as a function of twist pitch. I_t/I_c = 0.8. The AC magnetic field is applied parallel to the tape face. The frequency of the AC current and the magnetic field is 50 Hz.

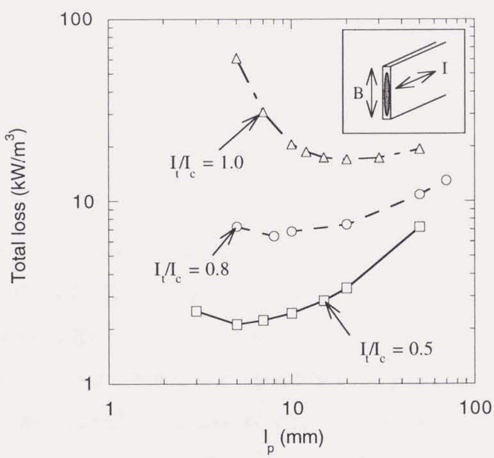


Fig. 7.7 Total loss for several current amplitudes as a function of twist pitch. The AC magnetic field with the amplitude of 30 mT is applied parallel to the tape face at 50 Hz. The frequency of the AC current is 50 Hz.

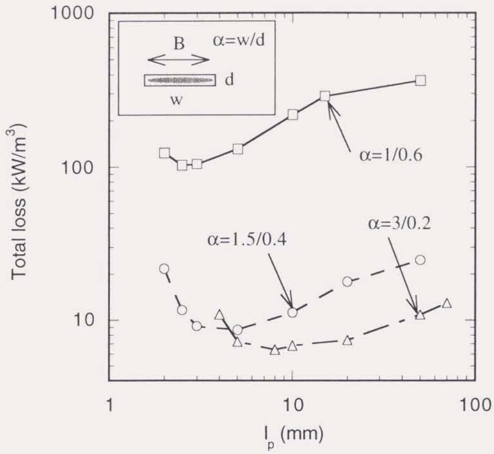


Fig. 7.8　Total loss in several tapes with different aspect ratio as a function of twist pitch. I_t / I_c = 0.8. The AC magnetic field with the amplitude of 30 mT is applied parallel to the tape face at 50 Hz. The frequency of the AC current is 50 Hz. The cross-sectional area is 0.6 mm^2.

7. 5　結論

本章では、Bi 系ツイストテープ線の通電時の損失特性を調べ、特に損失を最小化する最適ツイストピッチについて調べた。この最適ツイストピッチは、縦磁界（自己縦磁界と外部縦磁界の合成磁界）と周方向磁界の比に依存している。

解析結果より、フィラメントのツイストが通電損失の低減においても有効であることがわかった。また、典型的な Bi 系線材（サイズ 3 mm × 0.2 mm）では、I_t/I_c = 0.8 で外部磁界がテープ面に平行に加えられるとき、10 mm あたりに損失を最小化する最適ツイストピッチが存在した。この最適ツイストピッチは、磁界振幅にはあまり依存し

ない。また、この最適ツイストピッチは電流振幅依存性をもっているが、10 mm 程度のツイストピッチにおける損失は最小値に近い値を示した。

一方、最適ツイストピッチは、強いアスペクト比依存性をもっており、アスペクト比が小さくなる場合に、損失を最小化する最適ツイストピッチは小さい値になる傾向にある。

第 8 章　結言

直流用 Cu/NbTi、および交流用 CuNi/NbTi 複合多心超伝導線に関し、磁気的不安定性、および安定化指針について調べた。さらに、最近開発が活発化している、ツイスト線を含む酸化物系多心テープ線材の、損失解析モデルの構築、定量化、および最適線材構造の提案を行った。以下、本研究の概要を列挙する。

(1)

Cu/NbTi 超伝導線における、外部磁界、および通電電流同時掃引時の磁気的不安定性を、理論・実験両面から調べた。解析結果は定性的に実験結果と一致し、同時掃引時の縦磁界方向の影響にクエンチ電流特性の違いを明らかにした。掃引時間 1 秒では、縦磁界の向きの違いによるクエンチ電流値の差は、測定値で 10%程度であった。

(2)

実際的な空間変動する磁界分布下での、複合多心超伝導線の磁気的不安定性を調べた。交流用 CuNi/NbTi 超伝導線において、一様磁界下で生じる一般的な磁気的不安定性によるクエンチ電流値の低下から、分布磁界下ではさらにクエンチ電流値が低下することを調べ（分布磁界不安定性）、その原因を明らかにした。分布磁界不安定性は、*E–j* 特性の長手方向の不均一さが起因していることを明らかにした。*E–j* 特性が長手方向に不均一になると局所的な発熱を生じ、さらに銅などが配置されていない場合には、熱伝導性が悪いために、局所的に温度上昇が生じ磁束跳躍が誘発される。

次に多重撚り線構造を想定して、ケーブルの撚りピッチを変化させた場合の素線のクエンチ電流特性、および縦磁界効果による高安定化について明らかにした。これにより素線内部電流の均流化が、分布磁界下での安定性確保にも効果的で、これまでに

