算数数学の問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラムの開発研究

課題番号　06680171

平成６，７年度科学研究費補助金（一般研究（Ｃ））研究成果報告書

平成８年（１９９６年）３月

研究代表者　橋　本　吉　彦
（横浜国立大学教育学部）

はしがき

本報告書は、平成6年度及び7年度において、科学研究費補助金（一般研究(C) 課題番号 06680171）を受けて行った「算数数学の問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラムの開発研究」の研究成果を報告するものである。研究経費と研究組織は、次の通りである。

平成6年度　９００千円，　平成7年度　８００千円　；計１７００千円

◇研究代表者
　橋本　吉彦（横浜国立大学教育学部）
◇研究分担者
　山下　昭（福岡教育大学教育学部）
　前田　正男，石田　淳一，池田　敏和（横浜国立大学教育学部）
◇研究協力者
　石川　浩一（小田原市立早川小），熊谷　照男（川崎市立旭町小）
　清水　壽典（平塚市松延小），高橋　昭彦（東京学芸大附属世田谷小）
　滝井　章（目黒区立宮前小），
　小林　広昭，今井　文雄，藤中　大洋（横浜国大附属横浜小）
　坪田　耕三，細水　保宏（筑波大学附属小）
　安藤　秀朗（横浜市立大綱中），川名　基（横浜市立末吉中）
　佐藤　孝彦（相模原市立大野南中），鈴木　誠（横浜学院女子中・高）
　妹尾　正彦（横浜市立中和田中），曽根崎高志（成田市立玉造中）
　野尻　昌昭（横浜市立上飯田中），保田美由紀（湘南学園白百合中・高）
　山浦　和雄（横浜市立奈良中），山崎　浩二（東京学芸大附属世田谷中）
　山本　知子（共立女子中）
　若松　義治，石川　昌（横浜国大附属横浜中）
　小林　哲郎，周光海，相川博彦，佐藤佳世，小山直人（横浜国立大学大学院）

本研究の成果をふまえて、より確実な、より充実した研究が推進できることを願っている。何かとご意見を頂ければ幸いです。

平成８年３月
研究代表者　　橋本　吉彦

目　次

4．小学校段階における事例

5．中学校段階における事例

算数数学の問題づくりとオープンエンドアプローチ をもとにしたカリキュラムの開発研究

横浜国立大学　　橋本　吉彦

平成６年度・平成７年度の２年間にわたって、表題のような研究題目のもとに、分担者４名，協力者２８名による研究を推進することができた。

昨年の後半より、研究の密度を深めるために、２つの学年ごとに次のようなグループを設定することにした。括弧内はその責任者である。

小学校１・２年（坪田耕三）　　以後、グループＡと呼ぶ
小学校３・４年（石田淳一）　　以後、グループＢと呼ぶ
小学校５・６年（池田敏和）　　以後、グループＣと呼ぶ
中学校１・２年（若松義治）　　以後、グループＤと呼ぶ
中学校３年・高等学校１年（佐藤孝彦）　以後、グループＥと呼ぶ

全体会合は合計８回（平成６年度４回、平成７年度４回）開催し、その間、上記のグループごとの分科会が随時開かれた。

平成６年度：	①	７月　９日（土）	ワークピア横浜
	②	８月２７日（土）	シャトレーイン横浜
	③	１１月１９日（土）	青少年育成センター
	④	２月１８日（土）	附属横浜中学校
平成７年度：	①	５月２７日（土）	神奈川公会堂
	②	８月２６日（土）	横浜市技能文化会館
	③	１１月２５日（土）	神奈川公会堂
	④	２月２４日（土）	青少年育成センター

この研究の目的は、

１．算数・数学科のオープンエンドの問題，問題づくりの問題を開発すること

２．１をもとに従来につくられたものとあわせ小学校算数・中学校数学のカリキュラムをつくること

ということであり、そのため特に、グループA，グループBでは後述のように、それぞれの例（pp.10-47）を示すことができた。

グループCにあっては、次の１０の活動領域をもとに、6つの行動としてまとめてあるが、これらの話は、その他のグループにもあてはまるものであり、それを考えていくことは今後の課題である。

１．数の性質を探る

２．計算の仕方を工夫する

３．面積・体積を測る

４．事象を数値化する

５．図形の性質を探る

６．事象の関数関係を捉える

７．資料を整理する

８．事象を文字式で処理する

９．起こりうる場合を数える

10．問題解決

① みつける　② わける　③ あらわす

④ ひろげる　⑤ つくる　⑥ ととのえる

グループDにあっては、中学校数学において、「正・負の数の乗法の定義の正当性，文字の使用，証明の意味と意義の三つは、小学校の算数から中等教育の数学へと進んだ生徒が出合う大きな学習の山」（『教師のための問題集』島田茂，共立出版）とあるように、その中の証明に焦点をあてて実践を考えた。αレベル，βレベル，γレベルという3つのレベルを設定し、考察を加え、ここで得られた知見は論証指導に有効に働くものと考える。

グループEにあっては、特に個数の処理，数列，２次関数に焦点をあて、算数・数学カリキュラムの中でのつながりを示唆している。例えば、小学校６年では、題材として顔の部分を３つに分け、好きな顔をつくるところから何通りあるかということを自然な形で導いている（メンバーの石川浩一氏による）が、高校１年においても「数え上げ」の導入問題として興味ある題材となるであろう。また、中学校３年の２次関数の問題（鈴木誠氏による）でも、$y=ax^2+b$という式が得られるので、この話は高校１年にもすぐ接続するものである。

本年（1996年）、１月の第136回国会における内閣総理大臣施政方針演説の中に次のように文言がみられる。

> ２１世紀を展望した個性や創造性重視の方針を一層推し進め、与えられた問題の解答を見つける能力だけでなく、問題そのものを発見し、それを解決する能力を備えた人材を育てる教育を実践するために、教育改革を推進してまいります。

そこでは、問題解決型から問題発見型が強調されている。

本研究にあっては、内容baseというよりも活動baseに焦点をあて、カリキュラムを構成するという１つの例を、５つのグループを通して提示することができた。

その根底には、

① オープンエンドアプローチ　② 問題づくり

があり、①，②は児童・生徒が主体で、彼ら自身が何かを見つけなければならないのである。方針演説で述べられていることは、算数・数学科において既に実現している（しつつある）のである。問題を発見していくことに関連して、メンバーの１人である山崎浩二氏の勤務する東京学芸大学付属世田谷中学校で、

清宮俊雄先生に講義して戴いた内容を先生の許可を得て掲載することにした。自分で問題をつくっていくことの過程がよくわかるであろう。

問題発見型に関連して、拙稿として「小さな発見を大切に」（『中学校数学の研究 1996年３学期』，大日本図書）を５ページに掲載しておく。

また、小・中・高に「総合科」という提言を、第１５期中央教育審議会が３月２日に固めた(３月３日付読売新聞)とあるが、筆者は、「楽しい算数・数学の授業ができるゆとりを」（『数学教育の重要性をあえて訴える　次期教育課程に望むもの(中央教育審議会会長　有馬朗人先生へあてた)次期教育課程に向けての要望』，日本学術会議数学教育小委員会，平成７年４月２４日(同１０月２２日増刷)）でも述べたように、算数・数学はその存在がなくてはならない教科であると考える。従って、本研究を通して、活動baseで実践したことが算数・数学で必要不可欠とされる内容をカバーできればよいということになる。本研究の次の例は参考になるであろう。

「長期にわたる問題づくりとオープンエンドアプローチの指導について」（山崎浩二氏による）、これは中学２年の図形領域で１学期２回，２学期３回，3学期１回，のべ１４時間（図形領域は５４時間）実践した事例である。筆者の知る限りでは、中学校では始めての実践事例であろう。なお、小学校に関しては、メンバーの坪田耕三氏が実践した例がある（日本数学教育学会誌６０巻４号(1978)）。

今年７月には、ICME-8（第８回国際数学教育会議）がスペインで開催されるし、その４年後の2000年には、ICME-9が日本で開催されることになった。

我々の研究を日本ばかりでなく、世界に広めていきたいものと考える。

小さな発見を大切に

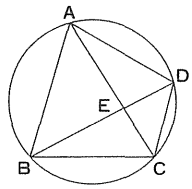
数学教育思考

橋　本　吉　彦
横浜国立大学教授

■大阪府生まれ。東京学芸大学大学院卒。
■主な著書：『数学科での評価』（共著，共立出版）
　　　　　　『数学科教育法』（共著，牧野書店）

中央教育審議会会長宛に，日本数学教育学会他３団体が協力して，「次期教育課程に向けての要望――特に数学教育について」を提出したのは，本年10月のことである。その中で「数学の学習には十分な時間をかけ，ゆとりをもって勉強しないと理解が深まりません。学習時間が不足のため，数学に対しても理解ではなく暗記をもって対処することが多くなり，数学が嫌われる原因となりました。」という文言がある。数学という教科は，本来「ゆとりを持って」対処すれば楽しいはずである。楽しい中には，新しい発見もあるだろう。

一例をあげてみよう。



右の図において，AD＝BCのとき，辺の長さ，角の大きさ，三角形の合同などについて，いろいろ成り立つ関係をあげなさい。

このような問題は，周知のように「オープンエンドの問題」と呼ばれる。生徒はいろいろ答えるであろう。そして，次の問題設定は，筆者のゼミ生のＨ君，Ｉ君が，「先生！こんな定理を見つけました。」とある朝うれしそうに説明してくれたものである。

AD＝BCのまま，点Aを円周上に動かしたとき，何か言えることがないか予想してみましょう。

「点Ｅが円を描く」が期待される答えで，コンピュータを利用すれば容易に見つけることができるものである。実際，その後彼らの作った学習指導案にもとづいて，附属中のＷ先生に授業（コンピュータ，２人で１台）を実践してもらったところ，すべてのグループでこの事実を見つけることができた。生徒の感動が伝わってきそうである。

学生自身は，点Ａだけを動かしたりという具合に，いろいろと「動点」ということに着目してコンピュータを動かしているうちにこの事実を見つけたということである。しかし残念ながら，この事実は数週間後にある初等幾何学の教科書に出ていることが彼ら自身によって判明したのである。

学校数学にあっては，教師から見れば当然のことでも，生徒にとっては新しい事実というのが大部分であろう。ゆとりをもって勉強する機会が与えられれば，何か新しいことを自ら見つける機会も増えていくであろう。小さな発見の積み重ねを大事にしていきたいものである。

オープンな活動とカリキュラム開発

福岡教育大学
山下　昭

0．はじめに

平成6年度と平成7年度の2箇年にわたって，橋本吉彦教授を研究代表者とする科学研究費補助金による研究に参加させていただいた。今回の研究主題は「算数数学の問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラムの開発研究」である。この研究は，これまで進めてきたオープンエンドの問題や問題づくりにおける原問題の開発，それらの体系化の研究の成果を基に行われたものである。特に，この研究では，問題づくりやオープンエンドアプローチを基にしたカリキュラムの開発に焦点を当てて進められた。しかしながら，2箇年間の研究の過程を振り返って見ると，オープンエンドの問題や原問題の開発，それらを基にした授業研究や評価の研究等々多岐にわたって研究が展開された。このことは，カリキュラム開発が教育目標，内容，方法などの研究を伴うことを思えば当然のことと考えられる。このため，今回の研究を通して，オープンエンドアプローチや問題づくりを基にしたカリキュラムの研究だけでなくオープンエンドの問題や問題づくりについてもさらに研究が深まり新たな知見が得られた。

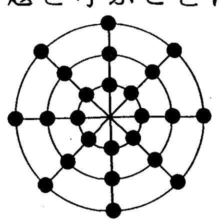
ここでは，この2箇年間の研究の過程で話題になったことを中心に，残された課題も含め私見を述べてみたい。

1．オープンエンドの問題と問題づくり

オープンエンドの問題や問題づくりの意味については，「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」（島田茂編著，１９７７，みずうみ書房）や「問題から問題へ」（沢田利夫・竹内芳男編著，１９８３，東洋館出版）で詳しく説明されている。しかし，オープンエンドの問題や原問題の開発，それらを取り入れた授業研究を進める過程で，改めてオープンエンドの問題や問題づくりの意味について検討する必要が生じてきた。このことは，オープンエンドの問題や原問題の開発が進んでいること，これらを取り入れた授業研究が活発であったことの証でもあろう。

さて，オープンエンドの問題の定義は，先に示した文献「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」に次のように述べられている。

「・・これに対して，正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題を未完成な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする」



このようにオープンエンドの問題の定義が明確に示されている。しかし，「右の図のオハジキの数をいろいろな方法で求めましょう。」のような問題が，オープンエンドの問題かどうかという質問を受けたことがある。質問者は，問題文の「いろいろな方法で求めましょう。」に着目して，これをオープンエンドの問題と判断したのであ

る。しかし，この問題をオハジキの数を求めることが目的であるとすると，解決の方法がオープンであって結果はオープンでない。つまり，オープンエンドというよりプロセスがオープンの問題である。ただ，これもオハジキの数を求めることを目的としないで「いろいろな方法」を発見することを目的とするように設定すれば，それはオープンエンドの問題と考えてよいであろう。

このように考えると問題づくりも原問題よりいろいろな問題（発展問題）を求めることにねらいをおけば，オープンエンドの問題と考えることもできる。しかし，このようにオープンエンドの問題の意味を拡げることは，かえって混乱を招くという危惧の声もある。オープンエンドの問題も問題づくりも算数数学の授業の中で取り扱うものとすれば，そこには当然ねらいがありオープンエンドの問題か否かの議論もこの授業のねらいとの関わりで考える必要があろう。また，オープンエンドの問題か否かについては，子どもの側からの見方も考慮する必要がある。オープンエンドの問題は，先に示したように「正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題」である。この「正答がいく通りにも可能」を子どもにとってこのようにとらえられれば，それをオープンエンドの問題と判断してもよいのではという考えである。つまり，その問題の答えが一通りに決まる場合でも，子どもにとってそれが多様な答えが可能な問題であると感じれば，それはその子どもにとってオープンエンドの問題であるとしてもよいであろうということである。これは，オープンエンドの問題か否の判断は，その問題固有の特性だけでなく問題解決者（子ども）との関わりにも依ることを意味しているのである。

この研究では，先にも述べたように問題づくりの授業や原問題の開発にも力を注いできた。そのため問題づくりについてもいろいろな提案がなされた。ここでの問題づくりの意味は，本研究のこれまでの流れ研究会のメンバーからみて「問題の発展的な扱い」と解してよい。したがって，昭和初期に提案されたいわゆる「作問指導」とは，いくつかの点で異なっていることを認識する必要がある。このことについては，竹内芳男先生が，先に示した文献「問題から問題へ」（Ｐ20～Ｐ21）で指摘されている。これに加えて筆者が以前からこの「問題の発展的な扱い」の特徴として重視しているのは，問題のつくり方の手順が明示されていることである。もちろん，「作問指導」でも「数値を変えて」などの指示がある場合もあるが，問題づくりほど明確に示されていないように思う。そこで，改めて「問題の発展的な扱い」の意味を検討してみよう。「問題の発展的な扱い」の意味は，「問題から問題へ」（Ｐ25）につぎのように示されている。

「児童・生徒に，与えられた１つの問題（原問題または原題という）から出発して，その問題の構成要素となっている部分を，類似なものや，より一般的なもの等に置きかえたり，その問題の逆を考えたりすること等を通して，新しい問題をつくり，自ら解決しようとするような主体的な学習活動」

この「問題の発展的な扱い」の定義をみると，「原問題」から出発して「構成要素となっている部分を，類似なものや，より一般的なもの等に置きかえたり，その問題の逆をえたり・・・」と新しい問題（発展問題）をつくる手順が明示されている。つまり，単に原問題と類似な問題をつくるのでなく，それをつくる手順として構成要素に着目し，それを「類似なものや，より一般的なもの等に置きかえる」こと，「問題の逆を考えること」が示されている。もちろん，この手順

のみに限定するわけではないが，発展問題を直観的につくることを求めているのではない。「問題の発展的な扱い」の研究の初期の頃は，発展問題が原問題のどこを変えてつくられたのかなど，そのつくり方を明確に意識させる指導を行ったときもあったと記憶している。このような指導は，原問題から発展問題をつくる手法を身に付けさせる上で有効であるとともに，原問題や発展問題の構造を理解させるためにも重要である。今後，この面についても研究を期待したい。

以上，オープンエンドの問題と問題づくりについて述べてきたが，この両者に共通するのは，子どもの多様な見方や考え方を促し，認めるところにある。つまり，子どものオープンな見方や考え方，オープンな活動がその基盤にあるのである。したがって，オープンエンドの問題や問題づくりを取り入れた授業では，このオープンな活動が生きるように工夫することが肝要である。

2．オープンな活動を基にしたカリキュラムについて

これからの新しい教育では，創造的な学力の育成が求められている。この創造的な学力の育成には，従来の知識伝授型の教育では限界があり，育成型の教育に転換する必要があるというのが算数数学だけでなく他の教科も含めた最近の教科教育の一般的な考え方であろう。この育成型の教育に当たっては，算数数学の知識理解の指導の過程に子どもの自主的，主体的な学習活動を取り入れることが重視されている。いわゆる問題解決学習は，このような観点より取り入れられている指導法である。しかし，現在の算数数学のカリキュラムは，基本的には「教科カリキュラム」であり，算数数学の知識・技能等の内容を中心に構成されている。したがって，授業においても知識・技能を獲得させることが優先されることになる。しかし，新しい教育では，多くの知識・技能を獲得させることよりむしろそれらを子ども自ら学習できる力，学ぶ力，創造的学力の育成が求められている。そのためには，学習活動において，この創造的学力の育成にかかわる数学的な活動を意図的，計画的，系統的に体験させることが重要である。オープンエンドの問題や問題づくりを取り入れた授業では，創造的学力を構成する主要な活動を子どもに体験させることができる。したがって，このオープンエンドの問題や問題づくりの学習活動に包蔵される数学的活動を計画的に体験させていくことによって創造的学力の育成に寄与できるものと考える。オープンな活動を基にしたカリキュラムとは，このような目的のために構成されるものである。つまり，数学的な活動を中核に構成されるカリキュラムであり，数学的な活動力の育成を目標とするカリキュラムである。ここでは，このようなカリキュラムを「活動カリキュラム」と呼ぶことにする。

この「活動カリキュラム」に基づく授業では，先に述べたようにオープンエンドの問題や問題づくりを取り入れた学習指導が考えられる。このオープンエンドの問題や問題づくりの授業では，算数数学の新しい知識を学ばせることを第一のねらいとするより，むしろ既に学んだ知識理解を広め深めることを主要なねらいとすることが多いように思う。しかし，このことは従来の算数数学の内容を中心とするカリキュラムの基でも主要なねらいとされていたわけである。したがって，「活動カリキュラム」を構想するには，当然，相補的関係となると思われる従来の内容中心のカリキュラムとの連携をどのように考えるかの検討が早急に必要で

である。

さて，数学的な活動力の育成を目指した「活動カリキュラム」は，従来のカリキュラムの類型からみると「経験カリキュラム」に近いものと考える。したがって，この「活動カリキュラム」の構成では，これまでの「経験カリキュラム」についての理論的・実践的研究の成果を長短を含め参考にすることが大切であろう。「経験カリキュラム」に基づく授業では，子ども中心の学習指導が強調され，教材の選択や配列などは実際の学習が進行する過程ですべての学習者によって協力的に行われることなどの特徴がある。*) これは，最近の算数数学教育で注目されている「構成主義に基づく授業」とも通じるものがあるであろう。オープンエンドの問題や問題づくりを，このような構成主義に基づく授業に取り入れることも積極的に研究されてよいあろう。構成主義の理論やそれに基づく授業については，現在，多くの研究がなされている。構成主義の理論もいろいろあり，それを構成主義の名のもとに一括して論じるのは危険であろう。ただ，それぞれの理論は，それぞれの研究者の数学観，教育観，社会観，人間観に根ざしており，算数数学教育を考えるとき，多くの面で大きな示唆を与えてくれる。しかし，それらの理論を直ちに現在の学校数学に持ち込むには，なお多くの課題があるように思う。例えば，数学の歴史の流れの中での数学的知識の構成過程は，構成主義の理論でよく説明されると考える。しかし，それを限定された時間，集団の中で，定められた目標に到達することを求められる授業に取り入れるには，一層の研究が必要である。また，構成主義に基づく授業が，これまで我が国で実践されてきた授業と，どこかどう違っているのかも十分明確にすることが，このような授業を広める上で重要であるように思う。今後の研究が期待される。

3．今後の課題

オープンな活動を基にした「活動カリキュラム」の開発には，なお，多くの課題が残されている。例えば，次のような課題を解決することは「活動カリキュラム」の開発にとって不可欠であると考える。

（1）「活動カリキュラム」の目標の明確化
（2）オープンな活動の抽出と，それが実現できるオープンエンドの問題や原問題の開発とその系列化
（3）「活動カリキュラム」と内容中心のカリキュラムとの関わりの明確化（指導法も含め）
（4）「活動カリキュラム」の評価法

＊）稲葉宏雄編著　「現代教育の課題」　福村出版　１９７９

小学校１・２年部会

坪田　耕三・高橋　昭彦・清水　壽典・石川　浩一・佐藤　佳世

小学校低学年の算数科におけるオープンエンドの問題を使った活動や問題づくりの活動は、現在、一般におこなわれている平素の学習の中に、関連ある教材を、随時取り入れて実施していくことが望ましいと考えた。

ここでは、そのためのオープンエンドの問題や問題づくりの活動を数多く集めることによって、それを可能にすることを考えた。

以下に集めた教材は、２０題ある。これを「さんすうのひきだし」と称して、ファイルすることによって実際の授業にも使えるものとすることを考えた。そのため、ここでは「領域」を「数と計算」「量と図形」に大別し、どちらかの学習に際して使えるようにしてある。

全て、表組みにしてあるが、その内容は次のようである。

題	（子供に与える題目）	学年	領域（２つに大別）
ねらい	（この問題の意図など）		
問題・活動	（オープンエンドの問題・問題づくりの原題など）		
予想される反応	（実際の授業からの事例や、考えられる反応例）		
参考文献	（この問題に係わ文献などを紹介する）		

（執筆者）

もくじ

◆数と計算

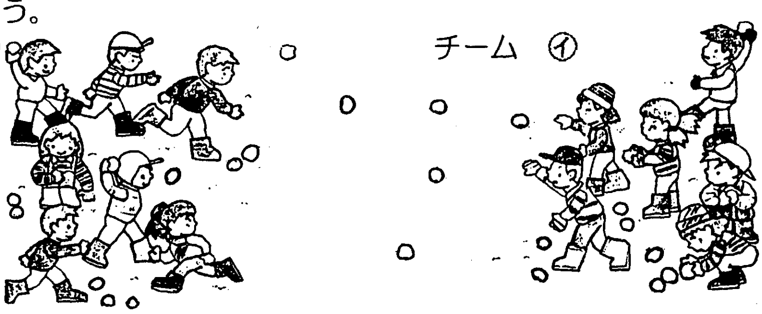
◆量と図形

§1

題	お話づくり	1年	数と計算
ねらい	算数の基本的な概念や考え方に対する興味を高めるよう工夫された絵だけの絵本を見ながらお話しをつくる。この活動を通して児童一人ひとりがつくったお話をもとに算数の概念や考え方についての具体的な理解をはかる。		
問題・活動	活動を理解する　「絵のない絵本を見てお話しをつくりましょう」 ・一人一冊ないし2～4人で一冊の絵本を見ながら，数のお話しをつくる。 ・絵を見ながら作るお話しならば，どのような話でも自由に作って良いことを知らせる。 ・2人～4人で作る場合にはページ毎に分担して作っても良いし，お互いのアイディアを合わせながら作っても良い。内容ばかりでなく作り方も自分たちの好きなようにして良いことを知らせる。		
予想される反応例	・それぞれの作ったお話しを発表する。 同じ絵を見ながらも，一人ひとりの見方によって様々なお話ができることを楽しむ。 数に着目したお話しづくりをはじめ，それぞれ異なる部分に目を付けてつくった問題を互いに楽しみながら，数と計算に関わる学習に対する問題意識や興味関心を高めていく。		
参考文献	「はじめてのさんすう」絵本シリーズ（坪田耕三・著，川村　易・絵）		

高橋　昭彦

§2

題	どんな　もんだいが　できるかな	１．２年	領域 数と計算
ねらい	◎問題場面から式をつくる，式から問題を作ることを通して，式のよさ，式を読むことができる。 ・式を見て問題を作る前の段階として，１つの場面を提示し自ら情報を得，選択して自分の課題を見つけることで，学習に対する意欲を喚起させる。 ・授業提示では，プリントより模造紙に絵を色をつけ，視覚に訴えた方が学習効果があると思われる。 おすすめ度★★★★☆　　楽しさ度★★★★☆		
問題・活動	どんな　もんだいが　できるかな？ ちょうせん　してみよう。 チーム　㋐　　チーム　㋑ 		
予想される反応例	１年・男の子８人と女の子５人で雪合戦をします。全部で雪合戦している子どもは何人いるでしょうか。 ・雪合戦をしています。チーム㋐は７人います。チーム㋑は６人います。雪合戦をしている子どもたちはみんなで何人ですか。 ・チーム㋐は７人います。チーム㋑は６人です。どちらが何人多いですか。 ・しましまの洋服を着ている子どもはチーム㋐に２人，チーム㋑には３人います　あわせて何人いますか。 ・帽子をかぶっている子どもはチーム㋐に２人います。チーム㋑には４人います　帽子をかぶっている子どもはあわせて何人いますか。 ・チーム㋐には雪のタマが２８こあります。チーム㋑には雪のタマが３６個あります。チーム㋑の雪のタマの数と同じタマ数になるには，チーム㋐の子どもたちはあといくつ雪のタマを作るとよいですか。 ・チーム㋐は雪のタマを２８個作りました。そして，２１個投げてしまいましたので，１４個作りました。雪のタマは今いくつありますか。 ２年・１人３こずつ雪のタマを作ります。７人では雪のタマは何個できますか。 ・チーム㋐とチーム㋑に分かれて雪合戦をします。チーム㋐は雪のタマを１人３個ずつ作ります。チーム㋑は１人４個ずつ雪のタマを作ります。雪のタマはどちらがいくつ多いですか。 ・チーム㋐とチーム㋑が雪のタマを作ります。両チームの雪のタマの数が同じになるには，チーム㋐，チーム㋑それぞれ１人何個ずつ雪のタマを作るとよいですか。		
参考文献	・教育出版　小学校算数２年教科書		

清水　壽典

§3

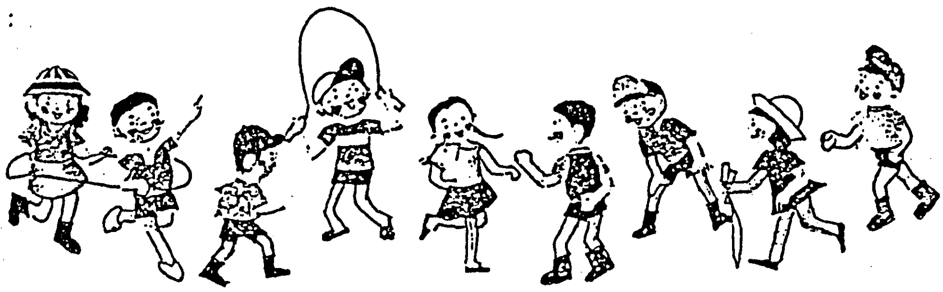
題	もんだいはなにかな？	1 年	領域：数と計算

ねらい

教科書にあるような「９－６になるようなお話しをしましょう。」ではたいてい１つのお話ししかつくれないようなさし絵がついている。これでは、クラス全員が同じお話しをつくるだけで驚きや喜びは感じることができない。そこで、たくさんの９－６がつくれるようなさし絵を使ったらどうかと考えた。絵の中から必要な情報を捜しだし、それにあったお話しをつくることで見つける喜びを感じ、友達が違うお話しをつくることで驚きを感じるのではないか。少しの工夫だが、子どもたちの意欲を引き出すことができると思う。また、情報を取捨選択していく力も育てることができる。

問題・活動

もんだい：



しき：９－６

こたえ：３

もんだいはなんだろう？
よそうしてみてね。

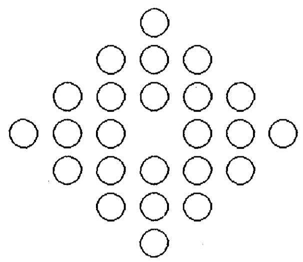
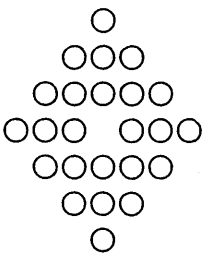
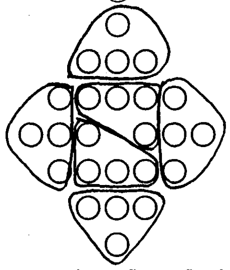
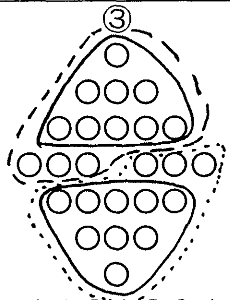
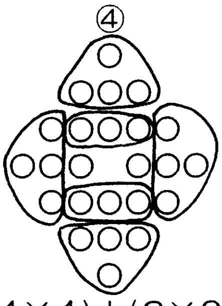
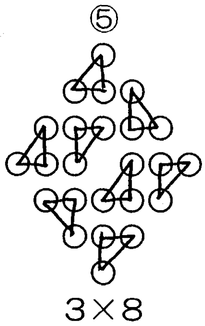
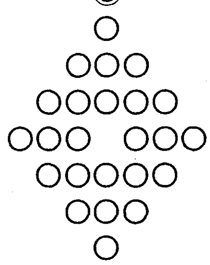
予想される反応例

・ぼうしをかぶっていない子は何人ですか？
・長靴をはいていない子は何人いるかな？
・女の子は何人いるでしょう？

参考文献

佐藤　佳世

§４

題	ぜんぶで　いくつ	２ 年	領域：数と計算
ねらい	◎数え上げる（式で表したり，対称性に着目したり，図形的に見たり）ことを通して数感覚を育てる。 ・真ん中があると5×5を用いられるが真ん中を除くことによって，②や⑤のような多様性のある解が期待できる。 ・はじめからおはじきを着色してしまうとかけ算を用いることを示唆してしまうので着色はしない。児童がどこに着目して数え上げるかをみることが大切である。 ・かけ算九九の学習のあとに用いると，ただ数え上げるのではなく，自然とかけ算九九を使い，数感覚を磨くために役立つ。 おすすめ度★★★★☆　　楽しさ度★★★☆☆		
問題・活動	おはじきは　みんなで　いくつ　あるのかな。 くふうして　かぞえて　みよう。 		
予想される反応例	①  ひとつひとつ数える ②  ４×６＝２４ ③  ・1+3+5+6+5+3+1 ・(1+3+5)×2+6 ・(1+3+5+3)×2 ④  (４×４)＋(３×２)＋２ ⑤  ３×８ ⑥  ５×５－１		

清水　壽典

§５

題	かけざん九九であそぼう	２年	領域　数と計算

ねらい

- 分配・結合などにより、未習の大きい数の計算もできるようになる。
- いろいろな数の九九ができ、数の構成に興味をもつことができる。
- 新しい数の九九の作り方から類推して、さらに新しい数の九九を作ろうとする。

問題・活動

２の段と３の段を使って、いろいろな数のかけざんをつくろう。

２×１＝　２	３×１＝　３
２×２＝　４	３×２＝　６
２×３＝　６	３×３＝　９
２×４＝　８	３×４＝１２
２×５＝１０	３×５＝１５
２×６＝１２	３×６＝１８
２×７＝１４	３×７＝２１
２×８＝１６	３×８＝２４
２×９＝１８	３×９＝２７

（約束）

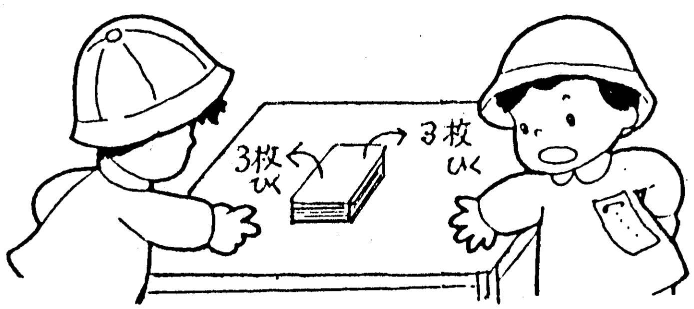
- どのようにしてつくったか説明できるようにしておく。

予想される反応例

（２×１＝　２）＋（３×１＝　３）＝５×１＝　５
（２×２＝　４）＋（３×２＝　６）＝５×２＝１０
（２×３＝　６）＋（３×３＝　９）＝５×３＝１５
（２×４＝　８）＋（３×４＝１２）＝５×４＝２０
（２×５＝１０）＋（３×５＝１５）＝５×５＝２５
（２×６＝１２）＋（３×６＝１８）＝５×６＝３０
（２×７＝１４）＋（３×７＝２１）＝５×７＝３５
（２×８＝１６）＋（３×８＝２４）＝５×８＝４０
（２×９＝１８）＋（３×９＝２７）＝５×９＝４５

石川　浩一

§6

<table>
<tr><td>題</td><td>数のつなひき</td><td>2年</td><td>領域　数と計算</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">・演算方法を組み合わせることで、いろいろな数を作り出すことができ、同時に、数の構成についても見方が広げることができる。
・計算の手のうちは、お互いに答えを出し合うまで見せないので、逆転できる可能性が大きく、計算に対する関心を高めることができる。</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">数カードを使って、数のつなひきをしよう。


（約束）
・順番を決め、数カードを3まいずつひく。
・3まいの計算（四則計算）した答えが、大きいほうが勝ちで、相手の数カードをもらえる。この要領で、数カードがなくなるまで続ける。
・数カードを多く持っているほうが勝ちとなる。</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3">ひいた数カードが、A君『1、5、8』B君『2、4、6』の場合
A君　負けそうなので（　　）を使った式で計算
（1　＋　5）　×　8
B君　数字が大きいので、勝てると思い単純にかけざん
2　×　4　×　6
ひいた数カードが、A君『1、2、2』B君『1、1、3』の場合
A君　負けそうなので（　　）を使った式で計算
（1　＋　2）　×　2
B君　負けそうなので（　　）を使ったが、使い方を工夫できず。
（1　＋　3）×　1</td></tr>
</table>

石川　浩一

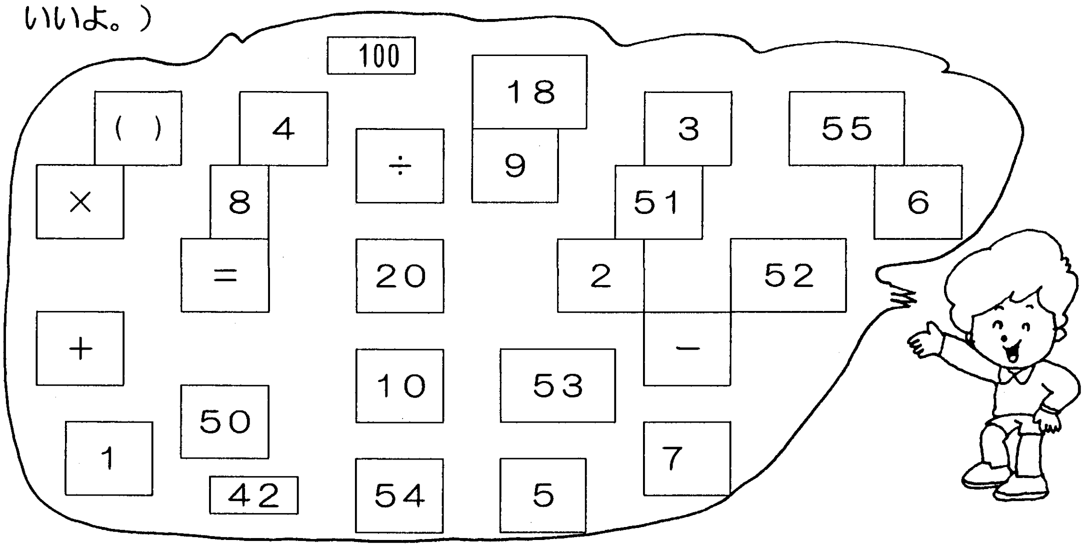
§７

<table>
<tr><td>題</td><td>数の神経衰弱</td><td>２年</td><td>領域　数と計算</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">・演算方法を組み合わせ決めた数を作ることで、組み合わせが多くできる数、その反対の数など意外な発見ができ、数に対する見方が広がる。
・決めた数を作れるのに、演算方法の組み合わせが考え付かないと負けてしまうので、計算に対する意欲を高めることができる。</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">数カードを使って、神経衰弱をしよう。

（約束）
・めくる数カードの計算（四則計算）した答えを決める。
・トランプと同様の仕方で、お互いに数カードを２まいめくる。
・２まいの計算（四則計算）した答えが、決めた答えになればもらえる。
この要領で、数カードがなくなるまで続ける。
・数カードを多く持っているほうが勝ちとなる。</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3">めくる数カードの計算（四則計算）した答えを『８』に決めた場合
１　たす　７　　　１０　ひく　２
２　かける　４　　　１６　わる　２
めくる数カードの計算（四則計算）した答えを『６』に決めた場合
３　たす　３　　　１２　ひく　６
２　かける　３　　　１８　わる　３
めくる数カードの計算（四則計算）した答えを『１』に決めた場合
１　たす　０　　　２　ひく　１
１　かける　１　　　１　わる　１</td></tr>
</table>

石川　浩一

§8

題	ふしぎな　かず	２，３年	領域:数と計算
ねらい	◎自分にあった情報を選択し，いろいろな数や加減乗除 を用いて式をつくることで式　の構造や式のよさや計算 のきまりについて楽しく学ぶことが出来る。 ・数は１から９を基本に誕生日や車のナンバー，学習の日にち等２０個ほど児童と一緒に考える。 ・２年生ではわり算は未習なので抜いて取り組ませる。 ・作った式を解いたり，式から問題を作ったりすると式の構造やよさが見えてくる。 おすすめ度★★★★☆　　楽しさ度★★★☆☆		
問題・活動	下の　カード の　すうじを　つかって，式を　作りましょう。 こたえも　カード の　なかから　えらんでね。　（＋－×÷は　何かい　つかってもいいよ。）  		
予想される反応例	・たしざん 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 1+2=3 1+3=4 ・ ・ ・ 2+1=3 2+3=5 2+4=6 ・ ・ ・ ・ひきざん 11-1=10　　11-10=1 11-2= 9　　19-18=1 11-3= 8　　55=53=2 ・かけざん 2×3= 6 2×4= 8 2×5=10 3×6=18 ・わりざん 8÷2= 4 10÷5= 2 10÷2= 5 55÷5=11 ・（）の式 (2+4)×3=18 など		

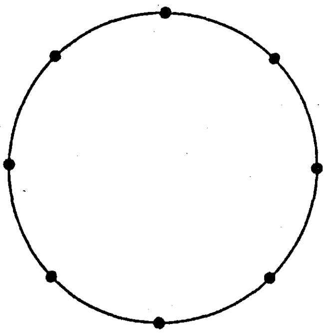
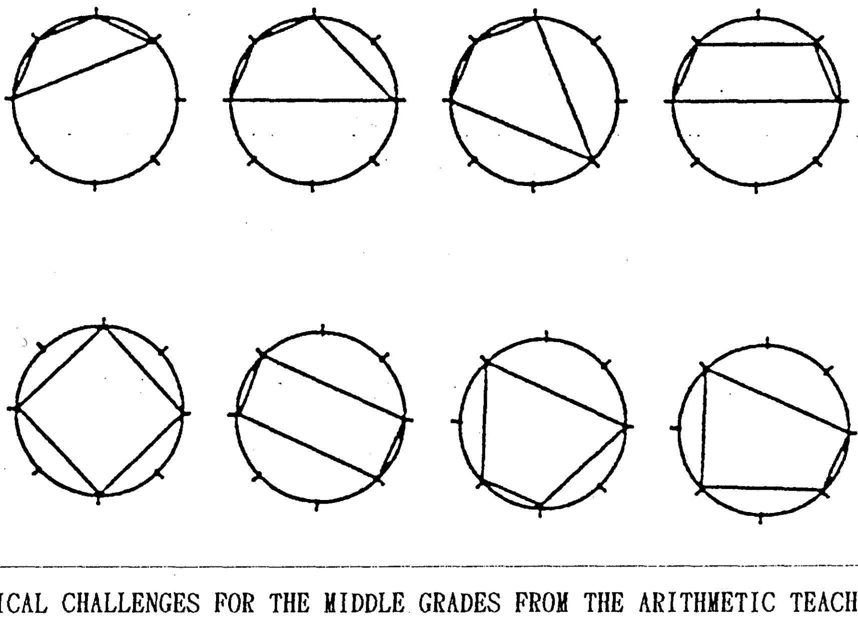
清水　壽典

