

時間依存型 1 次元離散時間量子ウォークの極限定理

(Limit theorems for the time-dependent coined  
quantum walk in one dimension)

国立大学法人 横浜国立大学大学院  
工学府

町田 拓也  
(Takuya Machida)

2010年3月





# 目次

第1章	あらし	1
第2章	時間依存型量子ウォークの定義	7
第3章	先行結果	13
3.1	時間依存型量子ウォークの先行結果 . . . . .	13
3.2	1周期量子ウォークの極限分布 . . . . .	16
第4章	2周期量子ウォークの極限分布	17
4.1	モデル . . . . .	17
4.2	定理と証明 . . . . .	18
4.3	定理の考察 . . . . .	25
第5章	特殊な場合の時間依存型量子ウォーク	29
5.1	ケース1 . . . . .	29
5.2	ケース2 . . . . .	33
第6章	まとめと展望	35
6.1	まとめ . . . . .	35
6.2	展望 . . . . .	37
	参考文献	40

## 記号の説明

本資料で使用する記号とその意味あるいは読み方を、以下に挙げる.

$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$T$	転置作用素
$*$	共役転置作用素
$i$	虚数単位 ( $i = \sqrt{-1}$ )
$\mathbb{E}(X)$	確率変数 $X$ の平均値
$O(\cdot)$	オーダー量
$ \cdot\rangle$	ケットベクトル【読み】

# 第1章 あらまし

離散時間量子ウォークのモデルは、1988年に Gudder [21] により導入された。その後、1996年に Meyer [47] が量子セルオートマトンとして (Gudder とは別に) 離散時間モデルを導入した。さらに、2001年に Ambainis et al. [3] により再導入され、その性質が重点的に研究された。量子ウォークは、ランダムウォークの量子版と考えられる。ランダムウォークの簡単なモデルの例として、時刻  $t (= 0, 1, 2, \dots)$  で、 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  上のある場所  $x$  に存在する粒子が、時刻  $t+1$  において確率  $p$  で  $x-1$  に、確率  $q (= 1-p)$  で  $x+1$  に移動するモデルが挙げられる。一方、量子ウォークは確率  $p, q$  の代わりに、 $2 \times 2$  の確率振幅行列  $P, Q$  を考える。但し、 $U = P + Q$  はユニタリ行列である。

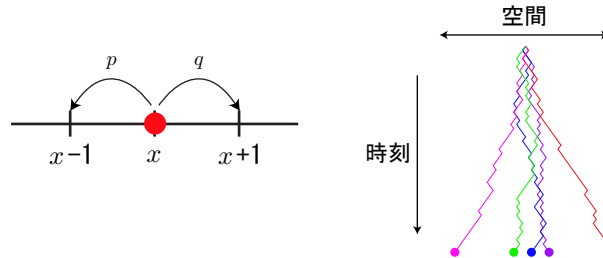


図 1.1: ランダムウォークのダイナミクス

量子ウォークとランダムウォークの違いの1つは、各場所における粒子の存在確率である。粒子が時刻0で原点から出発した場合、時刻500における確率分布の例を図1.2に挙げる。これらは、原点に関し対称な分布(以下簡単に、対称な分布と呼ぶ)となっている。

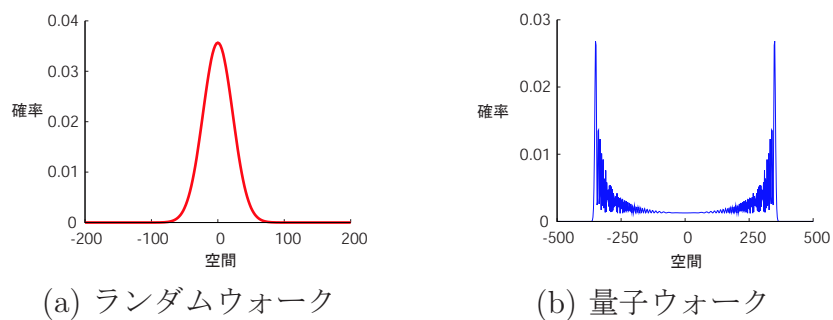


図 1.2: 原点について対称な確率分布の例. 時刻 500.

同様に、原点に関し非対称な分布(以下簡単に、非対称な分布と呼ぶ)を図1.3で紹介する。

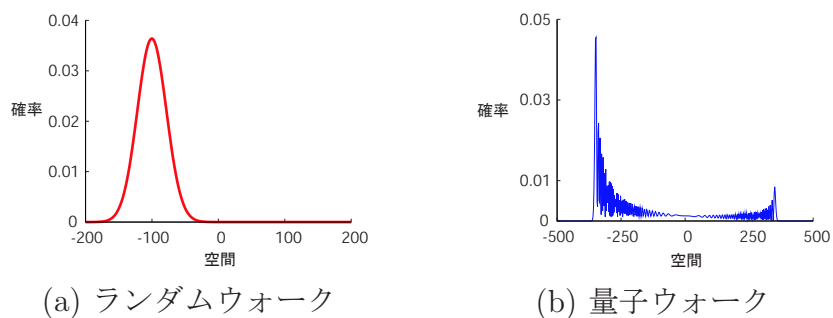
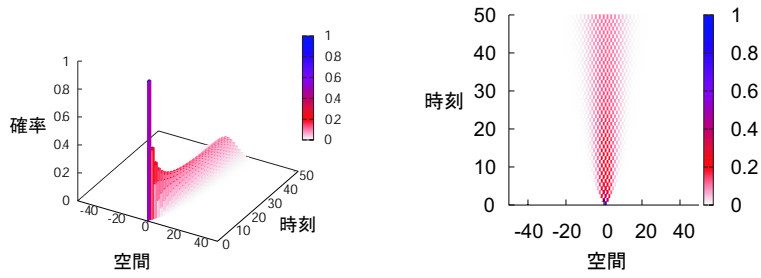


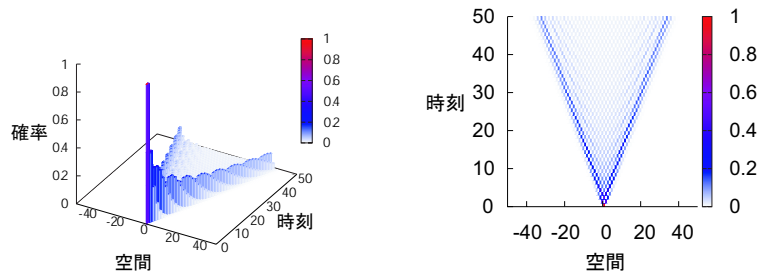
図 1.3: 原点について非対称な確率分布の例. 時刻 500.

粒子が原点から出発したとき、確率分布はランダムウォークの場合  $O(\sqrt{t})$  で広がるが、量子ウォークの場合は  $O(t)$  となる。ここで、 $O(\cdot)$  はオーダー量を表す記号である。図 1.4, 1.5 に図 1.2 に対応する確率分布の時系列を挙げる。確率分布の広がり方の違いがわかる。



左図を密度プロットにしたもの

図 1.4: 図 1.2(a) に対応する確率分布の時系列



左図を密度プロットにしたもの

図 1.5: 図 1.2(b) に対応する確率分布の時系列

このことは、時刻  $t$  における粒子の場所を  $X_t$  で表せば、標準偏差  $\sigma(t) = \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2}$  に反映される。ここで、 $\mathbb{E}(Y)$  は確率変数  $Y$  の期待値 (平均値) を意味する。ランダムウォークでは  $\sigma(t) \sim \sqrt{t}$  であり、量子ウォークは  $\sigma(t) \sim t$  である。図 1.4, 1.5 に対応する、時間に対する標準偏差  $\sigma(t)$  の挙動は、図 1.6 のようになっている。但し、対称な分布に対する標準偏差なので、任意の時刻  $t$  で  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  となっていることを注意しておく。

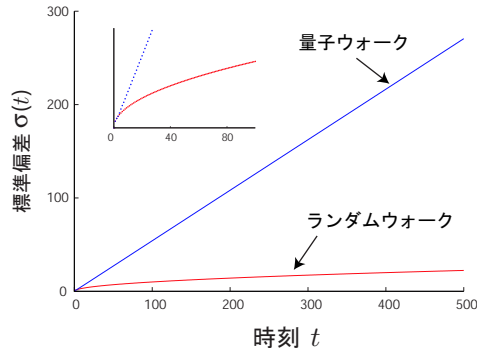


図 1.6: 標準偏差  $\sigma(t)$  の時間に対する挙動

ここで、本研究の目的でもある極限分布について少し触れておく。ランダムウォークの場合、よく知られているように中心極限定理から、 $X_t/\sqrt{t}$  の分布は  $t \rightarrow \infty$  で、正規分布 (ガウス分布) に収束する (ド・モアブル-ラプラスの定理)。例えば、対称な分布 ( $p = q = 1/2$ ) の場合は、 $-\infty < a < b < \infty$  に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(a \leq X_t/\sqrt{t} \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

となる。一方、量子ウォークでは、 $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  としたとき<sup>1</sup>、対称な分布に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(a \leq X_t/t \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\pi(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} dx$$

が成立する。但し、 $-1/\sqrt{2} \leq a < b \leq 1/\sqrt{2}$  である。

<sup>1</sup>アダマールウォークと呼ばれる。量子アルゴリズムのアダマールゲートに対応し、広く研究されている。



量子コンピュータとの関わりで、量子ウォークを適用した量子探索アルゴリズムの研究も近年盛んに行われている。良く知られた量子探索アルゴリズムとして、Grover のアルゴリズムがある。このアルゴリズムは、 $N$  個の中から目的のものを1つ探し出すアルゴリズムである。古典的に探索した場合、探索に掛かる平均回数は  $O(N)$  であるが、Grover の量子探索アルゴリズムを用いれば、 $O(\sqrt{N})$  の探索回数で済むことが知られている。Grover のアルゴリズムと同様に、様々なグラフ上(例えば、格子、超立方格子、完全グラフ、NAND ツリー、Glud ツリー)で量子ウォークを展開し、古典的な探索よりも少ない探索回数で、ターゲットを探し出せることが近年の研究で次第に明らかになってきている [2, 8, 9, 56, 62]。なお、Grover のアルゴリズムは、完全グラフ上での量子ウォークを用いた量子探索アルゴリズムと考えられる。また、量子物理とのつながりでは、Oka et al. [54] による強相関電子対の話題が挙げられる。彼らの研究結果によると、Landau-Zener 遷移を反射壁をもつ半直線上の量子ウォークとして考えることができ、波動関数の局在化を量子ウォークの観点で示した。本論文では扱わないが、1997年に Farhi and Gatmann [15] により導入された連続時間の量子ウォークモデルもある。連続時間の量子ウォークの時間発展ルールは、シュレディンガー方程式で記述され、量子散乱などの物理現象との対応が考えられる。連続時間モデルに関しては、任意のグラフ上で量子ウォークの構成が比較的簡単にできるため、Erdős-Rényi のランダム・グラフ、スモールワールド、スケールフリー・ネットワークといったような、複雑ネットワーク上での数値計算結果がある [52, 68, 69]。なお、複雑ネットワーク上の離散時間量子ウォークはモデルが煩雑で、現時点では顕著な研究結果はない<sup>2</sup>。しかし、量子コンピュータの研究に伴い、複雑ネットワーク上の離散時間量子ウォークの解析は将来的に必要である。また、量子ウォークに関するレビューがいくつかある [2, 30, 31, 35, 64, 65, 71]。