提案されている均流化条件が有効であることが明らかとなった。しかしながら、縦磁界成分が、均流化条件を与える最適な縦磁界成分より大きくなる場合には、分布磁界磁界不安定性により急激に安定性が低下することが明らかとなった。従って、実際の多重撚り線導体の撚り行程においては、素線がさらされる磁界環境について十分配慮して最適撚りピッチを決定する必要がある。素線のクエンチ特性を知る方法の一つとしては、今回用いた回路モデルと熱伝導方程式の連成解析による解析方法は非常に有効である。

さらに、分布磁界不安定性の抑制には素線に銅などの高い熱伝導性を有する金属を配置することが有効で、銅の場合には体積率約3 %で十分な効果があった。

(3)

酸化物系ツイスト多心テープ線材における電磁界解析のための理論モデルを提案した。本モデルでは E–j 特性はべき乗則によって表現され、さらにその磁界依存性が取り入れられる。効率的なツイスト構造のモデル化として、フィラメント領域においてテンソル表現された導電率を採用する。また、フィラメント同士の磁気的結合が十分抑制される場合には、外部横磁界によって非飽和フィラメントに誘起される動的抵抗について考慮される。

このモデルを、実際に有限要素法に適用しその詳細について述べた。本コードは、実用的な使用条件下での損失特性を効率的に計算することが可能である。特に外部磁界が長手方向に一様である場合には、2次元的な解析が可能である。

(4)

ツイスト多心線において、結合時定数は損失特性を知る上で極めて重要なパラメータである。本研究において、テープ線内部のフィラメント領域を楕円で近似し、結合時定数を導出した。さらに併せて結合損失の解析式を示した。

外部磁界振幅が小さい場合、アスペクト比が小さくなる領域においても、導出した

結合損失と有限要素法による数値解析とは定性的に一致し、有効性が示された。

(5)

テープ線内部のフィラメント領域を楕円で近似し、べき乗則で表現された E–j 特性を考慮に入れたヒステリシス損失の解析式を導出した。この解析式は中心到達磁界よりも十分大きい磁界振幅の場合に適用できる。

磁界がテープ面に垂直、および平行の場合に、有限要素法による数値結果との比較では、解析解はよく一致した。また、測定結果ともよく一致している。ただし、磁界が斜めに加えられる場合は、解析式と測定値が一致する磁界領域が、平行・垂直磁界に比較してより大きい磁界振幅値に現れる。これは、テープ形状に起因する反磁界効果と磁界印加角度が影響しているためである。

また、ヒステリシス損失が周波数に対して、$f^{1/n}$ に比例して増加することが示された。

(6)

Bi 系ツイストテープ線の通電時の損失特性を調べ、特に損失を最小化する最適ツイストピッチについて調べた。この最適ツイストピッチは、縦磁界（自己縦磁界と外部縦磁界の合成磁界）と周方向磁界の比に依存している。

解析結果より、フィラメントのツイストが通電損失の低減においても有効であることがわかった。また、典型的な Bi 系線材（サイズ 3 mm × 0.2 mm）では、I_t/I_c = 0.8 で外部磁界がテープ面に平行に加えられるとき、10 mm あたりに損失を最小化する最適ツイストピッチが存在した。この最適ツイストピッチは、磁界振幅にはあまり依存しない。また、この最適ツイストピッチは電流振幅依存性をもっているが、10 mm 程度のツイストピッチにおける損失は最小値に近い値を示した。一方、最適ツイストピッチは、強いアスペクト比依存性をもっており、アスペクト比が小さくなる場合に、損失を最小化する最適ツイストピッチは小さい値になる傾向にある。

謝辞

本論文の最後として、御指導、御鞭撻賜った雨宮尚之助教授に謝意を表する次第です。本研究の機会を与えて頂いたことに感謝致します。さらに、数々の貴重な御助言、御指導頂いた塚本修巳教授に深謝致す次第です。本研究を進めるにあたり、多くの方々からの貴重な御意見を伺うことができました。中でも、横浜国立大学博士課程修了後、新潟大学へ赴任されました福井聡氏には、御在学中から貴重な御助言ならびに多くの御厚意を賜りました。また、電子技術総合研究所の立石裕氏、柁川一宏氏（現、九州大学）には、電子技術総合研究所の実験室使用の便宜を図って頂き、さらに実験の際にも多大なご協力を賜りました。多くの激励を賜り誠に感謝致しております。

またヘリウムの注文、材料の発注などの実験準備に関連して、塚本研究室の山岸一人助手には多くの御協力を頂けましたことに感謝する次第です。実験の際には研究室の方々の熱い支援を受け、中でも大学院生の小林英治氏には深夜にも及ぶ実験にも快くつきあって頂いたことに心より感謝致します。雨宮研究室諸氏の将来のご活躍をあまねく願っております。