§９

題	ちがうのはどれかな？	全学年	領域：数と計算
ねらい	今まで学習して来たことの復習の方法の１つである。例えば、下の問題では、数の大小関係・奇数・偶数・足し算・引き算・こたえの求め方などに関する知識を総動員しなくてはならない。教師にとっても子どもの頭の中を覗くよい機会である。すべてに理由あるところがこの問題のすごいところである。他にも、「１、２、４、８、１２、６」での違うもの探しや図形での違うもの探しなどがつくれる。 慣れてきたら、子どもたちに問題をつくらせてもいい。		
問題・活動	４＋２　　４＋４　　２＋６ １０－２　　７＋１ ４＋２＋２ 上の式のなかで、１つだけほかとちがうものがあるよ。 どれだろう？ わかったら、そのわけをおしえてね。 こたえは１つじゃないよ。		
予想される反応例	４＋２・・・・・「こたえがこれだけ６！ほかはみんな８だよ。」 ４＋４・・・・・「おなじ数をたしてる。」 ２＋６・・・・・「小さい数＋大きい数の順番になってる。」 １０－２・・・・・「これだけ引き算だ。」「２桁の数が入っている。」 ７＋１・・・・・「奇数＋奇数になってる。」 ４＋２＋２・・・「３つの数字の足し算だ。」		
参考文献	『The Mathematical Toolbox』Cuisenaire Company of America, inc		

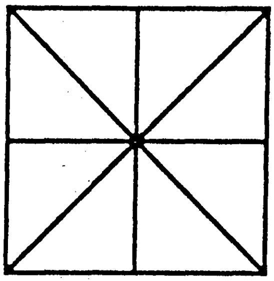
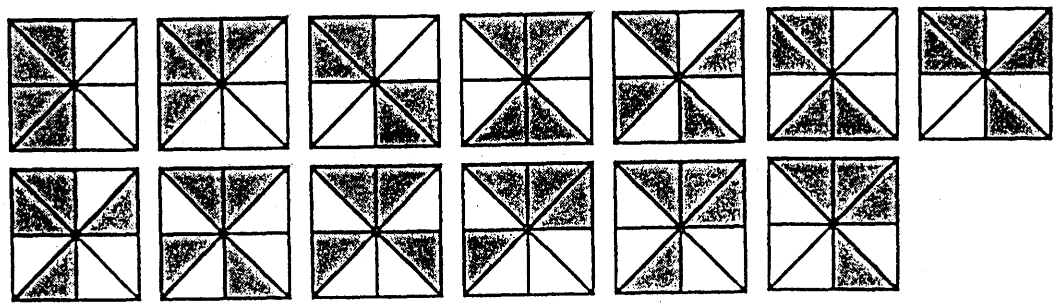
佐藤　佳世

§10

<table>
<tr><td>題</td><td>てんをむすぼう！</td><td>1、2 年</td><td>領域：量と図形</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">点の数を数えて実際に描くことで、いろいろな四角形があることを知ってもらう。
「いくつできたかな」と聞くことで、どうすれば違う形が作れるかを考えるだろう。回したときに同じ形になってしまうものについても話題になったら話し合ってもいい。始める前に円の中で線が交差しないことを約束するといい。
また、点の数を3個、5個として活動を発展させることもできる。発展させることで、図形の構成要素にも着目できるのではないだろうか。</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">したのまるには、てんが8こあります。
てんを4つえらんでせんでむすぶとどんなかたちができるかな。
</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>参考文献</td><td colspan="3">『MATHEMATICAL CHALLENGES FOR THE MIDDLE GRADES FROM THE ARITHMETIC TEACHER』NCTM</td></tr>
</table>

佐藤　佳世

§１１

題	いろをぬろう！	1、2 年	領域：量と図形
ねらい	色板ならべなどで、直角三角形をいろいろ動かしてきたが、さたに“位置”というものに目を向けて行こう。色をぬるという活動でなく、色板を並べる活動にしてもいい。ただし、完成品は色を塗ったものをつくり、回して見ることができるほうがいい。塗る色は一色の方いいだろう。回したとき同じ模様になるものを作らないようにしよう、というのも難問かもしれないが挑戦してみては・・・「先生は～個見つけたよ」といって挑発するもよし、もっとないの？と聞いて「絶対もうないよ！」と説明させるもよし。 また上の学年では、割合分数と分割分数の話しにも使える。		
問題・活動	したのしかくは８このへやにわかれています。 はんぶんだけへやをぬってみよう。 どんなもようができるかな。 		
予想される反応例			
参考文献	『MATHEMATICAL CHALLENGES FOR THE MIDDLE GRADES FROM THE ARITHMETIC TEACHER』NCTM		

佐藤　佳世

§12

題	対称な模様を作ろう！	全学年	領域：量と図形

ねらい

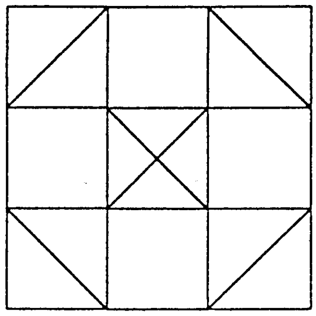
これは高学年の問題だが、参考に載せてみた。色塗りの問題がこのように高学年でも使える。ここでの工夫は、“何でもいいからつくってみよう”というようなオープンな問題ではなく、ある制限を加えた中でのオープンな問題というところにある。そのほうが、子どもたちの知的好奇心を刺激し、意欲をもって行うのではないだろうか。

問題・活動

右の図に色を塗って対称な模様を作ろう。

対称軸が１本のときはどんな模様かな？
２本のとき、４本のときは？

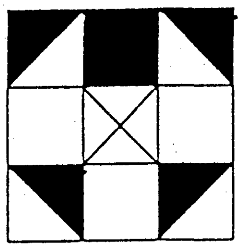
対称軸がないときはどんな模様かな？



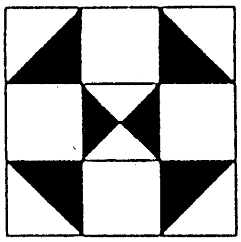
＊色を何色使うかによっても活動が変わってくる。

予想される反応例

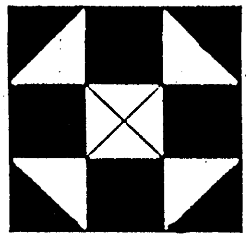
対称軸１本のとき



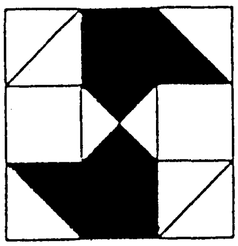
対称軸２本のとき



対称軸４本のとき



対称軸がないとき

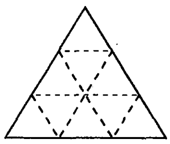
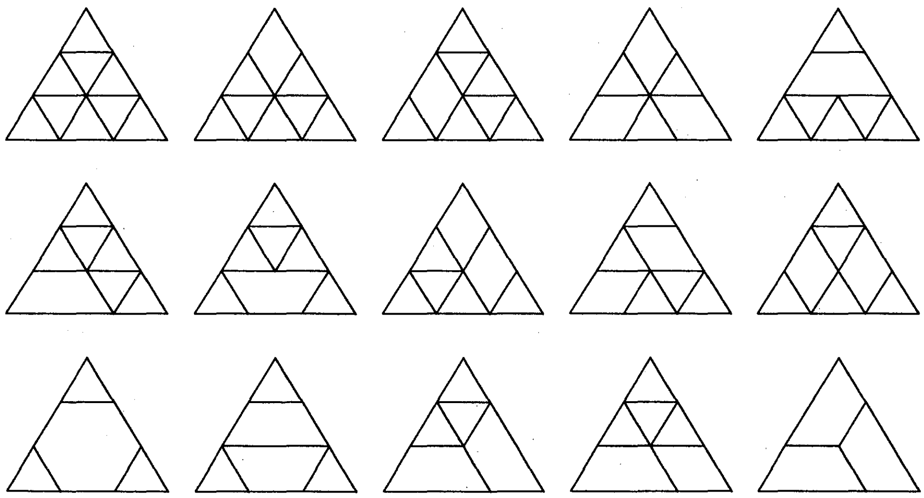


参考文献

『The Mathematical Toolbox』Cuisenaire Company of America, inc

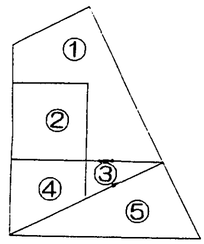
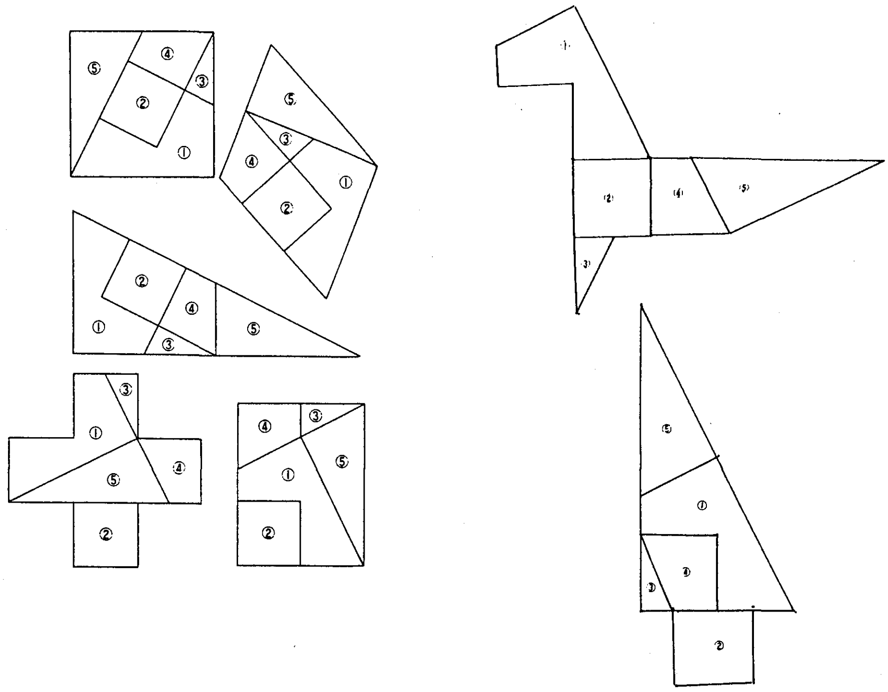
佐藤　佳世

§13

題	パターンブロックの活動	1，2年	図　　形
ねらい	パターンブロックを用いて正三角形を構成する活動を通して，図形に対する感覚を育てる。ここでは，一つの形を構成する多様な方法を見つけだしたり，またその方法を試行錯誤しながら見つけだす過程を通して児童の図形に対する能力を高めることをねらっている。 また，ここでは特にパターンブロックにある正三角形9分の大きさである正三角形をとりあげ，なるべくたくさんの構成の仕方を考えさえるようにしている。		
問題・活動	パターンブロックを使って，図のような形を作りましょう。 		
予想される反応例	 その他		
参考文献	「パターンブロックでもっと楽しい活動を」算数教育No472，明治図書，1995，pp15-18		

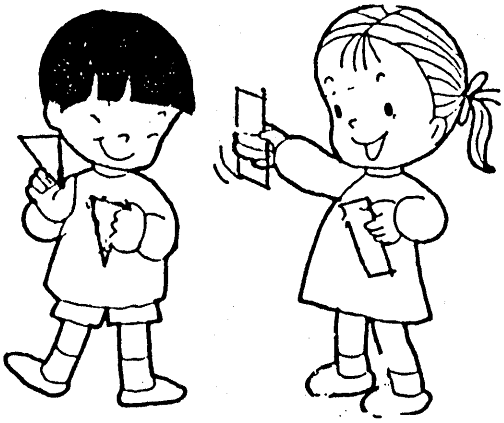
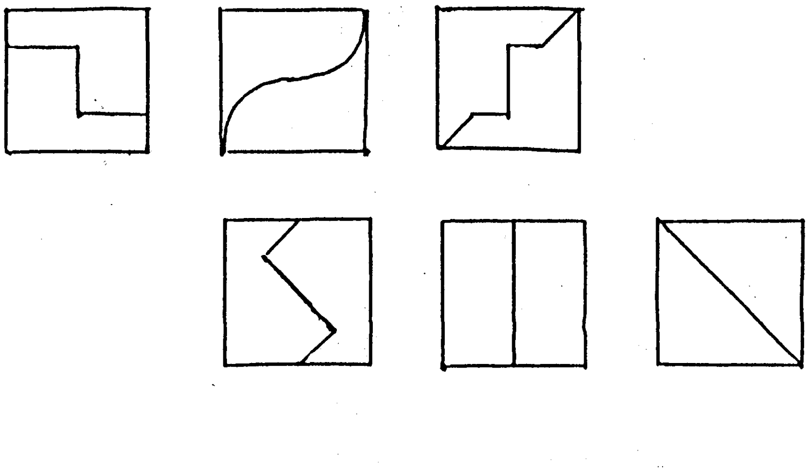
高橋　昭彦

§14

<table>
<tr><td>題</td><td>どんな　かたちが　できるかな</td><td>1，2年</td><td>領域：量と図形</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">◎形づくりを通して，図形感覚を育てる。
◎操作活動を通して図形の移動や構成要素に気づかせる。
・基本図形以外の図形があるができあがったかたちの中に十字架や直角三角形，正方形，長方形，平行四辺形などがあり，パズル感覚で取り組める。
おすすめ度★★★★☆　　楽しさ度★★★★★　　厚紙に印刷して切って，配る</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">さあ！　ちょうせんしてみよう。　どんなかたちが　うまれるかな？
5まいの　かたちを　ぜんぶ　つかって　つくろう
</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>参考文献</td><td colspan="3">数とかたちのクイズ；遠山 啓　ほるぷ出版</td></tr>
</table>

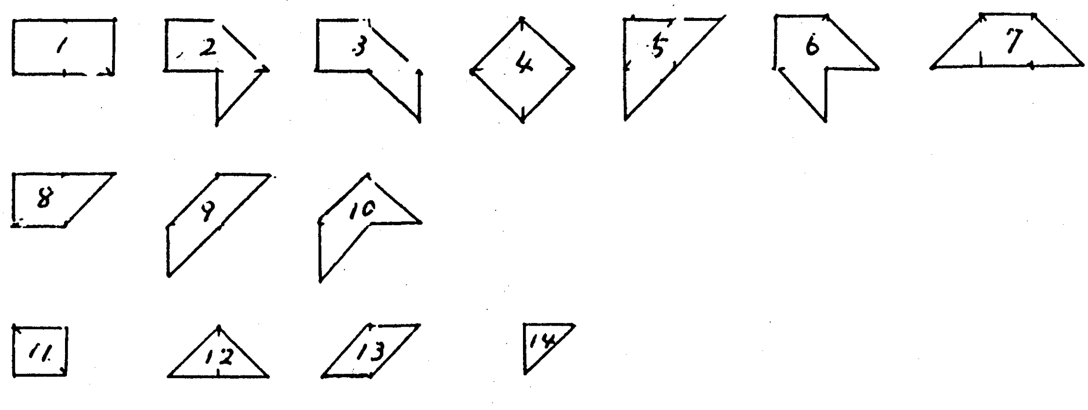
清水　壽典

§15

題	しかくのはんぶんこ	2年	領域　量と図形
ねらい	・直線だけでなく曲線までも取り入れて切ることで、思わぬ形で2等分でき、図形に対する見方を広げることができる。 ・回したり、ずらしたり、裏返したりして、図形の構成要素に着目したり大きさや向きに関係なく図形をとらえたりすることができる。		
問題・活動	この形（正方形）を、ちょうどにはんぶんこして、パズルをつくってあそぼう  （約束） ・どのようにして2等分したか説明できるようにしておく。 ・本当に半分になっているか確かめ合う。 2人1組で対戦。タイムレース。早く組み立てられたほうが勝ち		
予想される反応例			

石川　浩一

§16

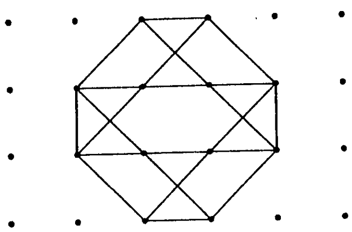
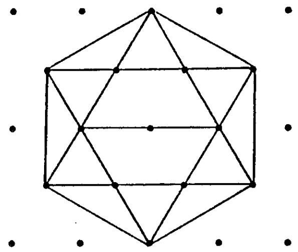
<table>
<tr><td>題</td><td>かたちの大きさくらべ</td><td>2年</td><td>領域　量と図形</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">・重ねたり、回したり、裏返したり、などの大きさくらべを通して、同じ広さでも、いろいろな図形があることに気付くことができる。
・形やまわりの長さが違っても、同じ広さの色板を同じ数だけ使っているから、広さは同じだと筋道立てて考えることができる。</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">次の中から『(　)より大きくて(　)より小さい』という形をさがそう。
＊無造作に置いておく＊


(約束)
・どのようにして大きさくらべをしたか説明できるようにしておく。</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3">8の形　　『(12)より大きくて(1)より小さい』
8の形　　『(11)より大きくて(5)より小さい』
9の形　　『(13)より大きくて(3)より小さい』
9の形　　『(12)より大きくて(5)より小さい』
など、1～7　8～10　11～13は、同じ大きさに気付けば、1つの図形から、いくつもの広さの大小関係が作れる。</td></tr>
</table>

石川　浩一

§17

<table>
<tr><td>題</td><td>かたちの　かくれんぼ</td><td>1・2年</td><td>領域：量と図形</td></tr>
<tr><td>ねらい</td><td colspan="3">◎ジオボード上に隠れた図形を探すことによって，向きや大きさにかかわらず同じ図形は同じというように図形感覚を育てることが出来る。
・①は正方形上の，②は正三角形上の点を結んで出来た図形である。①には直角二等辺三角形や正方形が現れ，②は正三角形や正六角形が現れるのが特徴である。
・プリントでもよいが，児童ひとりひとりにジオボードを与える方がより望ましい。

○別の投げかけ方：三角はいくつあるでしょう？ たくさん　みつけられるかな？
おすすめ度★★★★☆　　楽しさ度★★★☆☆</td></tr>
<tr><td>問題・活動</td><td colspan="3">下の　ず①と②の　なかに　どんなかたちが　かくれているかな
①

②
</td></tr>
<tr><td>予想される反応例</td><td colspan="3">1年　①
・さんかく
・大きいさんかく
・ながしかく
・ふといながしかく
・ましかく
・クリスタル
・台のかたち
・凧のかたち
・十字架
・ゆがんだながしかく

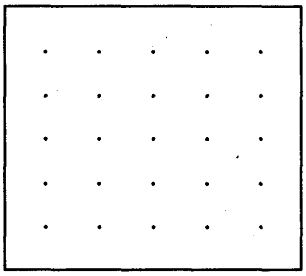
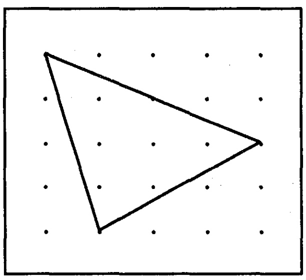
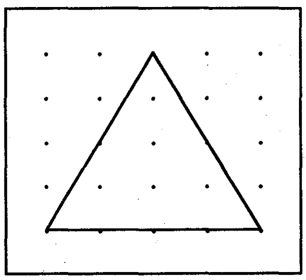
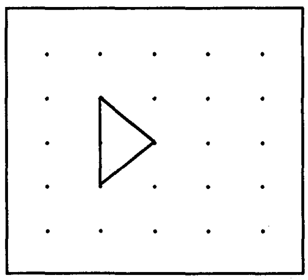
②
・星
・さんかく
・大きな（小さな）さんかく
・カメのこうら
・ながしかく
・ゆがんだながしかく
・臼
・台のかたち
・カッター
・かさこじぞうのかさ

2年　①
・三角形
・小さい三角形
・大きい三角形
・直角三角形
・長方形
・正方形
・台の形
・六角形
・ひし形（クリスタル）
・十字架

②
・星
・直角三角形（30°，60°，90°）
・広い三角形
・大きな（小さな）三角形（三角形）
・長方形
・大きな（小さな）カメのこうら
・ゆがんだ長方形
・台のかたち
・臼・鼓</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

清水　壽典

§１８

題	三角形をつくろう	2年	図　　形
ねらい	三角形の導入時に，児童自らの手で三角形を構成する活動を取り入れ，三角形の概念を理解させることをねらいとしている。児童一人ひとりがジオボード上につくった多様な三角形を比較検討する過程を通して，図形学習の素地的な活動を経験させる。		
問題・活動	ジオボードを使って，なるべくたくさんの三角形をつくろう。 ・児童にジオボードを与え，３本のペグを結んで三角形をつくることを知らせる。 ・なるべくいろいろな三角形をつくることを具体的にわからせる。 		
予想される反応例	・グループ内で各自がつくった三角形を見合い，力を合わせてなるべくたくさんの種類の三角形をつくる。 ・グループ毎に，つくった三角形を発表し，どのグループが最も多くの三角形を作ったか競う。 ・それぞれのグループがつくった三角形を見比べながら「同じ三角形」「違う三角形」とはどのような視点で見ているかを考える。   		
参考文献			

高橋　昭彦

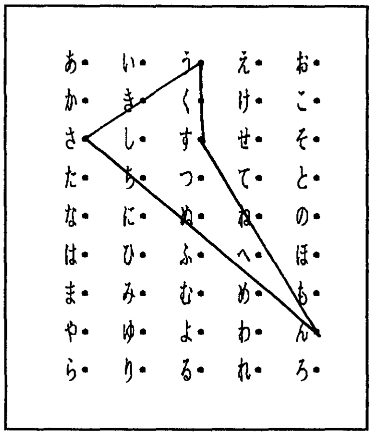
§19

題	単語で図形をつくろう！	1、2、3年	領域：量と図形

ねらい

学年に応じて活動が考えられる。国語とも関連があり、辞書を引きながらやってもいいだろう。単語量も増えるのでは。多角形を習わないうちは、とにかくどんどん作って、いろいろな図形と出会ってもらおう。どんな形か子どもの言葉でいってもらうのもいいと思う。学年が上がった②の活動では、「これも四角形？」という疑問がでてきて、また新しい学習が始まるかもしれない。また、③の活動は、授業の最後に行って、クラスに提示して『自分の形展覧会』をしてもいい。自分の名前が形で見れる！これも新しい発見だ。

問題・活動



五十音が書いてあるジオボードで図形作りをしよう。

①4文字の単語“さんすう”では、4つの辺をもつ形ができます。
2文字、3文字、4文字、5文字の単語の時にはどんな形ができるかな。

②三角形、四角形、五角形が作れる単語を探そう。

③自分の名前はどんな形かな？

予想される反応例

①の活動では：“くつ”“いす”「一本の線ができるよ。」
“さくら”「3本の線でかこまれてる。」
“まらそん”「4本の線はあるけど、ぶつかちゃった。」
↓

②の活動では：（①よりも条件が付く活動）
“たなばた”「線になっちゃうよ。」
“やきとり”「できた！」
“とらっく”「これは四角形じゃないのかな･･･」

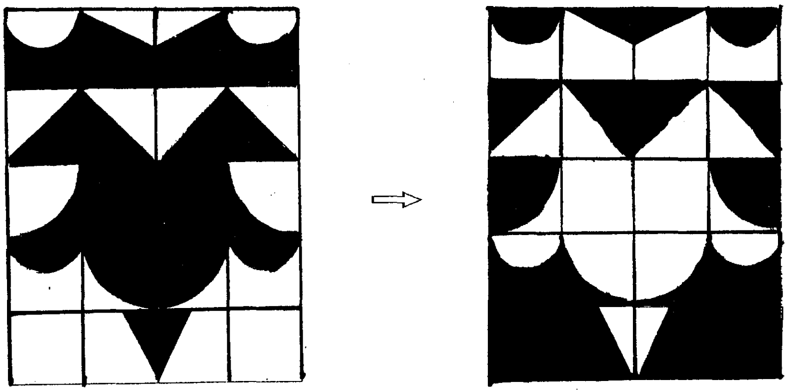
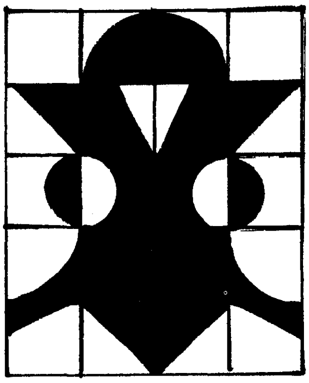
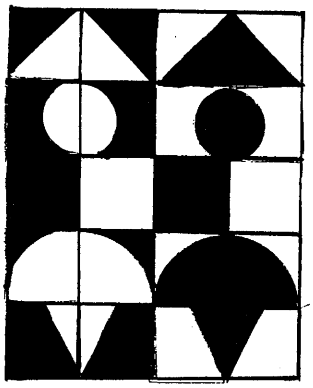
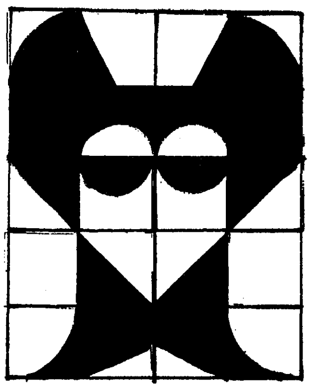
③の活動では：「わたしの名前はこんな形だよ。」

参考文献

『The Mathematical Toolbox』Cuisenaire Company of America, inc

佐藤　佳世

§２０

題	王　様　の　変　身　！	１・２年	図　形
ねらい	模様のついた図形を動かすことによって、ずらす・まわすなどの操作を自然に取り込み、遊びながら移動の感覚を磨く。		
問題・活動	王様の顔がシルエットになっています。 このシルエットを線にそって２０枚のカードに切って、カードを並べ変えて、別の形を作ってみましょう。 （例） 		
予想される反応例	 ロボット  ２人でさんぽ ねこ 		

坪田　耕三

小学校３・４年部会

横浜国立大学　石田淳一
目黒区立宮前小学校　滝井　章

１、オープンエンドによる導入のあり方について

オープンエンドの問題には、問題解決において自然に発生した多様な考え方による多様な解を認めた上で、それぞれの活用（将来）について考えていくというよさがある。一般的な授業では、学習内容に直結した導入問題が設定されている。しかし、これでは、学習する内容がどのような背景から生じているのか、どのようなよさがあるのか、を認識しつつ理解する点については十分とはいえない。

その点、オープンエンドの問題による導入では、既習内容を認めつつ、自然に新たないくつものアイデアを発生させることができる。その新たなアイデアの中に学習する内容があれば、背景、よさについて認識をもった上で、単元の学習を進めることができる。

そこで、導入に使うオープンエンドの問題としては、想定される解すべてが正解と見なされる上にさらに次の条件が必要と考える。

（１）既習の内容で十分に解決が可能である。
（２）解決するために単元の学習内容が自然に発生する要素を含んでいる。

以上の条件を満たしたオープンエンドの問題を単元の導入に扱うことにより、単元の学習内容のよさを十分に認めた上で学習が進められるため発展内容を扱うことができるようになり、より算数の楽しさを味わわせることができると考える。

２、オープンエンドの問題が作りやすい領域

実際にオープンエンドの問題を作成してみると、「数と計算」「数量関係」領域では作りやすいが、「量と測定」「図形」領域では作りにくいことに気づく。

これは、両領域とも、既習の考え方を生かしつつも既習の知識では解決しきれない新たな内容を含むことが多いことが原因と考えられる。

その意味からは、さらに新たな視点からのオープンエンドの問題の開発を試みる必要があるといえる。

３、オープンエンドの問題の分類について

オープンエンドの問題には、さまざまな分類が考えられるが、本研究では、以下の５つに分類している。

『見つける（発見）』・・・問題からさまざまなきまりを発見するような学習活動を指す。
『分ける（分類）』・・・・立体などをさまざまな観点からグループ分けするような学習活動を指す。
『表す（数値化）』・・・・事象を数値などを自由に活用してさまざまに表現するような学習活動を指す。
『広げる（発展）』・・・・学習した内容を活用してさまざまな観点から発展問題をつくるような学習活動を指す。
『つくる（構成）』・・・・

しかし、中学年部会では、新たな分類を提案する。『読み取る（解釈）』である。グラフや表のような資料から傾向などを読み取る活動は、人それぞれさまざまである。特に“今後”を推測する活動は、まさしくすべてが正答といえる。そこで、オープンエンドの問題の分類の一つに『読み取る（解釈）』を新たに加えることとした。

４、問題づくりによる導入のあり方について

問題づくりの授業は、単元のまとめとして扱われる事例が多い。しかし、それでは、出された自由な発想が十分に授業で生かされるとはいいにくい。そこでここでは、単元の導入時に問題づくりを扱う取り組みを提案する。

まず、既習内容の問題を提示し、解決させる。次に、「この問題より少し難しい問題をつくってみよう。どこをどのように難しくしたかも考えよう。」となげかけてみる。子どもたちは、さまざまな観点から「少し難しい問題」をつくる。

その観点を分類した後、難しさにランク付けをし、全体で話し合いながら単元全体の学習計画を立てる。このような流れでは、単元の内容の学習に入るまでに、時間数をとられてしまう。しかし、単元の内容について十分に見通すことができているため、後の学習はかなりスムーズに流れる。結果として、算数の授業の充実につながると考える。

5、小学校中学年における全単元の導入例

＜第３学年＞

単元	かけ算　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』『表す（数値化）』
目標	・０のかけ算の存在に気づき、０のかけ算の積はいつも０になることがわかる。 ・０のかけ算を自由に活用することができる。
問題	０点、１点、３点、５点のゾーンに分かれた得点板を使って、点取りおはじきゲームをします。おはじきは一人10個です。てつや君の得点は20点でした。おはじきはどこにいくつ入ったでしょうか。

発問のポイント

・「０点が□人、１点が◇人、３点が▽人のとき、合計点は何点でしょう。」という発問ではなく、条件として合計点だけを与えておき、そこから何点に何個かを推測させることにより、オープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・１点に５個、３点に５個というように10個すべてが得点をあげた、と考える子どももいるであろうが、５点に４個、０点に６個、と考える子どももいるであろう。そのどれもが数を多様にとらえることができており、正解である。一通り説明し、正当性を認めた後、わかりやすく式表示をさせてみる。その中で、０のかけ算が誕生する。

単元	かけ算のひっ算　　　分類：オープンエンドによる導入～『分ける（分類）』
目標	・２けた×１けた（１けた×２桁）のかけ算の場面を考え出すことができる。
問題	同じ数ずつまんじゅうがのっている皿がいくつかあります。まんじゅうを数えたら全部で30個でした。さて、いくつのっている皿が何皿あるのでしょうか。

発問のポイント

・かけ算の式から答えを求めさせるのではなく、答えからかけ算の式を考えさせることにより、オープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・既習の九九を活用して考える子どもが多いはずである。しかし、図で考える子どもや感覚でとらえる子どもは、３×10（10×３）を思い浮かべることができるであろう。さらには、２×15（15×２）などにも目がいくようになる。
結果として２桁×１桁の計算（筆算）まで自然と踏み込める。

単元	わり算　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』
目標	・答えが24になるかけ算の式を見つけることができる。 ・答とかける数（かけられる数）がわかっていれば、かけられる数（かける数）を求められることがわかる。
問題	3年3組には、24人の子どもがいます。お楽しみ会で、「仲間作りゲーム」をすることになりました。しかし、仲間外れが出るとかわいそうなので、仲間外れが出ない人数で「仲間作りゲーム」をすることにしました。何人の「仲間」を作るゲームにすればよいでしょう。

発問のポイント

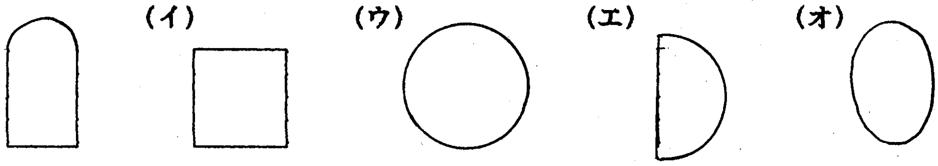
・いきなりわり算の場面を扱うのではなく、かけ算の場面からわり算の場面をつくり出すように工夫している。
・積だけを条件として与えておき、条件にあうかけ算の式を自由に考えさせることにより、オープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・仲間外れを作らない、という題意から、等しく分ける（等分）というわり算の概念を理解させる。
・「□人組の場合何組できるかな？」「△組つくりには何人組がいいかな？」などを話し合う中で、わり算意識を向ける。
・かけ算を利用することにより、わり算の答が求められることを理解させる。
・発展として、「５人ならばどうなる？」「７人ならば・・・？」と投げかけることにより、オープンエンドの問題で培った概念をより確かなものとすることができる。

単元	円と球　　分類：オープンエンドによる導入～『分ける（分類）』
目標	円の特徴をつかみ、弁別することができる。
問題	次の図形を、自分なりの理由をもってグループ分けをしましょう。

（ア）　（イ）　（ウ）　（エ）　（オ）



発問のポイント

・直線や曲線で囲まれたさまざまな図形を自分なりの観点をもとに自由に弁別させることにより、オープンエンドの問題とした。

授業のポイント

・頂点の数、線の種類などにより、子どもたちはさまざまな分類をする。その観点を発表しあうことにより円のもつ特殊性に気づき、円に対して親しみがもてるようにする。

単元	大きな数　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す（数値化）』
目標	３８００という数を多面的にとらえることができる。
問題	次の□に入る数を考えてみよう。 ３８００は、□を□した数です。

発問のポイント

・「□を△倍した数は」「◇を▽分の一した数は」という発問は多い。しかし、これでは、数のもつ多面性を生かすことはできない。そこで、3800という数を予め与えておき、逆に3800という数が何をどうした「数かを自由に考えるというオープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・３８００という数を多面的にみさせることにより、ある数を何の数の10倍、100倍、10分の一、100分の一とみられるようにする。

単元	たし算とひき算　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す（数値化）』
目標	・計算しやすいように、組み合わせを考えることができる。
問題	100円もって、おかしを買いに行きました。お店には、38円のあめ、27円のクッキー、22円のチョコ、17円のせんべい、13円のガムがあります。 オーバーしないように上手に買い物するには、どのように買い物をすればよいでしょうか。

発問のポイント

・計算しやすいようにどのようなセットをつくるか、「質より量」「量より質」など自分にあった選び方ができるように条件を多様にすることにより、オープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・27＋13、17＋13、38＋22などセットにすると計算しやすい組を見つけることにより、数感覚を養うことができる。
・「個数をたくさん買う」「量より質」などの個性が生かせる。
・発展としては、種類をふやしたり、自分なりに店を開く活動を取り入れることができる。

単元　ひょうとぼうグラフ　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す(数値化)』『読み取る(解釈)』

目標　自分が集めた情報を人にわかりやすく伝達する表現方法を自分なりに考えることができる。

問題

種　類	台数（正の字）
乗用車	
バ　ス	
トラック	
その他	
合　計	

（学校の周囲の交通量を調べる、という目的で、前時に自分たちが調べたい場所を決め、交通量調査をしておく。）

今日は、自分のメモをもとに、自分が調べた場所の交通量をわかりやすくまとめ、表現しましょう。

また、そこから何が読み取れるかを考えましょう。

作問のポイント

・自分が選んだ場所で集めた自分なりの資料を、自分なりの方法で表現し、自分なりの読み取りをすることにより、さまざまなデータが収集できる。統計教材のおもしろさを満喫できるようにする意味からもオープンエンドの問題とした。

授業のポイント

・資料の表し方には、表、グラフなどいろいろあること、それぞれによさがあり、日常生活においてそのよさを生かされ活用されていることに気づく。

単元　あまりのあるわり算　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』

目標　・わり算にはわりきれないわり算も存在することに気づき、その処理方法を自分なりに工夫することができる。

問題　あんパンが14個あります。これを４人で分けます。どのような分け方が考えられますか。

作問のポイント

・「わりきれないわり算＝余りのあるわり算」という図式は成り立たない。わり算〉わりきれないわり算〉あまりのあるわり算という関係をとらえやすくするために題材を工夫し、オープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・14個のあんパンを４人で等分するには、余りを出す、１個を半分にする等の方法が考えられる。あいまいな問題設定のもとに生じたさまざまな考え方を比較・検討する中で、余りの意味、余りを出す場面と割り進める場面の違いなどを考えさせ、わり算の真の意味をとらえさせる。

単元	大きな数のわり算　　　　　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	2桁÷1桁の問題の発展として3桁÷1桁の問題をとらえることができる。
問題	36枚シールがあります。これを9人で等しく分けます。一人分は何枚になるでしょうか。 この問題をもとに、これより少し難しい問題をつくりましょう。 また、どこをどのように難しくしたのかも考えましょう。

発問のポイント

・既習問題をもとに、「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、一人一人の子どもがもつわり算の系統性を生かせるようにした。

授業のポイント

・「少し難しい問題」をさまざまな観点から考える中で、2桁÷1桁=2桁、3桁÷1桁、2桁÷2桁などの問題がわり算の世界に存在していることに気づかせる。
・2桁÷1桁=1桁の計算をどのように生かせばよいかを話し合いを通して見通すことができる。

単元	三角形　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『分ける（分類）』
目標	・三角形の中には、二辺の長さが等しいもの、三辺の長さが等しいもの、直角を含むものなどがあることに気づく。
問題	白の棒（4cm）、赤の棒（6cm）、青の棒（8cm）、黄の棒（10cm）がたくさんあります。 このうち、自由に3本選んで三角形をつくりましょう。

発問のポイント

・自由に三角形をつくらせた後、それらを自由に分類させる。したがって、三角形をつくる活動もオープンエンド、さらには分類する活動もオープンエンドといえる。

授業のポイント

・三角形は全部で20種類できる。これを分類していく中で、正三角形、二等辺三角形、直角三角形などに分類していく。

<正三角形>	<二等辺三角形>		<直角三角形>	<その他の三角形>
・白+白+白	・白+白+赤	・赤+赤+青	・赤+青+黄	・白+赤+青
・赤+赤+赤	・白+赤+赤	・赤+青+青		・白+赤+黄
・青+青+青	・白+白+青	・赤+赤+黄		・白+青+黄
・黄+黄+黄	・白+青+青	・赤+黄+黄		
	・白+白+黄	・青+青+黄		
	・白+黄+黄	・青+黄+黄		

単元	小数　　　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す（数値化）』
目標	日常使われている小数について関心をもち、小数点及び数値のもつ意味について考えることができる。
問題	（１、５リットルの水が入っているびんと１リットルマスを与えて） ここにある水はどれだけの量だろうか。自分なりに表現してみよう。
作問のポイント	・既習経験、生活経験をもとにさまざまな表現ができる１、５リットルにあたる量を自分なりに表現する活動を保証することにより、オープンエンドの問題とした。
授業のポイント	・「１リットルと２リットルの真ん中」「１リットルとその半分」などの反応に加えて、「１リットルと１リットルマス５目盛り分」という反応が見られる。そこで、その１目盛りがどれだけの量を指しているかを話し合う中で、「１リットルの10分の一が５つ分」をどう表すかを課題とする。その解決の中で出されるであろう「１、５リットルペットボトル」と関連づけて考え、身近な小数の世界に足を踏み入れる。