本研究では、量子ウォークの時間発展作用素であるユニタリ行列が時間に依存するモデルを考える。時間依存型の量子ウォークは、Ribeiro et al. [57] により導入された。彼らはユニタリ行列が、周期的な時間発展、ランダムな時間発展、フィボナッチ数列に従って時間発展する場合のモデルに対し、数値的な結果を与えている。一方、Machay et al. [46] もランダムな時間発展に対しては同様に数値的な結果を与えている。ランダムな時間発展モデルにおけるこれらの数値的な結果に対し、Konno [34]

<sup>2</sup>複雑ネットワーク上の離散時間量子ウォークに関しては、過去に本研究室の町田、瀬川、今野により数値的な結果だけは出されているが、現時点では特に公にはなっていない。

は任意の時刻における確率分布の累積平均が二項分布になるという理論的な結果を与えた。また、ユニタリ行列が空間に依存するタイプを導入した Wójcik et al. [67] との対比として、Bañuls et al. [4] が、ある連続極限での時間依存型量子ウォークの確率分布の局在化を議論している。空間依存型の最近の結果としては、Konno [38] の結果がある。本論文で紹介する主な結果は、ユニタリ行列が直交行列でかつ、2周期で時間発展する場合の、時間依存型量子ウォークの極限分布である。さらに、ある条件付きで時間発展する場合の極限定理も導出した。計算方法としては、Grimmett et al. [20] によるフーリエ変換を用いた。

この後、第2章にて時間依存型離散時間量子ウォークの定義を説明する。1次元格子上の量子ウォークでは、各場所に確率振幅ベクトルとしての2次元複素ベクトルを考える。これは、量子ビットと呼ばれることもある。また、時間発展作用素は2次のユニタリ行列で与えられる。このユニタリ行列によって、各場所の確率振幅ベクトルが時間発展していく。ランダムウォークでは、重みは実数(確率)であったのが、量子ウォークでは行列となる。本研究では、時間発展作用素のユニタリ行列が、時間発展する場合を考える。第3章では、この章でも簡単に紹介した時間依存型モデルに関する先行結果を、もう少し詳しく紹介する。加え、通常の(1周期)量子ウォーク、つまり時間に依存しないモデルに対する極限分布を挙げる。そして、第4章で本研究の主結果である2周期量子ウォークの極限定理を挙げる。モデルは2つの異なる直交行列が、時間に対し交互に量子ウォークに作用する。2つの直交行列の行列式の正負が一致するかどうかで、極限分布の挙動は異なる。行列式の正負が一致する場合、確率分布が原点に関し対称なとき、極限分布は2種類の直交行列の一方のみで決定される。2種類の時間発展作用素が作用しているにもかかわらず、一方のみで決定されるのは大変興味深い。また、行列式の正負が異なる場合は、両方の行列に依存する極限分布となる。さらに、特殊な場合の時間依存型量子ウォークの極限定理を、第5章にて紹介する。ここでは、ある条件のもとで、ユニタリ行列を時間発展させた場合を考える。任意の時刻での確率分布は、ユニタリ行列の時間発展パラメータが作用した初期状態で出発した、通常の量子ウォークの分布に帰着することがわかる。最後に、第6章にて、まとめと今後の展望について考察する。なお、この論文は、主に Machida and Konno [45] にもとづいて構成されている。

## 第2章 時間依存型量子ウォーク の定義

ここでは、本研究のテーマである1次元格子上の時間依存型離散時間量子ウォークの定義を説明する．まず，時刻  $t (t = 0, 1, 2, \dots)$  において各場所  $x (\in \mathbb{Z})$  に，確率振幅ベクトル (2次複素ベクトル)  $|\psi_t(x)\rangle \in \mathbb{C}^2$  を考える．但し， $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合である．この確率振幅ベクトルは，量子ビットと呼ばれることもある．

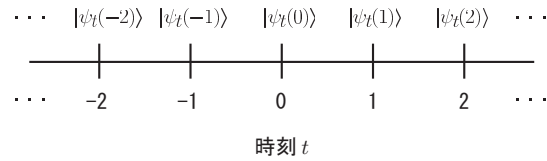


図 2.1: 量子ビット

量子ウォークの時間発展を定義するために，時刻  $t$  に依存したユニタリ行列

$$U_t = \begin{bmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{bmatrix}$$

を導入する．但し， $a_t, b_t, c_t, d_t \in \mathbb{C}$  であり， $a_t b_t c_t d_t \neq 0$  とする．ユニタリ行列の定義

$$U_t U_t^* = U_t^* U_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} |a_t|^2 + |c_t|^2 &= |a_t|^2 + |b_t|^2 = |b_t|^2 + |d_t|^2 = |c_t|^2 + |d_t|^2 = 1, \\ a_t \bar{b}_t + c_t \bar{d}_t &= a_t \bar{c}_t + b_t \bar{d}_t = 0, \quad c_t = -\Delta_t \bar{b}_t, \quad d_t = \Delta_t \bar{a}_t \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで， $*$  は共役転置作用素， $\bar{z}$  は  $z \in \mathbb{C}$  の共役複素数， $\Delta_t = \det U_t$  である．また，任意のユニタリ行列  $U_t$  に対し，ある  $\alpha_t, \beta_t, \delta_t, \theta_t \in$

$[0, 2\pi)$  が存在して,

$$U_t = e^{i\delta_t} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_t} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_t & \sin \theta_t \\ \sin \theta_t & -\cos \theta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\beta_t} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_t} \end{bmatrix}$$

とパラメータ表示することもできる. 但し,  $i$  は虚数単位, 即ち  $i = \sqrt{-1}$  である. さらに,  $U_t$  を以下の  $P_t, Q_t$  に分ける.

$$P_t = \begin{bmatrix} a_t & b_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_t & d_t \end{bmatrix}.$$

量子ウォークの時間発展は以下で定義される.

$$|\psi_{t+1}(x)\rangle = P_t |\psi_t(x+1)\rangle + Q_t |\psi_t(x-1)\rangle. \quad (2.1)$$

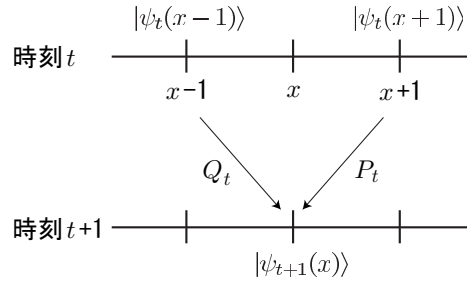


図 2.2: 時間発展のダイナミクス

また, 粒子が時刻  $t$  で場所  $x$  に存在する確率  $P(X_t = x)$  は, 以下で定義される.

$$P(X_t = x) = \|\psi_t(x)\|^2 = \langle \psi_t(x) | \psi_t(x) \rangle. \quad (2.2)$$

ここで,  $X_t$  は時刻  $t$  での粒子の場所を意味する.

本研究では初期状態として、以下のようにとる.

$$|\psi_0(x)\rangle = \begin{cases} T[\alpha, \beta] & (x = 0) \\ T[0, 0] & (x \neq 0) \end{cases}. \quad (2.3)$$

但し,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  は  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  を満たすものとする.  $T$  は転置作用素である. 式 (2.2) のような初期状態は, 原点から出発する量子ウォークを意味する.

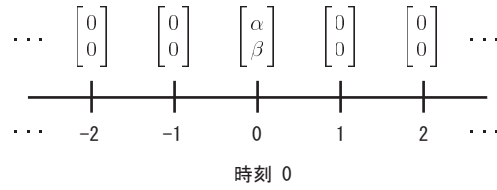


図 2.3: 初期状態

確率分布の簡単な例として,  $t = 2$  の場合を考える.

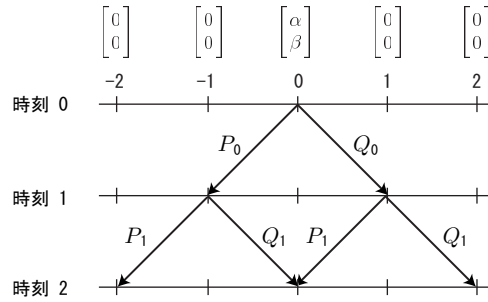


図 2.4:  $t = 2$  の場合

この場合, 確率分布は

$$\begin{cases} P(X_2 = -2) &= \|P_1 P_0 |\psi_0(0)\rangle\|^2 \\ P(X_2 = 0) &= \|(P_1 Q_0 + Q_1 P_0) |\psi_0(0)\rangle\|^2 \\ P(X_2 = 2) &= \|Q_1 Q_0 |\psi_0(0)\rangle\|^2 \end{cases}$$

となる. 但し,  $x \neq 0, \pm 2$  に対しては,  $P(X_2 = x) = 0$  となっている.