参考文献

1. M. N. Wilson, *Superconducting magnets*, chapter 7, Oxford: Clarendon Press, 1983, pp. 133-158.
2. M. N. Wilson, *Superconducting magnets*, chapter 8, Oxford: Clarendon Press, 1983, pp. 159-199.
3. G. H. Morgan, "Theoretical behavior of twisted multicore superconducting wire in a time-varying uniform magnetic field," *J. Appl. Phys.*, vol. 41, no. 9, pp. 3673-3679, 1970.
4. W. J. Carr Jr., "AC loss in a twisted filamentary superconducting wire," *J. Appl. Phys.*, vol. 45, no. 2, pp. 929-934, 1974.
5. G. Ries, "AC losses in multifilamentary superconductors at technical frequencies," *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-13, no. 1, pp. 524-526, 1977.
6. W. Goldacker, M. Quilitz, B. Obst and H. Eckelmann, "Novel resistive interfilamentary carbonate barriers in multifilamentary low AC loss tapes," presented at ASC-98, MMA-05, Palm Springs, 1998.
7. H. Eckelmann, M. Quilitz, C. Schmidt, W. Goldacker, M. Oomen and M. Leghissa, "AC losses in multifilamentary low AC loss Bi(2223) tapes with novel interfilamentary resistive carbonate barriers," presented at ASC-98, LLB-02, Palm Springs, 1998.
8. W. T. Norris, "Calculation of hysteresis losses in hard superconductors carrying ac: isolated conductors and edges of thin sheets," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 3, pp. 489-507, 1970.
9. K. Funaki, H. Kanetaka, H. Ueda, F. Yoshiya, M. Iwakuma, M. Takeo and K. Yamafuji, "Additional a.c. losses due to alternating magnetic field component longitudinal to strand axis in the Armature winding of fully superconducting generators," *IEEE Transactions on Appl. Superconduct.*, vol. 3, no. 1, pp. 122-125, 1993.

10. N. Amemiya, N. Banno and O. Tsukamoto, "AC losses in multifilamentary superconductors carrying transport current and exposed to external magnetic field - analysis of temporal evolution of current distribution -", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 5, no. 2, pp. 984-987, 1995.
11. 福井　聡, 塚本修巳, 雨宮尚之, "交流用超電導極細多芯線の縦磁界成分および周方向磁界成分による交流損失," 電学論 B, vol. 117, no. 5, pp. 687-699, 1997.
12. N. Banno, N. Amemiya, K. Kajikawa and H. Tateishi, "Ramp rate instability of multifilamentary superconductors due to longitudinal magnetic field," *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 7, no. 2, pp. 235-238, 1997.
13. N. Amemiya, I. Hlásnik and O. Tsukamoto, "Influence of longitudinal magnetic field on thermomagnetic instabilities in a.c. superconducting cables", *Cryogenics*, vol. 33, no 9, pp. 889-899, 1993.
14. 雨宮尚之, 松木隆典, 塚本修巳, I. Hlásnik, "複合多芯線内部の電流分布と磁気的不安定性に与える外部縦磁界・横磁界の影響," 低温工学, vol. 28, no, 7, pp. 24-30, 1993.
15. N. Amemiya, N. Banno and O. Tsukamoto, "AC loss and stability analysis in multifilamentary superconductors based on temporal evolution of current/temperature distribution," *IEEE Trans. Magn.* vol. 32, no. 4, pp. 2747-2750, 1996.
16. N. Amemiya, T. Takao and O. Tsukamoto , "Disturbance characteristics and stability of high current density superconducting wires," *Fusion Engineering and Design*, vol. 20, pp. 339-344, 1993.
17. M. N. Wilson and Y. Iwasa, "Stability of superconductors against localized disturbances of limited magnitude", *Cryogenics*, vol. 18, pp. 17-25, 1978.
18. 宮下, 杉山, 田川, 森合, 鎌田, 福田, "大容量交流用 Nb-Ti 超電導導体の開発," 第58回1998年春季低温工学・超電導学会, B2-9.
19. 木村, 杉本, 坂本, 目黒, 池田, 田中, 宇野, 伊井, "交流用大容量 Nb-Ti 超電導導体の開発 (2)," 第58回1998年春季低温工学・超電導学会, B2-10.

20. 湯村, 山田, 林, 佐藤, 嘉数, "交流用Nb-Ti導体の大容量化の検討-VI-," 第58回 1998年春季低温工学・超電導学会, B2-11.

21. K. Funaki, M. Nakashima, M. Iwakuma, M. Takeo and K. Yamafuji , "Instability in kiloamp class a.c. superconducting cables," *Cryogenics*, vol. 31, pp. 594-597, 1991.

22. 伴野信哉, 雨宮尚之, 塚本修巳, 熊野智幸, "線長手方向に分布する磁界下での交流用超電導線の磁気的不安定性," 電学論B, vol. 188, no. 10, pp. 1144-1151, 1998.

23. T. Yazawa, K. Tasaki, T. Tosaka, T. Kurusu, S. Nomura, H. Maeda, T. Ohkuma, M. Nakade and T. Hara, "AC Loss Reduction of a 6.6kV Superconducting Fault Current Limiter," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 4, pp. 2399-2402, 1996.

24. T. Ogasawara, K. Yasukochi, S. Nose and H. Sekizawa, "Effective resistance of current-carrying superconducting wire in oscillating magnetic fields 1: Single core composite conductor, " *Cryogenicds*, vol. 16, pp. 33-38, 1976.