単元	２けたのかけ算　　　　　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	２けた×１けたの問題の発展として２けた×２けたの問題をとらえるできる。
問題	１枚36円の色紙を５枚買います。代金はいくらでしょう。 この問題をもとに、少しむずかしいと思う問題をつくりましょう。
作問のポイント	・既習問題をもとに、「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、一人一人の子どもがもつわり算に対する系統性を生かせるようにした。
授業のポイント	・子どもは、数値を複雑にした２桁×１桁、３桁×１桁などの問題をつくってくる。その中に作られている「２桁×２桁」の問題をとりあげ、かけ算を広げる。 ・既習の「２桁（３桁）×１桁」と比べると、どこがどうしてむずかしくなっているか、どう考えれば解決できそうかを話し合っていく中で、かけ算の系統性についても考えさせていく。

単元	重さ　　　　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す（数値化）』
目標	・重さにおいても、たし算、ひき算が存在することに気づき、たし算、ひき算を使いこなすことができる。
問題	1kg、3kg、9kgの分銅が一つずつあります。これらを自由に使って、いろいろな重さを量ります。どんな重さを量りとることができるでしょう。

作問のポイント

・「□gを量りとる」のではなく、複数の分銅を使いこなして量れる重さを調べる、という逆思考の問題にしたことにより、オープンエンドの問題になった。
・分銅も、1g，3g，9gとしたことにより、1gから13gまでを連続してはかりとれるように工夫した。

授業のポイント

・上皿天秤を連想したとき、単純に片方にのみ分銅をのせると考えると、1kg、3kg、4kg、9kg、10kg、12kg、13kgの7種類の重さを量りとることができる。
しかし、反対側（量る物がのっている方）にも分銅をのせるというように発想 を転換すると、2kg、5kg、6kg、7kg、8kg、11kgも量りとれることがわかる。整理すると、1kgから13kgまですべてを量りとれる。
・以上の活動を通して、重さの加法、減法に着目させる。

単元	分数　　　　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『表す（数値化）』
目標	・日常生活に起きうる問題を解決するには、分数の活用が便利なことに気づく。 ・分数の意味を理解し、表現方法がわかる。
問題	10個のまんじゅうがあります。これを3人でけんかをしないように分けます。どのように分けますか？わかるように表現しましょう。

作問のポイント

・まるまる1個ずつは分けられない、しかしその1個を余りとして処分するのはナンセンスである、というきわめてよく見られる日常問題をもとに、1個を3等分したうちの1つ分を自由に表現させることによりオープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・まず、1人3個ずつ分けるところまでは誰でもいきつくであろう。問題は「残りの1個の処理」である。じゃんけんで決める、大人にあげる、などの生活感たっぷりの解答の中に、「その1個もまた3人で等分する」というアイデアがあろう。そのアイデアを生かし、その分け方をした場合、どのように表現すればよいかを考えさせる中で、分数にたどりつかせる。

単元	式のつかい方　　　　分類：問題づくりを通したオープンエンドによる導入～『つくる（構成）』
目標	・問題場面から自由に数値をあてはめて問題をつくることができる。 ・つくった問題を式に表すことができる。 ・式を計算しやすいように組み替えることができる。
問題	バスが停留所に止まりました。何人か乗り降りした後、またバスは出発しました。今、乗客数は35人です。 この場面から、問題をつくってみましょう。

作問のポイント

・自由に問題をつくれるように、問題場面をイメージしやすいものにした。
・たし算の要素、ひき算の要素を組み込み、さまざまな式がつくり出せるようなオープンエンドの問題にした。

授業のポイント

・未知数が「始めの人数」「降りた人数」「乗った人数」の3つあることになる。
この3つを○□△とすると、○−□＋△＝35となる。当然、さまざまな問題、式が考えられるが、それらを検討していく中で、「□が1増えていると△も1増える」などに気づくこともできる。
・場合によっては、始めに乗っていた人数は設定しても構わないと考える。

＜第4学年＞

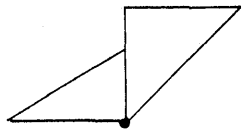
単元	整数のかけ算　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	3桁×2桁の問題の発展として3桁×3桁の問題をとらえることができる。
問題	4年3組には、36人の子どもがいます。植物園に遠足に出かけることになりました。入園料は、子ども一人につき175円です。全部でいくら払えばよいでしょう。 この問題をもとに、少しむずかしいと思う問題をつくりましょう。

作問のポイント

・既習問題をもとに、「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、一人一人がもつかけ算の系統性を生かせるようにした。

授業のポイント

・子どもは数値を複雑にした3桁×2桁、さらには4桁×2桁、3桁×3桁などの問題をつくってくる。これらの問題を整理し、どこをどのようにむずかしくしたかを話し合うことにより、かけ算の系統性についても考察させる。

単元	角　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入〜『つくる（構成）』
目標	三角定規の４種類の角（30°、45°、60°、90°）を使って、一周（360°）を構成することができる。
問題	三角定規がたくさんあります。ある点を中心に三角定規をしきつめます。どのようにしきつめればよいでしょう。

作問のポイント

・30°、45°、60°、90°の４種類の角を組み合わせるとさまざまな角をつくることができる。この自由性を生かして、一周（360°）を自由に構成させることにより、オープンエンドの問題とした。

授業のポイント

・すぐに考えつくのは、90°４つ分である。しかし、実際に多数の三角定規を与え、自由に操作を保証すると、いろいろな組み合わせにたどりつく。さまざまな発見や出会いを通して、角の合成・分解の原理に気づいていく。

単元	四角形　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入〜『分ける（分類）』
目標	四角形をさまざまな観点から分類していく中で、平行四辺形、台形、ひし形の概念を形成することができる。
問題	白の棒（４cm）、赤の棒（６cm）、青の棒（８cm）、黄の棒（10cm）を自由に使って、四角形を作りましょう。

作問のポイント

・自由に四角形をつくらせた後、それらを自由に分類させる。したがって、四角形をつくる活動もオープンエンドの活動、さらには分類する活動もオープンエンドの活動といえる。

授業のポイント

・作られる四角形の中には、４種類の正方形、長方形、ひし形、平行四辺形、台形が含まれる。それらを観点ごとに分類していく中で、各四角形の概念を形成する。

<正方形及びひし形>	<長方形及び平行四辺形の例>
・白＋白＋白＋白	・白＋赤＋白＋赤
・赤＋赤＋赤＋赤	・白＋青＋白＋青
・青＋青＋青＋青	・白＋黄＋白＋黄
・黄＋黄＋黄＋黄	・赤＋青＋赤＋青
	・赤＋黄＋赤＋黄
	・青＋黄＋青＋黄

単元	大きな数　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』
目標	億や兆というきわめて大きな単位に興味をもち、億や兆で表された物に目を向けることができる。
問題	・身の回りや社会の中などで億や兆で表されているものを探してみましょう。 ・一億、一兆という量をそれより小さい単位を使って自由に表現してみよう。

作問のポイント

・億や兆で表された量をイメージすることは難しい。しかし、よく気をつけてみれば、億や兆で表されたものは意外と多いことに気づく。これらをあげていく活動がオープンエンドである。また、一億、一兆の構成を考える学習を取り入れるが、その活動もオープンエンドである。

授業のポイント

・身の回りに存在する億で表された量や兆で表された量を自由に探すことにより、興味・関心をもたせる。
・一億、一兆といっても、その仕組みは十進法をもとにしており、理解は十分可能である。そこで、「一億という量をさまざまな形で表現してみよう」「一兆という量をさまざまな形で表現してみよう」となげかけることにより、一億、一兆という大きな数も構成に目を向け、自由に分解することができるようになる。

単元	がい数　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』
目標	・どの位までの概数にすればよいかを自分で判断して処理することができる。
問題	昨年の東京と大阪、目黒区と豊島区の人口は何人といえばよいでしょう。（1987年の資料） 東京～１１８２９３６３人　　目黒区～２５７７３１人 大阪～８６６８０９５人　　豊島区～２６３０１３人

作問のポイント

・「何の位までの概数にしましょう」というなげかけでは、なぜ何の位までの概数にするのかがわからずにやらされているだけになりがちである。これでは、自ら概数をとって表す力は育たない。そこで、情報だけを与えておき、どの位までの概数にすればよいか、またどのような数に表すかも一人一人にまかせることにより、オープンエンドの問題とした。

授業のポイント

・どのように数をまるめればよいかを考えさせる。四捨五入、切り上げ、切り捨てなど自由に発想させる。
・どの位までの概数にするかは自由ではある。しかし、ほかの国、都市、地区との比較という条件を満たせばよいのであるから、よりよい概数はある。そこに気づかせることにより、概数の効果的な活用に目を向けさせる。

単元	整数のわり算　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	3桁÷1桁の問題の発展として3桁÷2桁の問題をとらえることができる。
問題	色紙が120枚あります。6人で等しく分けると、一人分は何枚になりますか。 この問題をもとに、少しむずかしいと思う問題をつくりましょう。

作問のポイント

・既習問題をもとに、「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、一人一人の子どもがもつわり算の系統性を生かせるようにした。

授業のポイント

・子どもは、数値を複雑にした3桁÷1桁、4桁÷1桁、さらには、3桁（4桁）÷2桁の問題が含まれるであろう。これらの問題を観点ごとに整理する中で、わり算の系統性を考察する。
・3桁÷2桁の計算をするときに、3桁÷1桁をどう生かせばよいかを話し合う中で、計算方法を見通すことができるようにする。

単元	式と計算　　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』『表す（数値化）』『広げる（発展）』
目標	4つの数字を組み合わせて＋－×÷と（　）を自由に活用して10をつくることができる。
問題	ナンバープレートにある4つの数字を使って式をつくり、答が10になるようにしましょう。 また、10以外にどんな数がつくれるでしょう。

作問のポイント

・10をつくるという共通問題ではあるが、10になる式は多様に考えられる。そこで、10になる式をつくる活動がオープンエンドである。
・一通り10をつくる式が見つかった後、今度はさまざまな数づくりに挑戦する。この活動もオープンエンドである。

授業のポイント

・10をつくるにも、さまざまな四則演算が考えられる。答えから式を連想させるという逆思考の問題により多様に数、式をみる目を育てる。
・複数に分解されている式を一つに集約することにより、計算のきまりにも着目させる。

単元	面積　　　　　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『分ける（分類）』
目標	・さまざまな図形の広さ（面積）比べをすることができる。 ・広さ（面積）を比べたり表現したりするための方法を考え出すことができる。
問題	・周りの長さが24cmになる形をつくりましょう。ただし、どの角も角度は90°または270°になるようにします。 ・周りの長さが24cmの図形の広さ比べをしましょう。また、わかりやすいように広さを表現しましょう。

作問のポイント

・周りの長さが24cmになる図形をつくる活動がオープンエンドである。
・さまざまな図形の広さ比べをする活動、さらには広さを表現する方法を考える活動そのものがオープンエンドである。

授業のポイント

・子どもたちは、工夫をしてさまざまな図形を作ってくる。中には、正方形、長方形も含まれるであろう。
・さまざまな図形がつくられた後、今度は、「これらの図形の中でもっとも広いのはどれだろう？」と投げかける。子どもたちは、１cmごとにますをひいて「広さ調べ」をする。
・そのうち、正方形、長方形に関しては、わざわざます目を引かなくても「広さ調べ」ができることに気づき始める。
・その方法を利用すると、複合図形でもいちいちます目を引かなくても「広さ調べ」ができることに気づく。

単元	小数のたし算とひき算　　　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』
目標	整数の世界の問題でも、小数が登場する場合があることに気づき、小数を活用することができるようにする。
問題	コーヒーと牛乳を混ぜてコーヒー牛乳を４リットル作った。 さて、混ぜたコーヒーと牛乳は何リットルだろうか。

作問のポイント

・一見すると問題は整数の世界での単純な問題に見える。しかし、逆思考の問題にしてあるため、考えようによっては小数（分数）が登場する。その活動がオープンエンドである。

授業のポイント

・始めのうちは、「１リットルと３リットル」「２リットルずつ」という発想で満足しているが、次第に小数の世界に足を踏み入れてくる。それにつれて、既習の小数第一位から小数第二位、小数第三位まで視野に入るようになる。
・「1.3リットルと2.7リットル」と考える中で、４リットルは実は4.0リットルであり4.00リットルでもあることに気づかせる。

単元	小数のかけ算とわり算」　　分類：問題づくりによる導入
目標	整数×整数の問題の発展として小数×整数の問題をとらえることができる。
問題	2リットル入りのジュースのボトルが6本あります。全部でジュースは、何リットルあるでしょう。 この問題をもとに、少しむずかしいと思う問題をつくりましょう。
作問のポイント	・既習問題をもとに、日常生活をヒントにしつつ「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、「小数×整数」の世界に自然に足を踏み込めるようにした。
授業のポイント	・ジュースのペットボトルというと1,5リットルが一般的である。自然と子供たちの発想は、1,5×6へと向く。そこで、小数×整数の場面が日常生活に点在することに気づかせ、解決への糸道を、2×6から探っていく。

単元	しりょうの整理　　分類：オープンエンドによる導入～『見つける（発見）』
目標	目的にあった資料を自分なりに選択し、自分なりのキャッチフレーズをつくることができる。
問題	学校で起きるけがを減らすための「キャッチフレーズ」をつくりたいと思います。次のデータを自由に組み合わせて自分なりの「キャッチフレーズ」をつくりましょう。 ・けがが多くおきる場所　　・けがの多い学年、クラス ・けがの種類　　・けがが起きる原因 ・けがが多い時間帯　　ｅｔｃ
作問のポイント	・自分なりの目的をもち、目的達成のためにどの資料を選択し組み合わせるかという活動がオープンエンドである。 ・組み合わせた資料からどんなことを読み取るか、という活動がオープンエンドである。 ・自分なりのキャッチフレーズをつくるという活動がオープンエンドである。
授業のポイント	・豊富に資料を用意することが重要である。 ・自分なりの目的達成のためにどんな資料が有効にはたらくかを考えさせることが重要である。

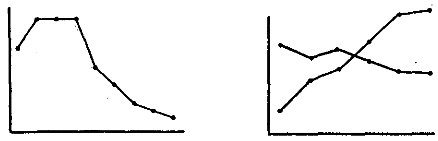
単元　おれ線グラフ　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『』

目標　折れ線グラフから傾向を読み取ることができる。

問題

次のようなグラフを手に入れましたが、何を表したグラフかがわかりません。また、目盛りが何を表しているか、また単位は何かもわかりません。

いったい、何を表したグラフだと思いますか。



作問のポイント

・条件完備のもと与えられたグラフから傾向を読み取る学習では、なぜその現象をグラフに表すのか、そのグラフのよさは何か、までの追究はなかなか難しい。そこで、条件をいっさいとり外し、何を表したかグラフかまで推測させることにより、折れ線グラフのよさにまでふれられるようにした。何を表したグラフか、を推測する活動そのものがオープンエンドである。

授業のポイント

・何を表したグラフかがイメージできない子供には、さまざまな折れ線グラフを与え一緒に読み取る活動をさせるとよい。
・自分なりの読み取りを終えた後、小グループに分かれて発表会をするとよい。

単元　直方体と立方体　　　　　　分類：オープンエンドによる導入～『分ける（分類）』

目標
・立方体の展開図を考え、立方体を組み立てることができる。
・組み立てたときの立体の面の平行関係を推理し、数字を記入することができる。

問題

銀行や図書館などにある卓上カレンダーを作ろうと思います。（立方体３つのセット。１つには曜日が、あとの２つには数字が書かれ、１日から31日までを表示することができる。）

作問のポイント

・「一辺何㎝の立方体の展開図を考えよう」となげかけるのではなく、目の前にサンプルがあるため、組み立てた後を推理しやすくした。
・どんな展開図を考え出すかがオープンエンドの問題。

授業のポイント

・サンプルをもとに、自分なりの展開図を考えることができる。
・曜、数字を展開図に書き込むことにより、面の平行、垂直関係にまで目がいく。

単元	分数　　　　　　　　　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	１を越えない範囲の同分母分数のたし算の問題の発展として１を越える範囲の分数の問題をとらえ、１を越える分数の存在を認めることができる。

問題

１／５ｍのリボンと３／５ｍのリボンをつなげます。何ｍになりますか。

この問題をもとに少しむずかしいと思う問題をつくりましょう。

作問のポイント

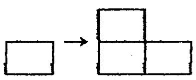
・既習問題をもとに、「自分なりに少し難しい問題をつくろう」となげかけることにより、一人一人の子供がもつ分数の世界の概念を広げられるようにした。

授業のポイント

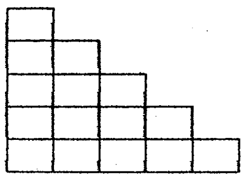
・子供がつくった問題から１を越える分数の世界に自然に目を向けさせ、分数の世界を広げる。
・問題を検討していく中で、分数の加法、減法についての構造に目を向けさせ、自分なりの学習計画を立てさせる。

単元	２つのかわる量　　　　　　　分類：問題づくりによる導入
目標	段数が増えるにつれて変化する量に目をつけ、二量間に存在するきまりを見つけて問題解決することができる。

問題



積み木をこのように積み重ねます。
何がどのように変化していますか。
また、５段目のときには、その変化はどうなりますか。



作問のポイント

・段数が増えるときの変化の様子を見せて、伴って変化する量を自分なりに見つけるところがオープンエンドである。
・二量間に存在するさまざまなきまりを自分なりに見つける活動がオープンエンドである。

授業のポイント

・一つの問題場面から生じた自分なりの問題を、自分なりに解決していくところに子供は喜びを感じる。
・一つの問題場面からさまざまな問題が生じたが、どの問題においても、解決方法は共通している。そこから、関数の考えや関数問題を解決していく方策を身につけていく。

オープンな活動を軸としたカリキュラム開発に関する研究
－小５から中２における可能性－

小学校５・６年部会：　池田　敏和・細水　保宏・小林　広昭
山崎　浩二・藤中　大洋

Ⅰ．本研究のスローガン：
「知識・技能中心カリキュラムから活動中心カリキュラムへ」

Ⅱ．オープンな活動を軸としたカリキュラムとはどういうものか
１．オープンな活動とは
２．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の概念的枠組み
（１）カリキュラム開発の方針
（２）オープンな活動から数学的概念の構成的な獲得を意図した単元構成
３．小５から中２におけるオープンな活動を軸とした領域（活動領域）

Ⅲ．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の意義は何か
１．オープンな活動は、数学的概念の構成に役立つ見方・考え方を育成するための活動であり、活動すること自体に意義がある
２．オープンな活動は、数学的対象（数学的問題，数学的概念）の多面的，構造的な理解の仕方を強調する

Ⅳ．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の具体化
１．計算の仕方を工夫する
（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「計算の仕方を工夫する」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察
２．面積・体積を測る
（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「面積・体積を測る」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察
３．図形の性質を探る
（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「図形の性質を探る」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察
４．事象の関数関係を捉える
（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「事象の関数関係を捉える」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察
５．資料を整理する
（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「資料を整理する」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察

Ⅴ．まとめ

オープンな活動を軸としたカリキュラム開発に関する研究
－小５から中２における可能性－

小学校５・６年部会：　池田　敏和・細水　保宏・小林　広昭
山崎　浩二・藤中　大洋

Ⅰ．本研究のスローガン：
「知識・技能中心カリキュラムから活動中心カリキュラムへ」

塩野直道が「要目カス論」[1]を唱えて以来、要目によって構成されていたカリキュラムが批判され、それらの要目を構成的に獲得する際の活動自体が強調されるようになった。しかし、カリキュラム作成にあたって、児童・生徒の活動をどのようにカリキュラムの中に反映していくかは非常に難しい問題である。結果的には、それぞれの知識・技能に行動（方向）が加えられ、知識・技能と行動（方向）のセットを根底におきカリキュラムが構成されるようになった。 知識・技能に行動が付け加えられた点で児童・生徒の主体的な活動に焦点が当てられるようになったものの、特に小学校高学年以降においては、従来の知識・技能の系列を軸に行動が加えられたため、どうしても知識・技能を構成していく際の活動に制限が加えられることになる[2]。これらは、活動を中心としたカリキュラムというより、むしろ知識・技能の系列を核におき、それに活動を付与する形のカリキュラムと解釈する方が妥当であろう。そこでここでは、これらを知識・技能中心カリキュラムと呼ぶことにする。実際、オープンエンドアプローチや問題づくりの授業のように、児童・生徒の数学的活動に焦点をあてた授業を現行のカリキュラムにおいて取り扱う際、その活動から生じるアイデアがその学年で取り扱う内容の範囲を超えることがあり、授業の中でそれらをどのように取り扱えばよいかといった問題が事例的に数多く指摘されてきた[3]。先行研究では、これらの指摘をオープンエンドアプローチや問題づくりの授業の限界として捉える傾向にあったが、そこには現行カリキュラムの基で考えることが前提とされていたのである。本稿では、オープンエンドアプローチや問題づくりのような生徒の活動を中心においた授業が通常の授業で実践可能になるように、現行カリキュラムを修正・改善していくことをねらいとしたものである。すなわち、知識・技能中心カリキュラムから活動中心カリキュラムへの改革をスローガンにおき、現行カリキュラムを活動中心といった立場から省みていくことにする。

Ⅱ．オープンな活動を軸としたカリキュラムとはどういうものか

１．オープンな活動とは

オープンエンドアプローチ[4]，問題づくり[5]，オープンアプローチ[6]，数学的モデリング[7]における共通点を考えたとき、「ある活動」を通して複数の正答を

得るといった共通点が抽出できる。オープンエンドの問題の類型としてあげられている「発見の問題」，「分類の問題」，「数量化の問題」では、各々「みつける」「わける」「あらわす」といった活動が抽出できるし、オープンエンドの問題の新たな類型として位置づけられる「構成の問題」[8)]や式，原理，場面等からの問題づくり[9)]では、「つくる」といった活動が抽出できる。また、問題の発展的な取り扱いにおける問題づくりでは、条件の一部を変えて発展的に取り扱うといった流れから、「ひろげる」といった活動が抽出できるし、条件過多・条件不足の問題や数学化の活動を意図した問題では、「ととのえる」といった活動が抽出できる。そこで、「みつける」「わける」「あらわす」「つくる」「ひろげる」「ととのえる」といった活動を「オープンな活動」として位置づけ、一方ではその他のオープンな活動を抽出しながら、オープンな活動をどのような枠組みによって規定していくかを考えていくことにする。

まず、オープンな活動は、答えの多様性より、それを生み出す活動に重きがおかれる必要がある。多様な正答というのは、その活動の所産であり、大切な点は子供たちが活動することにある。その活動とは、子供によって何かしらの新しい条件が加えられる活動と解釈することができ、新しい条件を加えるといった能動的な働きかけにより、自然と正答は多様に生じるわけである。

また、オープンな活動を従来の問題類型と対応させて抽出したが、問題が決まればオープンな活動が常に一意に定まるわけではない。例えば、問題の発展的な取り扱いによる問題づくりの授業において、「この条件を変えたら、この問題はどのように変わっていくのだろう」といった意識をもっていれば、それは「ひろげる」活動になり、「条件を変えて、何か新しい問題をつくってみよう」といった意識でもって活動していれば、それは「つくる」活動になるわけである。すなわち、オープンな活動は、子供の心の中の問いによって類型化されるわけである。例えば、オープンな活動は、次のような問いによって特徴づけられることになる。

「みつける」　：「何に着目すれば、みつけられるだろう？」
「わける」　　：「どのような観点から、わければよいだろう？」
「あらわす」　：「何に着目して、あらわそうか？」
「ひろげる」　：「何を変えれば、ひろがるだろう？」
「つくる」　　：「何に着目して、つくろうか？」
「ととのえる」：「どのようにすれば、ととのうだろう？」

これらのことより、問題が与えられると、オープンな活動が必ずしも一意に定まるものではないため、オープンな活動は、問題と子供の２つの変数によって定まるものと考えなければならない。

以上より、オープンな活動は、次の２点によって特徴づけられる。

① オープンな活動は、子供によって何かしらの新しい条件が加えられる活動である。新しい条件を加えるといった子供の能動的な働きかけによって、自然と正答は多様に生じることになる。

② オープンな活動は、問題に対する子供の心の中の問いによって類型化され、問題と子供の２つの変数によって決定される。

２．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の概念的枠組み

（１）カリキュラム開発の方針

オープンな活動を軸としたカリキュラムとは、いったいどういうものであろうか。カリキュラムの中に、オープンな活動をどのような枠組みでもって強調していけばよいのだろうか。例えば、オープンな活動を軸にカリキュラム開発を考える際、オープンエンドの問題を単元の導入で用いることによって、児童・生徒の主体的な活動から知識・技能を構成的に獲得していくことが考えられよう。しかし、オープンな活動を軸におくより、知識・技能を中心に指導していく方が有効な単元が見いだせるかもしれない。また、1980年代より強調されはじめた問題解決のように、解決過程，考え方に焦点を当てるといった意味で、オープンな活動自体に光を当て、新単元としてカリキュラムに含めていくことも考えられる。そこで本稿では、オープンな活動を軸に現行カリキュラムを省みる際、次の３つの立場からカリキュラムの検討・修正を考えていくことにする。

① オープンな活動自体に焦点を当てた単元の設定
② オープンな活動から数学的概念の構成的な獲得を意図した単元構成
③ オープンな活動に焦点を当てない方がよい内容の抽出

本研究の対象は、上記①，②の研究にある。①はオープンな活動自体に焦点が当てられ、問題の開発・検討により新単元の設定が研究テーマとなる。また①の研究を推し進めると、現状でさえ豊富な現行カリキュラムがさらに豊富になるため、必然的に②の研究の進め方が重要になってくる。②では、単元をオープンな活動中心に統合的・発展的に取り扱うことによって、オープンな活動自体をカリキュラムの中で強調していくこと、オープンな活動から概念形成が可能になること、またその所産としてカリキュラム内容が重点化できることが主題となる。これは、①の活動自体に焦点を当てた単元を取り入れるためだけでなく、学校５日制に対応する上でも重要である。さらに、②の立場から研究を進めることは、結果的には③についても明らかになっていくと考えた。ただし、③については、どのようなオープンな活動でもって構成したかに依存するため、より適切なオープンな活動の抽出という課題と共存することになる。

（２）オープンな活動から数学的概念の構成的な獲得を意図した単元構成

オープンな活動から数学的概念の構成的な獲得が、本研究の中心テーマであることを述べてきたが、オープンな活動と数学的概念の獲得には、どのような関連があるのだろうか。そこでまず最初に、カリキュラムを構成するにあたって、児童・生徒の「オープンな活動」を中心に捉え、構成主義における「数学的知識は、認識主体によって能動的に構成される」という立場を基本におくことにする。すなわち、「児童・生徒は、オープンな活動を通して複数の正答を生成し、それらを教室内での社会的相互作用を通して、数学的概念へと構成していく」といった枠組みで、オープンな活動から数学概念の構成を考えていくことにする。ただし「複数の正答」は、例えば、それらの共通性，構造性等[10]に着目して反省的に考えることにより、数学的な概念の構成に寄与するものでなければならない。複数の正答をどのような観点から反省的に考えることが数学的概念の構成に寄与す

るかについては、数学的概念の内容に依存する可能性が高いため、カリキュラム開発の具体化において述べることにする。ここで「複数の正答」，「数学的概念」についてさらに考察しておく必要があろう。すなわち、「複数の正答」，「数学的概念」は、子供が内部から構成する主観的な答え、数学的知識の客観性に基づいた答えとどのように関連しているかである[11]。構成主義の立場からいえば、急進的構成主義の立場とどのように関わってくるかという問題になろう[12]。

本稿では、正答の多様性といった視座から構成主義との関わり合いを探っていくものであるため、もう一度「オープンエンドアプローチ」の背景にある考えに焦点を当ててみることにする。そもそもオープンエンドアプローチの根底には、数学的モデル化の考えが潜んでいるといえる。島田の規定した数学的活動を省みたとき、数学的活動は、数学的モデルをつくる段階と、さらにそれを一般化・体系化していく段階とに大きくわけることができる。そして、これらを一連の活動として捉えたものが数学的活動と考えてよかろう。よって、数学的概念をどのように規定するかについては、客観的か主観的かといった2元論ではなくて、児童・生徒のもつ目的意識（発達段階）の変化に伴って、より一般化・体系化されていくものだと捉えていくことが自然であろう。すなわち、構成された知識がどの程度一般化されたものであるかどうかは、児童・生徒の目的意識（発達段階）に依存しており、本稿における数学的概念とは、彼らにとって、より一般的・体系的な知識へと修正されていく可能性のあるものとして受けとめられる。

また、オープンな活動から引き出される「正答」については、数学的概念の構成に役立つ解答として捉え、例えば、児童・生徒の解答を検討・修正していくことが数学的概念の構成に意味のある場合は、その児童・生徒の解答も正答として位置づけていくことにする。オープンな活動は、児童・生徒の内面的な理解を顕在化するといった特徴があり、その解答を概念の構成に役立つ解答として肯定的に取り扱い、社会的相互作用を通して概念の構成につなげていくことが非常に効果的である。この「正答」の解釈については、まとめの段階で既習の内容を総合的に用いることをねらいとしたオープンエンドの問題の取り扱いとは若干異なる点といえる。複数の正答が児童・生徒の社会的相互作用を通して洗練され、相補的に関連し合うことにより数学的概念が構成されていくわけである。以上より、単元の流れ、またカリキュラム系列を考えるにあたっては、①「オープンな活動」を通して複数の正答が生成される段階、② 共通性，構造性等のいくつかの観点によって、複数の正答から数学的概念を構成していく段階，といった2段階系列を軸におくことができる。

3．小5から中2におけるオープンな活動を軸とした領域（活動領域）

ここでは上記に掲げたカリキュラム開発の可能性を探るために、小学校5年から中学校2年までの指導内容を重点的に考察していくことにする。まず、オープンな活動を軸にしたカリキュラム構成の可能性を探るには、オープンな活動が軸であるため、従来の4つの内容領域を、活動を中心として展開できそうな領域へと変えていく必要がある。また、その可能性は、数学的内容に強く依存してくる可能性があるため、各々の領域別にその可能性を探っていく必要がある。では、領域の構成をどのように捉えていけばよいのであろうか。例えば、カリキュラム

開発における領域の構成方法について、Bishop[13]は、その基本となる活動を6ケ（counting,locating,mesuring,designing,playing,explaining）に分類している。この背景には、数学的知識は、どの国においても、なんらかの数学的な活動から生み出されているという点で共通しており、多文化の中で数学教育を考える際、生み出された結果である数学的知識の内容で構成するより、数学的知識を生み出す数学的な活動で構成する方が有効だという立場をとっている。よって、上記の６ケの活動は、数学的知識を生み出す数学的な活動の類似性に着目して得られた結果として捉えることができる。この考え方は、オープンな活動を基に数学的知識を構成していこうとする我々の立場に適用できるものであり、本稿においても、この考え方を参考に、小５から中２における内容を概観し、オープンな活動でもって系統的に展開できそうな領域に分類することにした。図１は、現行のカリキュラム内容を、オープンな活動を軸に構成できそうな領域に分類したものである。この領域を活動領域と呼ぶことにする。ただし、１０番目の領域は、オープンな活動自体をねらいとした新単元の設定である。カリキュラム構成の可能性を探るために、ここで分類した「１０の活動領域」について、オープンな活動を軸にカリキュラム開発を試み、その有効性と限界を明らかにしていくことが課題である。

*1．**数の性質を探る：**整数と小数 / 倍数と約数 / 分数と小数（小５）*
正の数・負の数（中１）
*2．**計算の仕方を工夫する：**小数の乗除 / 分数の加減（小５），*
分数の乗除（小６），正負の数の加減乗除（中１）
*3．**面積・体積を測る：**体積 / 四角形と三角形の面積（小５），*
立体の体積と表面積（小６），錘体・球の体積と表面積（中３）
*4．**事象を数値化する：**単位量あたりの大きさ / 百分率とグラフ（小５）*
比と比の値（小６）
*5．**図形の性質を探る：**三角形と四角形 / 円と正多角形（小５），*
立体 / 対称な形 / 拡大図と縮図（小６）
平面図形 / 空間図形（中１），図形の基本的な性質 /
三角形・四角形 / 相似な図形（中２）
*6．**事象の関数関係を捉える：**比例・反比例（小６），*
関数（中１），一次関数（中２）
*7．**資料を整理する：**資料の調べ方 / いろいろなグラフ（小５），*
統計（中２）
*8．**事象を文字式で処理する：**文字と式（小５），*
文字と式 / １次方程式（中１）
式の計算 / 不等式 / 連立方程式（中２）
*9．**起こりうる場合を数える：**場合の数（小６）*
*10．**新単元：**問題解決*

図１．１０の活動領域

Ⅲ．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の意義は何か

本研究のスローガンとして、知識・技能中心カリキュラムから活動中心カリキュラムへの改革について述べてきたが、なぜオープンな活動を軸としたカリキュラムを考えるのかについては、詳細に触れていない。ここでは、オープンな活動を軸としたカリキュラムの意義として、次の２点について概説する。

１．オープンな活動は、数学的概念の構成に役立つ見方・考え方を育成するための活動であり、活動すること自体に意義がある。

２．オープンな活動は、数学的対象（数学的問題，数学的概念）の多面的，構造的な理解の仕方を強調する。

１．オープンな活動は、数学的概念の構成に役立つ見方・考え方を育成するための活動であり、活動すること自体に意義がある

オープンエンドアプローチや問題づくりの授業で見られるように、オープンな活動は、児童・生徒の数学的活動を意味するものである。そこでは、数学的概念を獲得していく際の望ましい考え方を身につけることを意図しており、児童・生徒に多様な数学的な考え方を用いる機会を提供している。ある内容を指導する際、「児童・生徒からこれはでてこないだろう」，「こういう発想をするのは不自然かもしれない」と考えてしまうときがある。それは、そのような発想をする機会を今まで経験していなかった場合が多いと考えられる。よって、そのような発想に着目できるようなオープンな活動を時間をかけて経験しておくことは、指導内容の本質的な部分であったり、今後の指導内容を児童・生徒が構成していく際の見方・考え方の素地になりうるものである。児童・生徒が獲得する数学的概念は永久普遍のものではないため、「学び方を学ぶ」ことにつながるオープンな活動自体が重要なのである。また、見方・考え方に十分に時間をかけることによって、その見方・考え方から構成される今後の指導内容は、あまり時間をかけずに展開可能になり、カリキュラムの重点化にもつながることになる。以下、６つのオープンな活動について、具体的にその意義について考察する。ただし、前述したように、オープンな活動は、子供の心の中での問いかけによって類型化されるものである。

（１）みつける

「みつける」活動は、オープンエンドの問題類型の「発見の問題」から抽出した活動であり、数学的事実や関係を発見する機会を提供するものである。事例としては、数表からきまりを発見する問題、図形から合同・対称等の関係を発見する問題、水槽の問題等[14]、数多くあげられる。伊藤武[15]は、発見学習の理論において、思考の内容の最も基本的なものとして、量不変の考え、量の質的変換の考え、全体と部分の考え、可逆的な考え、対応の考えを取り上げており、「みつける」活動は、数・図形の性質，数量の関係に関する数学的概念を構成する際の根本的な活動のひとつといえる。

（２）わける

「わける」活動は、オープンエンドの問題類型の「分類の問題」から抽出した活動であり、集合の考えを用いる機会を提供している。事例としては、図形の分

類の問題，関数のグラフの分類の問題，数の性質を分類する問題等[16]があり、またオープンエンドの問題や問題づくりの授業により得られた複数の正答をまとめる際に用いられる場合が多い。これらは、ある目的からいくつかの具体物に関して、共通の観点を取り上げ、それらをひとつのまとまりとしてみなすといった活動であり、数・図形の性質や数量の関係に関する数学的概念を構成する際の根本的な活動のひとつである。

（3）あらわす

「あらわす」活動は、オープンエンドの問題類型の「数値化の問題」から抽出したものであり、量（長さ，かさ，重さ，角度，時間，面積，体積，速さ，密度，濃度など）を測ったり、集団の特徴を捉える際に必ず行われる活動である。事例としては、散らばりの問題，商品のわけ方の問題，マラソンの順位決めの問題等[17]がある。「あらわす」活動は、量と測定，数量関係に関する数学的概念を構成する際の根本的な活動のひとつといえる。

（4）ひろげる

「ひろげる」活動は、発展的な取り扱いにおける問題づくりの授業から抽出したものであり、ある性質や法則が確立したあとで、その性質や法則の本質を変えないで、適用範囲をできるだけ広げていこうとする一般化の考えを用いる機会を提供している。事例は、「問題から問題へ」[18]「中学校数学科［課題学習］問題づくりの授業」[19]等に数多く開発されている。数学的概念は、目的に応じてより一般化・体系化されていくものであり、「ひろげる」活動は、数学的概念の構成において根本的な活動のひとつである。

（5）つくる

「つくる」活動は、オープンエンドの問題類型の「構成の問題」，また大正時代における作問指導，場面からの問題づくり等から抽出した活動であり、子供自身による操作的活動，創造的活動を期待したものである。事例としては、例えば「面積６cm²になる作図の問題」，「ジオボード上に長方形をつくる問題」等[20]があり、構成活動に関しては小学校低・中学年に多く、問題づくりにおいては、多学年にまたがって行われる。「つくる」活動は、子供の情意面が喚起されると共に、数感覚，図形感覚の育成，並びに子供のつくったものが以後の学習の題材になり得るといった点で、有効な活動である。

（6）ととのえる

「ととのえる」活動は、数学的モデリングや条件不足・条件過剰の問題から抽出された活動であり、条件の整っていない問題を、目的に従って条件を明確にし、解決可能な問題へとととのえていく活動である。事例としては、「配達の問題」や「求積における条件不足の問題」等[21]があげられる。また、数学的なゲームを行う際、ゲームを行うルールを決める活動も、この類型に属するものである。「ととのえる」活動は、数学的問題，数学的概念を整合性のとれたものにするといった意味で、とても意義のある活動である。

２．オープンな活動は、数学的対象（数学的問題，数学的概念）の多面的，構造的な理解の仕方を強調する

ある物事を認識する際、その知識が他者から与えられたものであれば、その知

識は単線形の理解にとどまることが多い。例えば、Ａ地点からＢ地点までの道順を他者から教えられたとき、その道順でいけば大丈夫であろうが、それから少しでもはずれればわからなくなる。しかし、自分自身であちらにいったり、こちらにいったりしていろいろと試行を繰り返して道順を得たならば、その周辺の地図が自然と多面的，構造的に理解できるようになり、迷うどころか逆に教えることまで可能になるものである。また、道順を他者から教えられたとしても、「こちらにいったらどうなるだろう、またあちらにいったどうなるだろう」と試みるならば、この場合もその周辺の地図が多面的，構造的に理解されるであろう。

オープンな活動とは、実は上述の一つ一つの試みを意味するものであり、一つ一つの試みから得られたその人なりの解釈が、オープンな活動の正答になるわけである。例えば、一次関数の概念を取り上げてみると、「ｙ＝ａｘ＋ｂの形になれば一次関数である」という単線形の理解の仕方に対して、事象の関数関係を捉える際に「みつける」「わける」「あらわす」といったオープンな活動を取り入れることによって、「直線になるもの，ｘが１増えるとｙも一定量づつ増えるもの，変化の割合が一定なもの，ｙ＝ａｘ＋ｂの形になるもの等の特徴をもったものが一次関数である」といった多面的，構造的な理解の仕方が強調できるわけである。物事を多面的，構造的に理解するためには、それに対する多面的なアプローチが不可欠であり、それらを正答として価値付けすることにより、そのような理解の仕方を授業の中で積極的に取り扱うことが可能になるわけである。このように、オープンな活動から得られた解釈を一つ一つ認め、それらを社会的相互作用を通して総合的にまとめることによって、数学的対象（数学的問題，数学的概念）の多面的，構造的な理解の仕方を会得することが、オープンな活動を軸とした単元構成の２番目の意義になる。そして、その理解されたことが、数学的概念であったり、問題解決の本質であったりするわけである。