時間発展の式 (2.1) は、以下に述べるように無限行列で表現されることもある。まず、時刻  $t$  における量子ウォークのシステム全体の確率振幅として

$$|\Psi_t\rangle = {}^T[ \dots, |\psi_t(-2)\rangle, |\psi_t(-1)\rangle, |\psi_t(0)\rangle, |\psi_t(1)\rangle, |\psi_t(2)\rangle, \dots ]$$

を考える。さらに、ユニタリ行列

$$\tilde{U}_t = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & O & P_t & O & O & O & \dots \\ \dots & Q_t & O & P_t & O & O & \dots \\ \dots & O & Q_t & O & P_t & O & \dots \\ \dots & O & O & Q_t & O & P_t & \dots \\ \dots & O & O & O & Q_t & O & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

を導入する。但し、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。システム全体の確率振幅の時間発展は

$$|\Psi_{t+1}\rangle = \tilde{U}_t |\Psi_t\rangle \quad (2.4)$$

となる。物理的な観点からみると、量子系はシステム全体が発展する印象が強いので、こちらの関係式 (2.4) のほうが理解しやすいこともある。しかし、式 (2.1) と同値であることはいうまでもない。

さて、本研究の諸結果を証明するのに使われているフーリエ変換について、以下記述する。量子ウォークのフーリエ変換は、Grimmett et al. [20] により導入および研究された。空間的に一様で、正則なグラフ上での量子ウォークの解析にはしばしば使われており、時間依存型量子ウォークにもよく馴染む。1次元格子上的量子ウォークに注目し、フーリエ変換を説明する。まず、以下のフーリエ変換を考える。

$$|\hat{\Psi}_t(k)\rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\psi_t(x)\rangle$$

但し、 $k$  は  $[0, 2\pi)$  の波数とする (つまり、 $k \in [0, 2\pi)$ )。波数空間での  $|\hat{\Psi}_t(k)\rangle$  は2次複素ベクトルであり、フーリエ変換なのでシステム全体の確率振

幅に関する情報を全てもっている。なぜなら、フーリエ逆変換

$$|\psi_t(y)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iky} |\hat{\Psi}_t(k)\rangle dk \quad (2.5)$$

により、任意の場所  $y \in \mathbb{Z}$  の確率振幅ベクトルが得られるからである。よって、 $|\hat{\Psi}_t(k)\rangle$  は系全体の確率振幅を表す無限ベクトル  $|\Psi_t\rangle$  と等価である。また、時間発展のダイナミクスは

$$|\hat{\Psi}_{t+1}(k)\rangle = \hat{U}_t(k) |\hat{\Psi}_t(k)\rangle \quad (2.6)$$

となる。ここで、

$$\hat{U}_t(k) = \begin{bmatrix} e^{ik} a_t & e^{ik} b_t \\ e^{-ik} c_t & e^{-ik} d_t \end{bmatrix}$$

である。式 (2.6) を逐次用いることで、

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_t(k)\rangle &= \hat{U}_{t-1}(k) |\hat{\Psi}_{t-1}(k)\rangle \\ &= \hat{U}_{t-1}(k) \hat{U}_{t-2}(k) |\hat{\Psi}_{t-2}(k)\rangle \\ &= \dots \\ &= \hat{U}_{t-1}(k) \hat{U}_{t-2}(k) \dots \hat{U}_0(k) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

が導かれる。但し、

$$|\hat{\Psi}_0(k)\rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\psi_0(x)\rangle$$

であった。特に、本論文では初期状態を式 (2.3) で与えるので、

$$|\hat{\Psi}_0(k)\rangle = |\psi_0(0)\rangle = {}^T[\alpha, \beta]$$

となる。式 (2.6) は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_{t+1}\rangle &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\psi_{t+1}(x)\rangle \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} (P_t |\psi_t(x+1)\rangle + Q_t |\psi_t(x-1)\rangle) \\ &= e^{ik} P_t \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ik(x+1)} |\psi_t(x+1)\rangle + e^{-ik} Q_t \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ik(x-1)} |\psi_t(x-1)\rangle \\ &= e^{ik} P_t |\hat{\Psi}_t(k)\rangle + e^{-ik} Q_t |\hat{\Psi}_t(k)\rangle \\ &= (e^{ik} P_t + e^{-ik} Q_t) |\hat{\Psi}_t(k)\rangle \\ &= \hat{U}_t(k) |\hat{\Psi}_t(k)\rangle. \end{aligned}$$

2行目の等式は時間発展の式(2.1)による. 計算のポイントは,  $\mathbb{Z}$  で和をとっている(3行目)ことである. つまり,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ik(x \pm 1)} |\psi_t(x \pm 1)\rangle &= \sum_{x \mp 1 \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\psi_t(x)\rangle \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\psi_t(x)\rangle = |\hat{\Psi}_t(k)\rangle \end{aligned}$$

により, 表現が  $|\hat{\Psi}_t(k)\rangle$  に統一できる(4行目等式). また, 確率  $P(X_t = x)$  は式(2.2), 式(2.7)およびフーリエ逆変換の式(2.5)により,

$$P(X_t = x) = \left\| \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{U}_{t-1}(k) \hat{U}_{t-2}(k) \cdots \hat{U}_0(k) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \right\|^2$$

と計算される.



## 第3章 先行結果

時間依存型量子ウォークに関する先行結果は少ない。特に、厳密な結果はほとんどない。ここでは、時間依存型量子ウォークの先行結果を簡単に紹介し、その後、本研究のモデルでも特殊な場合である1周期量子ウォーク、つまり通常の(時間に依存しない)量子ウォークの極限分布を挙げる。なお、ここで紹介する結果は、全て1次元格子上の話である。

### 3.1 時間依存型量子ウォークの先行結果

時間依存型量子ウォークに関するいくつかの先行結果を簡単に紹介する。詳細は各原論文を参考にして頂きたい。

#### 数値的な結果

- Mackay et al.: J. Phys. A **35** (2002) [46]

– モデル:  $\{U_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  はランダムな数列

$$U_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\theta_t} \\ e^{-i\theta_t} & -1 \end{bmatrix}$$

- 主な結果: 確率分布の累積平均が、古典的な確率分布になることを示唆 (図 3.1).

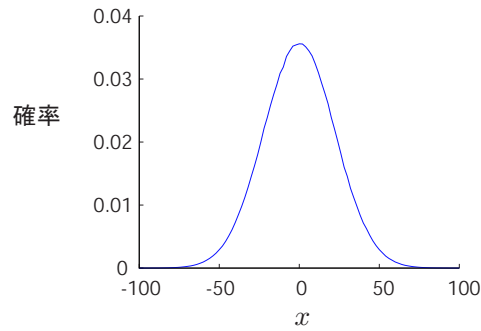


図 3.1: 確率分布 (時刻 500) の累積平均. 但し,  $\theta_t$  は  $[0, 2\pi)$  の独立な一様分布.

• Ribeiro et al.: PRL **93** (2005) [57]

- モデル:  $\{U_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  は周期的, 準周期的, ランダム, フィボナッチ数列<sup>1</sup>

$$U_t = \begin{bmatrix} \cos \theta_t & \sin \theta_t \\ \sin \theta_t & -\cos \theta_t \end{bmatrix}$$

- 主な結果: 標準偏差の時刻に対するオーダーが, 変化することを示唆.

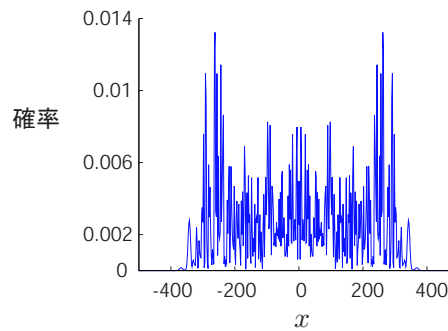


図 3.2: フィボナッチ数列に従った場合の確率分布 (時刻 500)

<sup>1</sup>文字列としてのフィボナッチ数列を考え, 数列  $\{\theta_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  を構成している. 数列  $\{\theta_t\}$  が, フィボナッチ数列の漸化式  $\theta_{t+2} = \theta_{t+1} + \theta_t$  を満たしているわけではない. 詳細は原論文を参照.

### 理論的な結果

- Bănuls et al.: PRA **73** (2006) [4]

– モデル:  $\{U_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  は周期的<sup>2</sup>, 準周期的

$$U_t = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} e^{-i\theta t} & \sqrt{1-\rho} e^{-i\theta t} \\ \sqrt{1-\rho} e^{i\theta t} & -\sqrt{\rho} e^{i\theta t} \end{bmatrix}$$

– 主な結果: 連続極限での確率分布の近似的解析.

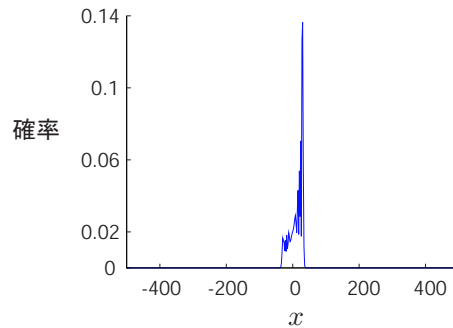


図 3.3: Bănuls et al. モデルでの確率分布 (時刻 500) の例.  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = 2\pi/150$ .

### 厳密な結果

- Konno: Fluctuation and Noise Letters **5** (2005) [34]

– モデル:  $\{U_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  はランダムな数列

$$U_t = \begin{bmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{bmatrix}$$

但し,  $\mathbb{E}(|a_t|^2) = \mathbb{E}(|b_t|^2) = 1/2$ ,  $\mathbb{E}(a_t \bar{c}_t) = 0$  とする.

– 主な結果: Mackay et al. や Ribeiro et al. のモデルを含むような特殊なクラスに対し, 任意の時刻での確率分布の累積平均が, 二項分布になることを証明.

<sup>2</sup>本研究でも周期的なモデルを扱っているが, Bănuls et al. とは異なるモデルである.

### 3.2 1周期量子ウォークの極限分布

ユニタリ行列が時間に依存しない場合 (1周期の量子ウォークの場合), つまり

$$U_t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対しては, Konno [32, 33]により極限分布が計算されている. 但し,  $abcd \neq 0$ とし, 初期状態は式 (2.3) で与える. 時刻  $t$  での粒子の場所  $X_t$  に対し,  $X_t/t$  は密度関数

$$g(x) = f_K(x; a) \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta)}{|a|^2} \right\} x \right] \quad (3.1)$$

をもつ確率変数に弱収束する. ここで,

$$f_K(x; a) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - x^2)\sqrt{|a|^2 - x^2}} I_{(-|a|, |a|)}(x) \quad (3.2)$$

であり,

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

である. なお, 対称な分布のときは, 式 (3.1) の中括弧  $\{ \}$  の中身が 0 となっている. 図 3.4 に,  $U_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  としたときの確率分布と密度関数  $g(x)$  を挙げる.