25. T. Ogasawara, Y. Takahashi, K. Kanbara, Y. Kuboda, K. Yasohama and K. Yasukochi, "Transient field losses in multifilamentary composite conductors carrying dc transport currents," *Cryogenics*, vol. 20, pp. 216-222, 1980.

26. R. A. Hartmann, "A contribution to the understanding of AC losses in composite superconductors", Ph.D. thesis, University of Twente, Enschede, Netherlands, Chapter 2., 1989, pp. 40-46.

27. E. W. Collings, K. R. Markent, M. D. Sumption, John R. Clem, S. A. Boggs and M. V. Parish, "AC losses and dynamic resistance of a high-T_c strand carrying a direct current in a transverse ac magnetic field," *Adv. Cryo. Eng. (Material)*, vol. 38, pp. 883-891, 1992.

28. 低温工学協会, "低温工学・超電導ハンドブック," オーム社, 1993, pp. 1088-1095.

29. 中村博, "Fortran 77 による 伝熱解析プログラム," 2章, サイエンス社, 1989, pp. 4-10.

30. 鳥居槙治, 秋田　調, 塚本修巳, "大容量交流超電導ケーブルの冷却特性," 電学論B,

vol. 111, no. 9, pp. 993-998, 1991.

31. J. L. Duchateau and B. Turck, External field effect on the current distribution in superconducting composites: evaluation of the degradation in adiabatic conditions, *Cryogenics*, vol. 14, pp.545-550, 1974.

32. 船木和夫, 住吉文夫, "多心線と導体," 7 章, 産業図書, 1995, pp. 242-247.

33. N. Banno and N. Amemiya, "Theoretical estimation of twist pitch dependence of ac losses in high-Tc multifilamentary superconducting tapes," *Proc. of MT-15*, pp. 1140-1143, 1998.

34. N. Banno and N. Amemiya, "Theoretical model of twisted high Tc superconducting tapes for numerical AC loss calculations," *J. Appl. Phys.*, 1999, in press.

35. C. J. Christopherson and G. N. Riley, Jr., "Development of twisted high-temperature superconductor composite conductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 66, pp. 2277-2279, 1995.

36. P. F. Herrmann, E. Béghin, G. Duperray, D. Legat, A. Leriche, D. Brouard and P. Manuel, "Development of twisted Bi-2212 and Bi-2223 powder in tube conductors for ac applications," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 7, no. 2, pp. 1679-1682, June 1997.

37. N. Amemiya, K. Miyamoto, N. Banno and O. Tsukamoto, "Numerical analysis of ac losses in high Tc superconductors based on E - j characteristics represented with n - value," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 7, no. 2, pp. 2110-2113, June 1997.

38. N. Amemiya, S. Murasawa, N. Banno and K. Miyamoto, "Numerical modeling of superconducting wires for ac loss calculations," *Physica C*, vol. 310, no. 1-4, pp.16-29, 1998.

39. N. Amemiya, K. Miyamoto, S. Murasawa, H. Mukai and K. Ohmatsu, "Finite element analysis of ac loss in non-twisted Bi-2223 tape carrying ac transport current and / or exposed to dc or ac external magnetic field," *Physica C*, vol. 310, no. 1-4, pp. 30-35, 1998.

40. M. Iwakuma, H. Konomi, K. Funaki, M. Takeo, K. Kuroda, Y. Tanaka, M. Mimura, K. Takita, H. Hiue and K. Yamafuji, " Frequency Dependences of Ac Losses in $(Bi_{1-x}Pb_x)_2Sr_2Ca_2Cu_3O_y$ Bulk Superconductors in Ac Magnetic Field," *Cryogenics*, vol. 34, *ICEC Supplement*, pp.793-796, 1994.

41. J. Passi, M. Lahtinen, D. Aized, S. Fleshler, G. Snitchler and A. P. Malozemoff, " AC Losses in Multifilamentary Bi-2223/Ag Superconducting Tapes," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 4, pp.2792-2795, July 1996.

42. M. Suenaga, Y. Fukumoto, H. J. Wiesmann, P. Haldar and R. Budhani, "Effects of dc transport currents on ac losses by the magnetically induced currents in a Ag sheathed Bi(2223) tape," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 7, no. 2, pp. 1674-1678, June 1997.

43. 伴野信哉, 雨宮尚之, "ツイストされた酸化物超電導多心テープ線材の結合時定数及び結合損失," 平成10年電気学会全国大会講演概要集[5], pp. 284-285.

44. N. Banno and N. Amemiya, "Analytical formulae of coupling loss and hysteresis loss in HTS tape," *Cryogenics*, 1999, in press.

45. A. M. Campbell, "AC losses in high T_c superconductors," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 5, pp. 682-687, 1995.

46. W. J. Carr Jr., "Longitudinal and transverse field losses in multifilament superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-13, no. 1, pp. 192-1997, 1977.

47. C. J. Carpenter, " Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic - field and eddy - current problems at power frequencies" , *Proc. IEE*, vol. 124, no. 11, pp. 1026-1034, November 1977.

48. T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, " Improvements of the **T**-Ω Method for 3-D Eddy Current Analysis" , *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 94-97, January 1988.

49. 中田高義, 高橋則雄, "電気工学の有限要素法　第2版," 第3章, 森北出版株式会社, 1982, pp. 39-63.