Ⅳ．オープンな活動を軸としたカリキュラム開発の具体化

ここでは、小５から中２における活動領域別に、オープンな活動を軸とした単元構成の可能性を事例的に探求する。１０の活動領域から、下記の５領域を取り上げる。

１．計算の仕方を工夫する
２．面積・体積を測る
３．図形の性質を探る
４．事象の関数関係を捉える
５．資料を整理する

また、各領域別にオープンな活動を軸とした単元構成の可能性を、下記の項目に従って探っていくことにする。

（１）現行カリキュラムの見直しと問題点
（２）活動領域「＊＊＊＊＊」で考えられるオープンな活動
（３）事例
（４）考察

１．計算の仕方を工夫する

（１）現行カリキュラムの見直しと問題点

分数の学習は，指導要領では，各学年で次のようになっている。

３年：簡単な場合について，小数及び分数について知り，それらを適切に用い，漸次それぞれのよさがわかるようにする。

ア　端数部部の大きさや等分してできる部分の大きさなどを表すのに小数や分数を用いること。また，小数や分数の表し方について知ること。

イ　小数及び分数についても加法及び減法ができることを知ること。

用語・記号：１／１０の位，分子，分母

４年：分数の意味についての理解を深め，簡単な場合について，分数の計算ができるようにする。

ア　分数の表し方やその意味についての理解を深めること。また，簡単な場合について，大きさの等しい分数があることに着目すること。

イ　同分母の分数の加法及び減法ができること。

用語・記号：帯分数，真分数，仮分数

５年：分数の意味についての理解を深め，分数について計算する能力を伸ばす。

ア　整数及び小数を分数の形に直したり，分数を小数で表したりすること。

イ　一つの分数の分子及び分母に同じ数を乗除してできる分数は，もとの分数と同じ大きさを表すことを理解すること。

ウ　分数の相等及び大小の調べ方をまとめること。

エ　異分母の分数の加法及び減法ができること。

オ　整数の除法の結果は，分数を用いると常に一つの数をして表すことができることを知ること。

用語・記号：約分，通分

６年：分数の乗法及び除法の意味について理解し，それらを用いる能力を伸ばすとともに，乗法及び除法についての理解を深める。

ア　乗数や除数が整数や分数である場合も含めて，乗法及び除法の意味をまとめること。

イ　分数の乗法及び除法の計算の仕方について知ること。

ウ　逆数を用いて除法を乗法の計算としてみること。

エ　整数や小数の乗法や除法を分数の場合の計算にまとめること。また，乗法や除法に関する計算を一つの分数の形にまとめて表すこと。

用語・記号：逆数

上記のように，分数についての学習は，小学校３年生から始まっている。これらの内容について，教科書での扱われ方などを見直ししてみると，次のような問題点が出てくると思う。

①折り紙やテープなどで分数を表す活動が行われているが，それをどのように活用していくか，明確でないため，作ることで終わってしまっている。

②等分という操作は，分数だけでなく，わり算でも行われているが，5年生まで
・は，それらは別なものとして扱われている。
③3年生で1を越えない分数，4年生で1を越える分数というような扱いは，子どもの思考の流れに沿っていない。つまり，3年生でも，いろいろな活動をしていく中で，1を越える分数について考える場面が出てくる。ここで扱っても子どもたちは理解できるのではないか。
④通分や約分，計算の仕組みが具体的にどのようなことをしているのか，明確ではない。きまりから筋道立てて説明できる子も，実際の大きさをもとに説明することができない面がある。

例えば，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{b \times c}{a \times c}$ というきまりがあるが，これがどうして言えるのか，図などを用いて，説明できる子は少ない。

同様に乗法・除法についても計算の方法は知っていて，確実にこなせる子は多いが，その計算の方法がどのような根拠でできるのか説明できる子は少ない。
⑤各学年ごとに細かく内容を区切っているが，それぞれの関連が明確でないため，それぞれの内容が独立的に扱われ，子どもにとって統合的に理解することが難しい。そのため，つまずきも多い。

このような問題点に対して，次のような手だてが考えられる。
○それぞれの内容について，もう一度子どもの論理にそっているか，子ども自らの問いから学習が進められるか，検討し，内容の配列を考えていく必要がある。
○学年が進むと，きまりや式を使った筋道だった説明が多くなるが，それだけです増すことなく，それぞれが具体的にどのようなことをしているのか，どのようなことから説明ができるのかを，操作などと結びつけながらていねいに扱う。

(2)オープンな活動から計算方法を考えていく。

オープンな活動から計算方法を工夫することは，今まであまり行われてきていない。それは，たくさんのやり方や答えから，一つの方法へ導くことの難しさがあるからだと思われる。そこで，ここでは，オープンな活動から，直接計算方法を生み出すのではなく，オープンな活動で数についての理解を深め，それを計算の方法を考える際に生かしていくようにすればいいと考えた。

つまり，数について表す活動をし，それを計算方法を工夫するときに活用していけるようにすればいいと考えた。数を表す方法とは，数字を用いる以外に，図を用いたり具体物を用いたりすることができる。また，同じ数についても，いろいろな表し方ができ，オープンな活動には向いている。そして，そのような活動を通して，子どもたちが理解している表し方を広げることで，計算方法を工夫する際に，それが生かされていくと考えた。

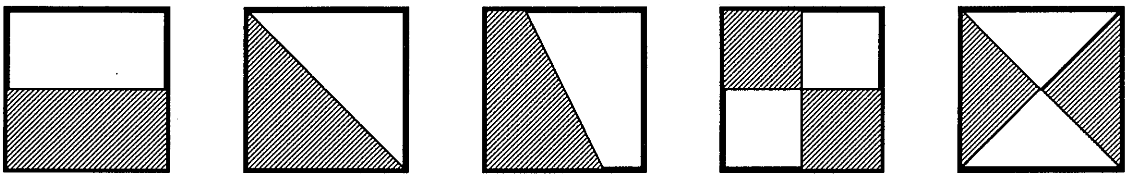
特に，分数については，$\frac{1}{2}$ということを言葉で説明できる子は多いが，それを具体的に表す方法を知らない子や一通りの方法しか知らない子が多い。ここでは，分数の計算の方法を考えるのに，都合のよい面積図でさまざまな表し方を経験させたい。そこから発展的に計算を生み出し，それを計算方法を考えていく上で，生かしていけることをねらいたい。

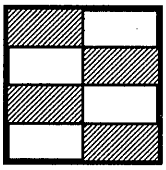
（３）事例

ねらい：面積図を用いて分数をいろいろな形で表す活動を通して，分数のきまりを見いだしたり，分数の計算の方法を考えたりしようとする。

> 折り紙を使って，$\frac{1}{2}$を表してみよう。

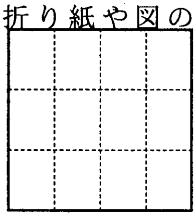
３年生でもできる内容だが，これが助走の問題である。子どもたちは，次のようなものを出してくる。



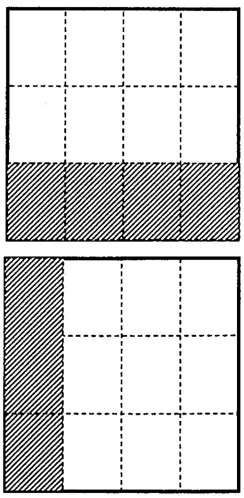


もっと，たくさんに分割したり，複雑に分割したりする子もいる。そして，それが，$\frac{1}{2}$でありながら，実は，２／４，４／８，８／１６であることも子どもたちから出されてくる。「分数では，分母と分子に同じ数をかけても割っても分数の大きさは変わらない。」というきまりに気づく子も出てくる。

ここで，次のような課題を提示する。

> 折り紙や図のような紙を使って $\frac{1}{\square}$ を作ってみよう。
>
> 

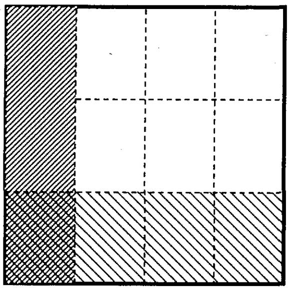
この用紙を使うと，１／３，１／４，１／６，１／１２などが表せる。それぞれがいろいろな形で表せる。その他の分数については，子どもたちが自分で工夫して，考えていくことになる。ほとんどの子は，縦か横の長さを測り，５等分，７等分していく。また，８等分や９等分は，用紙を利用して作っていく子もいる。



何種類も工夫して作っていくこともできる。このような活動を通して，分数についての理解を深め，前時に出てきた，等値分数のきまりについても気づいてまとめていくことができる。

また，いろいろと表したものを用いて，大きさ比べをすることができる。そして，そこから計算が生まれてくる。

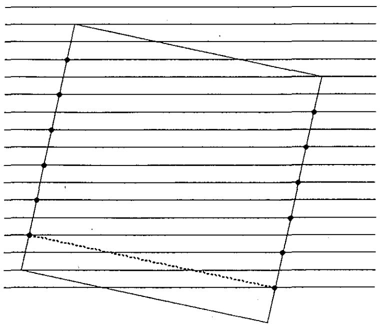
子どもたちは，次ページの図のようなことをして，大きさ比べをすることが容易にできる。このような活動を繰り替えすうちに，図を使わないでいい方法を考えようとする。これが計算方法を工夫することにつながっていく。



また，　ノートの罫を使って，等分を作る方法に気づく子もいる。

例えば，七等分を作るとすると，まず，７の倍数の数を思い浮かべ。（７，１４，２１，・・）

次に，折り紙を図のように，その倍数の罫に合わせる。そして，１４であれば，７で割った答えの２ずつに印を付け，この印を反対側にも着け，その印を結べば，７等分ができる。



（４）考察

○従来の分数の加減の学習は，教師から問題が与えられ，それらをいかに考えていくかというものだった。子どもが主体的に計算場面を考えたり，計算を作り出すというのではなく，計算場面は与えられ，そこから計算方法を考えていく学習では，子ども自身が自ら問題意識を持って取り組むことが難しい面があった。今回の事例では，教師から問題を与えられ，分数を表す活動を行った。そして，そこから分数のきまりを見つけたり，大きさ比べをしたりする中で，計算の場面が生じ，表したものを使って，計算の方法を主体的に考えていくことができたと思う。

友だちのやっていることに引っ張られた子もいるが，あることを学習して，そのことから問題を見いだしたり新しいことを発見するということは，算数の学習において，非常に大切な態度だと考える。そういった意味でもよい経験ができたのではないだろうか。

○分数を多面的にとらえるのに，役だったとも思っている。子どもたちは，分数について一面的な見方しかしていない面があった。面積図に限って表す活動をさせたわけだが，子どもたちは等しい大きさでも，いろいろな表し方があること，しかし，基準にする大きさをそろえることなど今までの復習ともいえるような部分もあるが，これからの分数の学習を進める上で，いいウォーミングアップにもなったと思う。

○面積図にこだわったのは，加減計算だけでなく，乗除の計算の方法を考える際にも，活用できると考えたからである。６年生になって，この子たちが今回の学習をどう乗除の計算方法を工夫するのに生かしていくか見ていきたい。

2.面積・体積を測る

(1)現行カリキュラムの見直しと問題点

量には、離散量と連続量がある。分離量については「数と計算」領域で扱う。指導する連続量については最初に取り上げる学年を併せて示すと次のようになる。

長さ(1年)、広さ(2年)、かさ(体積・容積)(1年)
重さ(3年)、時刻・時間(1、2年)、角度(4年)
速さ(5年)

そして中学校の数学では、新しい量の指導はしない。

小学校の量の指導では、量とは何かと取り出して行うことはしない。量の意味を指導してから、その比較や測定を行うのではない。それぞれの比較や測定の考え方を育てるとともに、それぞれの量を次第に理解させていくという方法をとっているのである。

1年で広さ、かさについて大きさを比べたり同種の手近のものを単位にしてそのいくつ分かを測って大きさを表すということを学習する。そして2年でかさについては普遍単位が導入される。4年において面積、体積に発展していく。体積については5年で扱う。

現行の指導を見直したとき、この5年の体積の普遍単位による測定の指導においては、長さの単位から推測し、これをもとにその大きさをつかませていくようにしている。すなわち、面積においては1cmを単位にし、これをもとに面積は1辺が1cmの正方形の大きさを単位にする。それと同様に1辺が1cmの立方体の大きさを単位にするのがよいだろうと類推させるのである。そして1cm^3の大きさをもとに1ℓや1mℓとの関係を理解させている。このように指導したとき、「かさのことを体積という」といった押さえではなく、「普遍単位で測定したかさの大きさのことを体積という」といった押さえ方となる。このような押さえ方をしたとき、1、2年で学習したかさとどうしても結びつけづらい。1、2年でのかさの普遍単位は、体積ではなく容積であるが、この学習とも関連づけた指導もしていかないと　や　との関係と言われてもぴんとこないのではないだろうか。そこで、操作活動を体積において導入していくことで1、2年の学習を想起させるような指導をしていってはどうかと考える。知識・技能を重視した構成ではなく,オープン活動を中心としたカリキュラム構成を考えていくわけである。

また、「比較」といった学習をしていくときに、「同じ」ということが十分に理解できていなくてはその比較を理解できたとは言えない。量と測定の領域においては「同じ」というキーワードは抜いてはいけないのではないだろうか。

(2)活動領域「面積・体積を測る」におけるオープンな活動

この領域においては,かさにおける間接測定が指導の中心である。「比較」を通して数学的な考え方をしていく中で概念形成を図っていく。この概念の形成においては子どもの活動を十分に保障してあげる必要があるのは言うまでもないことだろう。

この領域において先の「みつける」「分ける」「あらわす」「ひろげる」「つ

くる」の５つの活動の類型にそって考察していくと次のようなことが言えるのではないだろうか。

「あらわす」：現行のカリキュラムにおいても，「比較したときにどうやってあらわしていったらいいだろう」ということが指導の中心である。しかし，長さから類推させるといった内容があまりに強すぎるのではないだろうか。これをもっとオープンな活動に組織し直すことはできないだろうか。例えば「重さで比べてみよう」と考えた子がいたとする。これは比重を求められれば体積が求められる。また，材質を同じ物に置き換えることで比較が可能となる。このような様々な「表し方」を考えることで「重さ」や「長さ」とは違う「かさ」を５年においてもう一度想起し直すことができるのではないだろうか。

「つくる」：「つくる活動」は，子どもの情意面が喚起されるとともに，量の感覚の育成に役立つものと考えられる。

また，この領域においては「比較」をしていくことが重要であることは言うまでもない。そのときに先にも述べたように「同じ大きさ」ということが分かっている必要がある。そのために「同じ大きさのものを作ってみよう」といった活動を組織していってはどうかと考えた。

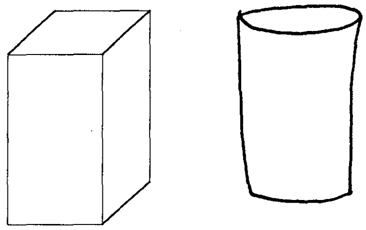
具体的には不定形の粘土を用意する。そして「これと同じ大きさのものを作ってみよう」という投げかけをする。すると作る材料や形が全くオープンな物となる。積み木でつくる子もいれば，ひごでつくる子もいる。また工作用紙でつくるような子も表れる。

これらオープンな活動をすることで次にできあがったみんなの物が本当に同じ大きさになっているかを検証していく必要が生まれる。そしてそのときに単位量として１cm^3の積み木が必要となってくるのである。また，こうした活動をしていくことによって「質量の保存性」などの理解へと繋げていけるものと思われる。このように「つくる活動」を位置づけることで次の学習を組織していくことができる。

（３）事例

《あらわす活動》

（ねらい）「かさのことを体積という」という捉え方で体積を理解する。



どちらが大きいでしょう。

上のような課題を投げかけることにした。「大きいでしょう。」と課題提示していくことでよりオープンな解法が期待できるのではないかと考えた。

また，一方を積み木，もう一方を大根といったものを用意していくことで自由に活動をさせていくことにした。このことによって1，2年で学習したかさの活動を想起しながらオープンに取り組んでいくのではないかと考えた。

実際に取り組ませていくと大きく以下のような取り組みがみられた。

a.「重さ」をともに調べていく。

b.水槽を用意し，ビニールテープで，水位を確認しながら調べていく。

c.大根をすり，1リットル容器に入れる。また，積み木と同じ大きさのものを工作用紙で作り砂を入れてそれを1リットル容器に流し込む。

d.大根を1立方センチメートルに切り刻み積み木の量で求めようとする。

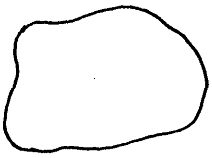
e.水槽にいっぱいに入れた水に沈めあふれさせる

細かく分析をしていくと一人ひとりが少しずつ違っていた。

重さについて調べていこうとした子だが，始めに「例えば同じ大きさのチョコレートと鉄があったら鉄の方が重い。だから重さでは比較できない」という指摘がでてきた。そこで，粘土を用意し，同じ大きさの物をつくり，それで質量で比べればいいという考え方で取り組んでいた。

《つくる活動》

（ねらい）同じ大きさをつくることで，縦，横，高さの3方向の広がりであることに気づく。また，作ったものを考察していくことで普遍単位を導いていく。



この粘土と同じ大きさのものをつくってみよう。

こちらでは予め，工作用紙やひご，針金，積み木などを用意して取り組ませた。

子どもは取り組んでいく中で既に量の保存性に気づいていく。また，縦，横，高さを自由に変えればいっぱい同じ大きさのものが作れていけるということに気がついていった。

また，「同じ大きさになっているのだろうか」という考察に対しては，1 cm^3の積み木で調べていけばいいということに直ぐに気づいていった。

（4）考察

6年の学習の内容に「角錐，円錐の体積」が敗っている。これは論理的な証明

については高校になってからであり，実験・実測の重視にある。また，自分なりに根拠をもち，それを実験で確かめることで帰納的に調べていくわけだが，その活動のよさを味わうことができる。こうした活動につなげていく上でも本事例は効果的であると思われる。

だが，どうしても相当の誤差が生じる。従ってどうしても結果が得られないという不完全燃焼な感じになってしまうような子がいる。これについてはもっと材質を変えてみるといいと考える。この材質については今後の課題である。だが，オープンにすることで発想を楽しむことが生まれ共に聞き合うことが楽しいと感じたようだ。

本提案では単位を導いていく上でつくる活動を組織した。他方，もし，１cm^3の単位についての学習をした後であれば例えば「１０００cm^3の形づくりをしてみよう」などといった投げかけで工作用紙で作らせることも可能であろう。ただ，ここに位置づけたとすると等積変形といったことがねらいとなってくる。

単元のどこに位置づけるかでつくる活動のねらいが変わってくる。

いずれにしても「同じものをつくる」という造形的な活動を好む子どもは多い。従ってこうした活動をカリキュラムに位置づけることは効果があるものと思われる。だが，本提案においては，「あらわす活動」と連動するように考えたのだが，オープンな活動をすることによってなかなか１cm^3に気づくところまで持っていけないところがあり，もう少しつながりという点で考察していく必要があった。材質によって何か操作活動に違いが生じつくる活動にうまくつなげていけるのか検討していきたいと考えている。

３．図形の性質を探る

⑴　現行カリキュラムの見直しと問題点

まず、小学校高学年と中学校との現行の内容系列の関連を調べてみる。

小学校	（５年）		（６年）
高学年	◇合同と三角形、四角形		◇対称な形
	◇円と正多角形		◇拡大図と縮図
			◇立体
中学校	（１年）		（２年）
	◇平面図形の基礎	直線と円	◇図形の基本的な性質
	図のかき方	作図	平行線と多角形
		図形の移動	図形の合同
	◇空間図形の基礎	空間図形	証明のしくみ
		平面の決定	◇三角形・四角形
		位置関係	◇相似な図形
	◇空間図形の構成	立体の構成と切断	（３年）
		投影図と展開図	◇円　円と円周角
			円と直線

上記で見られるように、小学校で学習された内容をもとにして中学校でさらにその理解を深めていくという流れである。

ところが、小・中関連からみて図形学習を見直してみると、必ずしもスムーズな関連が図られているとは限らない。経験を重視し、感覚を磨きながら図形に触れていこうとする小学校と、論理的に捉えていこうとする中学校との間にギャップがある。

ｅｘ．合同、拡大図・縮図（小学校）と合同、相似な形（中学校）

それぞれの学年でどこまで学習すべきか、あるいは学習しているかの押さえがなされていない。

小学校でも合同条件とははっきり押さえないまでも３つの条件で押さえている。

拡大図・縮図と相似な形にいたっては、ほとんど同じ導入が用いられており、小学校の学習をふまえた学習展開になっているように思われない。

小・中関連からみて見直してみると、例えば次のような押さえが考えられる。

小学校－合同の観点からの基本図形の見直し、図形が「決まる」という意味の理解を図る。（合同）
　　相似の概念の基礎となる経験を豊かにし、図形の理解を深める。（縮図）

中学校－合同条件そのものを推論の根拠として用いる。（合同）
　　三角形の合同条件と対比させながら、相似条件を直観的・実証的に扱い、演繹的な推論の根拠として用いる。（相似）

特に、小学校では、合同、拡大図・縮図などで、座標を使った作図を取り入れ、中学校の座標の考えの基礎となる経験を豊かにしておくことも必要である。

また、小学校でもある程度、論理的な説明を行うことができる。むしろ、図形の学習を通して論理的な考えのすすめ方を知り、それを用いることができるようにするとともに、その過程を通して数学的な考え方の育成を図り、数理的な処理のよさが分かるようにしていくことも重要なねらいである。特に、図形では直観や感覚を支えを基

にした展開が容易であるので、筋道立てて考えるといった観点からの小・中の図形学習を見直しも必要である。

⑵ 活動領域「図形の性質を探る」で考えられるオープンな活動

図形学習については、大きく次のような活動が考えられる。

- ・図形を弁別する。
- ・図形を構成する。
- ・図形の性質を調べる。
- ・図形の間の関係に着目する。

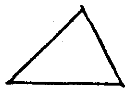
一方、オープンエンドの問題の類型としての「発見の問題」「分類の問題」「数量化の問題」で表れる、「みつける」「わける」「あらわす」「ひろげる」「つくる」「ととのえる」といったオープンな活動を学習に取り入れやすい。したがって、その観点から見直してみることを今後の課題としていきたい。

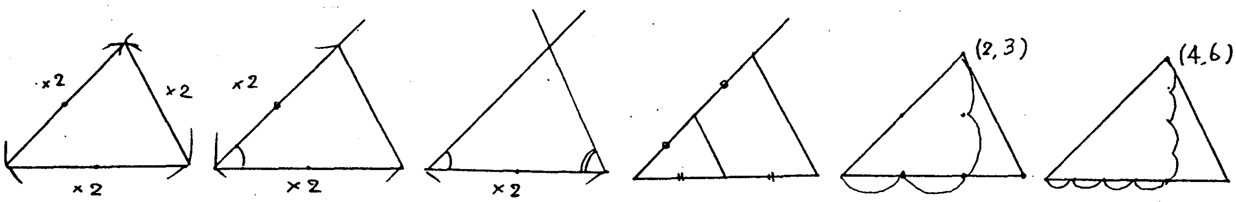
⑶ 事例

［実践事例Ⅰ］　拡大図・縮図　（６年）

［問題１］オープンな問題：発見・分類

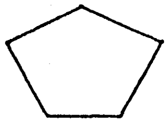
次の三角形の２倍の拡大図のかき方を考えましょう。

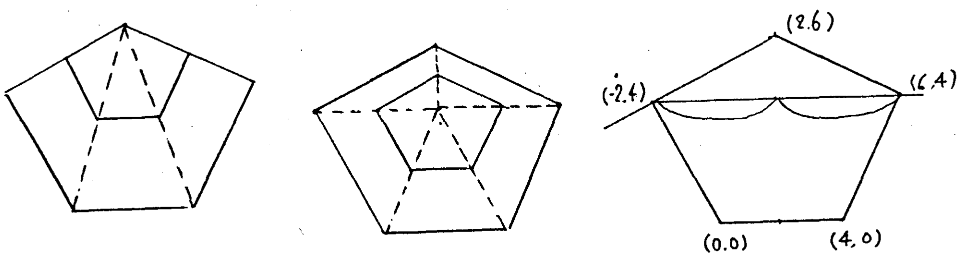




［問題２］オープンから生まれた発展的な問題：発展・発見

次の五角形の２倍の拡大図のかき方を考えましょう。

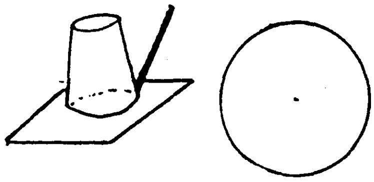




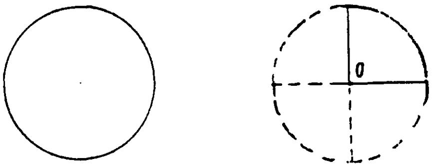
［実践事例Ⅱ］　円と正多角形　（５年）

［問題１］オープンな問題：発見とその考え方の根拠を探る

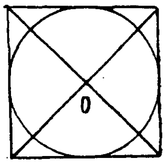
コップで円をかきました。この円の中心はどこでしょう。
その見つけ方を考えましょう。



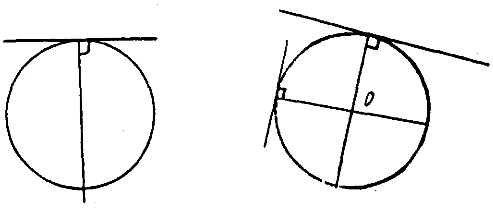
(1)　４つ折りにして中心を見つける。→線対称



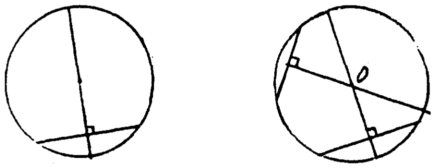
(2)　外接の正方形をかき、その対角線の交点を中心とする。→接線



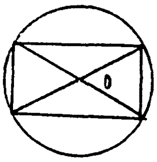
(3)　接線を１本引き、そこから垂線をたてる。それを繰り返すと、その交点が中心となる。ー接線



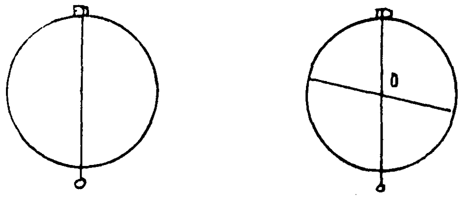
(4)　弦を１本引き、そこから垂直二等分線をたてる。それを繰り返すと、その交点が中心となる。



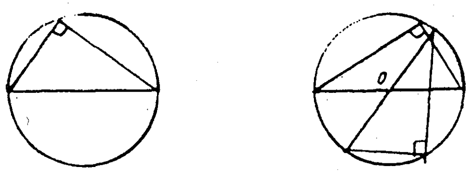
(5)　円に内接する正方形（長方形）をかくと、その対角線の交点が中心となる。



(6) 円周上の一点から糸を垂らし直径を求める。その操作を繰り返すと、その交点が中心となる。



(7) 円周上に直角となる円周角をつくり、直径を求める。その操作を繰り返すと、その交点が中心となる。



これらの解法は、中学で学習する内容を数多く含んでいる。しかし、必ずしもその根拠が明確になっているものばかりではない。ここでは、小学生の実態を考えて深入りせず、証明も完全なものまで要求しなくてもよいであろう。

しかし、問題解決の活動の中で生まれてきたものを、その小学校の学習内容の活用という観点から、経験しておくことは大切なことである。

例えば、本時の学習では、(1)〜(6)までが子どもから出された考えである。一つ一つ実際に操作しながら中心が見つかることを確認することで、一つの事実が経験となったのである。

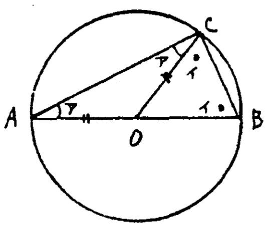
もちろん、子どもたちからは、上記にある言葉ではでてこない。むしろ、稚拙な言葉である。しかし、そこにある考え方は、すばらしいものがたくさんある。そこで、その考え方を表面に出して意識付けていくことが、この授業での一つのねらいとなってくる。

どの方法も直径を２本見つけて、その交点を探す方法であるとまとめられた。

また、話し合いの中で、(2)と(3)はほとんど同じ原理を使っているので、(3)の方が手間がかからないこと、(4)は二等辺三角形の性質を使っていることなど、考え方のよさが表面に出てきていた。(6)では、「円の中に正方形をかいて、その対角線の交点を中心とすればいい」「じゃ、その正方形はどうやってかけばいいんだろう」「長方形なら平行線を使えばかきやすいよ」「長方形でもいいんじゃないかな」など子どもたちどうし智恵を出しあって、よりよい考えに高まっていった。

(7)は、次時にこちらから提示した。紙一枚で中心が見つけてられる方法に驚きと感動の声をあげていた。

また、直径の上にたつ円周角はいつも90度になる説明を５年生なりに、右のように行っていた。



△ABCで

ア+ア+イ+イ=180°

ア+イ=90°

だから

∠ACB=ア+イ

=90°

４．事象の関数関係を捉える

（１）現行カリキュラムの見直しと問題点

現行カリキュラムでは、小学校５年生で速さの関係式から比例の考え方が指導され、小学校６年生で「比例・反比例」，中学校１年生で「関数（比例・反比例）」，中学校２年生で「一次関数」といった流れになっている。

現行の６社の教科書を分析してみると、小学校６年では、児童の活動を基にした「比例」概念の指導といった流れをとっているが、中学校になると、生徒の活動から関数的な考えを用いて「比例」，「一次関数」，「階段関数」といった概念を形成していく展開がほとんどみられなくなる。特に比例と一次関数の集合関係についての理解については、ほとんど配慮がなされていない。ある１社では、比例の捉え方「ｙ／ｘ＝きまった数」を修正・一般化して、変化の割合「y_2-y_1/x_2-x_1＝きまった数（一次関数）」に目を向けさせる流れが見受けられたものの、他の５社では比例と一次関数の関連性には目が向けられず、それぞれの関数の特徴を別々に調べるといった展開に終始している。すなわち、小学校の比例においては「関数的な考え」の育成を配慮した概念指導の形態を取るものの、中学校の比例・一次関数においては「関数的な考え」を用いて伴って変わる量の考察を十分に行うことなく、比例の拡張として簡単に一次関数を定義づけ、そのあとは一次関数の特徴を捉えることに大部分の時間が使われているのである。

また、中学校１年生では比例・反比例、中学校２年生では一次関数といった具合に指導内容が定められているため、教科書の発問を見てみると、中学校1年生では「ｘの値が2倍，３倍，４倍になると、対応するｙの値はそれぞれ何倍になるでしょうか」、中学校２年生では「ｘの値が１ずつ増えると、ｙの値はいくつずつ増えるでしょうか」といった具合に、考え方を指定せざるをえなくなっていることがわかる。しかし、生徒にとってみれば、１年生では「ｘが２倍、３倍になれば、・・・」といった考え方を指定され、２年になると「ｘが１づつ増えると・・」といった別の考え方が指定されるわけであり、不自然であると同時に、逆に混乱を招く恐れがあるわけである。

このように、小学校から中学校にまたがって最も強調されている「事象の関数的な捉え方」を強調していく際、比例，反比例，一次関数といった内容でもって単元を構成していくことは、児童・生徒から引き出されたすばらしいアイデアにもかかわらず、カリキュラム系列といった制限によって、生徒の考えを取り上げる場合と取り上げられない場合が生じてくる。これが、活動領域「事象の関数関係を捉える」において、オープンな活動を軸にカリキュラム構成を試みる大きなねらいになる。

（２）活動領域「事象の関数関係を捉える」で考えられるオープンな活動

この領域では、次のような関数的な考えの育成が小学校から中学校に跨って最も強調されている。すなわち、「事象の中から伴って変わる2つの数量を取り出し、それらを変化や対応などの関数的な考えによって数学的に表現・処理し、推論を進めていく」といった活動である。この考えは、大きく次の３つに分類でき

よう。

① 依存関係に着目しようとする

② 対応のルールを見つけ、これを用いようとする

③ 関係の表現の仕方を工夫し、そこから関数の特徴をよみとろうとする

このような関数的な考えに焦点を当ててオープンな活動を振り返ったとき、「みつける」「わける」「あらわす」「ひろげる」「ととのえる」といったオープンな活動が浮かび上がってくる。これらの5つのオープンな活動と、関数的な考えとの関連性について考えてみよう。

「みつける」：事象の中から、伴って変わる2つ量に着目しようとする際、「伴って変わる2つの量には、どのようなものがあるか」といった「みつける」活動が用いられる。また、みつけた2つの量に、どのような対応のルールがあるかを探ることも「みつける」活動になる。

「あらわす」：みつけた対応のルールを「どのように表現するか」といった活動が「あらわす」活動になる。言葉で表現したり、式で表現したり、グラフで表現したり、多様な「あらわす」活動が考えられる。

「わける」：みつけた対応のルールには、どのような共通点があり、どのような相違点があるかを整理する活動が「わける」活動になる。共通点，相違点を明らかにすることによって、関数概念が構成的に、しかも構造的に理解できるようになる。

「ひろげる」：比例概念が獲得されていると仮定すると、それを「変化の割合」といった概念へと一般化する活動が「ひろげる」活動である。どのようにひろげるかを多様に考えることによって、関数概念が構造的に理解される。

「ととのえる」：事象の関数的な捉え方について生徒の分類した集まりが多様に存在するとき、同じような内容を統合してまとめていくことが「ととのえる」活動になる。ととのえる活動を通して、食い違って思われた生徒の解答が統合され、関数概念をクラス全員の共通理解として構成できる。

先行研究にあるように、「水槽の問題」では「みつける」「あらわす」という活動を通して①②③の関数的な考えが育成可能であり、また「グラフの分類の問題」では、「わける」「あらわす」という活動を通して②③の関数的な考えが育成可能であることがわかる。

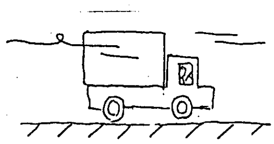
（３）事例

ここでは、内容系列の単なる組み替えといった立場からではなく、「事象を関数的に捉える」活動を中心におき、そこから関数概念の構成的獲得といった立場を基本におくことにする。しかし、どのようなオープンな活動を、どのような題材によって、どのように展開するのがよいかは、一概に決定できるものではない。ここでは、次ページの問題を用い、「みつける」「わける」「あらわす」「ととのえる」といった活動の流れによって授業実践を試み、オープンな活動を軸とした指導系列の特徴を明らかにしていくことにする。対象は、横浜国立大学付属横浜中学校１学年３クラスを対象に、平成７年１０月から１１月にかけて、６時間

問題　A君は、次の(1)から(6)において、この先を予想しています。
この中で、□の予想のできるものはどれでしょう。
また、その理由をワークシートに書きなさい。

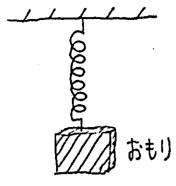
(1) トラックの軽油の消費量と走る道のり

消費量(l)	3	5	7	11	17	22	25
道のり(km)	15	25	35	55	85	□	□



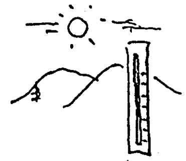
(2) つるまきバネにのせるおもりの重さとバネの長さ

重さ(g)	10	30	40	70	110	120	135
長さ(cm)	32	36	38	44	52	□	□



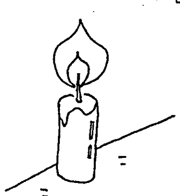
(3) ある1日の時刻と気温

時刻(時)	8	10	12	14	16	18	20
気温(℃)	11	12	18	20	16	□	□



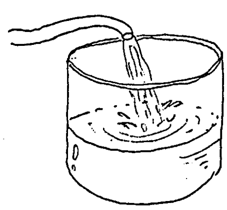
(4) ロウソクに火を灯したときの時間とロウソクの長さ

時間(分)	0	6	12	18	24	25	30
長さ(cm)	8.5	7	5.5	4	2.5	□	□



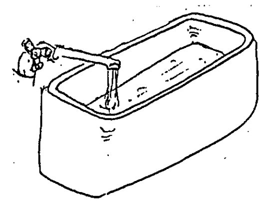
(5) 30 l の水そうに1分間に入れる水の量とかかる時間

水の量(l)	1	2	3	4	5	6	15
時間(分)	30	15	10	7.5	6	□	□



(6) おふろに水を入れるときの時間と水の深さ

時間(分)	1	2	3	4	5	6	7
深さ(cm)	2	4	6	8	10	□	□



オープンエンドの問題

1．*オープンな活動「みつける」*：□を埋める。
どのように予想したかを発表・検討。

2．*オープンな活動「わける」「あらわす」*：予想の仕方の仲間わけ

(a) タイプ1：「変化の仕方が似ているものはどれでしょう。
また、どういう点が似ているか書いて下さい。」
特徴：最もオープンな展開である。自由な発想が期待できる反面、時間がかかり扱い方も難しい。

(b) タイプ2：「一番簡単だった(6)について考えましょう。
(6)と変化の仕方が似ているものはどれでしょう。
また、どういう点が似ているか書いて下さい。」
特徴：少しオープン性が限定されるが、比例，一次関数の概念指導への流れがタイプ1に比べると容易である。

(c) タイプ3：「まず(1)と(6)を取り上げて考えましょう。
なにか共通点はありませんか。
次に(1)(2)(4)(6)について考えてみましょう。」
特徴：最もオープン性を限定した発問である。比例概念へとそのままつながり時間が最も節約できる。

3．*オープンな活動「ととのえる」*
：生徒同士の討論を通して、同じものとしてまとめられるものを統合し、関数概念を構成する。

オープンな活動を軸とした3タイプの指導系列

にわたって研究授業を行った。指導系列としては、事象（表）から関数の捉え方・関数式・グラフへの流れを取りながら、前ページのような指導系列を考えた。ただし、オープンな活動「わける」「あらわす」においては、発問の仕方をどの程度オープンにするかによって３つのタイプにわけ、その違いについて考察することにした。

（４）考察

活動領域「事象の関数関係を捉える」において、オープンな活動「みつける」「わける」「あらわす」「ととのえる」といった一連の流れにより、比例・一次関数の概念の構成的な獲得を意図した指導を試みた。ここでは、３つのタイプの指導系列における長所・短所，並びに、それぞれのオープンな活動から生じる多様な正答に対して、どのような点を児童・生徒に考えさせることが関数概念の構成に有効かについて述べる。

① ３つの指導系列について

「わける」「あらわす」活動における教師の発問の仕方によって、生徒からでてくる反応は質的に、量的に変わってくる（参考資料参照）。そして、反応のこのような違いが、生徒の多様な正答を概念形成につなげる際に大きな影響を及ぼす。タイプ別に、それぞれの指導系列の特徴を分析する。

タイプ１では、発問が「変化の仕方が似ているものはどれでしょう」といった一番オープンなこともあって、生徒から一番多くの解答が得られ、比例概念，一次関数の概念，反比例の概念等、多くの内容を包含したものであった。特に、タイプ１の指導系列では、(4)(5)の共通点にも焦点が当たるため、「一方が増えたとき、他方が減れば反比例である」といった生徒の内面的な理解が顕在化され、反比例の概念までまとめて扱うことが可能であった。また、変域の考えにも着目できた点は、他の２つのタイプと異なる点である。まとめると、タイプ１では次のような関数概念の構成が可能であった。

(1) 一方が増えれば、もう一方も増える

(2) 比例概念

・一方を２倍３倍・・すると、他方も２倍３倍・・になる。

・２つの量の商が一定である。

・式表示（ｘ／ｙ＝ａ，ｙ＝○×ｘ）

(3) 変化の割合

・一方が一定の数増えると、他方も一定の数増える

・上が一定の数増えると、下の数も一定の数だけ変化する

(4) 反比例

・一方を２倍３倍・・すると、他方は1/2倍1/3倍・・になる。

・２つの量の積が一定である。

(5) 変域

・増えるにしろ減るにしろ限度がある。

しかし、ひとつひとつの検討から概念を構成することに多くの時間（３時，４時，５時）を費やし、同じことの繰り返しにより生徒の集中力が持続しない側面も観察された。この点は、さらに検討が必要であろう。