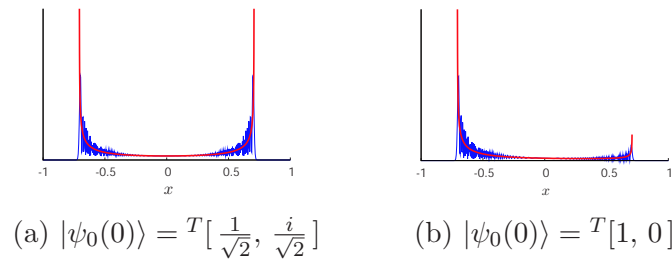


図 3.4: 極限分布の密度関数  $g(x)$  (太線) と時刻 500 の確率分布の比較 (細線)

## 第4章 2周期量子ウォークの極限分布

ここでは、ユニタリ行列が直交行列でかつ、2周期で時間発展する場合の極限定理を紹介する。2つの異なる直交行列が、時間に関し交互に量子ウォークに作用するが、その極限分布は2種類の直交行列の一方のみで決定される場合がある。2種類の時間発展作用素が作用しているにもかかわらず、一方のみで決定されるのは大変興味深い。ランダムウォークでは、粒子が左右に移動する確率が時間に関し2周期で時間発展した場合、中心極限定理により、極限分布は2つの異なる推移確率の両方に依存することが分かる。量子ウォークとランダムウォークとでは、2周期にした場合の極限分布は、重みへの依存の仕方が異なる。なお、ここで紹介する定理が本研究の主結果であり、Machida and Konno [45] にもとづいている。

### 4.1 モデル

直交行列

$$H_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

に対し、時間発展作用素のユニタリ行列  $U_t (t = 0, 1, 2, \dots)$  を以下のようにとる。

$$U_t = \begin{cases} H_0 & (t = \text{偶数}) \\ H_1 & (t = \text{奇数}) \end{cases}$$

## 4.2 定理と証明

2周期量子ウォークに対し，以下の極限定理を得る．定理の証明の計算には，フーリエ変換を用いている．

定理. 4.2.1.  $a_0 b_0 c_0 d_0, a_1 b_1 c_1 d_1 \neq 0$  とする．

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z$$

ここで， $\Rightarrow$  は弱収束を意味する．また， $Z$  は次の密度関数  $f(x)$  をもつ．

(i)  $\det(H_1 H_0) = 1$  の場合

$$f(x) = f_K(x; a_\xi) \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) b_0}{a_0} \right\} x \right].$$

但し， $|a_\xi| = \min\{|a_0|, |a_1|\}$ .

(ii)  $\det(H_1 H_0) = -1$  の場合

$$f(x) = f_K(x; a_0 a_1) \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) b_0}{a_0} \right\} x \right].$$

但し， $f_K(x; a)$  は式 (3.2) である．

また， $a_0 b_0 c_0 d_0 = 0$  または  $a_1 b_1 c_1 d_1 = 0$  のとき，時刻  $t$  での確率分布は，1周期に帰着するか2つのディラック測度  $\delta_{-t}(x)$  と  $\delta_t(x)$  の線形和になることが簡単な考察によりわかる．

<sup>0</sup>行列  $H_0, H_1$  は直交行列であるので， $\det(H_1 H_0) = \pm 1$  であることを述べておく．

**証明.** 偶数時刻  $2t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) に注目して証明を行う. 奇数時刻  $2t+1$  に対しても同様の計算方法で証明できるので, それは省略する. Grimmett et al. [20] の方法を用いると, フーリエ変換は

$$|\hat{\Psi}_{2t}(k)\rangle = \left( \hat{H}_1(k) \hat{H}_0(k) \right)^t |\hat{\Psi}_0(k)\rangle,$$

となる. 但し,  $\hat{H}_\gamma(k) = R(k)H_\gamma$  ( $\gamma = 0, 1$ ) である. 行列  $H_0, H_1$  は直交行列なので,  $H_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \theta_\gamma & \sin \theta_\gamma \\ \sin \theta_\gamma & -\cos \theta_\gamma \end{bmatrix}$ , あるいは  $H_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \theta_\gamma & \sin \theta_\gamma \\ -\sin \theta_\gamma & \cos \theta_\gamma \end{bmatrix}$  のパラメータ  $\theta_\gamma$  表示に対し, 証明を与えればよい. ここでの証明は

$$H_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

の場合に対し行う. 但し,  $\theta_\gamma \neq \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) and  $\theta_0 \neq \theta_1$ . 他の場合<sup>1</sup> に対する証明も本質的には同じなので, それらに対しては省略する. 今の場合  $\det(H_1 H_0) = 1$  なので, 証明で導くことは定理の (i) である.

行列  $\hat{H}_1(k) \hat{H}_0(k)$  の固有値  $\lambda_j(k)$  ( $j = 0, 1$ ) は

$$\lambda_j(k) = c_0 c_1 \cos 2k + (-1)^j i \sqrt{1 - (c_0 c_1 \cos 2k + s_0 s_1)^2},$$

となる. ここで,  $c_\gamma = \cos \theta_\gamma$ ,  $s_\gamma = \sin \theta_\gamma$  である. 固有値  $\lambda_j(k)$  に対する固有ベクトル  $|v_j(k)\rangle$  は

$$|v_j(k)\rangle = \begin{bmatrix} s_0 c_1 e^{-2ik} - c_0 s_1 \\ \left\{ c_0 c_1 \sin 2k + (-1)^j \sqrt{1 - (c_0 c_1 \cos 2k + s_0 s_1)^2} \right\} i \end{bmatrix}$$

となる. フーリエ変換  $|\hat{\Psi}_0(k)\rangle$  は正規化した固有ベクトル  $|v_j(k)\rangle$  により, 次のように表される.

$$|\hat{\Psi}_0(k)\rangle = \sum_{j=0}^1 \langle v_j(k) | \hat{\Psi}_0(k) \rangle |v_j(k)\rangle.$$

<sup>1</sup>たとえば,

$$H_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix}.$$

の場合が挙げられる. この場合は,  $\det(H_1 H_0) = -1$  なので, 定理の (ii) を証明することになる.

したがって,

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_{2t}(k)\rangle &= \left( \hat{H}_1(k) \hat{H}_0(k) \right)^t |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \\ &= \sum_{j=0}^1 \lambda_j(k)^t \langle v_j(k) | \hat{\Psi}_0(k) \rangle |v_j(k)\rangle \end{aligned}$$

を得る. 弱収束を導くために  $X_{2t}$  の  $r$  次モーメントを計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_{2t})^r) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^r P(X_{2t} = x) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \langle \hat{\Psi}_{2t}(k) | (D^r | \hat{\Psi}_{2t}(k) \rangle) \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^1 (t)_r \lambda_j(k)^{-r} (D \lambda_j(k))^r \left| \langle v_j(k) | \hat{\Psi}_0(k) \rangle \right|^2 \\ &\quad + O(t^{r-1}) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $D = -i(d/dk)$  であり,  $(t)_r = t(t-1) \times \cdots \times (t-r+1)$  である. いま,  $h_j(k) = D \lambda_j(k) / 2 \lambda_j(k)$  とおくと,

$$\mathbb{E}((X_{2t}/2t)^r) \rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{j=0}^1 h_j^r(k) \left| \langle v_j(k) | \hat{\Psi}_0(k) \rangle \right|^2 \quad (t \rightarrow \infty)$$

を得る.

ここで,  $\Omega = [0, 2\pi] \times \{0, 1\}$ ,  $\mu$  を  $|\langle v_j(k), \hat{\Psi}_0(k) \rangle|^2 dk / 2\pi$  で与えられる  $\Omega$  上の確率測度とする. そして,  $h(k, j) = h_j(k)$  として  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を定義すると,

$$E((X_{2t}/2t)^r) \rightarrow \int_{\Omega} h^r d\mu \quad (t \rightarrow \infty)$$

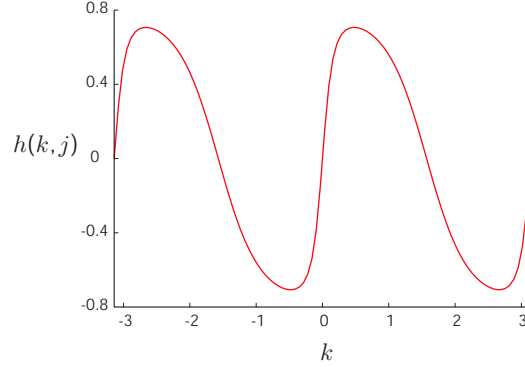
とかける. これより,  $x \in [\min h, \max h]$  に対し, 確率  $P(Z \leq x)$  は

$$P(Z \leq x) = \int_{h^{-1}([-\infty, x])} d\mu$$

となる. したがって, 極限分布の密度関数  $f(x)$  は

$$f(x) = \frac{d}{dx} P(Z \leq x)$$



図 4.1:  $h(k, j)$  のグラフの例

となる。いま,

$$h_j(k) = \frac{D\lambda_j}{\lambda_j} = (-1)^j \frac{c_0 c_1 \sin 2k}{\sqrt{1 - (s_0 s_1 + c_0 c_1 \cos 2k)^2}}$$

である。

但し,  $[\min h, \max h] = [-|c_\xi|, |c_\xi|]$  ( $\xi \in \{0, 1\}$ ) である。これより, 密度関数  $f(x)$  の導出を行う。以下,  $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$  の場合に注目して証明を進める。三角関数の適当な変換により,  $\pi < \theta_1, \theta_2 < 2\pi$  の場合は, 以下に示す計算に帰着できるので省略する。さらに,  $c_0 c_1 > 0$  を仮定する。 $c_0 c_1 < 0$  の場合も同様にできる。まずはじめに,  $x \in [0, |c_\xi|]$  に対し,

$$P(Z \leq x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{k_1} |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_0(k) \rangle|^2 dk + \int_{k_2}^{\pi} |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_0(k) \rangle|^2 dk \right. \\ \left. + \int_0^{\pi - k_2} |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_1(k) \rangle|^2 dk + \int_{\pi - k_1}^{\pi} |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_1(k) \rangle|^2 dk \right\},$$

と計算される。ここで,  $k_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) は

$$k_\nu = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{s_0 s_1 x^2 + (-1)^{\nu+1} \sqrt{(c_0^2 - x^2)(c_1^2 - x^2)}}{c_0 c_1 (1 - x^2)} \right) \quad (4.1)$$

で与えられる。式(4.1)より,  $x \in [0, |c_\xi|)$  に対し,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \left\{ |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_0(k_1) \rangle|^2 + |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_1(\pi - k_1) \rangle|^2 \right\} \frac{dk_1}{dx} \right. \\ \left. - \left\{ |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_0(k_2) \rangle|^2 + |\langle \hat{\Psi}_0(k) | v_1(\pi - k_2) \rangle|^2 \right\} \frac{dk_2}{dx} \right]$$