50. 渦電流場数値計算技術調査専門委員会, "三次元渦電流場数値計算基礎技術", 電学技報, II 部, No. 384, p. 26, pp. 42-43, p. 49, pp. 54-57, 1991.

51. 中田高義, 高橋則雄, "電気工学の有限要素法　第 2 版," 第 5 章, 森北出版株式会社, 1982, pp. 85-127.

52. 村澤俊一, 横浜国立大学修士論文, 1997.

53. 中田高義, 高橋則雄, "電気工学の有限要素法　第 2 版," 第 7 章, 森北出版株式会社, 1982, pp. 195-225.

54. A. M. Campbell, "A general treatment of losses in multifilamentary superconductors," *Cryogenics*, vol. 22, pp. 3-16, 1982.

55. B. Turck, F. Lefevre, M. Polak and L. Krempasky, "Coupling losses in a rectangular multifilamentary superconducting composite," *Cryogenics*, vol. 22, pp. 441-450, 1982.

56. J. H. Murphy, W. J. Carr, M. S. Walker and P. D. Vecchio, "Field orientation dependence of losses in rectangular multifilamentary superconductors," *Adv. Cryo. Eng.*, vol. 22, pp. 420-427, 1975.

57. J. A. Osborn, "Demagnetizing factors of the general ellipsoid," *Phys. Rev.*, vol. 67, pp. 351-357, 1945.

58. N. Banno, N. Amemiya, K. Mihoichi, M. Ciszek, H. Mukai and K. Ohmatsu, "Penetration loss in BSCCO tape without transport current," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.

59. Y.Yang, T. Hughes, Z. Yi, Z. Beduzx, R.G. Scurlock and L. Jansak, "Studies of self-field AC losses in PbBi-2223 Ag-sheathed tapes," *Cryogenics ICEC Supplement*, vol. 34, pp. 789-792, 1994.

60. J. Passi, M. Polák, P. Kottman, D. Suchon, M. Lahtinen and J. Kokavec, "Electric field and losses in BSCCO-2223/Ag tapes carrying AC transport current," *IEEE Appl. Supercond.*, pp. 713-716, 1995.

61. Y. B. Kim, C. F. Hempstead and A. R. Strnad, "Critical persistent currents in hard

superconductors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, no. 7, pp. 306-309, 1962.

62. M. Ciszek, B. A. Glowacki, S. P. Ashworth, A. M. Campbell and J. E. Evetts, "AC losses of Ag-(Bi,Pb)SrCaCuO-2223 tapes in combination of transverse external magnetic field and transport current," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 5, no. 2, pp.709-712, June 1995.
63. K. Miyamoto, N. Amemiya, N. Banno, M. Torii, E. Hatasa, E. Mizushima, T. Nakagawa, H. Mukai and K. Ohmatsu, "Measurement and FEM analysis of magnetization loss in HTS tapes," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.
64. 船木和夫, 住吉文夫, "多心線と導体," 付録7. D, 産業図書, 1995, pp. 318-320.
65. N. Banno and N. Amemiya, "Numerical analysis of AC loss in high Tc twisted tape carrying AC transport current in external AC magnetic field -effect of twisting on loss reduction-," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.

博士論文に関する発表論文一覧

(1) 正論文

1. N. Amemiya, N. Banno and O. Tsukamoto, "AC losses in multifilamentary superconductors carrying transport current and exposed to external magnetic field - analysis of temporal evolution of current distribution -", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 5, no. 2, pp. 984-987, 1995.
2. N. Amemiya, N. Banno and O. Tsukamoto, "AC loss and stability analysis in multifilamentary superconductors based on temporal evolution of current/temperature distribution," *IEEE Trans. Magn.* vol. 32, no. 4, pp. 2747-2750, 1996.
3. N. Banno, N. Amemiya, K. Kajikawa and H. Tateishi, "Ramp rate instability of multifilamentary superconductors due to longitudinal magnetic field," *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 7, no. 2, pp. 235-238, 1997.
4. 伴野信哉, 雨宮尚之, 塚本修巳, 熊野智幸, "線長手方向に分布する磁界下での交流用超電導線の磁気的不安定性," 電学論 B, vol. 188, no. 10, pp. 1144-1151, 1998.

(2) 国際会議プロシーディングス

5. N. Banno and N. Amemiya, "Theoretical estimation of twist pitch dependence of ac losses in high-Tc multifilamentary superconducting tapes," *Proc. of MT-15*, pp. 1140-1143, 1998.

(3) 受理済み論文

6. N. Banno and N. Amemiya, "Theoretical model of twisted high Tc superconducting tapes for numerical AC loss calculations," *J. Appl. Phys.*, 1999, in press.
7. N. Banno and N. Amemiya, "Analytical formulae of coupling loss and hysteresis loss in HTS tape," *Cryogenics*, 1999, in press.

8. N. Banno, N. Amemiya, K. Mihoichi, M. Ciszek, H. Mukai and K. Ohmatsu, "Penetration loss in BSCCO tape without transport current," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.

9. N. Banno and N. Amemiya, "Numerical analysis of AC loss in high Tc twisted tape carrying AC transport current in external AC magnetic field -effect of twisting on loss reduction-," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.