タイプ２では、一番簡単な(6)との共通点ということで、生徒も積極的に取り組んでいた。反応数，関数概念の種類についても、タイプ１には劣るが、かなり数多くの反応が引き出された。比例概念，一次関数の概念へとつなげる際には、タイプ１のような全くオープンという形より、この程度の制限が、活動の活発さ、時間的制約の両者を加味すると妥当であろう。ここでは、次のような関数概念が構成された。

(1) 一方が増えれば、もう一方も増える

(2) 比例概念

・一方を２倍３倍・・すると、他方も２倍３倍・・になる。

・２つの量の商が一定である。

・式表示（ｘ／ｙ＝ａ，ｙ＝○×ｘ）

(3) 変化の割合

・一方が一定の数増えると、他方も一定の数増える

・上が一定の数増えると、下の数も一定の数だけ変化する

またタイプ１，タイプ２では、「一方が増えたとき他方も増えれば比例である」といった生徒の内面的な理解が顕在化され、比例，変化の割合の集合関係まで、まとめて扱うことが可能であった。

タイプ３では、「(1)(6)の共通点」といった具合に、考える範囲を制限したため、「なぜ(1)(6)なのか」といった疑問が生徒から生じたこと、生徒の内面的な理解が顕在化されにくかったこと、生徒の活動があまり活発でなかったことが問題点としてあげられる。しかし、比例の捉え方に関しては、式表現，グラフ表現まで考える生徒が観察され、3時では比例概念を式，グラフ表示までまとめて構成することが可能であり、４時では変化の割合を式，グラフ表示までまとめて構成することが可能であった。考える点を絞った点で、取り扱える関数概念の種類では限定されるが、比例，一次関数に限定すると多様な表現方法が引き出された。ここでは、次のような関数概念が構成された。

(1) 一方が増えれば、もう一方も増える

(2) 比例概念

・一方を２倍３倍・・すると、他方も２倍３倍・・になる。

・２つの量の商が一定である。

・式表示（ｘ／ｙ＝ａ，ｙ＝○×ｘ）

・グラフ表示（直線になる。）

(3) 変化の割合

・一方が一定の数増えると、他方も一定の数増える

・上が一定の数増えると、下の数も一定の数だけ変化する

・式表示（ｙ＝ａｘ＋ｂ）

・グラフ表示（直線になる。）

また、検討の時間も少なくてすむため、時間をあまりかけずに展開しようとする際にこのタイプは適するだろう。

以上３つのタイプを総合して考えると、発問がオープンよりクローズな方が指導したい内容へつなげることが容易であること、また時間もあまりかけずにすむことがわかる。それに対して、オープンな発問の方は、着眼点が制限されていな

いため、生徒の積極的な活動が期待できること、並びに生徒の内面的な理解が顕在化され、それらを検討・修正する中で概念形成が図れることの２点が長所としてあげられる。ただし、発問がオープンすぎて検討すべき生徒の解答が多くなりすぎると、同じ活動を繰り返し行う必要が生じ、生徒の集中力を失わせる原因になることもわかる。

② オープンな活動から概念の構成的な獲得について

オープンな活動から引き出された多様な正答は、次のような観点から取り扱うことが可能である。これらの観点は、特に発問がオープンであったタイプ１，２において適用された。

(1) 解決過程・結果に間違いはないか。（妥当性の検討）

事例１：「(1)(2)は比例である」（(2)は比例ではない。）
　　→発問「これについて、みなさんよろしいですか？」」

事例２：「(4)(5)は反比例である」（(4)は反比例ではない。）
　　→発問「これについて、みなさんよろしいですか？」

(2) 考え・表現が曖昧でないか。（明確性の検討）

事例１：「(1)(2)(4)(6)は、規則的に増えたり減ったりしている」
　　（「規則的」といった表現が曖昧である）
　　→発問「言っている意味が、みなさんわかりましたか？」

事例２：「(1)(2)(4)(6)は、全て基準の値が求められる」
　　（「基準の値」の意味が不明確である）
　　→発問「言っている意味が、みなさんわかりましたか？」

(3) それぞれの正答に関連性はないか。（関連性の検討）

事例１：「(1)(6)は、片方が増えると片方も増える」
　　「(1)(2)(6)は、片方が増えると片方も増える」
　　（上記２つは、１つにまとめられる）
　　→発問「同じことは、ひとつにまとめよう」

事例２：「上が一定の数増えると、下も一定の数増える」
　　「一方が増えると、ある規則に従って他方も増える」
　　「１にあたる量を求める」
　　（上記３つは、同じようなことを言っている）
　　→発問「同じ様なことは、ひとつにまとめよう」

このように、活動領域「事象の関数関係を捉える」において、「みつける」「わける」「あらわす」「ととのえる」といった一連の活動によって指導系列を考える際、多様な正答を「妥当性の検討」「明確性の検討」「関連性の検討」といった３つの観点から概念形成へ結びつけていくことが、一つの方策として有効である。

5　資料を整理する

（1）現行カリキュラムの見直しと問題点

ア　現行カリキュラムにおける指導内容および用語

「資料を整理する」に代表されるいわゆる統計的な内容については、現行カリキュラム（平成元年学習指導要領）では、小・中学校とも主として「数量関係」の領域に含まれている。主な内容については表１の通りである。

	指　導　内　容	用 語 等
小		
2	・事柄を簡単な表に表したり、それをよむこと。	ものの位置
3	・簡単な事象の分類・整理 ・棒グラフのかき方とそのよみ	表　グラフ　棒グラフ
4	・二つの事象に関して起こる場合を調べたり落ちや重なりを検討したりすること ・折れ線グラフのかき方とそのよみ	折れ線グラフ
5	・資料の分類・整理と円グラフ・帯グラフ ・百分率	円グラフ　帯グラフ 百分率
6	・度数分布の表とグラフ ・一部の資料から全体の傾向を知ること ・起こり得る場合を調べること	ちらばり　柱状グラフ 場合の数
中		
2	・目的に応じて資料を収集し、それを表、グラフなどを用いて整理し、代表値、資料の散らばりなどに着目して資料の傾向を知ること	度数分布・ヒストグラム 階級　度数　相対度数 平均値　範囲 相関図
3	・多数の観察や多数回の試行によって得られる頻度に着目し、確率について理解すること ・標本のもつ傾向から母集団のもつ傾向について判断できることを理解すること	不確定な事象　確率 標本調査　母集団 乱数

表１　小・中の統計的な内容に関するカリキュラム

イ　カリキュラムの見直しと問題点

統計的な内容についても、他の内容と同様に各学年に系統的に振り分けられている。特に小５・６の内容に関しては、小５で百分率、円グラフ、帯グラフ、小６では度数分布、ちらばり、場合の数などが学習内容となっている。小学校では、統計的な処理方法を習得し、中学校ではさらに統計的な見方・考え方を深めていくカリキュラムの意図はうかがえる。

小５・６分科会の中では、これら現行カリキュラムを概観して、次の２点について課題をあげた。

a　小・中のカリキュラムの重複が見られないか。

b　整理するという活動カリキュラムの系統性が生かせないか。

c　他教科との関連は生かせないか。

数学科カリキュラム開発については、数学的な内容の整合性やその指導内容の教育的な価値が重要な要素となる。中学校とのこれらはいずれも中学校順序はあるが、2学年間については順序性は特に認められない。時間数さえ保証できれば、まとめてどちらか一方の学年で扱うことも可能ではある。

ウ　中学校の立場から見た小学校の確率・統計カリキュラム

主として小5・6に限定すると、中学校では用語の数は多いが、内容については、多少中学校の方がより深みが増しているようではあるが、決定的な違いは感じられない。統計では、中学校の教科書にあげられているデータの方が数が多く、数値も生の値に近い印象はある。内容的には、度数分布表から平均値を求めること、相関図などが中学校で新しく加わるが、他の内容は特別新たに学習するものではない。確率では、小学校では起こりうる場合の数を求め、中学校ではその起こりやすさを数を用いて表していくという順序性はある。また、小学校ではある事柄から全体を推測し、中学校ではそこに無作為さを取り込む。確率を用いた計算（公理的な扱いも含めて）は高等学校以降である。

全体的には、小学校で素地をつくって中学校で応用・発展させるという流れは確かにあるが、統計内容については、その重複部分が多い。小学校での指導時数との関連で十分に扱えない、小学校ではおおまかに経験的に理解できる程度でよしとする、というのであれば問題はないのであろうが、電卓の積極的な活用が教育現場でもそれほど抵抗がなくなってきている昨今でもある。小学校の内容を豊かにする、あるいは中学校での自由度を広げる、という部分が強調できないのだろうか。

（２）　統計領域で考えられるオープンな活動

ア 従来見られるもの

統計領域に関するオープンエンドの問題や問題づくりの授業については、これまでの文献や研究の中で、例えば次のようなものがあげられる。

オープンエンドの問題	問題づくりの原題
いろいろなグラフの分類	
リーグ戦の勝敗表	
品物の重さくらべ	
マラソンの順位づけ	地方と天気
代表の選出	赤玉・白玉の問題
体操の得点	

イ 統計教材で大切となること

これまでの分科会の中で、カリキュラム改訂の視点としては例えば次のようなものが考えられると確認されてきている。

・限られた時間しかないので、多くの人にとって必要で、欠かせないものを選ぶ（社会性・文化的））

必要・・・日常生活その他で使われるため

数学の学習をすすめていくため

・わざわざ教えなくても知ることができるものは省く（陶冶的）
・選ばれた数学の内容の理解が十分図れるように配列できる（制度的・順序的）
・関連したものは関連させて学習した方が能率的である（統合的・時間的・現実的）
・数学的な内容の整合性（数学的）
・それぞれの指導内容に教育的な価値を有している（教育的・数学的）

分科会の中では、統計領域におけるオープンな活動の位置づけについては、次の４点この中で、統計領域におけるその可能性として、例えば次の３点があげられた。

・ 数学と生活とのつながり
・ 情報収集・処理の力を高める
・ モデル的な扱いが可能である

（３） 事 例

例えばつぎのような問題を考える。

ア 問 題

６年１組 女子				６年２組 女子			
番号	きょり(cm)	番号	きょり(cm)	番号	きょり(cm)	番号	きょり(cm)
1	269	11	291	1	339	11	328
2	296	12	313	2	315	12	288
3	308	13	325	3	280	13	275
4	243	14	278	4	301	14	302
5	284	15	282	5	295	15	321
6	287	16	300	6	302	16	300
7	259	17	317	7	286	17	322
8	305	18	275	8	343	18	242
9	331	19	298	9	310		
10	298	20	321	10	314		

左の記録は、６年１組と２組の走り幅跳びの記録を表したものです。
どちらの方がよい記録だといえるでしょうか。
その決め方について、いろいろな方法をあげてみましょう。
また、１組の方がよい記録であるというためには、どんな方法が考えられますか。
２組の場合ならどうですか。

イ 予想される反応

・平均で比べる

・散らばりぐあいで決める。

・２つの学級の個々の対応表をつくり、その大小を点数化する。

など

（４） 考　察

ア 決め方の多様性

統計領域ではどのような決め方や方法を採用するか、その方法がどこまで適用範囲をもつのか、多様な考えや結果が展開できよう。子どもたちの身の回りには、数学の授業以外も含めて、統計的な題材が数多くころがっている。それらの正しい見方を教えていくことはもちろん必要である。しかしそれだけでなく、自分たちがお互いにどのような根拠でその結果を導き出し、それがどの程度妥当性をもつのかを議論できる場面であろう。統計領域では、特にその点を強調できないだろうか。資料が自分たちの学級の記録やスポーツテストなどの記録などであれば、その議論もいっそう迫熱してこよう。

イ 小・中の特徴を明確に

現行の小・中のカリキュラムを見てみると、内容の重なりが見られる。小・中それぞれの特徴がいま一つ明確になっていない。大胆な配置ができないだろうか。例えば、小学校で内容的なもの、中学校で活動的なものを、あるいはその逆を、などである。そこで、オープンな活動を軸にカリキュラムを構成することの可能性が出てくる。(1)で述べたとおり、子どもたちが自分たちで調査したり、議論できる単元であることから、思い切った配置ができないだろうか。

ウ 活動カリキュラムの視点から

池田氏の分類によると、統計領域では、「わける」（場合ごとに順序よく整理する）、「あらわす」（決め方を数学的な手法を用いて表現する）、「つくる」（モデルをつくる）などの活動の支援が考えられよう。分科会の中でも再三議論となったが、このようなことは何も統計領域だけに限ったことではなく、小１から小４までの様々な場面の中でも培うことが可能なものである。小５・６の統計領域の前にそうした下地があれば、決め方を考える題材などは、これまでに学習した内容や活動を総動員して取り組める場面でもあるといえる。活動カリキュラムの視点から考えれば、統計領域の存在意義は十分にあるのではなかろうか。

Ｖ．まとめ

本稿は、オープンな活動を軸にしたカリキュラム開発の基礎的研究であり、「知識・技能中心カリキュラム」から「活動中心カリキュラム」への変革をスローガンにおき、オープンな活動を軸として現行カリキュラムを修正・改善していくことをねらいとしている。

まず最初に、「オープンな活動をどのように捉えるか」，「どのような枠組みの中でオープンな活動を軸としたカリキュラム構成を考えるのか」，「オープンな活動をどのような領域構成によって強調していくのか」の３点について考察した。次にそれを踏まえて、オープンな活動を軸としたカリキュラム構成の意義について考察した。すなわち、オープンな活動を軸としたカリキュラム構成の意義として、① オープンな活動は数学的概念の構成に役立つ見方・考え方を育成するための活動であり、活動すること自体に意義がある，② オープンな活動は数学的対象の多面的，構造的な理解の仕方を強調する，の２点が導かれた。

最後に、５つの領域（計算の仕方を考える，面積・体積を測る，図形の性質を探る，事象の関数関係を捉える，資料を整理する）を取り上げ、現行のカリキュラムの見直し・問題点について考察し、オープンな活動を軸とした単元構成を事例的に試みた。その結果、各々の活動領域において、複数のオープンな活動が期待できること、また、活動領域，オープンな活動，多様な正答をどういう観点から概念形成につなげるかについて、いくつかの事例を提案することができた。

今後の課題は、各々の活動領域においてオープンな活動を軸にしたとき、学年配列をどのような枠組みで決定していくのか考察すると共に、それをどのようにカリキュラムとして表現していくのかについて考えていくことである。本研究は、カリキュラム開発にとりかかるための基礎的な研究であるため、これからが本当に重要な研究課題といえる。今後とも継続的に研究を進め、オープンな活動を軸としたカリキュラムをぜひ具体化していきたい。

［参考・引用文献］

1)塩野直道：数学教育論，啓林館，1970

2)平林一栄：数学教育の活動主義的展開，東洋館，pp.41-43，1987

3)池田敏和：小・中学校における算数・数学のオープンエンドの問題に関する開発並びに授業研究，日本科学教育学会年回論文集，F 224，1992

4)14)16)17)島田茂（編）：新訂，算数・数学科のオープンエンドアプローチ，東洋館，1995

5)18)竹内芳男・沢田利夫（編）：問題から問題へ，東洋館出版社，1984

6)能田伸彦：オープンアプローチによる指導の研究，東洋館出版社，1983

7)三輪辰郎：数学教育におけるモデル化についての一考察，筑波数学教育研究，pp.118-121，1983

8)池田敏和：算数科におけるオープンエンドの問題の体系化に関する研究，科学教育研究　Vol.18 NO.2，pp.58-66，1994

9)塚本清：最新算術學習指導法，東洋図書株式合資会社，pp.466-490，1933

10) 古藤怜（編）：算数科多様な考えの生かし方まとめ方，東洋館出版，1992

11)手島勝朗：問題解決の思考の様式と質の関連，学校数学の改善 Do Math の指導と学習（古藤怜先生古希記念論文集編集委員会），東洋館，pp.199-213，1995

12)中原忠男：算数・数学教育における構成的アプロ　ーチの研究，聖文書，pp.57-78，1995

13) Alan J.Bishop: Mathematical Enculturation, Kluwer Academic Publishers，1988，pp.20-59

15)伊藤武：発見学習の理論，数学学習の理論化へむけて，日本数学教育学会編，産業図書，1995，PP.281-299

19)21)沢田利夫・坂井裕（編）：中学校数学科［課題学習］問題づくりの授業，東洋館出版社，1995

20)橋本良彦（代表）：小５から中２までの算数・数学のオープンエンドの問題に関する開発並びに体系化の研究，報告書，1993

中学１，２年生での問題づくりとオープンエンドの扱いについて

（中学校１・２年部会）

横浜国立大学教育学部附属横浜中学校
若松　義治

１．部会からの報告

中学１，２年部会では、問題づくりとオープンエンドをもとにしたカリキュラムの構築を研究の目的にしてきた。現段階までの成果は、いろいろな制約があって、質量ともに話にならないが、研究の方向性と留意すべき点については共通理解が図れそうな気がする。

部会では、いくつかの実践が報告され、それらの検討を行ってきた。後のページで報告する

・中学校『平行四辺形単元』における考察　《安藤 秀朗》

・条件不備の問題を原題とした問題づくり　《小林 哲郎》

などは、それらの研究成果である。研究内容については、図形領域に集中する傾向にあったので、他の領域での研究を深めていいくことが今後の課題の１つである。

新しい教育課程の方向と本研究の関連、正負の数でのオープンエンドの事例、及び、図形領域でのオープンエンドの考察を本稿で行うことで、本部会のまとめとしたい。

２．新しい教育課程の方向と本研究の関連について

２１世紀の教育課程の基本原理は、「児童・生徒一人ひとりの算数・数学の能力・態度を育てる教育課程」を構成することと考えられる。（片桐重男　1995.8.18）

現場での数学教育の研究は指導法が中心である。しかし、関心・意欲・態度や数学的な考え方の育成を図ることを対象にするとき、教育課程の変更まで踏み込まないとこれらの能力を十分に育成することは不可能といえよう。

これからの教育課程は、学校５日制定着の中で、生きて働く学力の育成が重視される方向にある。また、算数数学においては、学習内容を激選して、以下に示すことがらを目標の柱にして編成されることが予想される。

算数数学の学習を有意義なものにするためには、算数数学の有用性を感得させる指導の工夫が必要である。そして、児童生徒が自ら数学的な活動を行うするための時間を十分に確保できるように考えて行くべきである。

(1) 多様な能力に対応できる教育課程

現在の数学の授業での最大の問題点は、進んだ生徒の能力を十分に伸ばせないばかりか、遅れた生徒にも十分な援助ができないことである。このことの一番の原因は、すべての生徒が同一の内容を学習していることにある。多様な生徒への対応には、多様な目標、教育課程、及び、指導法が必要といえよう。

このような視点から、オープンエンドや問題づくりを取り入れたカリキュラムを編成することは、多様な能力に対応するという点で望ましいと考えられる。

(2) 数学的な考え方を育成する教育課程

現行の教育課程は、知識・技能の習得を中心に編成されている。生涯教育から数学を捉えるとき、知識・技能の習得から数学的な考え方の習得により比重を移すべきであろう。そこで、数学的な考え方を身につけることを重点化した教育課程を考えるとき、オープンエンドや問題づくりを取り入れた授業は主要な位置を占める可能性を持つ。そのためにも、オープンエンドや問題づくりのそれぞれの授業で、それらの展開の中で育成できる数学的な考え方をより具体的に示していくことが必要といえよう。

(3) 知識・技能面の指導内容を激選した教育課程

基礎・基本の徹底は現行の教育課程でもいわれているが、何が基礎・基本なのかの議論は十分でないように感じる。また、基礎・基本を考えるとき、知識・技能を中心にしがちであるが、数学への興味・関心や数学的な考え方も範疇に含むべきである。

一方、数学の特性の１つに体系性ある。体系性を無視して、知識・技能を獲得させることは無理がある。そこで、指導内容を激選するときに、体系との整合性をどのように図るのかが問題になる。この点を疎かにして改訂作業を進めると、歴史が示すように、また目標が後退すると思える。

それぞれの発達段階で、オープンエンドや問題づくりの授業を活発に展開するためには、数学的な考え方と同様に、どのレベルまでの知識・技能を必要とするのか、また、それらの獲得をどのように図るのかを計画段階から明確にしていく必要がある。

(4) コンピュータの活用や情報処理能力の育成を図る教育過程

コンピュータの活用は今や時代の要請になっている。また、これらの活用を意図するとき、指導すべき数学の内容も変わるのであろう。

オープンエンドや問題づくりの授業においても、コンピュータの活用や情報処理能力育成との関連を考察する必要があるといえよう。

『問題づくりとオープンエンドをもとにしたカリキュラム』を編成し、また、実行していくためには、今後、どの方向に、どのような内容の研究を進めることが重要だろうか。皆で知恵を出し合って深めていきたい。

特に、このようなオープンな活動を中心にカリキュラム構成するとき、どのような学力が基礎・基本に相当するかを明らかにすることがポイントになるであろう。また、それらの育成計画も考えておくことが必要になる。

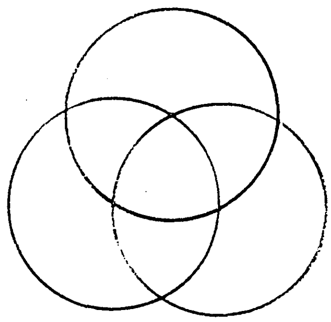
3．１年生・正の数・負の数の単元におけるオープンエンドの扱い

［問　題］

大きさが等しい３つの円を図のような位置にかいてみると、全体は７つの部分に別れ、どの円も４つの部分からできている。

この７つの部分に、適当に選んだ連続する７つの整数を書き入れることにする。

このとき、どの円についても、４つの部分の数の和が等しくなるようにできるか。



(1) 問題のねらい

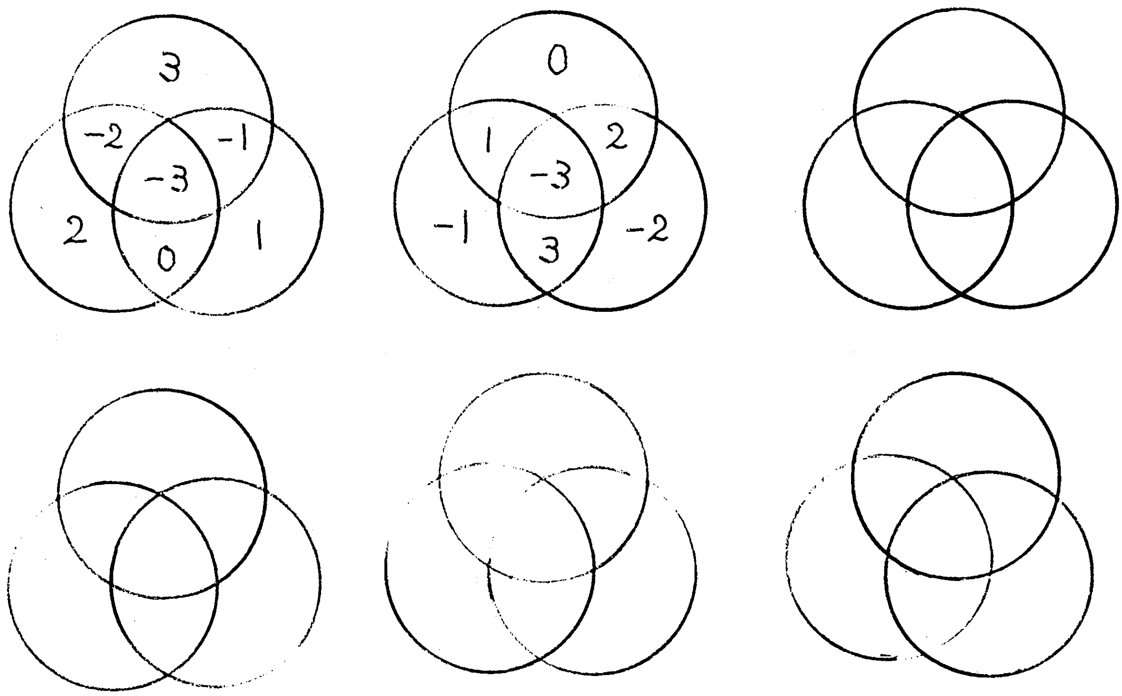
・問題の意味を理解し、調べるのに都合のよい数を選択しようとする。

・一つの答えを見いだした後も、積極的に他の答えを求めようとする。

・解決過程や求めた答えを振り返って、正答になる選択の条件を考察することができる。

(2) この問題での解答について

たとえば、｛−３，−２，−１，０，１，２，３｝を選択したときの解答。



(3) 学習展開案

学習の流れ	学　習　活　動	指 導 上 の 留 意 点
(全) 問題の理解	・７つの部分に自分で選んだ数を書き入れて、どの円の和も等しく作ることを理解する。	・理解できない生徒には、数を書き入れさせて理解を図る。
(個) 解決の見通し	・楽に実行するために、どのような数を選択すればよいかの見通しを立てる。 ・部分によって、複数回使われる数のあることを見通しに加える。	・計算することを考慮して数の選択がなされているかに注意を払う。
(個) 解決の実行	・どの部分を先に決めるとよいのかを考える。 ・ルールを発見しながら実行する。 ・他にも、解がないかどうかを自分で見いだしたルールに基づいて検討する。	・中央の数は、全ての円に関わることを気づかせる。 ・試行錯誤的に行うのではなく、ルールの発見に努めるように促す。 ・答えの見つけ方を検討して、このような問題での有効方策を検討する。
(全) 解決の反省	・発見した答えを発表する。 ・見つけたルールを確認する。	

(4) 考　察

中学校１，２年部会では、各単元の中に、オープンエンドアプローチ・問題づくりの活動を位置づけることを、研究の目的にしている。今までに、幾つかの問題とそれに基づいた指導展開を考察してきたが、量質ともに十分といえない状況である。特に、数の単元でのオープンエンドアプローチ・問題づくりの活動は、問題設定の難しさもあって問題開発が遅れていた。

この事例でも、生徒が負の数を選択しないときには、正負の単元に位置づけた問題にならない。したがって、ここでの展開では、計算が簡単にできるように数を選択することを強調して、解決への見通しを立てさせることが指導のポイントになる。

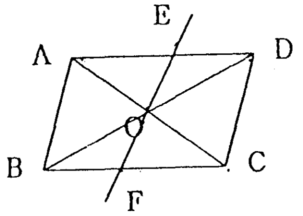
また、このような問題では、答えを求めるために試行錯誤を続けるのではなく、どのような考え方や方策を用いるとルールの発見に役立つのかを考えながら作業させることが大切といえよう。そして、このような態度を持つことは、ルールを的確に表現できない場合でもルールに近いものに気づけば、類推的な考え方が働いて新しい解答を求めるのに役立つといえる。したがって、類推的な考え方の有効性を感得できるような教師の手立てが、この学習では重要な意味を持つと考えられる。

4．中学校「図形領域」におけるオープンエンドについての一考察

(1) 図形の証明に関するオープンエンドの問題の特徴

図形領域で扱う課題は、通常扱われる証明問題を改題して、決定問題として提示される。そして、成り立ちそうな関係を見つけようという問いかけにすることが多い。例えば、

> 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線の交点をＯとし、Ｏを通る直線が辺ＡＤ，ＢＣと交わる点をＥ，Ｆとする。
> このとき、成り立ちそうな関係を見つけなさい。



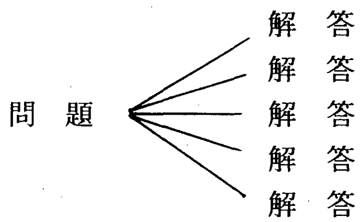
このような課題を２年生に与えたことを想定してみよう。このとき、この問題では次のような反応が予想される。

《角に関すること》　(1) 対頂角 → ∠ＥＯＡ＝∠ＦＯＣ（∠ＥＯＤ＝∠ＦＯＢ）
∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ
(2) 錯　角 → ∠ＡＥＯ＝∠ＣＦＯ（∠ＤＥＯ＝∠ＢＦＯ）
∠ＡＢＯ＝∠ＣＤＯ
(3) 対　角 → ∠ＢＡＤ＝∠ＤＣＢ（∠ＡＢＣ＝∠ＣＤＡ）

《辺に関すること》　(4) 辺の長さ → ＡＥ＝ＣＦ（ＤＥ＝ＢＦ）
ＥＯ＝ＦＯ
ＡＤ＝ＢＣ，ＡＯ＝ＣＯ
(5) 辺の位置 → ＡＢ∥ＣＤ

《合同に関すること》　(5) 三角形 → △ＡＥＯ≡△ＣＦＯ（△ＤＥＯ≡△ＢＦＯ）
△ＡＢＯ≡△ＣＤＯ
(6) 四角形 → □ＡＢＦＥ≡□ＣＤＦＥ
□ＡＢＦＯ≡□ＣＤＥＯ

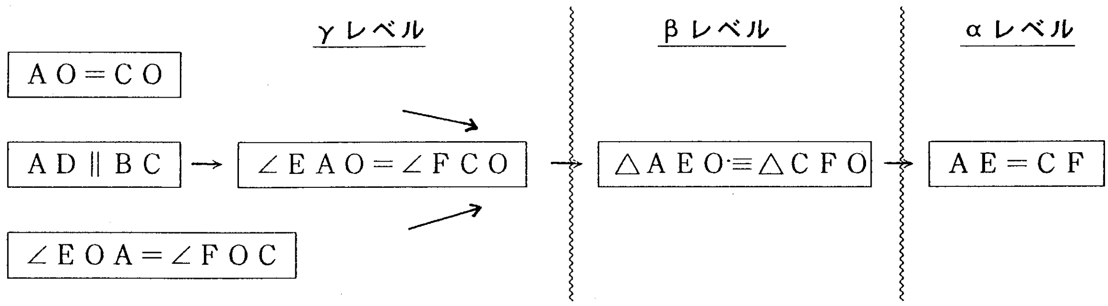
今までの研究では、角や辺などの内容によって見いだされた解答を分類していた。オープンエンドの問題の定義は、右の図で表されるものである。ところが、図形の決定問題で見いだされる解答どうしの関連は、図のような並列の型にはなっていない。



ところが、図形の証明を最終目的にする問題では、発見される解答のレベルは異なっていると捉えるべきである。それを図に示せば、直列で、樹形図の型に近いといえる。

上の問題の解答を分類すると、ＡＥ＝ＣＦや□ＡＢＦＯ≡□ＣＤＥＯは高いレベルの発見といえる。一方、ＡＢ＝ＣＤやＡＢ∥ＣＤなどは低いレベルの解答である。高いレベルの発見を結論とする証明では、それ以下のレベルの解答を通過したり、それらを組み合わせて用いることになる。

例えば、ＡＥ＝ＣＦを証明するには、図のような過程を踏んでいく。



そこで、多様な解答を、α，β，γのような上位、下位のレベルに分けて、それぞれの解答に適した指導の考察は、問題構造の理解や証明能力の育成に役立つといえよう。

(2) 各レベルに関する指導上の留意点

α，β，γの区分けは、次のような観点に基づいている。

γレベル →	問題に使われている図形(例えば、平行四辺形)の性質になってることがら 問題に使われている図形の性質を調べるときに、既に使用されたことがら 定理から直接わかることがら（例えば、対頂角）
βレベル →	γレベルの解答を組み合わせたことがらで、上のレベルの解答をそこに含むことがら
αレベル →	証明するために、問題の条件をすべて用いる必要のあることがら

それぞれのレベルの発見に対する評価は、生徒の学力に応じることは当然であるが、上のレベルへ高める指導の工夫が必要である。また、それぞれのレベルにおいて、同じ解答が発見されても、質的に違いのあることを留意する必要がある。

例えば、γレベルの　ＡＯ＝ＣＯ　と答えた生徒に対して、平行四辺形の性質を記憶していないから答えたのか、そのことを知っていて答えたのかでは、その生徒に対する評価が異なり、その後の手立ても個に適した方法であたらなければならない。

α，βレベルの解答でも、どのような経過をたどって発見されたのかを確認する作業が重要になる。特に、図形題材では、結論を視覚的に捕らえるので、発見経過の確認は、指導中の評価のポイントになる。αレベルの　ＡＥ＝ＣＦ　を発見した生徒は、上の図の過程を確実に踏んでいれば、証明の記述がすむことで、この題材での学習が完了することになる。当然、このような生徒は時間が余ると予測されるので、新たな課題が存在しなければ、充実した学習とは考えられない。このような生徒には、この授業で扱った問題を原題とする『問題づくり』をさせることが対策として考えられ、有効な学習が期待できる。特に、学習の進んでいる生徒には、問題づくりを進んでしようとする態度や問題づくりの考え方を日頃から育てておきたい。

また、練りあげの場面では、見つけられた解答を取り上げ、それらの構造を明確にする学習を行いたい。そして、それらの議論を通して、解答のレベルを上げていけるような指導の工夫が必要といえよう。

問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラムの再構成
～中学３年と高校数学Ｉとの関連から～

中学校３年・高校１年部会：佐藤　孝彦，野尻　昌昭，山浦　和雄，
鈴木　　誠，山本　知子

１　はじめに

問題づくりやオープンエンドの授業を行うと，生徒の反応の中において，中学校では学習しないことがしばしば見られる．ところが，自然に出てきた反応を「それは来年学習するから」「高校の内容だから」等の言葉で片づけてしまったり，そのような反応が出た場合，どのように対処したらよいか悩んでいる教師もいるであろう．

今までのカリキュラムは，知識・技能の習得を中心に構成されている．しかし，生徒が自ら学ぶスタイルの授業が，現場に確実に根を伸ばしてくると（問題づくり・オープンエンドアプローチ等の授業が普及すると），カリキュラムを根本から見直し，再構成する必要が出てくるであろう．視点を変えれば，問題づくりやオープンエンドアプローチの授業を行うことで，今までとは違ったカリキュラム構成になることも考えられる．

ところで，問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラム開発といったときに次の２つの視点が考えられるであろう。

①オープンエンド、問題づくりを中心とした単元自体の組み替えも含んだ内容の再構成

②現行カリキュラムにオープンエンド、問題づくりを取り入れることによる単元内でのカリキュラムの再構成

ここで、当初我々は、特に一方に限定しないで検討していくことにしたが，視点②の方が浸透させやすいという側面をもっており，それを中心にしていくことにした．そして，部会を重ねる中で，上級学年で指導される内容を下級学年で指導する内容と関連づけて指導することを中心に検討することになった．一例をあげると，中学校３年で$y=ax^2$の二次関数についての指導がされるが，数学Ｉで指導される二次関数のうち$y=ax^2+c$程度までを指導することである．もちろん，指導の流れが生徒にとって自然なものであるということを大前提としてである．

２　研究の大まかな経過

問題づくりとオープンエンドにおいての事例は，中学校２年生までは数多くあるが，中学校３年から高校１年，とりわけ高校１年となると，その数は少ない．そこで、本部会ではあせらず色々な角度からアプローチしていくことにした．そして，先ず

☆中学校３年生用現行教科書６社の導入問題の分析とオープンエンドの問題の作成
☆高等学校数学Ｉの中からの洗い出し

を行うことにした．その中でも後者を優先し，高校１年で必修である数学Ｉと中学校数学の関連性を調べ，実際に授業を行った．

次に，高校Ｉにあって，中学３年にはないものや，オプションの数学Ａでの指導について，中学校での指導の可能性を探った．

部会で報告・検討された主な資料

第１回　平成６年１２月１７日（土）

①順列を題材にした問題づくりの事例

②中学校数学（第３学年）の各教科書における導入問題の分析とオープンエンドの問題の問題作成について

④オープンエンドの問題

⑤啓林館３年目次と東京書籍数学Ｉの中から

第２回　平成７年１月２８日（土）

①数学科学習指導案「航空路」

②高等学校数学Ｉ（数研出版）「第３章　個数の処理」

第３回　平成７年４月２２日（土）２３日（日）

①中・高一貫教育における数学科カリキュラムの一案

②中学校３年・高校１年：関数において

第４回　平成７年７月８日（土）

①オープンエンドの問題

②数学科学習指導略案（サイクリングの問題），（航空路）他

第５回　平成７年９月16日（土）

①２年一次関数の学習指導案

②二次方程式

第６回　平成７年10月14日（土）　・特になし

第７回　平成７年11月11日（土）　・特になし

第８回　平成８年１月２０日（土）・特になし

３　中学校数学と数学Ｉ・数学Ａの内容の関連性

先ず，数学Ｉ・数学Ａの内容を中学校での３領域にあてはめて分類したものが表ー１で，そのうちの一部をさらにもう少し詳しくまとめたものが表ー２，表ー３である．なお，対象とした教科書は以下の通りである．

数学Ｉ　高等学校数学Ｉ（啓林館），新編高校数学Ｉ（旺文社），高等学校数学Ｉ（数研出版）

数学Ａ　新編高校数学Ａ（旺文社），高等学校新編数学Ａ（数研出版）

表ー１

	数　学　Ｉ	数　学　Ａ
数と式		(1) 数と式 ・数 整数，有理数，実数 ・式 整式，等式と不等式
図形	(1) 図形と計量 ・三角比 正弦，余弦，正弦／三角比の相互関係	(1) 平面幾何 ・平面図形の性質 平面図形に関する基本的な定理

	・三角比と図形 正弦定理，余弦定理，図形の計量	・条件によって定まる図形 ・平面上の変換 合同変換，相似変換
数量関係	(1) 二次関数 ・二次関数とグラフ 関数とグラフ，二次関数とそのグラフ ・二次関数の値の変化 二次関数の最大・最小 二次方程式と二次不等式 (2) 個数の処理 ・数え上げの原理　・自然数の列 ・場合の数 順列，組合せ (3) 確率 ・確率と基本的な法則 ・独立な試行と確率　・期待値	(1) 数列 ・数列とその和 ・漸化式と数学的帰納法 ・二項定理

表－2

	数学Ｉ
二次関数	(1) 二次関数とグラフ $y=ax^2$，$y=ax^2+b$，$y=a(x-b)^2$，$y=a(x-b)^2+c$，$y=ax^2+bx+c$
個数の処理	(1) 場合の数 順列，階乗，円順列，重複順列，同じものを含む順列，組合せ
確率	(1) 確率の基本的な法則 事象，和事象の確率，余事象の確率 (2) 独立な試行と確率 試行の独立，独立な試行における確率，反復試行における確率

表－3

	数学Ａ
数と式	(1) 数 整数，有理数，実数，平方根の性質及び式の計算（分母が$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$タイプの有理化），文字を含む式の絶対値（実数への拡張） (2) 式 次数，係数，整式，定数項，単項式，多項式，降べきの順 指数法則　$a^m\times a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$ $a^m\div a^n=a^{m-n}(m>n)$，$a^m\div a^n=1(m=n)$， $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}\ (m<n)$ 式の展開　$(a\pm b)^3$，$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 因数分解　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$， $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ a^3+b^3，a^3-b^3 たすき掛けによる因数分解

	整式の除法　(多項式)÷(多項式)
平面 幾何	(1) 平面図形に関する基本的な定理および用語 垂心，傍心，傍接円，メネラウスの定理とその逆，チェバの定理とその逆，方べきの定理，シムソンの定理，同側内角，余角，補角，軌跡，アポロニウスの円，背理法

これらの表から，中学校数学の内容と重なっているものや発展的な内容がかなりあることがわかり，中学校数学の内容と関連づけて指導することは十分可能であると思われる．しかし，このようなことを行うためには，中学校と高等学校での内容の扱いについて，その異同を更に詳しく調べて上で，どの程度まで扱うことが可能かを考える必要がある．

4　事例

中学校数学と高校Ｉとの関連を意識した事例については

①一次関数
②二次方程式
③二次関数
④数え上げ

の４つを中心に検討し，授業実践を行った．また，数列に関する事例を一つ行った．その事例は，以下の分担で次頁以降に載せておく．

Ⅰ	中学校２年一次関数	野尻
Ⅱ	二次関数（中３～高１）	鈴木
Ⅲ－１	二次方程式（中３～高１）	鈴木
Ⅲ－２	二次方程式（中３～高１）	佐藤
Ⅳ－１	数の処理・数えあげ（中～高１）	山浦
Ⅳ－２	数の処理・数えあげ（中～高１）	佐藤
Ⅴ	中３教科書導入問題	野尻