を得る．固有ベクトルは

$$\begin{cases} |v_0(k_1)\rangle = J^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{c_0^2 - x^2} \pm is_0x \\ \mp ic_0(1+x) \end{bmatrix} \\ |v_1(\pi - k_1)\rangle = J^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{c_0^2 - x^2} \mp is_0x \\ \pm ic_0(1+x) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (|c_0| \geq |c_1|)$$

および

$$\begin{cases} |v_0(k_2)\rangle = J^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{c_0^2 - x^2} + is_0x \\ -ic_0(1+x) \end{bmatrix} \\ |v_1(\pi - k_2)\rangle = J^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{c_0^2 - x^2} - is_0x \\ ic_0(1+x) \end{bmatrix} \end{cases}$$

となる．ここで， $J = |c_0|\sqrt{2(1+x)}$ とおいた．したがって， $|\hat{\Psi}_0(k)\rangle = |\psi_0(0)\rangle = {}^T[\alpha, \beta]$ を考慮すると，密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)s_0}{c_0} \right\} x \right] \left( \frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_2}{dx} \right)$$

となり，さらに

$$\frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_2}{dx} = \begin{cases} \frac{s_1}{(1-x^2)\sqrt{c_1^2 - x^2}} & (|c_0| > |c_1|) \\ \frac{s_0}{(1-x^2)\sqrt{c_0^2 - x^2}} & (|c_0| < |c_1|) \end{cases}$$

であることから，

$$f(x) = \frac{s_\xi}{\pi(1-x^2)\sqrt{c_\xi^2 - x^2}} \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)s_0}{c_0} \right\} x \right]$$

と計算される．同様に， $x \in (-|c_\xi|, 0]$ に対しても同じ計算結果を得る．さらに，この計算結果を  $0 < \theta_1, \theta_2 < 2\pi$  の範囲に拡張することで，求める結果

$$f(x) = \frac{|s_\xi|}{\pi(1-x^2)\sqrt{c_\xi^2 - x^2}} \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)s_0}{c_0} \right\} x \right]$$

を得る．

関数  $f(x)$  は極限分布の密度関数であるので，証明が終了する．  $\square$

定理より, パラメータ表示された以下の2つのユニタリ行列

$$U_0 = e^{i\delta_0} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\beta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_0} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = e^{i\delta_1} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_1} \end{bmatrix}$$

で時間発展する2周期量子ウォークに対し, 次のことが言える. 但し,  $\alpha_j, \beta_j, \delta_j, \theta_j \in [0, 2\pi)$  ( $j = 0, 1$ ) とする.

系. 4.2.1.  $\theta_0, \theta_1 \neq \frac{n\pi}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) とする.

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z$$

ここで,  $\Rightarrow$  は弱収束を意味する. また,  $Z$  は次の密度関数  $f(x)$  をもつ.

(i)  $\alpha_0 + \beta_1 = \beta_0 + \alpha_1$  の場合

$$f(x) = f_K(x; \cos \theta_\xi) \times \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta}e^{2i\beta_0} + \bar{\alpha}\beta e^{-2i\beta_0}) \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right\} x \right].$$

但し,  $|\cos \theta_\xi| = \min \{ |\cos \theta_0|, |\cos \theta_1| \}$ .

(ii)  $\alpha_0 + \beta_1 = \beta_0 + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$  の場合

$$f(x) = f_K(x; \cos \theta_0 \cos \theta_1) \times \left[ 1 - \left\{ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{(\alpha\bar{\beta}e^{2i\beta_0} + \bar{\alpha}\beta e^{-2i\beta_0}) \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right\} x \right].$$

但し,  $f_K(x; a)$  は式 (3.2) である.

証明. (i), (ii) 共に計算の仕方は同じなので, (i) のみ証明を与える. まず,  $\alpha_0 + \beta_1 = \beta_0 + \alpha_1 = \nu$  とおき, さらに

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

とする. また,

$$H_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ \sin \theta_j & -\cos \theta_j \end{bmatrix} \quad (j = 0, 1)$$

とおく. フーリエ変換は

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_{2t}(k)\rangle &= e^{it(\delta_0 + \delta_1)} R(k + \alpha_1) H_1 R(\beta_1) R(k + \alpha_0) H_0 R(\beta_0) \\ &\quad \times \cdots \times R(k + \alpha_1) H_1 R(\beta_1) R(k + \alpha_0) H_0 R(\beta_0) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned} R(\beta_1) R(k + \alpha_0) &= R(k + \alpha_0 + \beta_1) = R(k + \nu) \\ R(\beta_0) R(k + \alpha_1) &= R(k + \beta_0 + \alpha_1) = R(k + \nu) \end{aligned}$$

に注目すると,

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_{2t}(k)\rangle &= e^{it(\delta_0 + \delta_1)} R(-\beta_0) R(k + \nu) H_1 R(k + \nu) H_0 R(k + \nu) \\ &\quad \times \cdots \times R(k + \nu) H_1 R(k + \nu) H_0 R(\beta_0) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$e^{it(\delta_0 + \delta_1)} R(-\beta_0)$$

は確率分布には影響しない. なぜなら, 確率を与える際に共役転置を考えるからである. また,  $\nu$  はフーリエ変換 (波数  $k$ ) の範囲を  $[0, 2\pi) \rightarrow [\nu, 2\pi + \nu)$  と平行移動させただけなので, これも確率分布には影響しない. よって, 今考える量子ウォークは, 初期状態  $R(\beta_0) |\psi_0(0)\rangle$ , 直交行列  $H_0, H_1$  で時間発展する2周期量子ウォークとなる. したがって,  $\det(H_1 H_0) = 1$  を考慮すれば, 定理より結果を得る.

□

系のように条件を与えた場合は, 定理の結果から極限分布が計算できるが, (条件を課さない) 一般のユニタリ行列を用いた2周期量子ウォークに対しては, 計算が煩雑であり, 現時点ではその極限分布は求まっていない.

### 4.3 定理の考察

定理より極限分布は,  $\det(H_1 H_0)$  が  $-1$  か  $1$  かで, その挙動が異なる. 特に, 対称な極限分布に注目すると,  $\det(H_1 H_0) = 1$  のときは, 極限分布は  $H_0$  または  $H_1$  のいずれか一方にしか依存しない. 一方,  $\det(H_1 H_0) = -1$  のときは,  $H_0, H_1$  の両方に依存する. 以下, (i), (ii) の場合に対し, もう少し細かく考察してみる.

#### 4.3.1 (i) の場合 ( $\det(H_1 H_0) = 1$ )

興味深いことは, 分布が対称な場合は,  $Z$  の密度関数が  $f_K(x; a_\xi)$  ( $\xi \in \{0, 1\}$ ) となることである. つまり, 時間発展作用素  $H_0, H_1$  の両方が作用しているにもかかわらず, 極限分布は  $H_0$  あるいは  $H_1$  のいずれか一方にしか依存しない. 図 4.2 に時刻 500 の確率分布とそれらに対応する密度関数を紹介する. 但し, 初期状態は  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}]$  とした. 図 4.2 (a) は

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

の場合で,  $|a_0| < |a_1|$  なので  $\xi = 0$  であり, この極限分布の密度関数は  $H_0$  で時間発展した 1 周期量子ウォークの極限分布と同じである. 同様に, 図 4.2 (b) は

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

の場合で,  $|a_0| > |a_1|$  なので  $\xi = 1$  であり, 極限分布は  $H_1$  で時間発展した 1 周期量子ウォークの極限分布と同じになっている.

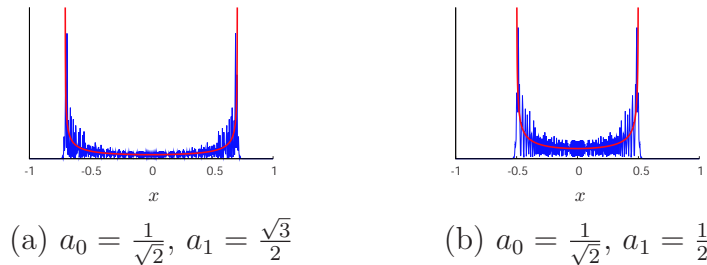


図 4.2: 極限分布の密度関数  $f(x)$  (太線) と時刻 500 の確率分布の比較 (細線)

また, 図 4.3 に

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

としたときの, 確率分布 (時刻 50) の  $\theta \in [0, \pi]$  に対する挙動を挙げる. この場合,  $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_1 = \cos \theta$  である. 但し,  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$  とした.

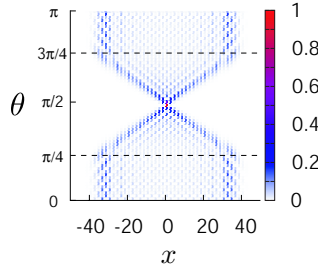


図 4.3:  $\theta$  に対する挙動 (密度プロット)

図 4.3 において, 濃い色の部分が確率分布で最大値を与える部分になっている. つまり, 濃い色の間が確率分布のサポートである. 今の場合, 対応する極限分布のサポートについて考えると,  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  を境に  $\min\{|a_0|, |a_1|\} = |a_\xi|$  の  $\xi (\in \{0, 1\})$  の値が入れかわり, サポートは  $|a_\xi|$  で決まるので, 次のことが言える.

1.  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$  のとき  
 $\min\{|a_0|, |a_1|\} = |a_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\xi = 0$ ) なので, サポート幅は  $|a_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  で決まる. つまり,  $\theta$  を変化させてもサポート幅は変化しない.
2.  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$  のとき  
 $\min\{|a_0|, |a_1|\} = |a_1| = \cos \theta$  ( $\xi = 1$ ) なので, サポート幅は  $|a_1| = \cos \theta$  で決まる. つまり,  $\theta$  を変化させるとサポート幅が変化する.

上記のことは図 4.3 でも, その挙動が見られる. なお,  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$  のときは, 1周期の量子ウォークに帰着することを注意しておく.