その他の発表論文

1. N. Amemiya, K. Miyamoto, N. Banno and O. Tsukamoto, "Numerical analysis of ac losses in high Tc superconductors based on *E* - *j* characteristics represented with *n* - value," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 7, no. 2, pp. 2110-2113, June 1997.
2. N. Amemiya, S. Murasawa, N. Banno and K. Miyamoto, "Numerical modeling of superconducting wires for ac loss calculations," *Physica C*, vol. 310, no. 1-4, pp.16-29, 1998.
3. K. Miyamoto, N. Amemiya, N. Banno, M. Torii, E. Hatasa, E. Mizushima, T. Nakagawa, H. Mukai and K. Ohmatsu, "Measurement and FEM analysis of magnetization loss in HTS tapes," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 1999, in press.

付録

付録 2.A　軸対称な回路モデルによる多心線の電磁界解析および熱解析 [15]

2.A. 1　回路方程式の導出

ツイストの施された複合多心線の外部から横磁界を印加すると、外周部超伝導フィラメントと母材を電流パス（ジグザグのループとなる）とする遮へい電流が誘起される。この電流は結合電流といわれる。丸線の場合、結合電流の減衰時定数、すなわち結合時定数は(?)式で与えられており、直流・パルス用、および交流用 NbTi 超伝導線においても、通常は扱う時間スケールに比して十分小さい。つまり、磁気的結合状態になるフィラメント最外周部の遮へい電流層がほとんどなくなり、多心線の内部電流分布はほぼ軸対称とみなすことができる。この場合、Fig. 2.A.1 に示すように、多心線内部のフィラメント領域を軸対称な超伝導フィラメント層とフィラメント層間の等価横方向抵抗からなる、RL 回路でモデル化することができる。

ファラデーの法則から、i 層目、k ピッチ目の閉ループにおいて以下のように回路方程式を記述できる。

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi_{i,k}}{\mathrm{d}t} = -i_{i,k}r_{\mathrm{t},i} + i_{i,k+1}r_{\mathrm{t},i} + v_{i,k} - v_{i+1,k} \tag{2.A.1}$$

$$i_{i,k} = I_{i,k\text{-}1} - I_{i,k}$$

$$v_{i,k} = E_{i,k}\left(l_{\mathrm{p}0}{}^2 + (2\pi R_i)^2\right)^{1/2}$$

ここで、$\Phi_{i,k}$ は閉ループの全鎖交磁束、 $r_{\mathrm{t},i}$ はフィラメント層間の等価横方向抵抗、$I_{i,k}$ は複合多心線の中心から i 層目までに流れている電流の総和、$E_{i,k}$ はフィラメント層に生じたフィラメント方向の電界、$l_{\mathrm{p}0}$ は多心線の撚りピッチ、R_i は i 層目中心の半径、$i_{i,k}$ はフィラメント層間の横断電流、$v_{i,k}$ は i 層目、k ピッチ目に生じた電圧降下を表す。鎖

交磁束 $\Phi_{i,k}$ には、外部縦磁界の寄与分 $\Phi_{ex,z,i,k}$、外部横磁界の寄与分 $\Phi_{ex,t,i,k}$、自己縦磁界の寄与分 $\Phi_{sf,z,i,k}$、周方向磁界の寄与分 $\Phi_{sf,\theta,i,k}$ が含まれる。このうち、外部横磁界の寄与分 $\Phi_{ex,t,i,k}$ はフィラメント内部の電気的中心線のずれに起因する成分であるが、この影響はフィラメントに生じる動的抵抗電圧の形で取り入れることにする。従って、$\Phi_{i,k}$ は以下のように与えられる。

$$\Phi_{i,k} = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S (\boldsymbol{B}_z + \boldsymbol{B}_\theta)\cdot(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\theta) = \int \boldsymbol{B}_z \cdot \mathrm{d}z + \int \boldsymbol{B}_\theta \cdot \mathrm{d}\theta$$
$$= \Phi_{ex,z,i,k} + \Phi_{sf,z,i,k} + \Phi_{sf,\theta,i,k} \qquad (2.A.2)$$

ここで、各磁界成分の寄与分は以下のように与えられる。

$$\Phi_{ex,z,i,k} = \pm\int_{R_i}^{R_{i+1}} B_{ex,z} 2\pi r \mathrm{d}r = \pm B_{ex,z}\pi\left(R_{i+1}{}^2 - R_i{}^2\right) \qquad (2.A.3)$$

$$\Phi_{sf,z,i,k} = -\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\mu_0\,(I_t - I_{i,k})}{l_{p0}} 2\pi r\, \mathrm{d}r = -\frac{\mu_0}{l_{p0}}\pi\left(R_{i+1}{}^2 - R_i{}^2\right)\left(I_t - I_{i,k}\right) \qquad (2.A.4)$$

$$\Phi_{sf,\theta,i,k} = \int_{R_i}^{R_{i+1}}\int_0^{l_{p0}} B_{sf,\theta}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 l_{p0}}{2\pi} I_{i,k} \ln\frac{R_{i+1}}{R_i} \qquad (2.A.5)$$