5　おもな知見

・二次方程式では，作った問題を分類・整理することから解法の仕方が明確になり，また，$b^2-4ac<0$ の場合があることを知ることで，より二次方程式の理解を深めることができる．
・二次関数でも，生徒にとって自然な形で$y=ax^2+c$ まで学習することが可能である．
・数え上げについては，高校の教科書の章末問題レベルでは自力解決するには難しいが，数値を多少易しくすると，解決できる生徒が学級の３分の１程度までに増え，中学校で扱うことが可能である．
・何れも通常の問題づくりやオープンエンドの授業の時以上に，生徒は意欲的に取り組む．特に，数列や数え上げに対しては，生徒にとって取り組みやすいことからか，予想以上に意欲的である．

Ⅰ　中学校数学科の関数指導における新しいカリキュラムの構成について

オープエンドアプローチをもとにして構成させた授業を通して

横浜市立上飯田中学校
野尻　昌昭

【1】　関数指導における新しいカリキュラムの提案

中学校数学科の関数指導について新しいカリキュラムをどのように構成していくかについてここで簡単に述べることにする。つまり１つの単元を構成していくには授業を発展的にそして系統的に構成させていくことにある。

具体的には，第１段階の授業においてオープエンドアプローチをもとにして学習活動を構成していく。そのため生徒一人一人が多様な数学的な見方や考え方で課題を取り組むことができる。そして自らの力で解決を図りながら主体的活動を行うことができる。次に第２段階では，問題づくりの授業を通して生徒に課題の数理的な構造を理解させる。最後の第３段階では，現実世界の事象や場面から数理的な考察を行い，数学的モデルをつくることによって問題づくりの授業を展開する。

【2】　単　元　　　１次関数（導入）

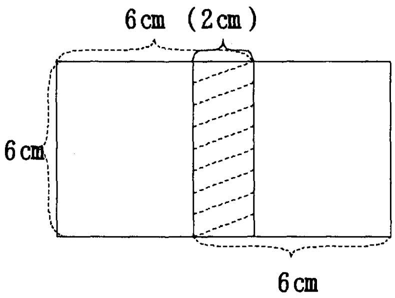
【3】　題　材　　　ともなって変わる量を見つけよう

右の図のように，１辺が６㎝の正方形のＯＨＰシートがある。このシートを横に３分の１ずつ重なるように平行にずらしながら並べていくとする。

このとき，ＯＨＰシートの枚数を１枚，２枚，３枚…重ねていくと，それにともなってどのような量が変わるかを調べよう。

そこでＯＨＰシートの枚数をｘ枚，それにともなって変わる量をｙとしてｘ，ｙの関係式を求めよう。

【図】　シートが２枚のとき



【4】　教材観

ここでの授業ではＯＨＰシートを使って，操作的・実験的な作業を通して解決を図っていきたいと考える。実際に生徒自らＯＨＰシートを重ねながら，操作的な活動を通して「数学的意識」をもって，その事象を数学的な見方や考え方で捉えるようになる。そしてＯＨＰシートの面積や周の長さなどに着目し，シートの枚数にともなって変わる数量との関係を見つけることができる。

【5】　指導計画　　①　１次関数 ―――――――― １５時間

・課題学習（第１段階） ………… １時間

・課題学習（第２段階／第３段階） ………… ４時間

・１次関数のグラフ ………… ３時間

・１次関数のグラフの書き方 ---------- ２時間
・直線の式の求め方 ---------- ２時間
・１次関数の応用 ---------- ３時間

② ２元１次方程式のグラフ ―――――― ５時間
・２元１次方程式のグラフ ---------- ２時間
・連立方程式の解とグラフ ---------- ３時間

【6】 本時のねらい（第１段階の授業）

① １辺が６cmの正方形のＯＨＰシートを１枚，２枚，３枚…と重ねていくと，それにともなって変わる量を見つけることができる。
② ＯＨＰシートの枚数にともなって変わる量を求めることができる。
③ ＯＨＰシートの枚数をｘ枚，それにともなって変わる量をｙとしてｘ，ｙの関係式を求めることができる。
④ 関係式の中から１次関数と呼ばれる式を知ることができる。

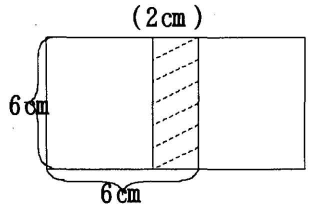
【7】 指導の流れ（第１段階）

学習のねらいと発問	学　習　活　動	評価と配慮事項
1.ともなって変わる 発２つの数量関係 身近な場面や事象からともなって変わる２つの量を考えてみよう。 2.課題の設定と把握	身近な場面や事象からともなって変わる２つの数量について考える。 自分で考えた場面や事象についてどのように変化しているかを発表する。 課題のプリントを見る。プリントに書かれている内容を読んで考える。 ＯＨＰシートを４枚受け取る。	【関心・意欲・態度】 自ら進んで，身近な場面や事象について考えようとする。 課題プリントとシートを配布する。

課　題

右の図のように，１辺の長さが６cmの正方形のＯＨＰシートがある。このシートを横に３分の１ずつ重なるように並べていくとする。このときＯＨＰシートの枚数を１枚，２枚，３枚…と重ねていくと，それにともなってどのような量が変わるかを調べよう。次にシートの枚数をｘ，ともなって変わる量をｙとして，ｘ，ｙの関係式を求めよう。

【図】 シートが２枚



学習のねらいと発問	学　習　活　動	評価と配慮事項
発課題について内容を説明します。分らない点があれば質問して下さい。	実際にＯＨＰシートを重ねながら，どのような状況になるかを考察する。 ＯＨＰシートを重ねると，重なった部分の色が濃くなることに気が付く。	課題の意味を理解し，自分なりに解決の見通しを立てているか。
3.課題解決の計画を立てる	１枚の正方形のＯＨＰシートの中に潜んでいる量について考える。	【知　識・理　解】 図形の中に潜む量を見つけることができる。

学習のねらいと発問	学　習　活　動	評価と配慮事項
4.計画を実行する 発課題プリントをやって下さい。	図形の中に潜んでいる量として，辺の長さや辺の数，角の大きさや角の数，面積や周の長さなどについてを考える。	〈つまずきと対応〉 正方形の中に潜む量の意味が理解きない。 ↓ 図形を見るときの観点について考させる。 正方形の図形の特徴を確認させる。
発プリントに自分で見つけた量について分かりやすく文章で表現し，対応表を作成して下さい。次にｘ，ｙの関係式を分れば作って下さい。もし，無理な場合は構いません。	自分で見つけた量について着目する。そして，ＯＨＰシートの枚数が変わるとそれにともなってその量がどのように変わるかを調べる。 シートの重なった部分に着目し，その中に潜んだ量の変化について調べる。 (例)重なった部分の面積に着目して，その変化を調べる。	【表　現・処　理】 対応表におけるｙについての値を求めることができる。
5.対応表を作成してｘとｙの値を記入する	<table><tr><td>ｘ枚　(枚数)</td><td>1　2　3　4　5　…</td></tr><tr><td>ｙcm²　(面積)</td><td>0　12　24　36　48　…</td></tr></table>	〈つまずきと対応〉 ｙの値を求めることができない。 ↓ 具体的な枚数の図を書かせ，縦と横の長さから面積を求めさせる。
6.ｘ，ｙの関係式を立てる	対応表からｘに対してｙがどのように変化しているかを考えて，ｘ，ｙとの関係式を立てる。 関係式：$y = 12x - 12$	〈つまずきと対応〉 関係式をつくることができない。 ↓ シートの枚数にともなってｙの増加量について考えさせる。
発別の量について同じように考えていって下さい。	同様に他の量について考察して，ｘとｙとの変化について調べる。	
7.練り上げ 発何人かに発表してもらいます。 発同じ量について考えた人は手を上げて下さい。この式を１次関数と呼ぶ。	３人１組のグループの中から指名された数名の生徒が発表する。 同じ量を考えた生徒は挙手する。 発表された関係式を分類する。 １次関数と呼ばれる式を知る。	【表　現・処　理】 関係式を発表することができる。 同じような形の式をいくつかに分類することができる。

【8】　指導の評価

ＯＨＰシートを重ねていくことによって，ともなって変わる量を３つの視点でとらえることができる。つまり全体の部分，重なった部分，そして重なっていない部分の３つである。

① １辺が３㎝のＯＨＰシートを１枚，２枚，３枚…と重ねていくと，それにともなって変わる量を見つけることができた。

② ＯＨＰシートの枚数にともなって変わる量を求めることができた。

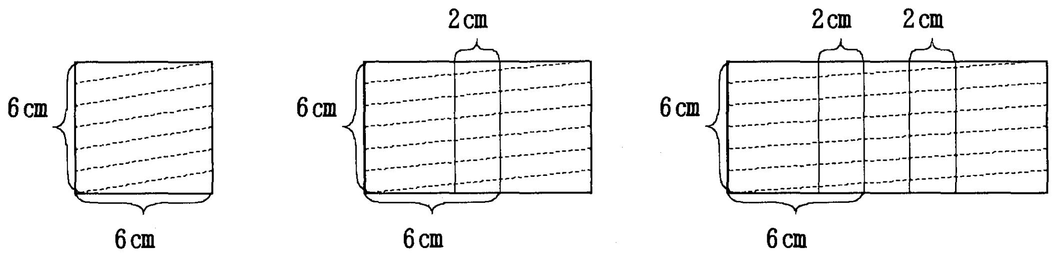
③ ＯＨＰシートの枚数をｘ枚，それにともなって変わる量をｙとして，ｘとｙとの関係式を求めることができた。

④ １次関数と呼ばれる式を知ることができた。

【9】　予想される反応例と考察

指導の評価の中で述べたように，予想される反応例としては３つの視点でとらえることができる。１つは長方形を全体の部分着目した場合，次に重なった部分の長方形に着目した場合，最後に重なっていない部分（分割された部分）に着目した場合が考えられる。

(1)　全体の部分に着目した場合



① ｙを全体の面積

ｘ枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
ｙ㎠(面積)	36	60	84	108	132	…

関係式：ｙ＝24ｘ＋12

② ｙを全体の周の長さ

ｘ枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
ｙ㎝(長さ)	24	32	40	48	56	…

関係式：ｙ＝８ｘ＋16

③ ｙを横の長さ

ｘ枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
ｙ㎝(長さ)	6	10	14	18	22	…

関係式：ｙ＝４ｘ＋２

④ ｙを対角線の本数

ｘ枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
ｙ本(本数)	2	2	2	2	2	…

関係式：ｙ＝２

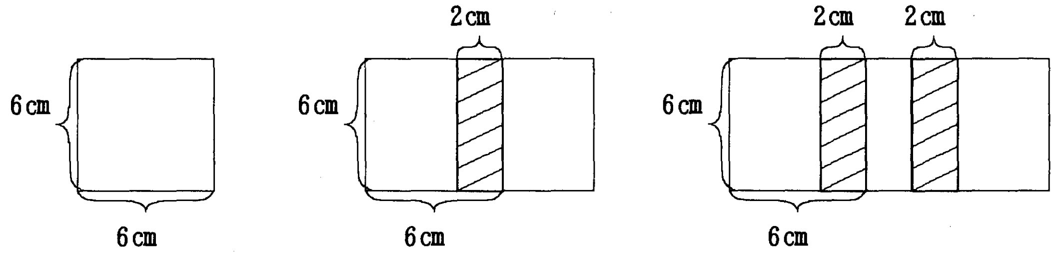
⑤ yを直角の個数

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y個(個数)	4	4	4	4	4	…

関係式：y＝4

全体の部分に着目した場合，生徒の多くは面積や周の長さなどの変化に気がつくだろう。対角線は3年生の扱いなので取り上げないだろう。また，角については気が付きにくいと思う。

(2) 重なった部分に着目した場合



① yを重なった部分の面積

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y c㎡(面積)	0	12	24	36	48	…

関係式：y＝12x－12

② yを重なった部分の周の長さの和

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y㎝(長さ)	0	16	32	48	64	…

関係式：y＝16x－16

③ yを重なった部分の横の長さの和

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y㎝(長さ)	0	2	4	6	8	…

関係式：y＝2x－2

④ yを重なった部分の対角線の本数

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y本(本数)	0	2	4	6	8	…

関係式：y＝2x－2

⑤ yを重なった部分の直角の個数

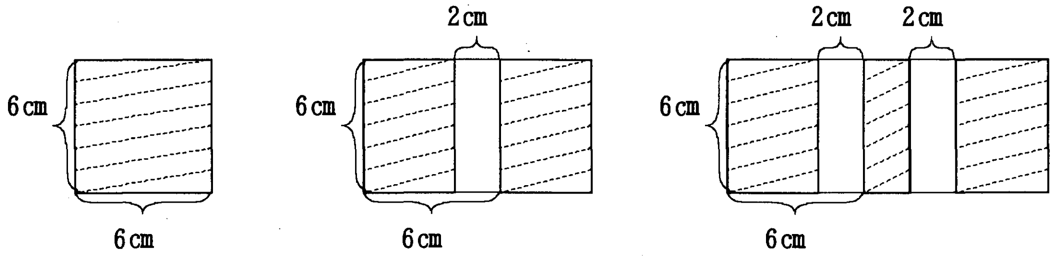
x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y個(個数)	0	4	8	12	16	…

関係式：y＝4x－4

基本的には全体の部分に着目した場合と同じではあるが，OHPシートを使うため生徒の反応としては重なった部分に注目する者が多いのではないかと思う。

この場合，直角の個数についての関係は1次関数になる。

(3) 重なっていない部分に着目した場合



① yを重なっていない部分の面積

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y c㎡(面積)	36	48	60	72	84	…

関係式：y＝12x＋24

② yを重なっていない部分の周の長さ

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y cm(長さ)	24	40	56	72	88	…

関係式：y＝16x＋4

③ yを重なっていない部分の横の長さの和

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y cm(長さ)	12	16	20	24	28	…

関係式：y＝4x＋8

④ yを重なっていない部分の対角線の本数

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y本(本数)	2	4	6	8	10	…

関係式：y＝2x

⑤ yを重なっていない部分の直角の個数

x枚(枚数)	1	2	3	4	5	…
y個(個数)	4	8	12	16	20	…

関係式：y＝4x

実際，生徒にOHPシートを使って並べて考えさせたため，まず重なった部分に注目する傾向にあると思われる。

そこで重なっていない部分に着目するには多少時間がかかるのではないだろうか。

以上，生徒が着目する部分を3つの視点で考えて，予想される生徒の反応例を揚げたが，この他にも表や式で表すことができないものが考えられる。

(例) yを対角線の長さに着目して考えると平方根になってしまい，3年生での扱いになってしまう。

OHPシートを座標軸上に並べて考えると，yをいろいろな座標の点として考えることもできる。

【10】 生徒の反応例

① yは 重なっていない面積

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y (cm²)	36	48	60	72	84	96	

③ x，yの関係式 ： y= $12x+24$

① yは 重なっていた部分の数

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y (枚)	0	1	2	3	4	5	

③ x，yの関係式 ： y= $x-1$

① yは 横の長さ

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y cm	6	10	14	18	22	.26	

③ x，yの関係式 ： y= $4x+2$

① yは 重なった時の横の長さ

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y cm	0	2	4	6	8	10	

③ x，yの関係式 ： y= $2x-2$

① yは 残った部分の面積

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y cm²	36	48	60	72	84	96	…

③ x，yの関係式 ： y= $12x-24$

① yは かさなる面積

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y cm²	0	12	24	36	48	60	

③ x，yの関係式 ： y= $12(x-1)$

① yは OHPの重なる部分と重ならない部分をたす

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y (cm²)	36	60	84	108	132	156	

③ x，yの関係式 ： y= $24x+12$.

① yは たての長さ

② x枚（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
y cm	6	6	6	6	6	6	…

③ x，yの関係式 ： y= 6

【11】 授業の実践

この指導は横浜市立仲尾台中学校の2年生を対象に行った。実際，指導者と生徒との面識がない中で，いかに数学そのものに対して興味・関心を持たせ，学習意欲を喚起することができるかが本授業の重要な鍵であった。そこで生徒ができるだけ興味・関心が持てるように操作的な作業を取り入れて学習展開を図ることにした。

実際の授業では，まず身近な場面や事象からともなって変わる2つの量についての質問を生徒に投げかけて授業を開始した。生徒の反応としては，たとえば『鉛筆の芯の長さ』，『水道の料金』，『ノートの値段』などであった。

このように生徒はともなって変わる量をはっきりと2つの量として捉えた表現をしなかったので補則的に説明を加え，どの量とどの量がともなって変わる数量であるかを明確に捉らえさせた。

たとえば『鉛筆の芯の長さ』については，字を書けば芯の長さは減るという表現では2つの量をはっきり捉えることができない。

そこで次のような内容の例を模造紙に絵で書いて，ともなって変わる2つの量について生徒に再確認させた。

（例） 1.8㍑のペットボトルのジュースについての飲んだ量と残った量の関係について絵を使って説明した。

次に，生徒に課題のプリントと1辺が6㎝のOHPシートを1人4枚ずつ配って課題の内容を説明しながら並べるように指示をした。その際，OHPを使って生徒にシートの並べ方を視覚的に捉らえさせながら，どのような量が変わるかを生徒に質問した。そして実際に生徒自らシートの並べながら，課題解決にむけて取り組んでいった。

予想した通りシートの重なった部分に着目をする生徒が多く，ともなって変わる量としては面積の変化について調べていく生徒が多かった。そして次第に，周の長さや横の長さなどいろいろな量に注目していった。

次に全体の部分に着目する生徒がでてきた。このように生徒の思考過程は部分から全体へと見方が変わり，そして，ともなって変わる量としても面積から長さ，個数など多様な見方や考え方をするようになっていった。

最後に，机間指導をしながら数人の生徒を指名して発表してもらい，1次関数と呼ばれる式について明示した。

【12】 授業の反省

今回の授業では同色のOHPシートを選ばせることをしなかったため，重なった部分へは意識することはできるが，全体の部分や重なっていない部分への意識がしずらかったようである。

また，OHPシートを並べていったとき，生徒はともなって変わる量を捉らえることがはっきりとできなかった。つまり，正方形の中にどのような量が潜んでいるかを理解することができなかったためである。

関数$y=ax^2$の指導

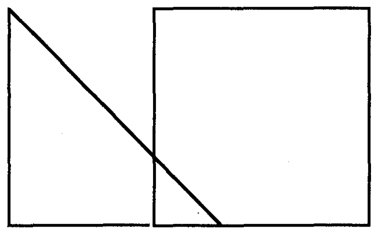
――オープンエンドの問題を用いて――

横浜学院女子中・高等学校　　鈴木　誠

１．オープンエンドの問題とねらい

(1)　オープンエンドの問題

直角を挟む２辺の長さが８cmの直角二等辺三角形を少しずつずらし１辺が８cmの正方形と重ねていきます．このときずらす長さを変えるのに伴って変化する量をいろいろ見つけて書き出しなさい．



(2)　指導のねらい

中学校での関数指導の目標は次の３つにまとめることができる．

(1)　具体的事象の考察にあたって，伴って変わる２つの数量の対応や変化に着目し，関数関係を見いだす能力と態度を養う．

(2)　事象の中でとらえた関数関係を的確に表現したり処理したりする方法を身につけさせるとともにいろいろな関数についての理解を深め関数的な見方・考え方を育てる．

(3)　関数的な見方・考え方をいろいろな事象の考察や問題解決に活用する能力と態度を養う．

この目標のうち(1)，(2)について今回の授業との関連で考えてみることにする．

(1)　関数関係を見いだす

中１から中３どの学年でも関数が扱われるが，そこで用いられる問題のほとんどはあらかじめ関数関係にあるものが与えられていたり，そうでなくてもすぐにどれとどれが関数関係にあるかがわかるものがほとんどである．このような問題だけを扱うだけでは関数関係を見いだす能力は育たないのではないだろうか．このような力を育てるためには実際に具体的な事象を変化させ，生徒自らがその変化の様子を調べることが必要であると考える．そこで今回の授業では，関数関係にあるものがいくつも含まれるような問題（オープンエンドの問題）を設定するとともに実際に事象を変化させて調べることができるように具体物も与えることにした．

(2)　関数関係を表現したり，処理したりする方法を身につける

これまでに学習してきた関数関係を表現する方法としてはいくつか考えられるが主なものとしては表，式，グラフをあげることができる．それぞれの表現方法には

それぞれのよさがある．表で表すと量の変化のようすを調べやすいだろうし，式で表すと計算するときに形式的にできて便利だろうし，グラフならば対応のようすが視覚的にわかるというよさがある．このような関数を表現する方法については，中１から指導されてきている．しかしその指導を反省してみたときに関数の式を求める指導，グラフを描く方法の指導といったように「どのようにしてやるか」というそれぞれの方法で表現するための方法の指導に偏っていたのではないかと感じる．そこで今回の授業では，関数関係を表現する方法として表，式，グラフを見直し，少しでもそれぞれのよさが強調できるような指導であるようにしたい．また，今まで学習してきたこれたの方法がどれだけ生徒たちにとって生きて働く知識となっているかについても見ていきたい．

(3) 指導計画

(1) 関数$y=ax^2$・・・・・・・・・・・・・1時間
(2) 関数$y=ax^2$のグラフと値の変化・・・3時間
(3) 関数$y=ax^2$の変化の割合・・・・・・2時間
(4) 対応と関数・・・・・・・・・・・・・・3時間
(5) 関数の利用・・・・・・・・・・・・・・5時間（本時3/5, 4/5, 5/5時間）

２．予想される反応とその扱い

(1) 予想される反応

予想される反応としては主に線分の長さ，面積，角に関するものに分類できる．

① 線分の長さに関するもの
ア．ＦＢの長さ　イ．ＦＣの長さ　ウ．ＡＥの長さ　エ．ＥＨの長さ
オ．ＨＧの長さ　カ．ＡＨの長さ　など

② 面積に関するもの
ア．△ＢＧＨの面積　イ．台形ＢＨＥＦの面積　ウ．五角形ＡＤＣＧＨの面積
エ．図形全体の面積　など

③ 角に関するもの
ア．∠ＡＨＥの角度　イ．∠ＢＨＥの角度　ウ．角度の総和

(2) 反応の扱い

① 線分の長さに関するもの

線分の長さに関する解答の中には，例えばＡＨとＣＧの長さなどのように変化の様子を調べるとまったく同じになるものがある．このようなものについては発表された段階で生徒たちに「変化の仕方が同じなので，まとめて考えることができるようなものはありませんか」と発問することにより統合的に見させていきたい．また，ＨＧの長さなどのように式で表すと係数に無理数が含まれるような一次関数については，無理数を近似値で表すことでグラフに表現させたい．このような活動をすることによって，一次関数では係数は有理数だけでなく，無理数でもよいのだというように一次関数の世界を広げることができるものと考える．

② 面積に関するもの

面積に関するものについては台形の面積や五角形の面積について意図的に扱っていきたい．これらの面積を式で表現すると $y=ax^2+c$ という形になる．このようなものは中学校で扱われることはないが，表をつくることは今までの学習内容で可能であるし，式についても具体的な場面を通して考えればそれほど困難ではないであろう．また，グラフについてもつくった表をもとにして点をプロットしていけば中学生にも書くことができるものと考える．このような二次関数の内容についてはあまり深入りはしないが，中3で学習するような放物線が他にもあるのだということを認識させたり，中3で学習した関数とこの関数との相違点を考察させることで高等学校での二次関数指導の橋渡しをできるものと考える．

3．授業の実際

(1) 学習指導案

① 生徒の実態

このクラスは習熟度別クラスにおける下位者のクラスである．よって中3全体から見れば，半分より下の生徒たちの集まりであるが，その中でもかなりの能力差が見られる．成績の分布を見ると10段階で5の生徒6名，4の生徒6名，3の生徒4名になっている．このうち $y=ax^2$ で表される関数のグラフを十分に描けない生徒が2名，関数の変域について理解が不十分な生徒が7名いる．このようなことから見ると関数の対応関係や変化のようすを調べることについての理解はまだ十分とはいえない生徒が多いといえる．クラスの授業に臨む雰囲気は前向きであり，ときどき脱線してしまうこともあるがどの生徒も積極的である．このうち特に積極的な生徒が2名おり，クラス全体がこの生徒たちに良い意味で引っ張られて学習を進めていくことも少なくない．

② 指導略案

学習活動	主な発問と予想される反応	指導上の留意点
1．課題提示 10分	1-1．2枚の直角二等辺三角形を少しずつずらして重ねるとき，ずらす長さを変えるとそれに伴ってどのような量が変化しますか． ① 図形全体の面積　② 周囲の長さ ③ 重なりの面積　　など 1-2．重ねる直角二等辺三角形を3枚にしたらどうなるでしょう．（上掲の課題を提示する）	1-1．生徒に透明な直角二等辺三角形を2枚ずつ配る． 1-2．ＯＨＰを用いて実際に操作しながら課題を提示する．
2．解　決 15分	2．それでは，重ねる三角形の枚数を3枚としたときに変化する量，変化しない量にはどのようなものがあるか書き出しましょう． ① 図形全体の面積　② 周囲の長さ ③ 重なりの面積　④ 内角の和 ⑤ 重なっていない部分の面積 など	2-1．この場面では式などで表現できなくてもかまわない． 2-2．色々な量を見つけようとしているか．（a）

3．発　　表 10分	3-1．見つけた量を発表してください．変化する量にはどんなものがありましたか． （反応省略） 3-2．変化しない量にはどんなものがありましたか．（反応省略）	3．ＯＨＰを使い変化する様子を実際に確かめる．
4．調べる 10分（第1時）	4-1．班ごとで見つけた量の変化の様子を表，式，グラフを用いて表してみましょう． 4-2．皆さんがつくった表，式，グラフから，その量の変化にはどんな特徴があるか考えてみましょう．	4-1．模造紙を配り，発表する内容を各班ごとに記入させる． 4-2．各班で表，式，グラフをつくれたところで，その量の変化の特徴を表，式，グラフから調べさせる．（ｂ）
20分	4-3．$y=ax^2$の変化のしかたと比べるとどのような点が同じでどのような点が違うかを考えてみましょう．	4-3．$y=ax^2$の変化のしかたと同じところ，違うところはどこかを調べるが，手のつかない班に対してはグラフの形，頂点，式などはどうかについて調べる示唆を与える．（ｃ）
5．発表とまとめ 25分（第2時）	5-1．調べたことについて変化のしかたの特徴，$y=ax^2$と比べたときに同じ点，違う点について発表してもらいましょう． 5-2．各二次関数の特徴についてまとめる．	5-1．表，式，グラフをもとにして変化の特徴を発表することができるか．（ｄ） 5-2．特に$y=ax^2+b$については$y=ax^2$と対比させてまとめておく．
6．まとめと練習 （第3時）	6．前時のまとめの続き及び$y=ax^2+b$のグラフを書く練習．	

(2)　問題把握と問題解決

問題把握と解決の場面では生徒に1枚ずつ具体物（透明な直角二等辺三角形）を与え考えさせた．しかし，実際にはほとんどの生徒は具体物を使っては問題を解決していないようであり，あらかじめ配ったワークシートに書かれた図を見ながら解決していた．どの生徒も変化するもの，しないものを合計で平均11個見つけていた．解答の種類は線分の長さに関するもの，面積に関するもの，角度に関するもの，変化の様子について説明しているものだった．問題把握と解決で約20分の時間を必要とした．

(3)　発表されたものの扱い

発表の場面ではまず自由に発表させ，その後であらかじめ机間指導の中で記録し

ておいた反応のうち発表されなかったものを意図的に発表させた．発表されたものは合計で13個でその内訳は，面積に関するもの３個，線分の長さに関するもの９個，角に関するもの１個であった．発表の際には重ねる長さが増すと，それは増えるのか減るのかを確認しながら発表させた．そして，発表が終わったところで増え方や減り方がまったく同じになりそうなものをまとめさせた．このときにどうして変化の様子が同じになるのかを具体物を実際に動かすことにより確認をした．発表からここまでで25分を必要とし，問題把握からここまでで丁度１時間目が終了した．２時間目では発表されたものの中から面積に関するもの，線分の長さに関するものからそれぞれ１つずつ各生徒に選ばせ，選んだものについて変化の様子を表，式，グラフを用いて調べる活動を行った．そして調べたものについて表，式，グラフから変域や増え方（減り方）の特徴について発表させた．そして特に
$y=ax^2+c$で表される関数のグラフや式の特徴を$y=ax^2$との関連で取り上げた．このような活動で第２時間目は終了した．

４．授業の考察

(1)　問題把握と問題解決

問題の把握の場面については，

問題把握の場面ではＯＨＰで実際に具体物を動かしながら問題の提示を行ったことがより早く正確に問題の場面を理解することにつながったように思われる．しかし，授業の実際でも述べたように問題解決の場面においてはほとんどの生徒があらかじめ用意した具体物を使って解決はしていなかった．これはワークシートに図が書かれていたことが大きく影響した結果であると考えられる．また，はじめに予想したような解答は生徒たちが問題を解決する中でほとんど発見されたこと，そしてどの生徒も解答として10個以上を見つけていたことから考えると，この問題は生徒の実態に合った問題であったものと考える．

(2)　$y=ax^2+c$の扱い

この形の式で表されるようなもの，すなわち台形の面積や五角形の面積について表，式，グラフを調べた生徒は15名中８名であった．この生徒の書いたグラフを見るとどれも上に凸の放物線を書いており，このような結果が得られたことから考えると
$y=ax^2+c$で表されるグラフが放物線となることは理解できる内容であると考えられる．授業では，この問題での$y=ax^2+c$のグラフ（xの変域が$0 \leqq x \leqq 8$のグラフ）についての考察から一般の$y=ax^2+c$のグラフの特徴の考察へという方向で進めたが，このときの変域の押さえが不十分なようであった．このことは生徒の中に
$y=ax^2+c$の特徴として次に示すようなことをワークシートに記述していた生徒がいたことから推測される．

$y=-1/2x^2+32$（台形の面積）のグラフは負のグラフがなく，常に一方，正の方にしかない．

このようなことから授業の中で変域をしっかりと押さえることで，台形の面積の場合のグラフは$y=-1/2x^2+32$の一部分だということを理解させ，その上でxの変域を数全体としたときに$y=-1/2x^2+32$のグラフがどのようになり，またその特徴としてどのようなものをあげることができるのかを考えさせる必要があったものと考えられる．

Ⅲ－１　二次方程式（中３～高１）

二次方程式をつくろう

横浜学院女子中学・高等学校　　鈴木　誠

１．原題とねらい

(1)　原題

> 二次方程式$ax^2+bx+c=0$のa，b，cをいろいろと変えて二次方程式をつくってみましょう．

(2)　指導のねらい

① 原題設定のねらい

(ｱ)　この原題で問題づくりに取り組ませることでどの生徒も授業に参加できると考えた．また，生徒たちのつくった問題により二次方程式の単元で扱われる計算問題のうちの大部分の種類を扱うことができ，二次方程式のまとめで扱うことが適切であると考えこの原題を設定することにした．

(ｲ)　この原題で問題づくりをさせると生徒たちはa，b，cにいろいろな数を入れて問題をつくることになる．その結果として$x^2-3=0$，$2x^2+3x=0$，$x^2+2x-1=0$などいろいろな種類の二次方程式がつくられる．このような活動を通して生徒たちは，二次方程式にはいろいろとあるが，それらはすべて$ax^2+bx+c=0$の形に統合することができるのだという見方をさせる機会を与えることができると考え，この原題を設定することにした．

② 問題づくりのねらい

(ｱ)　二次方程式の単元では，$ax^2+c=0$，$ax^2+bx=0$，$ax^2+bx+c=0$のような種類の問題が扱われる．このうち前者２つは，解の公式を使うより平方根の考えや因数分解をして解を求めた方が解を求めるだけならば簡単なのは明らかである．しかし，生徒の中にはこのような方程式にも解の公式を適用し解を求めるものもいる．これはそれぞれの解法については知っているが，それを選択して使う場面が少ないこと，また，それぞれの解法がどのような種類の方程式に有用なのかわからないことに原因するのではないだろうか．そこで，ここで用いるような原題で問題づくりをさせれば，その中には様々な種類の問題が容易につくられることが予想されるので，そのつくられた問題を分類し，解決することを通して，どの種

類の方程式にどの解法が有用なのかを生徒自らに感じさせることができると考えた．

(イ)　普通に教科書の問題を解く限りは解が存在しない（実数の範囲で）ような問題が出てくることはない．しかし，生徒たちに問題をつくらせれば解が存在しないようなもの，重解となるものが自然につくられる．そこで，このようなことを利用して解の個数と方程式の係数の関係に目を向けさせ，高等学校での方程式指導の橋渡し的な扱いができると考えた．ただし，判別式というかたちできちんと指導することまではこの授業では考えていない．

(3)　指導計画

この原題で問題づくりを行うことを考えた場合，指導の導入かまとめで扱うことが適当であろう．導入場面で扱うとすれば，つくられた問題をもとにして，この単元で扱われる内容を指導していくということが考えられる．今回は導入部分でのこのような扱いではなく，二次方程式の解法について一通り学習した後のまとめとして扱うことにした．問題づくりと発表，つくられた問題の分類で1時間，分類されたものの吟味と解の存在しないような二次方程式について二次方程式の係数との観点からの考察で1時間，合計2時間で扱うことにする．

2．予想される反応とその扱い

(1)　予想される反応

生徒たちがつくることが予想される問題を中学校第3学年での学習内容を考慮し，二次方程式の解の個数と解法との観点からまとめると次表のようになる．

表1　予想される問題

解の個数＼解法	解の公式	因数分解	平方根の考え
2個	$ax^2+bx+c=0$ ($x^2+3x-1=0$ など)	$ax^2+bx+c=0$ ($x^2+5x+6=0$ など) $ax^2+bx=0$	$ax^2+c=0$
1個	$ax^2+bx+c=0$ ($4x^2-12x+9=0$ など)	$ax^2+bx+c=0$ ($x^2+4x+4=0$ など)	$ax^2=0$
0個	$ax^2+bx+c=0$		$ax^2+c=0$

この表については議論のあるところであろう．特に，因数分解の列に含まれている $ax^2+bx+c=0$ については，生徒によって解の公式で解決する方が楽だという場合もあれば，逆に因数分解で解決する方が楽だという生徒もいるであろう．ここでは，x^2+5x+6 のような簡単な因数分解にはある程度習熟しているものとして因数分解による解法の列にも $ax^2+bx+c=0$ を含めることにした．その他，この表の中に含まれないようなものとしては，$2x^2+2x+1=0$ のように係数に無理数が含まれるようなものも反応としては予想される．

(2) 反応の扱い

授業の中では，問題づくりだからこそ出てくるようなものについては特に意図的に取り上げてみたい．以下にあげる2つの反応はそのようなものである．

① 解が存在しないもの

通常授業で扱われる二次方程式ではいつも実数解が存在する．授業の中で二次方程式を解いたときに計算間違いでルートの中が負の数になってしまったとき，答えではルートの中を絶対値が同じ正の数に直して答えを書く生徒がいることから見ても，生徒たちもこのことを暗黙のうちに理解しているようである．今，学習している二次方程式が二次方程式のすべてであるというこのような見方ではなく，二次方程式というものの一部分を学習しているのだという見方をさせることが，今後の学習に対しての見通しを与えたり，学習に対する興味を喚起する上で重要なことだと考える．この授業では，生徒たちがつくった問題の中から解が存在しないようなものを取り上げることによってルートの中が負の数になるような場合もあるということに気づかせ，今まで学んできた二次方程式はルートの中が負の数にならないようなものだったのだということを感じさせたい．さらに，解が存在しないような二次方程式の係数に目を向けさせ，解が存在したり，しなかったりすることと二次方程式の係数との間にはどのような関係があるのかについても考えさせたい．この段階では，高等学校で扱うように解の判別ということまでできなくても，解と二次方程式の係数との関係に目を向けさせること自体が重要であり，このような活動を行っておくことによって高等学校で扱われる内容にうまくつなげられるものと考える．

② 係数に無理数が含まれるもの

係数に無理数が含まれるような二次方程式は中学校で扱われることはないし高等学校でも扱うことがない．しかしこのような二次方程式が存在することは事実である．あまり深入りすることは避けたいが，このようなものも二次方程式なのだという認識を持たせることは数学の世界の広がりや，発展性を感じさせる上で有意義であると考える．生徒たちでも解こうと思えば解けるようなもの，例えば $x^2-3x-1=0$ は

解の公式を使って解かせてみたい．また，解けないようなもの，例えば

$x^2+x-2=0$のようなものは$2 \fallingdotseq 1.4$として電卓などを用いて近似解を求めるなどの活動をさせることもできるだろう．しかしこのような扱いをすることの前提としては，生徒たちにこのような方程式を解いてみたいという意欲が欠かせないことをつけ加えておく．

①，②で取り上げたような反応は問題づくりだからこそ出てくるような反応であったが次にあげる2つは問題づくりをしなくても教科書などに出てくるようなものである．しかし，このようなものも問題づくりだからこそ扱うことができる扱い方が存在する．

③　係数が小数・分数であるもの

このような問題の教科書での扱いを見ると章末の練習問題に単独で1，2題扱われているだけであり，また扱われるのは$x^2+x+1/4=0$のように因数分解をすれば解けるようなものが多い．このような扱いだけでは単に解法の練習にすぎずこのような問題を扱うことの意味が少ないのではないだろうか．重要なことは，例えば

$1/4x^2+x-1/2=0$のような一見すると今まで習った解法では解けそうもない問題に出会ったときにどのように対処していくのかを考えさせることにある．言い換えれば，係数が小数や分数であるような二次方程式は何倍かすればすべて係数が整数である二次方程式と同じにすることができるという見方をできることが重要だと考える．問題づくりを行った場合つくられた問題を分類させると係数の種類により二次方程式を分類することが予想される．そこで「係数が小数や分数のものを他のもの（係数が整数のもの）と同じにみるにはどうすればよいだろう」と発問すれば，両辺を何倍かすれば係数を整数にできるということが自然に出てくると考えられる．このような扱いを通して係数が小数や分数になる二次方程式を係数が整数になる二次方程式と統合的に見させていきたい．

④　解が約分できるもの

二次方程式$3x^2-10x-3=0$のように解を求めると約分できるようなものは生徒たちも解決できる．しかし，そのような二次方程式が持つ特徴については中学校で扱われることは少ない．今回の授業ではこのような問題について，時間的に余裕があれば次のようにして扱いたい．まず解を求めると約分できたものだけを集める．そして「これらの二次方程式に共通に見られる特徴は何ですか」と発問すれば

$ax^2+bx+c=0$のbがすべて偶数であるということに気がつくのではないだろうか．このような活動を通して二次方程式の係数と解との関係に目を向けさせ，高等学校での二次方程式指導への橋渡し的な扱いができると考える．係数bが偶数の場合

の解の公式の指導については生徒の実態に応じて扱っていきたい.

3．授業の実際

(1)　学習指導案

次のような指導案で授業を行うことにした．ここに示す指導案は問題づくりを取り入れた授業の中で，分類，解決の部分を中心に記述したものである.

おもな発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
1．原題の提示　10分	
2．問題づくり　10分	
3．つくった問題の発表 3-1. つくった問題を発表してください. 発表されることが予想されるような問題としては表1に示してあるので参照. 15分	3-1. 表1であげたそれぞれの分類のものが含まれるように発表させる．特に解の存在しないようなものは意図的に発表させる. 3-2. 発表させるときには式の形で分類しながら発表させる. 3-3. 係数が小数や分数のものが発表されたときには，この段階で他の係数が整数の二次方程式と統合的に見るように考えさせる.
4．つくった問題を分類する観点をみつける 4-1. 発表された二次方程式をいろいろな見方をして似たもので集める方法をいろいろと考えましょう. ①　係数がすべて偶数　②　係数がすべて奇数 ③　aが偶数　④　bが偶数　⑤　cが偶数 ⑥　解が存在しない（実数の範囲で） ⑦　解法　⑧　係数に無理数が含まれている ⑨　解が約分できる　など 4-2. どのようなものを似たものとして集めたらよいか発表してもらいましょう. （4-1. を参照）　10分（第1時）	4-1. 分類の観点だけをまず発表させるようにする. 4-2. ⑥～⑧が出てこない場合には5. の活動の中で意図的に取り上げていく.
5．分類の観点を吟味する 5-1. 今あげてもらったような似たものを実際に集めてみましょう. 5-2. 係数がすべて偶数である二次方程式を集めてみましょう.	5-1. どの分類の観点から扱うかは，生徒の希望にまかせたい．ただし，教師側では各分類の観点の関連を考えておく.