また、図 4.3 に対応する対称な分布の場合、サポート幅は標準偏差  $\sigma(t) = \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2}$  に反映されるので、 $\theta$  に対する  $\sigma(t)$  の挙動を図 4.4 に挙げておく。

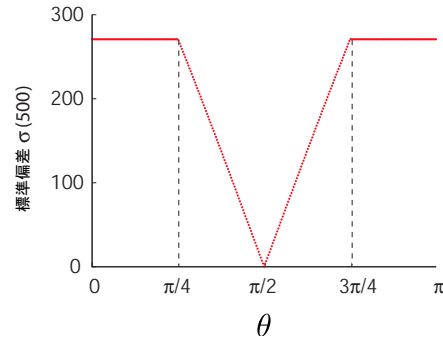


図 4.4:  $\theta$  に対する標準偏差  $\sigma(t)$  挙動. 時刻  $t = 500$ .

非対称な極限分布をもつ場合に対しては、 $\xi = 0$  のときは極限分布は  $H_0$  のみに依存し、 $\xi = 1$  のときは  $H_0, H_1$  の両方に依存することがわかる。以上まとめると、 $\det(H_1 H_0) = 1$  の場合は次のようなことが言える。

1. 対称な場合  $\Rightarrow$  極限分布は  $H_0, H_1$  のいずれか一方のみで決まる。
2. 非対称な場合
  - $|a_0| < |a_1|$  のとき  $\Rightarrow$  極限分布は  $H_0$  のみで決まる。
  - $|a_0| > |a_1|$  のとき  $\Rightarrow$  極限分布は  $H_0, H_1$  の両方に依存する。

対称、非対称な場合のいずれにせよ、極限分布が  $H_0, H_1$  のどちらか一方で決まるとき、(ここで考える)2周期量子ウォークの極限分布は、 $H_0$  あるいは  $H_1$  のいずれか一方を時間発展作用素にもつ1周期量子ウォークの極限分布に等しい。

### 4.3.2 (ii) の場合 ( $\det(H_1 H_0) = -1$ )

(i) の場合とは異なり, 極限分布は  $H_0, H_1$  の両方に依存する. 図 4.5 に

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

としたときの, 確率分布 (時刻 50) の  $\theta \in [0, \pi]$  に対する挙動を挙げる. 但し,  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$  とした. この場合, 対応する極限分布のサポートは  $|a_0 a_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\cos \theta|$  で決まるので,  $\theta$  を変化させるとサポート幅も変化する.

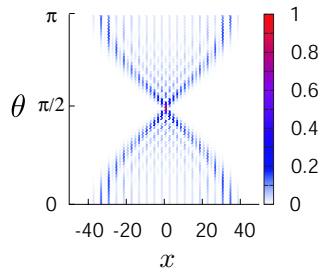


図 4.5:  $\theta$  に対する挙動 (密度プロット)

サポート幅が反映される標準偏差  $\sigma(t)$  の  $\theta$  に対する挙動を図 4.6 に挙げておく. 但し, 分布は図 4.5 に対応する対称な場合を考えている.

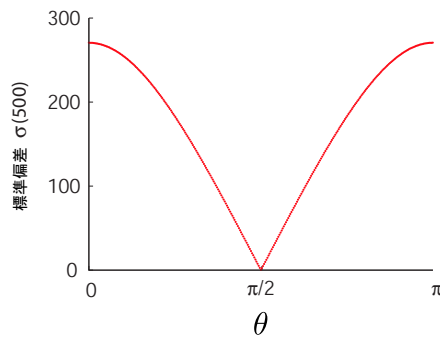


図 4.6:  $\theta$  に対する標準偏差  $\sigma(t)$  挙動. 時刻  $t = 500$ .



## 第5章 特殊な場合の時間依存型 量子ウォーク

ここでは、ある条件付きで、ユニタリ行列が一般に時間発展する場合の2つのモデルを考える。これらの極限分布は通常(1周期)量子ウォークの極限分布に帰着する。つまり、ユニタリ行列は時間発展しているが、得られる極限定理は1周期量子ウォークと同様になる。但し、初期状態による分布の対称条件は、時間発展項の影響により通常(1周期)量子ウォークと異なる。例えば、初期条件  $|\psi_0(0)\rangle = T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$  は、通常(1周期)量子ウォークに対しては対称な分布を与えるが、ここで紹介する時間依存型モデルに対しては、一般には非対称な分布を与える初期条件になっている。ここでの結果は、Machida and Konno [45] にもとづく。以下、 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  をユニタリ行列とする。

### 5.1 ケース1

以下のように時間発展するユニタリ行列  $U_t$  を考える。

$$U_t = \begin{bmatrix} ae^{iw_t} & b \\ c & de^{-iw_t} \end{bmatrix}.$$

但し、 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 。ここで、 $w_t \in \mathbb{R}$  は  $w_{t+1} + w_t = \kappa_1$  を満たす。 $\kappa_1 \in \mathbb{R}$  は時間に依存しない定数である。また、 $\mathbb{R}$  は実数全体の集合を意味する。この場合  $w_t$  は具体的には、 $w_t = (-1)^t(w_0 - \frac{\kappa_1}{2}) + \frac{\kappa_1}{2}$  となるので、ここで考えるモデルはユニタリ行列が2周期で時間発展する量子ウォークとなっている。このとき、初期状態が

$$|\psi_0(x)\rangle_0 = \begin{cases} T[\alpha e^{iw_0/2}, \beta e^{-iw_0/2}] & (x = 0) \\ T[0, 0] & (x \neq 0) \end{cases},$$

である1周期量子ウォークに帰着する。したがって、以下の極限定理を得る。

**定理. 5.1.1.**  $abcd \neq 0$  とする。

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z_1$$

ここで、 $Z_1$  は以下の密度関数  $f_1(x)$  をもつ。

$$f_1(x) = f_K(x; a) \left\{ 1 - \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta e^{i w_0} + \bar{a}\alpha b\beta e^{-i w_0}}{|a|^2} \right) x \right\}.$$

但し、 $f_K(x; a)$  は式 (3.2) である。

**証明.** まず、 $U_t$  を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} U_t &= \begin{bmatrix} e^{i w_t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i w_t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i w_t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i w_t/2} \end{bmatrix} \\ &= R\left(\frac{w_t}{2}\right) U R\left(\frac{w_t}{2}\right). \end{aligned}$$

但し、

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

とおいた。これより、フーリエ変換  $|\hat{\Psi}_t(k)\rangle$  は次のように計算される。

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}_t(k)\rangle &= \left\{ R(k) R\left(\frac{w_{t-1}}{2}\right) U R\left(\frac{w_{t-1}}{2}\right) \right\} \left\{ R(k) R\left(\frac{w_{t-2}}{2}\right) U R\left(\frac{w_{t-2}}{2}\right) \right\} \\ &\quad \cdots \left\{ R(k) R\left(\frac{w_0}{2}\right) U R\left(\frac{w_0}{2}\right) \right\} |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \\ &= R\left(-\frac{w_t}{2}\right) \left\{ R\left(\frac{w_t}{2}\right) R(k) R\left(\frac{w_{t-1}}{2}\right) U \right\} \\ &\quad \times \left\{ R\left(\frac{w_{t-1}}{2}\right) R(k) R\left(\frac{w_{t-2}}{2}\right) U \right\} \\ &\quad \times \cdots \times \left\{ R\left(\frac{w_1}{2}\right) R(k) R\left(\frac{w_0}{2}\right) U \right\} R\left(\frac{w_0}{2}\right) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle \\ &= R\left(-\frac{w_t}{2}\right) \left\{ R\left(k + \frac{\kappa_1}{2}\right) U \right\}^t R\left(\frac{w_0}{2}\right) |\hat{\Psi}_0(k)\rangle. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} |\psi_t(x)\rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} |\hat{\Psi}_t(k)\rangle = \int_{\frac{\kappa_1}{2}}^{2\pi+\frac{\kappa_1}{2}} \frac{dk}{2\pi} e^{i(k-\frac{\kappa_1}{2})x} |\hat{\Psi}_t(k-\frac{\kappa_1}{2})\rangle \\ &= e^{-i\frac{\kappa_1}{2}x} R\left(-\frac{w_t}{2}\right) \int_{\frac{\kappa_1}{2}}^{2\pi+\frac{\kappa_1}{2}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} (R(k)U)^t |\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle \end{aligned}$$

となる. 但し,  $|\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle = R\left(\frac{w_0}{2}\right) |\hat{\Psi}_0(k-\frac{\kappa_1}{2})\rangle$  である. よって, 確率分布は

$$\begin{aligned} P(X_t = x) &= \left\{ e^{i\frac{\kappa_1}{2}x} \left( \int_{\frac{\kappa_1}{2}}^{2\pi+\frac{\kappa_1}{2}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} (R(k)U)^t |\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle \right)^* R\left(\frac{w_t}{2}\right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ e^{-i\frac{\kappa_1}{2}x} R\left(-\frac{w_t}{2}\right) \left( \int_{\frac{\kappa_1}{2}}^{2\pi+\frac{\kappa_1}{2}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} (R(k)U)^t |\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle \right) \right\} \\ &= \left\| \int_{\frac{\kappa_1}{2}}^{2\pi+\frac{\kappa_1}{2}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{U}(k)^t |\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle \right\|^2 \end{aligned}$$

となる. ここで,  $\hat{U}(k) = R(k)U$  である. これは, 初期状態  $|\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle = R\left(\frac{w_0}{2}\right) |\hat{\Psi}_0(k-\frac{\kappa_1}{2})\rangle$  で出発し, ユニタリ行列  $U$  で時間発展した通常の量子ウォークの確率分布を意味する. このとき, 初期状態は

$$|\hat{\Psi}_0^R(k)\rangle = T[e^{iw_0/2}\alpha, e^{-iw_0/2}\beta],$$

即ち,

$$|\psi_0(x)\rangle = \begin{cases} T[e^{iw_0/2}\alpha, e^{-iw_0/2}\beta] & (x=0) \\ T[0, 0] & (x \neq 0) \end{cases}$$

である. 最後に, Konno [32, 33] の結果を用いることで定理の証明は終了する.

□

図 5.1 に,  $U_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{iw_t} & 1 \\ 1 & -e^{-iw_t} \end{bmatrix}$ ,  $w_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\kappa_1 = \pi$ , としたときの確率分布と密度関数  $f_1(x)$  を挙げる. 初期条件は  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$  としてある. 通常量子ウォークでは, 対称な分布を与える初期条件であるが, ケース 1 では  $w_0$  の効果で非対称な分布となる.