ここで、(2.A.3) 式の正負の符号はS撚り、Z撚りに対応する。

(2.A.2)〜(2.A.5) を (2.A.1) に代入して整理すると、以下のように電流に関する微分方程式を得ることができる。

$$\frac{\mathrm{d}I_{i,k}}{\mathrm{d}t} =$$
$$\left(\left(I_{i,k+1} - 2I_{i,k} + I_{i,k-1}\right) r_{t,i}\right.$$
$$+ E_{i+1,k}\left(l_{p0}{}^2 + (2\pi R_{i+1})^2\right)^{1/2} - E_{i,k}\left(l_{p0}{}^2 + (2\pi R_i)^2\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\mu_0\pi}{l_{p0}}\left(R_{i+1}{}^2-R_i{}^2\right)\frac{\mathrm{d}I_t}{\mathrm{d}t}\pm\pi\left(R_{i+1}{}^2-R_i{}^2\right)\frac{\mathrm{d}B_{ex,z}}{\mathrm{d}t}\ )$$

$$/\left(\frac{\mu_0 l_{p0}}{2\pi}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}+\frac{\mu_0\pi}{l_{p0}}\left(R_{i+1}{}^2-R_i{}^2\right)\right) \qquad (2.A.6)$$

次に Fig. 2.A.2 のように、多心線内部でフィラメントを含む層が半径方向に対し占有率 α で存在し、フィラメントを含む層の中に占有率 β で超伝導体が存在するモデルで、フィラメント層間の横断抵抗を導出する。図中の R_t はフィラメント領域の半径、a_s はフィラメントを含む層の厚さである。$a_s = \alpha\Delta R$ として与えられるので、母材の等価横断抵抗は次式のように計算される。

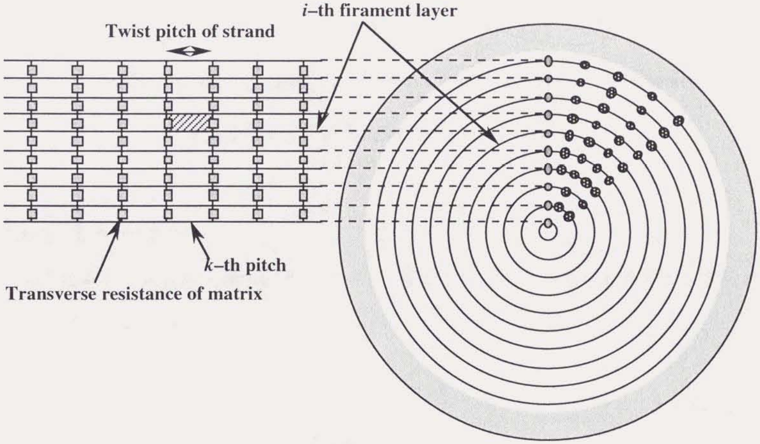


Fig. 2.A.1 Electric circuit consisting of filament layers and equivalent transverse resistance

$$r_{t,i} = \int_{R_i+\frac{a_s}{2}}^{R_{i+1}-\frac{a_s}{2}} \frac{\rho}{S} \mathrm{d}r = \int_{R_i+\frac{a_s}{2}}^{R_{i+1}-\frac{a_s}{2}} \frac{\rho}{2\pi r \beta l_{p0}} \mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\pi \beta l_{p0}} \ln \frac{R_{i+1}-\frac{a_s}{2}}{R_i+\frac{a_s}{2}} \tag{2.A.7}$$

ここで、ρは母材の抵抗率を表す。

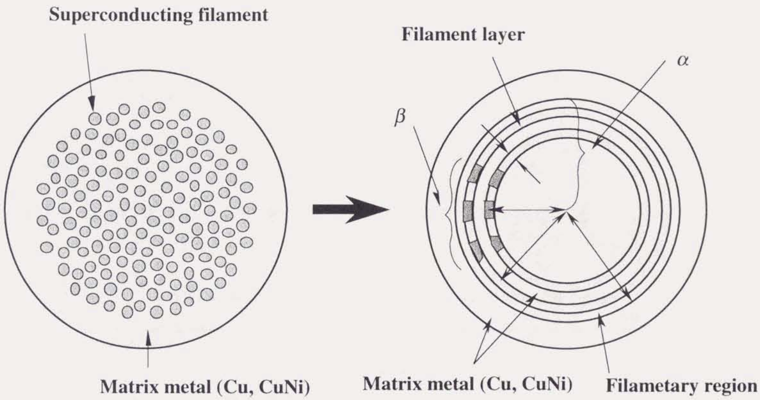


Fig. 2.A.2　Modeling of filamentary region

2.A. 2　温度分布解析

以下に示す一次元熱伝導方程式を用いて、長手方向の温度分布を計算する。断面内の温度は一様とする。

$$S\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right) - S\gamma C\frac{\partial T}{\partial t} - Pq + Sg = 0 \tag{2.A.8}$$

ここで、T (K) は温度、γC (J/m^{3}K) は導体の体積比熱、κ (W/mK) は熱伝導率、S (m^2)