おもな発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
5-3. 今集めた係数がすべて偶数であるような二次方程式に共通に成り立ちそうな性質を方程式を解くことを通して見つけてみましょう. 5-4. どのような特徴がありそうですか. ① 解が約分できる　② 解がないものがある ③ 解く前に式を偶数で割ることで式を簡単にすることができる. <例> $2x^2+6x+4=0$ ならば $x^2+3x+2=0$ とできる 5-5. 今あげてくれた特徴は係数がすべて偶数の二次方程式であればいつでも成り立ちそうですか. ① 成り立つ　② 成り立たない 5-6. 他にこの特徴が成り立つような二次方程式にはどのようなものがありますか. ・例えば，5-5. でいつでも成り立つとは限らないものとして「解が存在しない」というものが生徒からあげられた場合，ここでは解が存在しないような二次方程式を集める活動をすることになる. 5-7. 今集めた二次方程式の係数にはどのような特徴がありそうですか. <例>解が存在しない二次方程式を集めた場合 ① $ax^2+c=0$ では $ac>0$ ② $ax^2+c=0$ か $ax^2+bx+c=0$ しかない ③ $b^2-4ac<0$ 5-8. 以下，これまでに示してきたように各分類の観点について関連づけられるものは関連づけて扱い，関連づけられないものは独立に扱うことで，分類の観点について吟味していく．そして，分類の観点ごとに二次方程式の特徴をまとめる. (以下の展開については詳細を省略) 45分（第2時）	5-2. 係数がすべて偶数であるものを表1で示した式の形ごとに見つけだすようにする. 5-3. 解決して行く中で気がついたことをメモさせておく. 5-4. ①や②のような反応が出てきたときには，係数がすべて偶数ではなくてもこのような特徴をもつものがないか考えさせる．このような活動により4．で出てきた分類の観点を関連づける. 5-5. いつでも成り立つものについては係数がすべて偶数である二次方程式の特徴としてまとめる. 5-6. 成り立たないものは反例をあげさせる．そして，係数がすべて偶数であるものにこだわらず，その特徴が成り立つような二次方程式を集めさせる. 5-7. 係数についての特徴が見つけられないようであれば，式の形で3つのタイプに分類させ，それぞれのタイプの中で考えさせるようにする.

(2)　原題の提示及び問題づくり

原題の提示及び問題づくりの場面に関しては，時間的には概ね計画通り実施することができた．生徒がつくった問題は平均で1人あたり約7個であった．つくられた問題の種類としては，表1で示したような問題がすべてつくられていた．また，係数の種類からつくられた問題を見ると，係数がすべて整数であるような問題に加えて，小数・分数を含むものや無理数を含むものがつくられた．このうち係数に小数や分数を含むようなものについては「どのようにすると他の係数が整数の二次方程式と同じと

見ることができるでしょう」と発問をし，その結果何倍かすればよいということになり，統合的に扱うことができた．

(3)　つくった問題を分類する観点を見つける

計画では観点を見つけることとその発表で10分程度を予定していたが，実際には約20分を必要とした．見つけた観点は平均で１人あたり５個であった．生徒たちが見つけた分類の観点としては，次のようなものがあった．

①　係数に無理数が含まれる　②　解の公式で解く　③　係数がすべて偶数
④　係数が公約数を持つ　⑤　x^2の係数が１　⑥　因数分解で解ける
⑦　因数分解で解けない　⑧　答えが同じになる　⑨　ｂが偶数である
⑩　ａが偶数である　⑪　係数に負の数が含まれる

(4)　分類の観点の吟味

計画ではこの場面で45分を予定していたが，実際には90分かかってしまった．吟味の方法のうち，最初に扱う分類は生徒に決めさせる計画だったが，実際には最初に扱うものは「③　係数がすべて偶数」とすることを教師側で決めた．そして③の観点に適するようなものを集める活動をさせた．次にここで集めたものを解決しながらこの観点に適するような二次方程式のもつ特徴について考えさせた．その結果，③の観点に適するような二次方程式の特徴として，「必ず解が約分できる」，「解がないものがある」，「式をもっと簡単にすることができる」が生徒から出された．この３つについては常に成り立つ特徴かを確認する活動を行ったところ，「必ず解が約分できる」，「式をもっと簡単にすることができる」が常に成り立ち，「解がないものがある」が成り立たない場合もあるということになった．「式をもっと簡単にすることができる」という特徴については「係数がすべて偶数でなければ成り立たない特徴だろうか」と発問し，「④　係数が公約数を持つ」という分類の観点と関連づけた．「必ず解が約分できる」という特徴についても同様の扱いをし，「④　係数が公約数を持つ」，「⑨　ｂが偶数である」と関連づけた．「解がないものがある」という特徴に関しては，解がないとはルートの中が負の数になってしまうものということを確認した後，「係数がすべて偶数であるもの以外に解がない二次方程式はないだろうか」と発問し，そのような二次方程式を式のタイプ（$ax^2+c=0$，$ax^2+bx=0$，$ax^2+bx+c=0$）ごとに集める活動を行った．この活動の中で$ax^2+bx=0$タイプの二次方程式は必ず因数分解ができるので，解が必ずあることを生徒たちは発見した．そして，$ax^2+c=0$，$ax^2+bx+c=0$の順番で各式のタイプごとに解がないような二次方程式の係数にはどのような特徴があるかについて考えさせた．$ax^2+c=0$タイプで解がないような二次方程式の特徴として，「ｃが正」のよう

に特殊な場合だけについて言っている生徒が何人かいたが，これについては反例を示すことで常に言えるような特徴ではないことを示した．このタイプの式については，ａが正でｃも正，ａが負でｃも負の場合には解がないということを生徒たちは発見することができた．この２つの特徴をまとめて表現することは３名の生徒を除いてできなかった．そこで，授業では$ac>0$と表現できた生徒の反応を取り上げ，確かにこの式でまとめられるということを確認した．$ax^2+bx+c=0$タイプの解がない二次方程式については，どの生徒も容易には特徴を見つけることはできなかった．そこで解の公式と対比させながら「解がないとはどのようになることか」と発問し，誘導的ではあったが$b^2-4ac<0$ということを特徴として取り上げ，解のないものがこの特徴をもつことをいくつかの二次方程式で確かめた．

このような活動の他に，「①　係数に無理数が含まれる」を扱った．これについてもまずこのような二次方程式を集め，その後で集めた二次方程式を自由に解かせてみた．しかし，実際には解決することができなかったので，平方根を近似値で表し，近似解を求めるという扱いにとどめた．

４．授業の評価

(1)　原題の提示及び問題づくり

原題の提示から問題づくり，つくった問題の発表までは30分程の時間で行うことが適当である．問題づくり自体はどの生徒も５個以上問題（資料１参照）をつくっていたことから見て難しくはなかったようである．問題をつくるときには，解まで見通したり，二次方程式を分類する事まで考えて問題をつくっているような生徒はおらず，ａ，ｂ，ｃの値をいろいろと変えて問題をつくっていた．実際に問題をつくる場面ではｂやｃに０が入るような二次方程式を生徒たちはなかなかつくらないので，様子を見た上で何らかの指示を与えることが必要かもしれない．発表させる際に３つの式のタイプで分類をしながら発表させたこと，係数に小数や分数を含むようなものは，何倍かすることで係数が整数であるものと統合的に見ることができるというような扱いをこの場面で行ったことは，この後で行った分類の観点を見つけ，その観点について吟味する活動の煩雑さを軽減する上で有効な活動であったと考える．

(2)　つくった問題を分類する観点をみつける

分類の観点を見つける場面では，係数だけに着目して見つける生徒と二次方程式を解きながら見つける生徒がいた．解法で分類するという観点や答えが同じになるもので分類するという観点をあげる生徒はすべて二次方程式を解きながら観点を見つけている生徒であったことがワークシートからわかった．このようなことから考えると，

分類の観点として解法についてや答えについてから見つけたようなものを必要とする場合には，二次方程式を解決する活動を行いながら分類の観点を考えさせた方が良いということが言えるであろう．

⑶　分類の観点の吟味

分類の観点を吟味する活動は，①　観点にあうものを集める活動，②　集めた方程式を解くことで特徴を見つける活動，③　見つけた特徴がいつでも成り立つかを吟味し，他の観点と関連づける活動に分けられる．このうち③の活動が特に重要であり，このような活動を行うことで，二次方程式の係数と得られる解の関係に目を向けさせることができると考える．今回の授業では，係数がすべて偶数であるものの特徴の1つとして，解が約分できるという特徴を生徒が見つけたが，ここで活動を終えてしまうのではなく，この特徴が成り立つ他の二次方程式はないだろうかと考えることで，係数が公約数を持てばよいという途中経過を経て最終的にはｂが偶数であればよいということになった．このような活動を行うことで，はじめて生徒たちは係数と解が約分できることとを関連づけてみることができたように思われる．観点を吟味する際に重要なことは，関連づけて扱えそうな観点をあらかじめ考えておくことである．このようなことをあらかじめ考え，実際に授業で関連づけて扱うことで生徒の見つけた観点を評価することになるとともに，違うもののように見える観点をある視点から統合的に見させたりする機会が与えられるものと考える．授業の中で発表された分類の観点については，今回の授業では，すべて何らかの形で取り扱うことにしてしまったが，時間的に余裕がない場合には，レポートさせたりする扱い方も考えられるであろう．

今回の授業については改善することが必要な部分はまだまだ多いが，生徒たちの感想の中に「二次方程式にはいろいろな種類のものがあることがわかった」や「種類によって性質に特徴があることがわかった」というようなものが見られることから考えると，ただ二次方程式の問題をつくるだけではなく，つくった問題を分類したり，特徴を見つけたりすることで，生徒たちの二次方程式の世界を広げ，今後の学習に対する見通しを与えうる活動であったと考える．

資料１　生徒がつくった問題の一部

(1) $ax^2+bx+c=0$ 型

① $x^2-3x-4=0$　② $3x^2+5x-2=0$　③ $2x^2-3x+8=0$

④ $4x^2-2x+6=0$　⑤ $3x^2+10x-22=0$　⑥ $x^2-4x+22=0$

⑦ $x^2-12x+36=0$　⑧ $x^2+10x+25=0$　⑨ $6x^2-12x+4=0$

⑩ $8x^2+2x+16=0$　⑪ $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}=0$　⑫ $0.5x^2+x-1=0$

⑬ $0.6x^2+0.2x+0.4=0$　⑭ $\sqrt{3}x^2+x-2=0$

⑮ $x^2+\sqrt{2}x+1=0$　　など

(2) $ax^2+bx=0$ 型

① $4x^2+2x^2=0$　② $3x^2+5x=0$　③ $5x^2+7x=0$

④ $x^2-9x=0$　⑤ $\frac{1}{5}x^2-5x=0$　　など

(3) $ax^2+c=0$ 型

① $x^2-9999=0$　② $x^2-169=0$　③ $x^2+9=0$

④ $25x^2-49=0$　⑤ $0.9x^2-0.3=0$　⑥ $x^2-3=0$

⑦ $555x^2-55=0$　⑧ $3x^2+27=0$　⑨ $6x^2=0$　　など

Ⅲ－２　二次方程式での問題づくり

相模原市立大野南中学校
佐　藤　孝　彦

Ⅲ－１で二次方程式での問題づくりについての事例をあげた．ここでも，二次方程式での問題づくりを取り上げるが，学習指導案のみとする．

1　学習指導案（一部省略）

(1) 日　時　平成７年９月22日（金）第６校時(2:05～2:50：短縮45分)

(2) 場　所　ＬＬ教室（Ｄ棟１階東側）

(3) 学　級　第３学年８組（男子17名，女子20名，計37名）

(7) 指導観　二次方程式の学習は，方程式と解の意味，文字式，移項，因数分解、平方根の計算等を含んでおり，中学校数学における「数と式」の領域の集大成の場ととらえる．

さて，二次方程式の解き方は，大きく分けて以下の３つになろう。

①等式の変形により，$x^2=$■ の形にして平方根を求める方法

②平方完成の形から解の公式を導き出し，それを用いて求める方法

③因数分解を用いて求める方法

このうち①は，平方根を活用することで，解を簡潔に表現することができる”よさ”があり，②はどんな二次方程式（中学校段階においては $b^2-4ac\geqq 0$） でも確実に解くことができる”よさ”があり，③は解を簡潔明瞭に求めることができる”よさ”がある．本単元では，こうした代数的な処理の”よさ”を十分に感得させたい．そして．二次方程式を利用して，問題解決に進んで活用しようとする態度ももたせたい．

ところで、本単元の二次方程式や二次関数は，数学Ｉでも学習する。学校５日制の実施やカリキュラムの再構成という立場からも，中学校ではどこまで指導すべきか，またオープンエンドアプローチ等の指導法により、どこまでが指導可能なのかも念頭に置き，指導したい．

(8) 指導計画

二次方程式とその解き方・・・・・４時間
二次方程式の解の公式・・・・・・２時間
二次方程式と因数分解・・・・・・２時間
二次方程式の解き方・・・・・・・２時間（本時１／２）
二次方程式の利用・・・・・・・・３時間

(9) 本時の指導

①目　標　・二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を教科書等の与えられた・作られた問題を解くのではなく，自ら a，b，c に適当な数を入れてできた新しい問題を、既習の解き方を用いて解くことができる．

・a，b，c に着目して二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を分類しようとする．

・（どのような場合に、どの解き方で解けばよいかを判断することができる．）

②展　開

準備物：ワークシート，画用紙（３分の１大）生徒数＋α，マジック、電卓

学習内容	学習活動と予想される生徒の反応 C：生徒　TS：佐藤　TK：金指　T：限定せず	指導上の留意点等（★評価）
①二次方程式の一般式の確認	TS　二次方程式は一般にどんな式で表すことができましたか. C1　$ax^2+bx+c=0$	TS　C1を受けてホワイトボードに一般式を書く. TK　TSの発問に対する生徒の反応を観察する。
②二次方程式をつくる	TS　今日は，この二次方程式$ax^2+bx+c=0$のa，b，cに着目し，問題をつくってほしいと思います. そして，つくった問題を仲間分けした後に，つくった問題を解き，再度，解法をもとに仲間分けできたらと思っています. 　まず、a，b，cに着目し，次の約束で問題をつくりましょう。 問題をつくる上での約束 ・$a>0$ ・b，cは負の数でも０でもよい ・$○x^2+△x+□=0$　の形にする C2　（問題をつくる.）	・上位生徒は，解き方を意識して問題を作ったり，解から式をつくるという「逆向きの考え」を使うと予想される. そのように見通しを立てることも大切であり，尊重したいが，ここでは，全生徒が同じ土俵で取り組めるよう，深く考えずに問題をつくらせたい. ・$a=0$では二次方程式にはならないことと$a<0$でも両辺を－１倍すればよいことを確認したい. ・プリントに数問つくらせ，そのうちの１問を画用紙に書かせる. T　後の発表でいろいろなタイプが出るよう，周囲の状況を見ながら助言する. TK　問題をつくろうとしない，つくれない生徒に対して，今まで学習した式を思い出させ，1つでも良いからつくるよう促す. ★関・意・態：意欲的に問題をつくっているか
③問題を発表する（分類）	TS　つくった問題を，１人１問ずつ発表して下さい. C　（ホワイトボードに貼っていく） TS　この分け方で良いでしょうか. 移動させた方がよいものはありませんか. C　（分類を修正する）	・一番最初に貼った生徒の問題と同じタイプの問題の生徒は，その下に貼っていくよう指示する. ・分類の観点も言わせるようにする. TK　自分のが該当するかどうかわからず貼りにいけない生徒に対して，つくった問題のa，b，cの特徴を言わせ，仲間を捜すよう励ます. TK　生徒の問題にないタイプの問題を画用紙に書いておき，状況によっては生徒の立場を演じる. ★関・意・態：自ら進んで発表しようとしているか ・分類の修正にはあまりこだわらず，問題を解く場面に移りたい. ★考え方：観点をもって分類しようとしているか
④問題を解く	TS　もしこれで良ければ，これらの問題を分担して解いてみましょう. もちろん，自分がつくった問題は必ず解くようにしましょう. C　（つくった問題を解く）	・班ごとに何問かずつほぼ均等に分担を与える.（生徒の興味等の状況によっては分担は行わず，自由に取り組ませることもあり得る） T　できるだけ簡単に解ける方法で処理するよう助言する. ・解きながら，再度つくった問題の分類を考えさせたい. なお，下位生徒には、解くことの習熟を重視し，分類にこだわらなくてもよい. ★関・意・態：意欲的に取り組んでいるか ★表現・処理：問題に対して適した解き方でできているか. TS　進んでいる生徒等に対して，自分の分類をより良いものにするよう助言する.
⑤再分類する	TS　解いていく中で気づいたことを発表して下さい.	

Ⅳ－１　数処理・数えあげ（中～高１）

横浜市立奈良中学校
山浦和雄

１．文部省では，平成元年３月新学習指導要領の告示を行う。
基本的なねらいとして

(ｱ)自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成。
(ｲ)基礎的・基本的な内容の徹底と個性を生かす教育の充実。
を示した。

上記のことを受け，平成４年２月，学校５日制調査研究協力者会議でのまとめにおいて，教育の基本的なあり方を見直すための視点として

(ｱ)学力を単なる知識や技能の量の問題として捉えるのではなく，その後の学習や生活に生きて働く資質や能力との関連において捉える必要があるということ。
(ｲ)自らの積極的な意志により，自分に適した望ましい学習の仕方を身につけ，身につけたことをさらに深化・発展させる可能性をもつ学習を身につけさせること。
の２点があげられている。

２．今回の問題開発では「新しい学力観」に基づいた授業の改善に重点を置き，考えることとする。

今までの，知識や技能を共通に身につけさせることを重点にした指導を，生徒自らが考え，主体的に判断し，表現できる資質や能力の育成を重視する学習への転換を考える。

↓

教師の指導に対する転換
・達成目標の設定（～することができる）
・向上目標の設定（～しようとする）

↓

学習形態の工夫として
・体験学習
・問題解決学習
・操作や実験を取り入れた学習

↓

教師が生徒一人一人を理解し，生徒の主体的な学習を育てることができるようにする。

↓

生徒の学習観の転換

・主体的な学習の仕方を身につけた生徒を育てる。
　主体的に学ぶ生徒の姿として
　・自主的に学習する。
　・意欲と持続性をもって学習する。
　・既習の内容を生かして学習している。
　・積極的に自分の意見を述べ，他の考えを吸収しようとして学習している。

3．個性を生かす教育として

(1) 個を生かし，個を育てる。すなわち，生徒一人一人の持っている可能性を最大限に引き出すこと。

(2) 物の見方や考え方は，それぞれの生徒の個性により，また，それぞれの生徒の知識・技能や経験により多種多様である。この多様性を大切にし，生徒一人一人の能力を伸ばすことが個性を生かす教育につながる。

(3) 個性を生かす指導の場を考える

(ア) 通常の学習において。
(イ) 各領域の内容を統合したり，日常事象に関連付けたりし，適切な課題を設けて，指導計画に適切に位置付けて実施する。
(ウ) 選択教科として生徒の特性等に応じ多様な学習活動が展開できるように，課題学習，作業，実験，調査などの学習活動を学校において適切に工夫して取り扱う。

4．原題とねらい

1．2．3．を受け，東京学芸大学附属世田谷中学校の矢嶋昭雄教諭の問題作りの（3年生）授業を参考にさせてもらい。横浜奈良中学校の1年生に同様の問題を提示した。

原題

次の数列の□に入る数字を答えなさい。

(1) 1，3，4，7，11，18，□・・・

(2) 1，9，25，49，81，□・・・

今回の授業を進めるにあたって，本来，中学校のおいては数列については取り扱っていないが，この数列の課題を提示し自分なりの数列を考えていくという活動を通して，数感覚を高めるだけでなく子供の関心意欲を高めることができるものと考える。また，このような数列の課題は小学校ではパズル的な要素を強調することで興味関心を高め，中学校では簡単な規則性を見つけることで数に対する感覚を養い，高校での数列に対する取り組みの基礎とする。

4．指導計画

1年生（5クラス，198人）の数に付いてのまとめということで2時間扱いで行った。第1時限目については問題解決と問題づくりを行い，第2時限目には生徒の作った問題を抽出して解決と相互評価をする。

5．予想される反応例

東京学芸大学附属世田谷中学校の矢嶋昭雄教諭の3年生への授業を参考しする。

(1) 等差数列
(2) 等比数列
(3) 階差に規則性のあるもの
(4) 前項と前々項をもとに四則計算をして次項を求めるもの
(5) 2つの数列を組み合わせて，交互に規則性の入れ替わるもの

6．生徒の反応と考察

原題の質が大きく影響し，等差数列や等比数列が出てきたが，この背景には原題と同じような数列を考えたことに起因する。

この授業から，簡単な等差数列や等比数列については，中学1年生でも十分理解出来ることがわかる。

(1) について26人の生徒が問題を作っていた。これは余り凝らないで分かりやすいものを考えている。
(2) について90％以上の生徒が問題を作っている。これは問題を作った後の規則制を見つけられ易いためと思う。
(3) について12人の生徒が問題を作っていた。
(4) について90％以上の生徒が問題を作っていた。これは原題の(1)を意識したもののようである。
(5) について(1)と(2)の組み合わせが多くみられた。

君の頭脳を開発する.

1年 3組 4番 氏名 小峰梨沙

□にあてはまる数は？

次の数の列の□にあてはまる数を答えなさい。
① 1, 3, 4, 7, 11, 18, □ …… ① 29
② 1, 9, 25, 49, 81, □ …… ② 121

理由
最初と次の数をたすと3つめの数になったことから考えて. 11+18=29なので そうなった。

②の理由
すべて同じ数をかけた答えがあり.そのかけた数はすべて奇数になっていて小さい方から並んでいることから 11×11=121なので そうなった。

（自分で上記のような問題をつくってみよう。解と理由（かくこと））

自分で作った問題。

(1). 1, 3, 3, 9, 27, □, ……

解). 243

理由). 1番目の数と、2番目の数とをかけた積が3番目にあってまた3番目を1番にもどして考えるから、
9×27=243 になる。

（どこかの数を1番目としてみる）

(2.) 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{20}$, □, ……

解) $\frac{1}{140}$

理由) 1から順にわっていくと. $\frac{1}{20}÷7=\frac{1}{140}$ となる。

÷1 ÷2 ÷3
1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ …….

(3) 1, 3, 4, 8, 15, 27, □, ……

理由). どれかの数を一番目として. その次の数(二番目の数)と三番目の数を全部たすと. その和は4番の数になることから、
8+15+27=50 になる。

解) 50

感想

最初は簡単そうに見えたけど、実際はいろいろ考えた末、やっとできるくらいで、すごく難しく思えた。それから問題を解く時は、ある一定の規則を見つけるのに、いろいろ試してみた。このようにしてこのプリントをやりました。
問題をつくる方も、解く方も、どちらも難しかったけど、考え方などが広がってとても良い勉強になりました。

君の頭脳を開発する.

1年 4組 13番 氏名 中村優美

□にあてはまる数は？

次の数の列の□にあてはまる数を答えなさい。
① 1, 3, 4, 7, 11, 18, □ …… A.29
② 1, 9, 25, 49, 81, □ …… A.121

（自分で上記のような問題をつくってみよう。解と理由（かくこと））

□ 次の数の列の□にあてはまる数を求めなさい。

① 1, 9, 3, 13, 5, 8, 26, 30, 19, 75, 3, 1, □ ……

② 3, 6, $\frac{1}{2}$, 8, $\frac{1}{16}$, 9, □ ……

③ 4, 8, −4, −28, □ ……

④ 2, 3, 6, 9, 18, 12, □ ……

なぜこうなったか（私の考え方）

① まずはじめの2数をたしてみると、その和は4となります。つまり、3番目の数字です。3番目と4番目の数字の和は5番目の数字になります。これを式に表わすと、1+3=4, 4+7=11, そして次の 11+18=29 で答えは29. □にあてはまる数は29です。

② まず1番目と2番目の数字に注目します。9−1=8です。1番目の数字に8をたすと2番の数字になります。2番目の9に、今度は8の倍数 8×2=16をたすと、3番目の25になります。25に 8×3=24 をたすと4番目の49になります。これを式に表わすと次のようになります。（右のレポート用紙へつづく）

○右の問題の解と理由○

① 79

理由 これは右上記の①の応用です。3つの数字の和が次に来て、またそれも含めて3つの和が来て…… となります。
だから、1+9+3=13, 13+5+8=26, 26+30+19=75, 75+3+1=79。
79が解です。

② $\frac{1}{144}$

理由 これも右上記の①の応用で、こんどは和ではなく商を用います。$3÷6=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}÷8=\frac{1}{16}$,
だから $\frac{1}{16}÷9=\frac{1}{16}×\frac{1}{9}=\frac{1}{144}$。
$\frac{1}{144}$が解です。

③ −64

理由 これは右上記②の応用です。
まず、はじめの2数 4と8の和12を出し、12の倍数を引いていくのです。
12×1=12だから、8−12=−4.
12×2=24だから、−4−24=−28.
このように進めるので、12×3=36で、
−28−36=−64. −64が解です。

④ 36

理由 これも右上記②の応用で、まずはじめの2数、2と3、そしてその後の6とに注目します。
この3つの数の関係は、2と3の最小公倍数「6」を表しています。
だから、次に9が来ると、6と9の最小公倍数18が来ています。
では次の18と12の場合はと考えると、18と12の最小公倍数は36。つまり36が解です。

（私の考え方）②のつづき

8の倍数 . 8×1=8 . 8×2=16 . 8×3=24 . 8×4=32 . 8×5=40

問題 1+8=9+16=25+24=49+32=81+40=□

121

つまり、
1+8=9
9+16=25
25+24=49
49+32=81
81+40=121

簡単にいうと、その数1つ1つに「8のだんの九九」をたしていけばよいわけです。
このように考えていくと、答えを導き出せます。
このことから、答えは121。
□にあてはまる数は.121です。

君の頭脳を開発する.

1年　3組　10番　氏名　田村まり

□にあてはまる数は?

次の数の列の□にあてはまる数を答えなさい。
① 1, 3, 4, 7, 11, 18, □ …… 29
② 1, 9, 25, 49, 81, □ …… 121

(自分で上記のような問題をつくってみよう. 解と理由もかくこと)

(1) 1, 2, 4, 7, 11, □, ……

《解》□=16　《理由》これは「きまり」がひき算で.しかもひいた数が順になっている。だから.2ひく1で1, 4ひく2で2, 7ひく4で3……というふうにやっていき.□=16となる.

(2) 1, 2, 3, 8, 30, 264, □, ……

《解》□=8160《理由》これは「きまり」がかけ算とたし算で.(2)でいうと1.2.3を1まとまりと考える。1×2, 2×3をし.その2つの答えをたしてみると次の数の8である。そのようにしていくと.□=8160となる。

《問題①の考え方》

このような問題は.「きまり」があるので.それを見つける。見つけるとたし算ということがわかる。1と3をたして4, 3と4をたして7……というふうにしていく。だから□=29となる。

《問題②の考え方》

この問題の「きまり」は'8の倍数'である。8の倍数がたし算されていく。しかも8の倍数は8, 16, 24, 32…というふうにふえていく。1に8をたして9, 9に16をたして25……というふうにしていく。だから数えていくと□=121となる。

《感想》

ふつうの計算問題よりも.おもしろい問題だった。解や理由がわかると.きまりがあるのに気付いて.いろいろわかってくる。自分で作った問題は作る時に苦労した。

君の頭脳を開発する.

1年　1組　10番　氏名　田村　絵里

□にあてはまる数は?

次の数の列の□にあてはまる数を答えなさい。
① 1, 3, 4, 7, 11, 18, □ …… 29
② 1, 9, 25, 49, 81, □ …… 121

(自分で上記のような問題をつくってみよう. 解と理由もかくこと)

1, 11, 20, 28, 35, □ . . . . .

1+10　11+9　20+8　28+7

前の数+, 10, 9, 8, 7, とさげていくやりかたにする。

35+6 = 41

1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, □

6　11

□の中は68

前の3つずつをたしていくやりかた。

①は1, 3, 4, 7, 11, 18 □… で□の中は29となる。

これは前の2つの数をたすと次の数になる。

1+3=4　→ 7+11=18
3+4=7　　11+18=29
4+7=11

(矢印で分かるのか?)　となる。

②は奇数どうしをかけた数が

1, 9, 25, 49, 81, □, …となり, □の中は121となる。

1^2　3^2　5^2　7^2　9^2　11^2
(1×1) (3×3) (5×5) (7×7) (9×9) (11×11)

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, □……
1×2 2×3 3×4 4×5 5×6 6×7 7×8 8×9 9×10

となっていくのでこうなる。　□の中は90

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

ただの数が並んでいるものでもちゃんとほうそくがある。
矢印のようにたしていくとすべて同じ答えになる。(この場合は9)

$x = \frac{3n^2}{(2n+1)}$ という式を作っておけばそれにあてはまると式が出来あがる。
(のだと思う。)

感想はうらに書きます。

感想　法則があれば数式は成り立つのだと思った。
少しちがうものもあるかもしれないけど,
分かったらけっこう作るのもとくのも楽しくなった。
もっとおもしろい数も作ってみたりといてみたいと思った。

個々で作る問題についての活動は，ほとんど全員の生徒が積極的に解決しようという前向きな気持ちがうかがえる取り組みをしていた。今回の授業について成績下位の生徒についても積極的な取り組みを見せていた。

成績下位の生徒は授業前半の自分の考えをまとめながら解くのは得意とせず悩みながらの授業であったようだが，回りの生徒と相談する事により課題の意味が理解出来ただけだなく，自分の問題を作るという作業を積極的に行っていた。

7．まとめ

第1時限目の授業について，数列についての定義については特に示さず生徒各自の考え方に任せる方法を取り，(1)や(2)について自由に考えて良いこととした。ただし，□に入る数字についての自分の考え方は必ず書くという条件をつけた。また，授業前半は自分の考えをまとめ，授業後半は回りの生徒と相談をする事を認めた。

第2時限目については自分の作った問題について発表させ，解き方の説明をするという方法を行った。他の生徒の作った問題を解決するのは面白いが，中学1年生で解決まで導くにはなかなか難しい。よって，自分の作った問題を皆に説明する授業展開とした。

この授業を通して，大部分の生徒が課題に興味関心を示し積極的に課題解決に取り組んでいた。また，この課題を解決していく努力の中で規則を見つけることの楽しさや，自分の問題自体を解く楽しさを見つけていた。

〈参考・引用文献〉

澤田利夫・坂井裕編著　問題づくりの授業
島田茂編著　算数・数学科のオープンエンドアプローチ
奥田真丈・河野重男・幸田三郎　中学校学習指導要領の解説と展開数学編
澤田利夫・橋本吉彦　数学科の評価

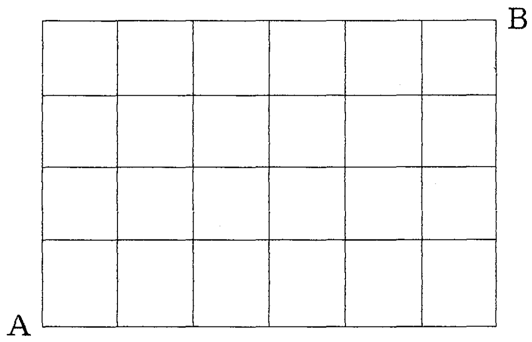
Ⅳ－２　”数え上げ”の授業について

相模原市立大野南中学校
佐　藤　孝　彦

１　原　題

数え上げの問題として，次の①と②をそれぞれ別の時間に取り扱うことにした．

①　右図の格子の上を通ってＡからＢまで最短の道のりで進む行き方は何通りあるか．



②　(1) ６人を２つの部屋Ａ，Ｂに入れる方法は何通りあるか．ただし，全部の人が同じ部屋に入ってもよいものとする．

(2) ６人を２つの部屋Ａ，Ｂに入れる方法は何通りあるか．ただし，各部屋には少なくとも１人は入るものとする．

(3) ６人を２つのグループに分ける方法は何通りあるか．

永尾汎ほか８名，高等学校　数学Ⅰ，p. 129，数研出版，1994

２　授業対象学級等

①授業日　平成８年１月下旬～２月上旬

推薦入試，学年末テスト等があり，計画的に授業を行うことができず，学級によって場当たり的に授業を実施した．なお，実施対象の生徒は既に中学校数学の学習内容をすべて終えている．

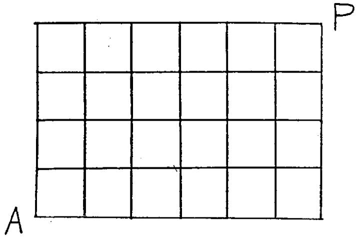
②学　級	３年６組	１時間目	原題①を解決（３１名自力で解決した生徒１名）
		２時間目	確率についての問題づくり
	３年２組	１時間目	原題②を解決
		２時間目	原題②をもとにしての問題づくり
		３時間目	２時間目で作った問題を４人１組で分類・整理
		４時間目	分類・整理したものの発表
		５時間目	原題①（４行６列を３行４列に変更）を解決
	３年８組	１時間目	原題②を解決
		２時間目	原題②をもとにしての問題づくり
		３時間目	原題①（４行６列を３行４列に変更）

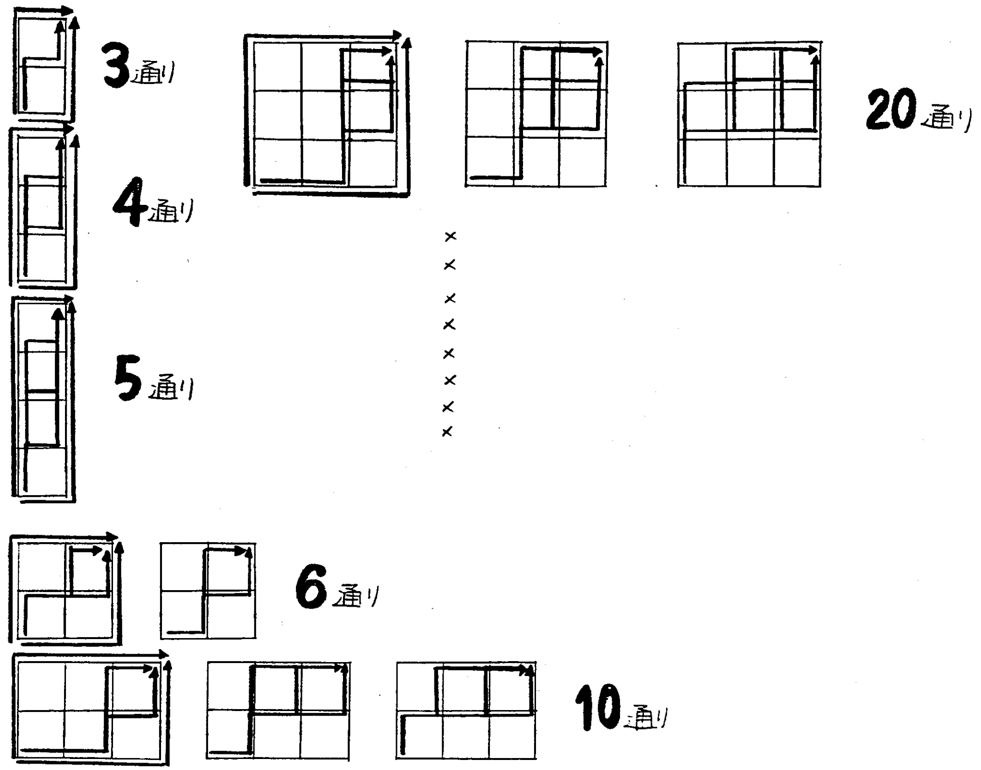
３　授業での生徒の反応

入試時で，生徒にとっては受験対策問題も解きたい時期である．しかし，「高校で学習する内容だけど，やってみる？」と各学級に投げかけると，予想に反して，どの学級も好

Q.

AからPまで行くのに
最短コースは何通り?!