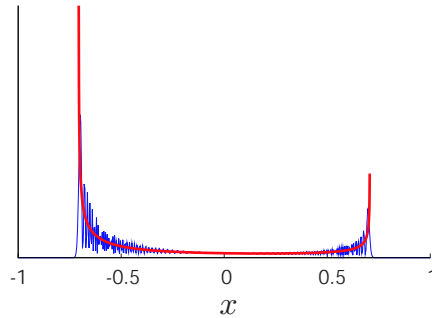


図 5.1: 極限分布の密度関数  $f_1(x)$ (太線) と時刻 500 の確率分布の比較 (細線). 但し,  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$ .

## 考察

対称な分布の場合, 極限分布の密度関数は  $f_K(x; a)$  となるので, 極限分布は  $\{w_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  には依存しない.

## 5.2 ケース2

次のようなユニタリ行列の場合も，極限分布は1周期量子ウォークに帰着する．

$$U_t = \begin{bmatrix} a & be^{iw_t} \\ ce^{-iw_t} & d \end{bmatrix}.$$

ここで， $w_t \in \mathbb{R}$  は  $w_{t+1} = w_t + \kappa_2$  を満たす． $\kappa_2 \in \mathbb{R}$  は時刻  $t$  に依存しない定数である．この場合， $w_t = \kappa_2 t + w_0$  となる．このとき，初期状態が

$$|\psi_0(x)\rangle_0 = \begin{cases} T[\alpha e^{-iw_0/2}, \beta e^{iw_0/2}] & (x = 0) \\ T[0, 0] & (x \neq 0) \end{cases},$$

である1周期量子ウォークに帰着する．よって，以下の極限定理を得る．

**定理. 5.2.1.**  $abcd \neq 0$  とする．

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow Z_2,$$

ここで， $Z_2$  は以下の密度関数  $f_2(x)$  をもつ．

$$f_2(x) = f_K(x; a) \left\{ 1 - \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta e^{-iw_0} + \bar{a}\alpha b\beta e^{iw_0}}{|a|^2} \right) x \right\}.$$

但し， $f_K(x; a)$  は式 (3.2) である．

証明は

$$U_t = \begin{bmatrix} e^{iw_t/2} & 0 \\ 0 & e^{-iw_t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-iw_t/2} & 0 \\ 0 & e^{iw_t/2} \end{bmatrix}$$

と考えれば，ケース1と同様にできるので省略する．

図 5.2 に,  $U_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & e^{iw_t} \\ e^{-iw_t} & -1 \end{bmatrix}$ ,  $w_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\kappa_2 = \pi$ , としたときの確率分布と密度関数  $f_2(x)$  を挙げる. 初期条件は通常量子ウォークに対しては対称な分布を与える  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$  であるが, ケース 1 同様,  $w_0$  の効果で非対称な分布となっている.

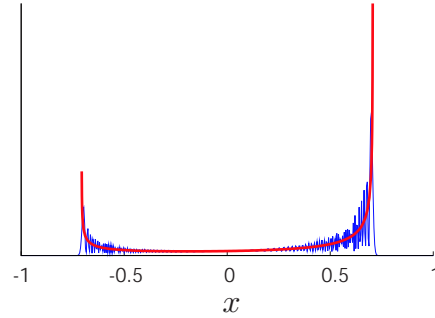


図 5.2: 極限分布の密度関数  $f_2(x)$  (太線) と時刻 500 の確率分布の比較 (細線). 但し,  $|\psi_0(0)\rangle = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$ .

ここで,  $\kappa_2 = 2\pi/n$  とすると,  $w_t = 2\pi t/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となり,  $U_t$  は  $n$  周期となる. 特に,  $n = 2$  であれば 2 周期量子ウォークになり, 加えて  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  であれば, 定理 3.1 (i) の場合に一致する.

## 考察

ケース 1 同様, 対称な分布の場合, 極限分布は  $\{w_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  に依存しない.

## 第6章 まとめと展望

### 6.1 まとめ

#### 1. 2周期量子ウォーク

モデル

$$U_t = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} (\equiv H_0) & (t = \text{偶数}) \\ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} (\equiv H_1) & (t = \text{奇数}) \end{cases}$$

但し,  $H_0, H_1$  は直交行列.

まとめ

- 対称な分布の場合
  - $\det(H_1 H_0) = 1$  のとき
    - ▶ 極限分布は  $H_0, H_1$  のいずれか一方のみで決まる.
  - $\det(H_1 H_0) = -1$  のとき
    - ▶ 極限分布は  $H_0, H_1$  の両方で決まる.

- 非対称な分布の場合

$$- \begin{cases} \det(H_1 H_0) = 1 \\ |a_0| < |a_1| \end{cases} \text{ のとき}$$

⇒ 極限分布は  $H_0$  のみで決まる.

$$- \begin{cases} \det(H_1 H_0) = 1 \\ |a_0| > |a_1| \end{cases} \quad \text{または} \quad \det(H_1 H_0) = -1 \text{ のとき}$$

⇒ 極限分布は  $H_0, H_1$  の両方で決まる.

## 2. 特殊な場合

モデル

$$U_t = \begin{bmatrix} ae^{iw_t} & b \\ c & de^{-iw_t} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} a & be^{iw_t} \\ ce^{-iw_t} & d \end{bmatrix}$$

但し, 行列により  $w_{t+1} \pm w_t = \text{定数の条件がつく.}$

まとめ

任意の時刻での確率分布および極限分布は, 初期状態が  $|\psi_0(0)\rangle = T[e^{\pm iw_0} \alpha, e^{\mp iw_0} \beta]$ ,  $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  で定義される通常の量子ウォークに帰着する.



## 6.2 展望

### 1. 2周期量子ウォーク

一般のユニタリ行列に拡張した場合の極限分布の計算.

例えば,  $U_t$  として

$$U_t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\theta_0} & e^{-i\theta_0} \\ e^{i\theta_0} & -e^{-i\theta_0} \end{bmatrix} & (t = \text{偶数}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & e^{-i\theta_1} \\ e^{i\theta_1} & -e^{-i\theta_1} \end{bmatrix} & (t = \text{奇数}) \end{cases}$$

のようにとり,  $\theta_0 = 0, \pi/4$  で固定して,  $\theta_1$  を動かしたときの確率分布 (時刻 50) の挙動は図 1 のようになっている.

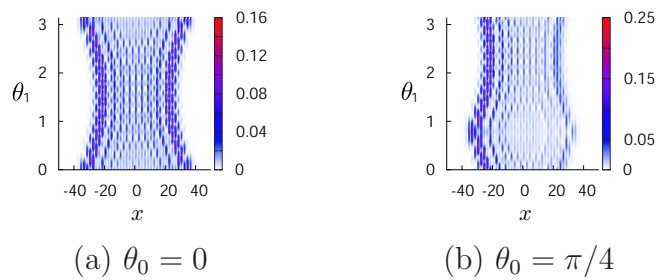


図 6.1: 数値計算による  $\theta_1$  に対する確率分布 (時刻 50) の挙動. 図は密度プロット.

2.  $N$  周期量子ウォークの極限分布の計算 ( $N = 3, 4, \dots$ )

一般に,  $N$  周期としたときの極限分布の計算, および  $N \rightarrow \infty$  としたときの極限定理の導出が課題として考えられる. 3 周期以上に関しては, フーリエ変換での計算は煩雑である.

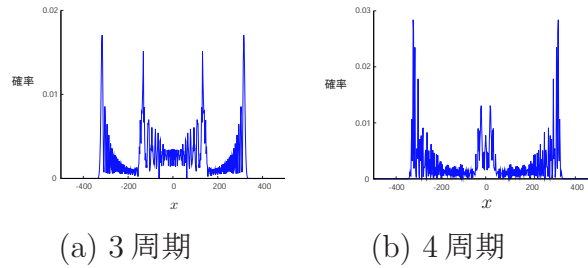


図 6.2: 数値計算による確率分布の例. 時刻 500.

## 3. 特殊な場合で, 条件を外したときの確率分布の解析

条件  $w_{t+1} \pm w_t = \text{定数}$  を外したときは, 1 周期には帰着しない.

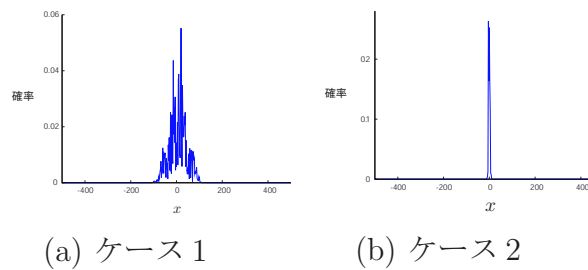


図 6.3: 数値計算による確率分布の例.  $w_t = t^2$ , 時刻 500.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導をして頂いた今野紀雄教授に感謝申し上げます。学部3年次からこれまで今野教授には、確率モデルを中心とする様々な数理モデルについて、興味深いことを御教授頂きました。その知識の大海原にも感動し、7年間今野研究室で数学の研究に励めたことを誇りに思います。さらに、共著書である「図解入門 よくわかる 複雑ネットワーク (秀和システム, 2008年12月)」を共に執筆できたことを、嬉しく思っております。今野教授からは学問はもちろんのこと、数学者としての自然科学に対する姿勢も学ばせていただきました。また、北田泰彦教授、玉野研一教授、梶原健准教授には講義・ゼミでお世話になりました。特別研究教員の斉藤革子先生、名倉真紀先生には研究が円滑に進むようサポートして頂いたことを感謝致します。今野研究室卒業生でもある瀬川悦生さん(東工大)には幾度となく議論にお付き合い頂き、有意義な時間を過ごすことができました。増田直紀先生(東大)、香取眞理先生(中央大学)、右田正夫先生(滋賀大)、竹居正登先生(大阪電気通信大学)には、研究活動や本の執筆などでお世話になったことを、松本裕昭先生(横浜国立大学)には、本研究結果に対し、量子散乱との関係を示唆するコメントを頂いたことを、御礼申し上げます。また、日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた今野・梶原研究室および大学関係者の皆様に感謝します。