は多心線の断面積、P (m) は冷却周囲長、q (W/m^2) は単位面積当たりの液体ヘリウムへの熱伝達、T_0 (K) はヘリウム温度、g (W/m^3) は発熱量を表す。計算に使用したγC、κの温度依存をTable A.I に示す [16], [28]。

(2.A.7) 式の偏微分方程式の解法には、陰的手法であるクランク-ニコルソン法を用いた。以下に差分式を示す。

$$
\begin{aligned}
&-\left(1+\frac{\kappa_z \Delta t}{\gamma C_z \Delta z^2}\right)T_z^{n+1}+\left(\frac{\kappa_z \Delta t}{2\gamma C_z \Delta z^2}+\frac{(\kappa_{z+1}-\kappa_{z-1})\Delta t}{2(2\Delta z)^2 2\gamma C_z}\right)T_{z+1}^{n+1}+\left(\frac{\kappa_z \Delta t}{2\gamma C_z \Delta z^2}-\frac{(\kappa_{z+1}-\kappa_{z-1})\Delta t}{2(2\Delta z)^2 2\gamma C_z}\right)T_{z-1}^{n+1}+\left(1-\frac{\kappa_z \Delta t}{\gamma C_z \Delta z^2 2\gamma C_z}\right)T_z^n \\
&+\left(\frac{\kappa_z \Delta t}{2\gamma C_z \Delta z^2}+\frac{(\kappa_{z+1}-\kappa_{z-1})\Delta t}{2(2\Delta z)^2 2\gamma C_z}\right)T_{z+1}^n+\left(\frac{\kappa_z \Delta t}{2\gamma C_z \Delta z^2}-\frac{(\kappa_{z+1}-\kappa_{z-1})\Delta t}{2(2\Delta z)^2 2\gamma C_z}\right)T_{z-1}^n-\frac{\Delta t}{2\gamma C_z}\cdot\frac{P}{S}\left(q_z^{n+1}+q_z^n\right)+\frac{\Delta t g^n}{\gamma C_z}=0
\end{aligned}
\tag{2.A.9}
$$

上式を全計算領域に渡って整理すれば、連立一次方程式が得られる。

TABLE A.1　Thermal conductivity and specific heat

Thermal conductivity

Copper

$\kappa_{Cu} = 4.09\times10^2 T^{0.57}$ [W/mK]

CuNi

$\kappa_{CuNi} = 1.3\times(T/4.0)^{1.632}$ [W/mK]

Specific heat

Copper

$\gamma C_{Cu} = 3.00\times10 T^{2.5}$ [J/m^{3}K]

CuNi

$\gamma C_{CuNi} = 1001.3\times(T/4.0)^{1.522}$ [J/m^{3}K]

NbTi

$\gamma C_{NbTi} = 1.03\times10^4 T_c \exp(-1.5T_c/T) + 1.32\times10 T^{3.0}$ [J/m^{3}K]

付録 4.A　フィラメントにおける電界式の妥当性

フィラメントが一本だけ外部磁界中におかれている場合について、有限要素法を用いて電界と損失の断面平均を計算して、解析式 (4. 7)、(4. 53)、(4. 57) と比較し妥当性を検証する。有限要素解析では、$\lambda = 1$ とする。従って (4. 57) 式がそのまま全損失量となる。有限要素解析では、実際のフィラメント形状は複雑であるが、簡単のために楕円形に近似している。その長径、および短径は 300 μm、20 μm とする。この値は解析式で用いられる長方形フィラメントの幅と厚さに等しい。外部磁界振幅は 50 mT、振幅は 50 Hz で、フィラメント面に平行に加えられるものとする。フィラメントの到達磁界 B_{pf} は 2.5 mT であるので、外部磁界は到達磁界に対して十分大きい。また、フィラメントの輸送電流はフィラメントの臨界電流値の半分とする。外部磁界はフィラメント輸送電流と同相である。Fig. 4.A.1 はフィラメント断面平均の電界、および損失の時間変化をしている。解析式と FEM による数値解がよく一致している。

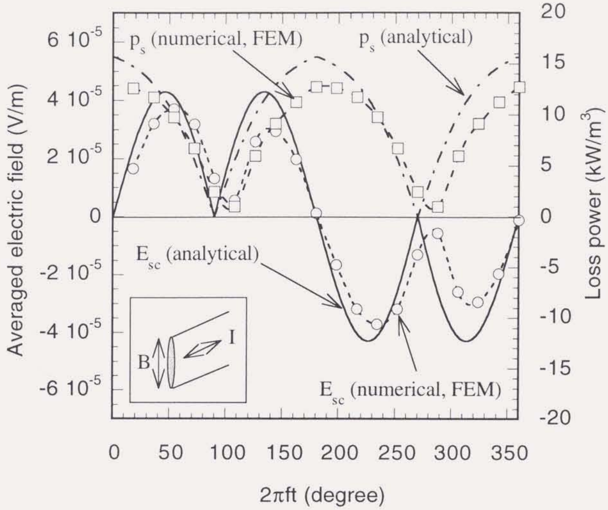


Fig. 4.A.1 Temporal evolution of electric fields and power densities in the filament carrying AC current in AC magnetic field parallel to the filament face, obtained by FEM and analytically.