最後に、家族と親愛なる仲間たちに、ありがとう。



## 参考文献

- [1] Aharonov, Y., Davidovich, L., Zagury, N.: Quantum random walks. *Phys. Rev. A* **48** (1993) 1687–1690
- [2] Ambainis, A.: Quantum walks and their algorithmic applications. *International Journal of Quantum Information* **1** (2004) 507–518
- [3] Ambainis, A., Bach, E., Nayak, A., Vishwanath, A., Watrous, J.: One-dimensional quantum walks. *Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2001) 37–49
- [4] Bañuls, M.C., Navarrete, C., Pérez, A., Roldán, E.: Quantum walk with a time-dependent coin. *Phys. Rev. A* **73** (2006) 062304
- [5] Brun, T.A., Carteret, H.A., Ambainis, A.: Quantum random walks with decoherent coins. *Phys. Rev. A* **67** (2003) 032304
- [6] Brun, T.A., Carteret, H.A., Ambainis, A.: Quantum to classical transition for random walks. *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 130602
- [7] Brun, T.A., Carteret, H.A., Ambainis, A.: Quantum walks driven by many coins. *Phys. Rev. A* **67** (2003) 052317
- [8] Childs, A.M., Cleve, R., Deotto, E., Farhi, E., Gutmann, S., Spielman, D.A.: Exponential algorithmic speedup by quantum walk. *Proceeding 35th ACM Symposium on Theory of Computing* (2003) 59–68
- [9] Childs, A.M., Cleve, R., Jordan, S.P., Yeung, D.: Discrete-query quantum algorithm for NAND trees. *Theory of Computing* **5** (2009) 119–123

- [10] Childs, A.M., Farhi, E., Gutmann, S.: An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing* **1** (2002) 35–43
- [11] Chisaki, K., Hamada, M., Konno, N., Segawa, E.: Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees. *Interdisciplinary Information Sciences* (2009) 423–429
- [12] Ellinas, D., Smyrnakis, I.: Asymptotics of quantum random walk driven by optical cavity. *Journal of Optics B: Quantum Semiclass. Opt.* **7** (2005) S152–S157
- [13] Ellinas, D., Smyrnakis, I.: Quantum optical random walk: quantization rules and quantum simulation of asymptotics. *Phys. Rev. A* **76** (2007) 022333
- [14] Ermann, L., Paz, J.P., Saraceno, M.: Decoherence induced by a chaotic environment: A quantum walker with a complex coin. *Phys. Rev. A* **73** (2006) 012302
- [15] Farhi, E., Gutmann, S.: Quantum computation and decision trees. *Phys. Rev. A* **58** (1997) 915
- [16] Francisco, D., Iemmi, C., Paz, J.P., Ledesma, S.: Simulating a quantum walk with classical optics. *Phys. Rev. A* **74** (2006) 052327
- [17] Gottlieb, A.D.: Two examples of discrete-time quantum walks taking continuous steps. *quant-ph/0310026* (2003)
- [18] Gottlieb, A.D.: Convergence of continuous time quantum walks on the line. *Phys. Rev. E* **72** (2005) 047102
- [19] Gottlieb, A.D., Janson, S., Scudo, P.F.: Convergence of coined quantum walks on d-dimensional euclidean space. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **8** (2005) 129–140
- [20] Grimmett, G., Janson, S., Scudo, P.F.: Weak limits for quantum random walks. *Phys. Rev. E* **69** (2004) 026119
- [21] Gudder, S.P.: *Quantum Probability*. Academic Press Inc., CA (1988)

- [22] Hamada, M., Konno, N., Mlotkowski, W.: Orthogonal polynomials induced by discrete-time quantum walks in one dimension. *Interdisciplinary Information Sciences* **15** (2009) 367–375
- [23] Hamada, M., Konno, N., Segawa, E.: Relation between coined quantum walks and quantum cellular automata. *RIMS Kokyuroku No.1422* (2005) 1–11
- [24] Inui, N., Kasahara, K., Konishi, Y., Konno, N.: Evolution of continuous-time quantum random walks on circles. *Fluctuation and Noise Letters* **5** (2005) L73–L83
- [25] Inui, N., Konishi, Y., Konno, N., Soshi, T.: Fluctuations of quantum random walks on circles. *International Journal of Quantum Information* **3** (2005) 535–550
- [26] Inui, N., Konno, N.: Localization of multi-state quantum walk in one dimension. *Physica A* **353** (2005) 133–144
- [27] Inui, N., Konno, N., Segawa, E.: One-dimensional three-state quantum walk. *Phys. Rev. E* **72** (2005) 056112
- [28] Inui, N., Nakamura, K., Ide, Y., Konno, N.: Effect of successive observation on quantum cellular automaton. *Journal of the Physical Society of Japan* **76** (2007) 084001
- [29] Katori, M., Fujino, S., Konno, N.: Quantum walks and orbital states of a weyl particle. *Phys. Rev. A* **72** (2005) 012316
- [30] Kempe, J.: Quantum random walks - an introductory overview. *Contemporary Physics* **44** (2003) 307–327
- [31] Kendon, V.: Decoherence in quantum walks - a review. *Mathematical Structures in Computer Science* **17** (2007) 1169–1220
- [32] Konno, N.: Quantum random walks in one dimension. *Quantum Inf. Proc.* **1** (2002) 345–354
- [33] Konno, N.: A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk. *J. Math. Soc. Jpn.* **57** (2005) 1179–1195

- [34] Konno, N.: A path integral approach for disordered quantum walks in one dimension. *Fluctuation and Noise Letters* **5** (2005) L529–L537
- [35] Konno, N. In: *Quantum Walks*. Volume 8 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg (2008) 309–452
- [36] Konno, N.: Limit theorems and absorption problems for one-dimensional correlated random walks. *Stochastic Models* **25** (2009) 28–49
- [37] Konno, N.: Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line. *Quantum Information Processing* (2009) (in press)
- [38] Konno, N.: One-dimensional discrete-time quantum walks on random environments. *Quantum Inf. Proc.* **8** (2009) 387–399
- [39] Konno, N., Mitsuda, K., Soshi, T., Yoo, H.J.: Quantum walks and reversible cellular automata. *Phys. Lett. A* **330** (2004)
- [40] Konno, N., Namiki, T., Soshi, T.: Symmetry of distribution for one-dimensional Hadamard walk. *Interdisciplinary Information Sciences* **10** (2004) 11–22
- [41] Košík, J., Bužek, V.: Scattering model for quantum random walks on a hypercube. *Phys. Rev. A* **71** (2005) 012306
- [42] Košík, J., Bužek, V., Hillery, M.: Quantum walks with random phase shifts. *Phys. Rev. A* **74** (2006) 022310
- [43] Krovi, H., Brun, T.A.: Hitting time for quantum walks on the hypercube. *Phys. Rev. A* **73** (2006) 032341
- [44] Krovi, H., Brun, T.A.: Quantum walks with infinite hitting times. *Phys. Rev. A* **74** (2006) 042334
- [45] Machida, T., Konno, N.: Limit theorem for a time-dependent coined quantum walk on the line. *Proceedings of the 4th International Workshop on Natural Computing (IWNC2009)*, in the series of *Proceedings in Information and Communications Technology (PICT)* **2** (2010) (in press)



- [46] Mackay, T.D., Bartlett, S.D., Stephenson, L.T., Sanders, B.C.: Quantum walks in higher dimensions. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 2745–2753
- [47] Meyer, D.A.: From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *J. Stat. Phys.* (1996) 551–574
- [48] Meyer, D.A.: Quantum mechanics of lattice gas automata: one particle plane waves and potentials. *Phys. Rev. E* **55** (1997) 5261–5269
- [49] Meyer, D.A.: Quantum mechanics of lattice gas automata: boundary conditions and other inhomogeneities. *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 2321–2340
- [50] Miyazaki, T., Katori, M., Konno, N.: Wigner formula of rotation matrices and quantum walks. *Phys. Rev. A* **76** (2007) 012332
- [51] Moore, C., Russell, A.: Quantum walks on the hypercube. In Rolim, J.D.P., Vadhan, S.P., eds.: *RANDOM*. Volume 2483 of *Lecture Notes in Computer Science.*, Springer (2002) 164–178
- [52] Mülken, O., Pernice, V., Blumen, A.: Quantum transport on small-world networks: A continuous-time quantum walk approach. *Phys. Rev. E* **76** (2007) 051125
- [53] Nayak, A., Vishwanath, A.: Quantum walk on the line. *quant-ph/0010117* (2000)
- [54] Oka, T., Konno, N., Arita, R., Aoki, H.: Breakdown of an electric-field driven system: A mapping to a quantum walk. *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 100602
- [55] Patel, A., Raghunathan, K.S., Rungta, P.: Quantum random walks do not need coin toss. *Phys. Rev. A* **71** (2005) 032347
- [56] Reitzner, D., Hillery, M., Feldman, E., Buzek, V.: Quantum searches on highly symmetric graphs. *Phys. Rev. A* **79** (2009) 012323
- [57] Ribeiro, P., Milman, P., Mosseri, R.: Aperiodic quantum random walks. *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 190503

- [58] Sato, M., Kobayashi, N., Katori, M., Konno, N.: Large qudit limit of one-dimensional quantum walks. arXiv:0802.1997 (2008)
- [59] Segawa, E., Konno, N.: Limit theorems for quantum walks driven by many coins. *International Journal of Quantum Information* **6** (2008) 1231–1243
- [60] Severini, S.: The underlying digraph of a coined quantum random walk. quant-ph/0210055
- [61] Severini, S.: On the digraph of a unitary matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **25** (2003) 295–300
- [62] Shenvi, N., Kempe, J., Whaley, K.B.: Quantum random-walk search algorithm. *Phys. Rev. A* **67** (2003) 052307
- [63] Strauch, F.W.: Connecting the discrete and continuous-time quantum walks. *Phys. Rev. A* **74** (2006) 030301
- [64] Tregenna, B., Flanagan, W., Maile, R., Kendon, V.: Controlling discrete quantum walks: coins and initial states. *New Journal of Physics* **5** (2003) 83
- [65] Venegas-Andreca, S.E.: *Quantum Walks for Computer Scientists*. Morgan and Claypool Publishers (2008)
- [66] Watabe, K., Kobayashi, N., Katori, M., Konno, N.: Limit distributions of two-dimensional quantum walks. *Phys. Rev. A* **77** (2008) 062331
- [67] Wójcik, A., Łuczak, T., Kurzyński, P., Grudka, A., Bednarska, M.: Quasiperiodic dynamics of a quantum walk on the line. *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 180601
- [68] Xu, X., Liu, F.: Coherent exciton transport on scale-free networks. *New Journal of Physics* **10** (2008) 123012
- [69] Xu, X., Liu, F.: Continuous-time quantum walks on Erdős-Rényi networks. *Physics Letters A* **372** (2008) 6727–6732

- [70] Yamasaki, T., Kobayashi, H., Imai, H.: Analysis of absorbing times of quantum walks. *Phys. Rev. A* **68** (2003) 012302
- [71] 今野紀雄: 量子ウォークの数理. 産業図書 (2008)