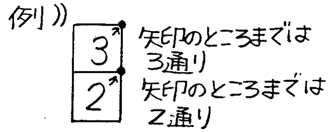


P

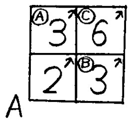
5					
4	10	20			
3	6	10			
2	3	4	5	6	7

A

左の図で調べたものを
上の図に書きこむ



すると規則性が見つかる
（図の中で）



ⒶとⒷをたしたもの（和）
がⒸになっている。

ということは Pまでは…

P

5	15	35	70	126	210
4	10	20	35	56	84
3	6	10	15	21	28
2	3	4	5	6	7

A

AからPまでの最短コースは **210**通り

奇心を示した．

そこで，高等学校数学Ⅰの中にある問題を２問取り上げ，とりあえず原題を解決させてみた．また，それをもとにした問題づくりなども学級によっては行ってみた．

ここでは頁数の関係もあり，原題①，②のそれぞれの授業での生徒の反応の一部をあげ，考察を簡単に述べたい．なお，資料１は，原題②をもとにした問題づくりをした後に，４人１組で分類・整理したものの一部である．また，資料２は原題①を解決した生徒のワークシートである．

資料１（原題②をもとにした問題づくり後の分類の一部）

3年2組 3班　野口 隆之・佐波谷 優子・州崎 香織・(記)本田 加也

☆最優秀問題

35　７羽の鳥を４つのカゴに入れるのには，何通りの方法があるでしょう？ただし，２羽以上にしないと，さみしくて死んでしまいます！！５羽以上いるとケンカしてしまいます．

・条件が工夫されていてとてもおもしろい．

① —— 問題の条件が最低○人・個は1つに入れなければならない場合

1) 1人・1個は必ず入らなければならない場合

5　５つのボールを３つのふくろＡ，Ｂ，Ｃに入れる方法は何通りあるか．ただし，それぞれのふくろには少なくともボール１つを入れるものとする．

6　４人で3つの部屋Ａ，Ｂ，Ｃに入る方法は何通りあるか．ただし少なくとも１人は各部屋に入るようにする．

9　松竹梅３つの部屋がある５人を３つの部屋に分けると何通りあるか．ただし１つの部屋に１人は入るものとする．

2) 1)の条件にさらに特別な条件

11　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆの６人がいる．ＡとＦはケンカをしているので，いっしょの部屋には入れない．ＡとＢ２つの部屋があるとき，ＡとＦがいっしょの部屋にならない部屋割りは何通りあるか．ただし，各部屋に１人は残るものとする．

17　Ａ君，Ｂ君，Ｃ君，Ｄ君，Ｅ君を３つの部屋に入れる方法は何通りあるか．各部屋に必ず１人は入れる．あとＡ君は１人にしてはいけない．

42①　１２この球根があります．２つの（Ａ，Ｂ）プランターがあります．Ａ，Ｂのプランターに植える方法は何通りあるでしょう．ただし全部の球根が同じプランターに入ってもよいとする．
② プランターに最低１コは入っていなくちゃいけない．

39 ②　６人がある民宿に２泊しようとした．１日目は２へやに分かれ，２日目は３へやに分かれるとすると分かれかたは何通りですか．　し１つの部屋に１人はとまるようにする．

12　６人をふたつのへやＡ，Ｂに入れる方法はなんとおりあるかただし２人以上はそのへやにいなければいけない

②— 問題の条件が全てを1つのものに入れてもよい場合

1) 全く同じ問題

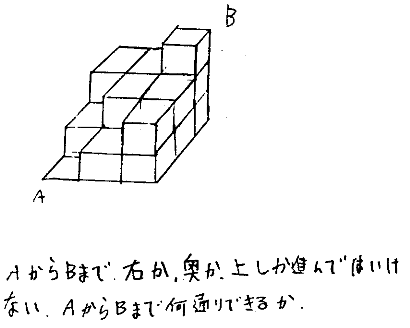
8　６人を３つの部屋Ａ，Ｂ，Ｃに入れる方法は何通りあるか．ただし全部の人が同じ部屋に入ってもよい．

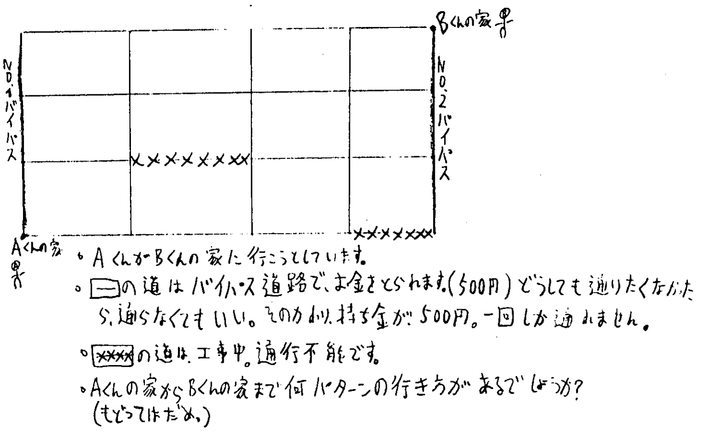
4　考察

(1)　原題①について

最初に実践した学級（３年６組）では，原題の通り４行６列で行った．210 とおりという正解に自力で解決出来た生徒は30人中１人（資料２参照）のみで，他の生徒は時間一杯まで意欲的に取り組んでいたが，自力解決には至らなかった．「210 とおり」ということを告げ宿題にしたところ，約半数の生徒は，正解にたどり着いたが，原題自体が難しかったと思えた．そこで，３年８組では３行４列にして提示したところ，３分の１の生徒は，自力解決ができた．規則を発見する者もいれば，樹形図のようなものを書き，すべての場合を書き出すなど，反応の違いも見られた．原題を変えたことで，35とおりという正解は，数え上げることを容易にしたわけである．ところで，両学級に共通したことを補足しておくと，計算で求めようとして，数えあげようとしなかった生徒がかなりいたことである．

次に，原題をもとに問題づくりをした３年８組では，行と列を変えるだけでなく，形を三角形に変えたり，道の途中を工事中にしたり，生徒なりの工夫が見られた．





(2)　原題②について

これは３学級とも同じ数値で授業を行った．原題①と同様に計算で求めようとする者も何名かはいたが，大部分は数え上げており，各生徒ごとに工夫をしていた．あっという間に 2^6 で答を出していた者もごく少数見られ，数え上げた生徒は半数程であった．全員に解決させるには，原題①と同様に６人を４人位にしておいた方が良かったと思える．原題解決後の問題づくりでは，身近な題材を用いて，生活感のある問題を作っていた．

(3)　まとめ

「数え上げ」の問題は，中学校３年確率で多少扱う程度である．しかし，今回の授業を実践してみて，「数の処理」を含め，高等学校数学Ｉ程度のものを中学校で扱っていくべきであると痛感した．それは

・特に数学の知識が無くても，全生徒が取り組むことができる．
・身近な題材で，生徒の生活体験を生かして考えたり，工夫することが可能である．
・そのため，関心が高まり，意欲的に取り組むことができる．

の３点から言える．ただし，留意しなければならないことは，複雑な計算や公式に依存することなく，容易に数え上げられる数値で原題を与えることである．

V　中学校数学（第３学年）におけるオープンエンドの導入問題の作成について

横浜市立上飯田中学校
野尻　昌昭

各単元ごとにどのような内容の問題を設定しているかを教科書を分析し，その導入問題をオープエンドの問題に作り変えることが可能かどうかを研究していく。

（１）式の計算では

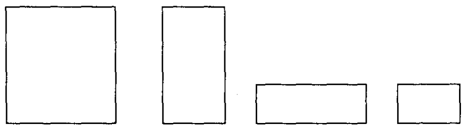
① 展開の公式を導くのに，ほとんどの教科書が花だんを使っての面積問題から導入している。そして分配法則の拡張として取り扱っている。

② 乗法公式では，（ｘ＋ａ）（ｘ＋ｂ）から和の平方，差の平方，和と差の公式をａ，ｂの文字で，ｘを使わずに表現されている。

以上，多項式と多項式の乗法では誘導的に公式を発見させる方法以外に研究不足もあってあまり良い方法が見当たらなかった。そこで次のような導入問題を考えてみた。

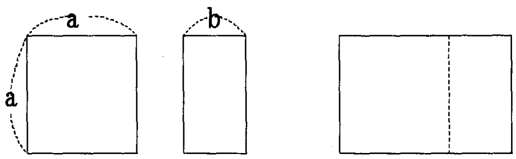
導入問題

右の図のように，４つの長方形がある。この長方形を組合わせてより大きな長方形をつくり，その長方形の面積を表す式を２通りの方法で求めよう。

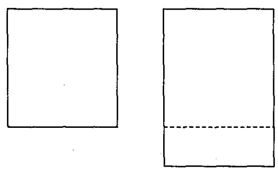


この導入問題では，生徒が４つの矩形の紙を操作していろいろな長方形をつくってその図形の面積を考えさせることで，自分で分配法則や乗法公式などを作らせるところに重点を置いた。

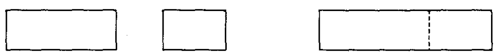
（例１）

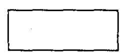


（例２）

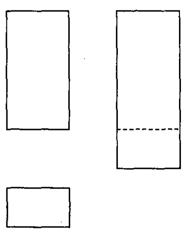


（例３）

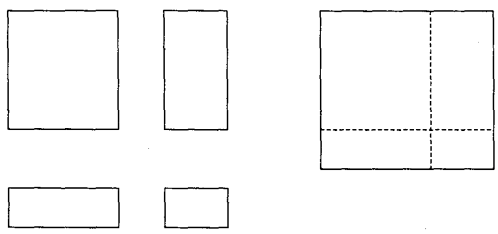




（例４）



（例５）



（２）平方根の計算では

① 新しい数を導入する上で極限の考えが必要であり，どの教科書も無理数について曖昧な表現が多い。実際，公理的に簡単な表現で定義している。

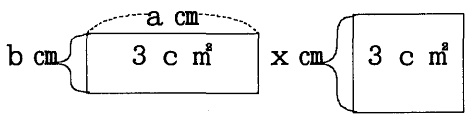
② 無理数が何故存在して，循環しない無限小数になるのかがはっきりしないように思える。

導入問題

右の図において，面積が同じ図形の辺の長さを求めよう。

なお，長さを求めるときは電卓を使いながら計算をしよう。

【図】　長方形　　正方形



この導入問題では，長方形の面積を求めるため電卓を使うことで，辺の長さを小数の範囲まで意識させ，次に正方形の１辺の長さを考えるときに逐次近似的に求めさせいく。そして，直観的に無限小数で表現されるような数を見つけさせる。

(ｱ) 長方形の横の長さをａ㎝，縦の長さをｂ㎝として

$$ab = 3$$

(ｲ) 正方形はすべての辺の長さが同じなので，１辺をｘ㎝とすると

$$x^2 = 3$$

この２つの方程式の解を電卓を使いながら多くの解を求める。

【式の計算と平方根の単元における考察と今後の研究の方向性】

式の計算と平方根の単元では，新しい知識や概念を取り扱うための導入問題をオープンエンドの問題またはオープンエンド的な問題に開発する研究を行ってきたが，研究不足もあって適切な問題を作成することができなかった。

その原因の１つは，この２つの単元（式の計算と平方根の計算）では文字式の展開方法をもとに乗法公式を作ったり，また新しい数である平方根の数を導入していく学習のため，既習の知識や技能を使って問題の解決を図りながら新しい知識や概念を学習することより，むしろ新しい知識や概念を知ることに単元のねらいがある。そのため新しい知識や概念を発展的な扱いとして位置付けることが難しい。

そのために，この単元での導入問題をオープンエンドの問題やオープンエンド的な問題として作成することが難しかった。そこでこの単元では総合的な問題として設定することが望ましいのではないかと考える。

今後は総合的な扱いでのオープンエンドの問題またはオープンエンド的なの問題を研究・開発していくことにする。

オープンエンドな問題を用いた学習課題の設定

横浜国立大学教育学部
石田淳一

ここで報告する事例は寒川小の須田先生の授業研究から得られたものである。授業者のねらいは3年生に対して、現在6学年で指導される「順序よく整理して調べる」考えを指導することにあった。

（授業研で用いられた問題）

問題　5 cm と１０ cm の棒があります。この棒を使ってちょうど５０ cm の長さにしたいと思います。それぞれ何本使えばよいでしょう。

1.　学習指導案の検討

まず、「落ちや重なりがないように順序よく考えて問題解決する。」を指導目標とした授業者の学習指導案を検討することにする。検討したい点は子どもに課題意識をもたせることができるかどうかである。

（学習展開の概略）

1　問題把握

問題が提示される。

主発問１「今日はこの問題について調べていくのですが、こんなことが困るなとか、何か聞いておきたいことはありますか。」

＊０本を使うということ、並べ方が違う場合について確認し、問題の条件を明らかにする。

2　自力解決（試行錯誤）

操作用具を使うこともできる点を指示して各自に取り組ませる。

3　発表

棒の本数を知るためにどのような考え方をしたか発表させる。

＊いろいろな子どもの考えを発表させる。

4　練り上げ

主発問２「何か気がついたことはないですか。」

主発問３「重なりがないようにするにはどんなよりよい解決方法があるか考えさせる。」

（予想反応）

Ｃ１　同じものがあるよ。

Ｃ２　ばらばらだと同じのがでるから順番に考えたらいい。

Ｃ３　表にするといいよ。

Ｃ４　赤と黄の棒が左右分けて並べてそれから本数を出すといい。

Ｃ５　色別に並べると数えやすい。

5　まとめ

主発問４「今日の授業でわかったことはどんなことですか。」
＊条件に適する場合について、いろいろ試行錯誤しながら考え、落ちや重なりがないように順序よく考えて問題解決するエレガントさに気付き、そのことを実感できるかどうかで評価する。

以下では、この指導案について検討を行う。
（１）問題文の検討
授業者は調査を行い、事前に問題文を検討している。以下の資料は事前調査の問題と結果である。
調査１　本時の問題と同じ
調査２　５ cm と１０ cm の棒があります。この棒を使ってちょうど５０ cm の長さにしたいと思います。どんな場合がありますか。
設問　この問題の答えについて下から選んで○をつけましょう。
１）答えはひとつだと思う。２）答えはいくつかあると思う。３）わからない。
（結果）
調査１では１）の反応が２２人、２）の反応は１３人、３）の反応が１人、調査２では１）の反応が５人、２）の反応が２８人、３）の反応が３人であった。
この結果から、調査２の問題文の方が答えがいくつかあると思える子どもが多いようである。授業者が調査１の問題を選んだのは、答えが１つであると思うことを前提とした解答を基に多様な答えを出し、それを整理する方向で話し合いの授業を構成しようとしたためであろう。しかし、指導目標を考えれば、問題理解の段階でいろいろな場合を考えることを本時課題として把握させるべきであろう。自力解決での困難点を理解した上で、それを打開するには「順序よく整理する」という考えがよいことがわかるからである。全体で個々の答えを整理する中で、結果としてすべての場合が尽くされるとしても、そのためには何のために整理するのかを明確にする場面が用意されなければならない。
（２）主発問１について
この発問は問題理解を確実なものにするためのものである。なぜなら３年生にはこの問題文が曖昧さを持つからである。３学年の子どもにとり０本の扱いは１つの大きな問題であり、「困ることはないか？」で問いかけるよりもはじめから「１０ cm だけなら５本必要、５ cm だけなら１０本必要なことはすぐにわかります。では５ cm と１０ cm の両方を使う場合にどんな場合がありますか」というような問題提示にしてもよい。その後に、片方が０本の場合も含めて統一的に見ることができるようにすればよい。
（３）主発問２と３について
子どもからいろいろな答えが発表され、それらを見て気付いたことはないかと問う場面である。どんな視点で見ればよいかが示されないがいろいろな気付きを期待していると考えられる。その気付きから主発問３にどのように結び付けるかが問題

である。主発問３は本時課題にせまるものである。

ここでは、すでに発表されている考えがいずれも不十分で、すべてをつくして列挙することが学習課題になる場面が２と３の間にあらためて設定されるべきである。もし、よい解決方法が発表された子どもの中に含まれる場合には、この学習課題を１人１人の子どもが考える場面がなく、教師により「よい」考えを単に知らせるだけの授業になってしまう。

２．実際の授業を見ての感想

子どもが指導目標を学習目標として持ちえたかどうかという点で改善の余地がある。順序よく瀬いるすればすべての場合が求められるが、すべての場合を問題にしたいという課題意識を持たせることができたかどうかで授業の成功不成功がきまるのではないか。

３．子どもの反応をベースとした授業展開の構想

ここでは、授業者が授業研の後に再度別の学校で調査した子どもの反応を基に、オープンな問題を用いた学習課題の設定という点からの授業展開の構想を述べる。

（１）３年生の自力解決の様子

子供の自力解決における反応を分類すると、次の７タイプが見られた。

1）順序よく整理されて、すべて組み合わせが列挙
2）全部列挙されているが、ランダムに調べられている
3）片方が０の場合が欠落している、ランダムな数え方
4）どれか１つが欠落あるいは重複
5）いくつかを列挙している（複数欠落）
6）片方が０の場合のみ
7）その他

（反応人数）

1）９人　2）４人　3）４人　4）４人　5）８人　6）３人　7）３人

（２）授業展開の構想

以上の反応をもとに、授業展開を考えることにする。（実際の授業はまだ見ていない）

場面１　オープンな問題の提示と多様な考えの発表

上記反応のうち、２）から７）までの考えを発表させる。

ここでは、７）以外はすべて正解である。問題文にすべてをつくすような指示がないからである。７）についても妥当性の検討は行う。

場面２　課題意識の喚起

しかし、反応２）から６）までの考えを知ると、５cmと１０cmで５０cmを作る組み合わせの個数がいろいろあることに気付くだろう。この気付きを契機として、子どもに「全部でいくつの組があるのかを調べたい」という課題意識を持たせることができる。同時に、０本の扱いが問題になる。これももう１つの検討課題となる。

場面３　課題設定

「すべてをつくすにはどんな調べ方がよいか考えよう」という課題ができる。

場面４　自力解決の見直し

反応２）から反応６）までについて、調べ方を見直しをさせる。（ここまでに反応１）は発表させない）

各自がもう再び新しい課題に対して、考える時間である。自分の方法や他人の方法を手がかりに検討するのである。

場面５　よりよい考えに気付く

「順序よく整理する」と落ちや重なりがなくすべてをつくすことができることに気付かせる。ここで、０本の扱いについても議論する。

場面６　いろいろな場合を統一的に見る

すでに、５ cm が０本と１０ cm が０本の場合を除いて、結果が整理されている。もちろん、０本の場合についても２通りの答えが出ている。これらを統一的に見ることができればまとめることが可能である。そこで、１０ cm ０本使い、５ cm １０本使うという表現を使えば、１０ cm １本と５ cm ８本使うと同じになることを知らせる。

場面７　まとめ

本時のまとめを行う。

４．考察

小学３年生の子供には、この問題の求答事項がはじめからすべてをつくすことを要求しているとは考えられない。もちろん子どもの中にはそのように考えることができる者もいるが、ともかく５０ cm になる場合を見つけようとするだろう。いずれの答えも５０ cm になれば正解である。しかし、発表された正解のいくつかを見ると、見つけた場合（組）の個数が異なることに気付く。この場面で自然に子ども自身に、「組の個数がいろいろあるが全部でいくつあるのかな」、「全部をうまく調べるにはどんなやり方があるかな」という学習課題を設定させることができる。その後、自力解決のやり方をもう一度見直して、先の学習課題に対する答えを見つけるようにする。

従来、オープンエンドな問題を提示して、いろいろな答えが出された後の扱い方として発散型のケースが多かったが、教材によっては、このように発散した答えを材料に課題意識を持たせて、子ども自身の問題を作り、多様な答えを収束させることができる。

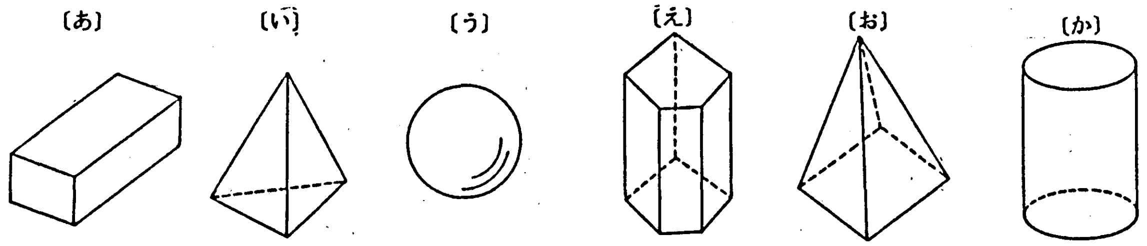
『□にあてはまる問題と答えを考えよう』

――オープンエンドの学習課題による磨き合う学習展開の工夫――

小田原市立早川小学校
石川　浩一

学習課題

ここに６つの立体があります。



きょうは、この立体を使って、

問題は、□です。

答えは、□です。

この□にあてはまる問題と答えを作る勉強をしましょう。

（単　元）　立体

（学　年）　第６学年

（ねらい）　６種類の立体をもとに、図形の構成要素に着目した問題作りを通して、答えが同じでも複数の問題ができることを知り、そのわけを問題づくりにおける図形の構成要素かによって明らかにしていく中で、立体の特徴や性質に気付き、図形に対する見方や考え方を広げた立体のとらえかたができるようになる。

（特　徴）　この学習課題には、次のような特徴があげられる。

①答えを自分で決めることが必要で、そのための図形を調べる活動が自然に行われる。

②調べる活動の中で、一人一人が図形の構成要素に着目することができる。

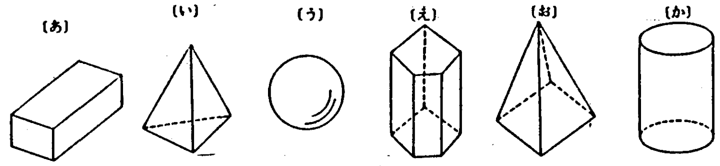
③答え（正答）が多様にあるので、図形の特徴や性質をつかむのに役立つ。

④一人の見方によって、みんなが新しい問題を作るきっかけが生まれやすい。

それを活用することによって、一人一人が自分らしさやよさを積極的に出し、図形に対する見方や考え方を広げるといった磨き合う学習展開が期待できる。

実践

（学習展開）

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>教師のはたらきかけと子供の反応</th><th>支援と評価</th></tr>
<tr>
<td>1. 本時の課題をつかむ。</td>
<td>ここに６つの立体があります。きょうは、この立体を使って、
問題は、［　　　　］です。
答えは、［　　　　］です。
この［　　］にあてはまる問題と答えを作る勉強をします。


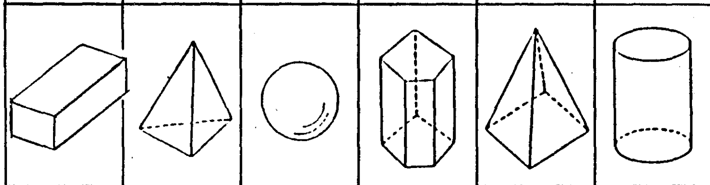
１つだけ、お手本を出します。例えば、
問題は、［底面が１つしかない立体は、どれでしょう。］です。
答えは、［　　　　］です。
この［　　］にあてはまる答えを考えてみよう。
（い）と（お）です。
反対でも、作れますね。
答えは、［（い）と（お）］です。
問題は、［　　　　］です。
この［　　］にあてはまる問題を考えてみよう。
・側面の形が三角形である立体は、どれでしょう。
・真正面から見ると三角形になる立体は、どれでしょう。
どちらから作ってもかまいません。答えは、いくつでもいいです。</td>
<td>・問題用プリントを用意する。
・立体の模型を必要に応じて活用させる。
・問題作りの手順をしっかりつかませるようにする。
・問題作り用の画用紙を活用する。
＊自分なりの見方や考え方で立体を表した問題を作ることができたか。</td>
</tr>
<tr>
<td>2. 作問を立体の特徴や性質から見直す。</td>
<td>みんなも問題とその答えを作って発表し、どんな問題か考え合おう。
＜反応例＞
<table>
<tr><td>答え</td><td>（あ）と（え）と（か）です。</td><td>（う）です。</td></tr>
<tr><td>問題</td><td>(1)平行な面が１組ある立体は、どれでしょう。
(2)底面と側面が垂直である立体は、どれでしょう。
(3)長方形に見える場所がある立体は、どれでしょう。</td><td>(1)頂点がない立体は、どれでしょう。
(2)すべて曲面で囲まれている立体は、どれでしょう
(3)どこを切ってもみんな円になる立体は、どれでしょう。</td></tr>
</table></td>
<td>・（答えは同じ・問題が複数）を取り上げ、見方や考え方の違いに気付かせたい。
・図形の見方や考え方から問題を整理する。</td>
</tr>
<tr>
<td>3. 本時のまとめをする。</td>
<td>立体の見方や考え方を変えると、いろいろな問題が作れますね。きょう、自分が問題を作るのに使った立体はどんな特徴をもっていたのか説明してみよう。
＜回答例＞
（い）　底面が１つで、すべて三角形で囲まれていて、切り口の形も三角形になっている。頂点が底面の中心にくる。</td>
<td>＊友達の問題作りから、自分の見方や考え方を広げて立体を表そうとしているか。</td>
</tr>
</table>

授業を振り返って

学習課題は、『磨き合う算数』に迫れたか

提案した学習課題によって、一人一人の立体に対する見方や考え方は広がったかどうか、について、次の２点から磨き合う学習展開であったか考察してみたい。

(1)まず、学習課題がどのような観点を生み出したか、子供の回答から探ると
立体をとらえる観点（A面の集まり方　B構成面の形　C構成面の数　D辺の集まり方　E辺角頂点の数　F見え方　G面と面の関係　H体積）

答えは（				）です		さて問題はなんでしょう								
あ	い	う	え	お	か	A	B	C	D	E	F	G	H	
														
あ	い		え	お			○			○				
あ			え	お			○	○		○				
あ			え		か						○	○		
あ	い	う					○				○			
あ			え				○							
あ				お			○				○			
	い			お		○	○	○			○			
		う			か					○	○			
あ												○	○	
		う					○	○			○			
			え					○		○				
				お			○	○						
					か			○			○			

例えば、答えがいとおになる場合、４つの問題文が作れる。言い換えれば、１つの答えから、４つの観点が引き出されることになった。

一方、答えがあになる場合、問題文こそ２つと少ないが、この２つの観点が、今まで習ったことを使って立体を見直そうという態度を他のみんなから引き出すことになった。

質的、量的に、図形の構成要素に関する貴重な観点が生み出されたといえると思う。

(2)次に、それらが子供の立体に対するとらえかたにどのような変化をもたらせたか、下のような方法で探ることにする。

①授業中に作成した『答えとその問題づくりの際に用いた観点』と、授業後に書き込んだワークシートの『立体に対する説明の際に用いた観点』との比較
②同一グループ内の個人追跡（授業中はグループで、授業後は個人で作成したため）
③立体に対するとらえかたの変化は、次のように追うことにする。

授業後の観点 － 授業中の観点 ＝新しく加わった観点
（立体に対する説明の際に用いた観点）　（答えとその問題づくりに用いた観点）

立体をとらえる観点（A面の集まり方　B構成面の形　C構成面の数　D辺の集まり方　E辺角頂点の数　F見え方　G面と面の関係　H体積）

授業中（グループ活動）　　　　　　授業後（個人活動）　Oは、新しく加わった観点

グループ	答えとその問題づくりに用いた観点								メンバー	立体に対する説明の際に用いた観点								立体に対するとらえかたの変化							
	A	B	C	D	E	F	G	H		A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H
緑	*	*			*				あ	*	*				*								O		
									い	*	*														
									う		*	*			*					O			O		
紫		*	*		*				え		*	*			*								O		
									お	*	*	*			*			O					O		
									か		*	*			*								O		
青	*	*			*				き		*				*								O		
									く		*				*								O		
									け		*			*	*								O		
無			*	*	*	*			こ					*											
									さ		*	*		*					O						
									し	*	*				*	g		O	O					O	
茶		*	*						す		*	*			*								O		
									せ		*				*	g							O	O	
									そ																
赤		*			*			*	た		*			*	*		h						O		
									ち					*	*								O		
									つ		*			*	*								O		
オレンジ		*	*		*				て		*	*			*								O		
									と		*	*			*								O		
									な						*								O		
黄		*			*		*		に																
									ぬ		*			*											
									ね			*	d	*						O	O				
									の					*		*									
合計	A	B	C	D	E	F	G	H	合計	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H
	O	O	O		O	O												2	2	2	1	0	16	2	0

授業後ほとんどの子供が、自分たちの観点の他に、新しい観点を加えて、立体を説明しようとしていることがわかる。中でも、Fは、一人一人の立体に対する見方を広げるのに大きな役割を果たしているといえるだろう。

この学習では、よりよい見方・考え方などは、いっさい話し合っていない。それでも、子供達は、Fをはじめとし、自分の概念づくりにとって必要な観点を積極的に選び、取り入れて立体を説明しようとしてきた。

このような２点の結果から、友達の意見を聞くなかで、一人一人の心の中に、図形に対する豊かな見方・考え方が育っていると考える。まずは、磨き合う学習展開への第一歩は踏み出せたと思う。

図形感覚を磨く学習の創造

神奈川県平塚市立松延小学校
清 水　壽 典

Ⅰ．研究の目的

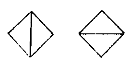
小学校の算数教育では「図形」に関しては系統だって指導されていない傾向にある。そこで，パターンブロックを用い，図形を敷き詰めるという操作活動することを通して，図形学習のあり方を探る。また，パターンブロックを用いた敷き詰めるという操作活動が図形学習に有用であることを明らかにすることとともに，本学習がオープンな活動，問題づくりの学習となることを明らかにすることを目的とする。

Ⅱ．研究方法

1．授業実践を通して図形学習における敷き詰めるという操作活動の有用性を明らかにする。
2．授業実践を通して敷き詰めの学習がオープンな活動，あるいは問題づくりと成り得ることを明らかにする。

Ⅲ．研究内容

最初に授業実践を通してⅡの１，２を明らかにする。まず，第１学年おいて，「形づくり」の学習を取り扱った。

合同な直角二等辺三角形８枚を用いての形づくりである。児童には８枚の三角形が重ねることによって同じ大きさであることは確かめてある。この時点で同じ形というのは重ねて確かめればよいことは直感的に理解しているようである。そこで，次のような学習を組むことにした。児童が作った形の中から，４つの直角二等辺三角形の斜辺を組み合わせた図形（４倍の直角二等辺三角形）から正方形を取り出し，この２つの形  が同じかどうかを尋ねることにした。 

「違う」と「同じ」と答える児童の人数はほぼ同数であった。それぞれの児童に理由を尋ねると何となくと答える児童が多い。異なる図形の区別はすぐに出来るのだが同じ図形の判別は難しいことが分かる。まして，１学年の児童に論理的な説明を求めるのは無理であると思われる。しかし，６人は「重ねてみるとよい」「両方とも同じ三角が２枚使ってあって，同じようにひっついているから」とか「線を同じ向きに回せばよい」とか理由を述べているが他の児童を納得させるには力強くない。しかし，彼らなりの論理を駆使している。この期の児童には同じものは同じであるということ実感させたいものである。そのために，操作活動を十分に取り入れた図形指導が必要になってくるのである。

この実践を受けて，彼らが同じものを同じと感じたり，いろいろな図形を敷き詰めることをとおして，どのような図形感覚が育つのかを探るために，第３学年で三角形の学習が行われる以前にパターンブロックを用いた図形学習を行うことにした。指導案を以下に示す。

① 第３学年実践授業

○単元について：

第１学年においては，直角二等辺三角形を用いた形づくり，第２学年では正方形・長方形の名称や直角二等辺三角形や直角三角形を用いた正方形や長方形の構成・分解，そして，色板ならべを通して角が直角であると隙間なく，重ならないように敷き詰めることができることを体験している。

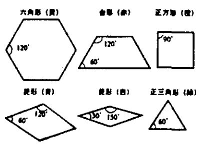
本学年の現段階では，三角形相互の関係や性質については未習である。そこで，５種類のブロックを用いて，模様作りを楽しもうと考えたわけである。この活動は，児童の興味・関心を引くばかりでなく，いつまでも活動を続けていようとする意欲を喚起することができる。

本活動は，色や形に着目して自分なりの模様作りや規則性を持った並べ方ができるなど，色々な活動が期待できる。低・中学年においてこのような活動を取り入れることは児童の図形への関心だけでなく，図形感覚や敷き　詰めるための規則性の発見，それに伴う論理的な説明の必要性等を育てるために大変役に立つでろうと考え，本単元を設定した次第である。

○単 元 目 標 ：(1) 二等辺三角形，正三角形の概念や定義を理解し，作図できる。
(2) 三角形の角と角の頂点・辺を理解するとともに，角の大小，相等関係について理解する。

○本 時 目 標 ：(1) 楽しんで模様づくりができる。
(2) 規則性を見出して，模様づくりをすることができる。
(3) 色々な図形（5種類）を用いて，正三角形や正六角形などを構成・分解ができる。

○本 時 展 開 ：

	学習のめあて	学　習　活　動	評価と手だて
課題の提示と把握	1．6種類のブロックを用いて，模様づくりをすることができる。 	6種類のブロックを使って模様づくりをしましょう。 1．スライドを見て模様づくりをしましょう。 2．どのように並べたいか，どんな模様を作りたいか自分の頭の中に想起させる。	1．課題把握が理解されているか確認する。 ・模様を広げたり，色々なものを作ると自然と友達と協力し合う形になるので，友達と一緒に作ることも認める。 ・模様づくりをしたいという意欲や好奇心を高める。
解決の方法と見通し	2．ブロックを見て，観点を見出して，模様づくりができる	3．友達の模様を見て，並べ方を考えたり，美しさを感じ合う。	2．自分の観点（自分なりの規則性を見出して・意識して）で模様づくりができるよう支援する。
解決の検討	3．友達の模様を見てどのように並べたか想像できる。 自分の並べ方を説明できる。		3．自分の並べ方と友達の並べ方の違いや規則的に敷き詰めたことに対しては取り上げ，褒める。 4．活動しながら友達の作品を見てまわることも認める。
まとめ	4．敷き詰めた図形の美しさを感じることができる。	4．本時の活動を振り返り，形や色等規則的に敷き詰めると美しい模様ができあがることがわかる。	5．他の模様づくりへの挑戦や規則的に並べると美しさが表れることや図形の構成，そのことに感動したときなど個々に取り上げ褒めるだけでなく，全体に紹介する。

② 学習中の児童の様子

本学習活動に用いたパターンブロックは学芸大附属世田谷小の高橋昭彦氏がアメリカから取り寄せたものである。形は６種類（正方形；橙色，等脚台形；赤色，正六角形；黄色，正三角形；緑色，細い菱形；白色，菱形；青色）で６色から構成されている。また，等脚台形以外一辺が１インチである。そして，それぞれの頂点の角度は30°60°90°120°150°というように30の倍数になっているので，意識しなくとも180°360°を構成しやすくなっている。高橋氏や筑波大附小の坪田耕三氏も述べておられるがこれらのパターンブロックは工夫して並べれば，平面を綺麗に敷き詰めることが出来るということである。何の指示をしなくとも，自然に綺麗な模様を作るのである。

本授業ではパターンブロックを用いた形づくりではなく，「隙間なく」「重ならない」ように敷き詰めるという操作活動（模様づくり）に重点を置くことにした。

そこで，３年生に言葉を用いて「敷き詰める」とはどういうことか説明するのは難しく，主旨が徹底できないと考え，先の修士論文で得た知見をもとに「スライドを用いて」児童の視覚に訴えることにした。パイナップル，煉瓦，歩道，マンホールの蓋の模様等のスライドを見せることで，６種類の形をどのように組み合わせて並べたらよいか条件を印象づけることにしたのである。操作活動に取りかかるとはじめに見た模様は児童の意識から消え，「隙間なく」，「重ならない」という条件だけが残ったと考えてよい結果が現れた。作る活動を通して，自分だけの模様を産みだそうとするために，工夫を凝らし，創造性たくましいものであった。以下児童の作品を紹介する。

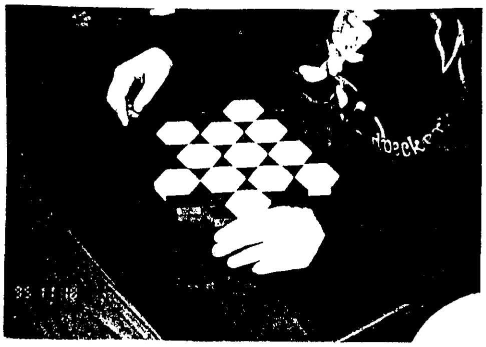


図１

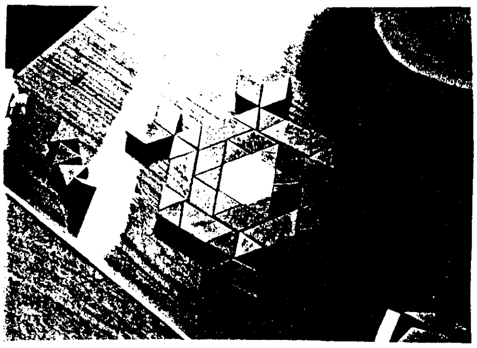


図２

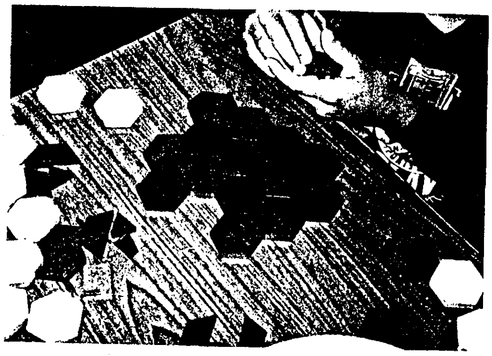


図３

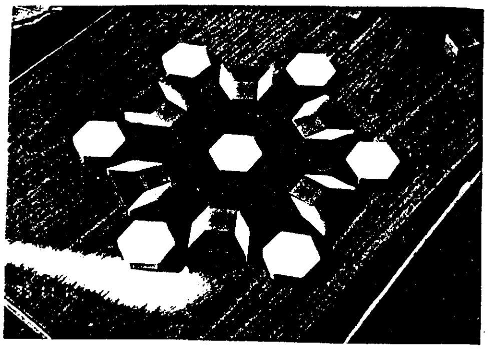


図４

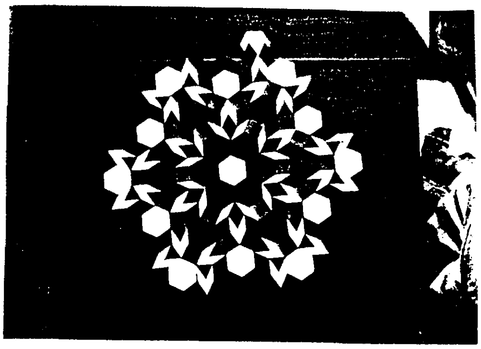


図５

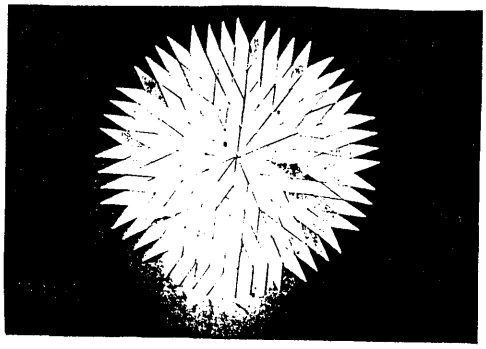


図６

③　授業を終えて得たこと

児童の身の回りには色とりどりの様々な模様が存在している。歩道の敷石，塀や壁，パッチワーク等ありとあらゆる所に見出すことができる。また，自然環境に中には，ひまわりの種やパイナップル，松ぼっくりなどのように隙間なくびっしりと詰まった植物もある。

また，「対称」についての学習はしていなくとも日常生活の中では対称性のあるもの（カレドスコープ，折り紙，テレビの鏡を使ったコメディなど）が多くある。それらに触れているため何かをつくろうとすると無意識のうちに対称的につくろうとする力が働くようである。そこで，本授業における児童の操作活動を振り返ってみると次ぎの１４項目のようなことが明らかになった。

ア．配色に着目して規則性を作って並べている。

イ．６種類の形に着目して，並べたい図形を順番（規則性を持たせて）に並べて模様を作っている。

ウ．図形の辺に着目して並べている。

エ．図２，図４からも明らかなように左右対称になるように作っている。

オ．敷き詰める形状は２種類ある。

・「左右・上下・斜め」に広がりを見せるものがある。

・「中心から同心円状」に広がりを見せるものがある。

カ．線対称だけでなく，点対称のものも表れる。

キ．核に自分の好きな図形を置き，敷き詰める方法が２種類ある。

・中心から外へ，円を描くように敷き詰める。

・敷き詰める一点を決め，まずそこに図形を置き，それと180°の所に同じ図形を置き，次ぎに90°の所に同じ図形を置き，それと反対の180°の所に同じ図形を置くことを繰り返す。

ク．敷き詰めるとき一つ一つの図形を並べていく場合と何種類かの図形の組み合わせて並べる場合とがある。

・多様な敷き詰め方が存在する。

ケ．自分の観点で模様づくりができるため，活動が持続し，図形の不思議さ，面白さに触れ十分に楽しめる操作活動となる。

コ．操作活動を通して，どの図形とどの図形を合わせると隙間がないか，あるいはもとの形になるか気づくことができる。

サ．図３のように，図形の構成に気づいた児童は，「六角形はどの形で作ることが出来ますか？」などと発問しなくとも同じ図形を，他の図形で構成して敷き詰めようとする意欲を示す可能性がある。

シ．１種類の図形を用い敷き詰めようとする児童が現れる。

ス．教師の指示がなくても大きく，広げよと考え自然を友達同士協力しあって，大きく大きく模様を広げていこうとする。

セ．中学年では敷き詰めるということより，「隙間なく，重ならないように模様を作る」という意味合いの方がよい。

以上のことから，中学年における図形の敷き詰めという操作活動は，図形感覚を養うに足りる十分な学習であると思われる。

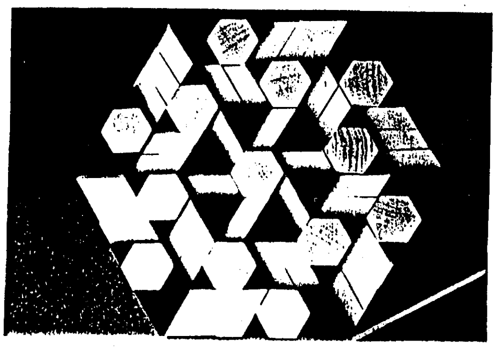
また，上述の（シ）からも明らかなように単一の図形の敷き詰めの学習に発展させることが出来る。そのうえ，他の図形でも「隙間なく」「重ならない」ように敷き詰められますか？と問うことによって，学習を発展させることが出来る。たとえ，第３学年で「正三角形」を用いた敷き詰めを学習していたとしても，敷き詰められた模様からどんなことが発見できるかとか，きまりを見つけるとか発展させるならば，学習材の意義は大きいと言える。すなわち，このことは，「敷き詰め」の題材を用いることで低学年から中学年・高学年まで一貫した図形の指導ができる可能性を秘めていると言えるのである。

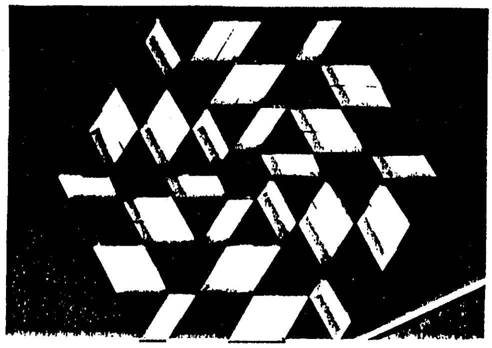
Ⅳ．主な知見

１．敷き詰めの学習のは言葉による定義より，スライドやビデオのように視覚に訴えた導入が「敷き詰める」という操作活動を児童に理解させやすい。
２．図形に着目して，見通しを持って敷き詰めることができる。
３．同じ図形を同じ図形をして同定できる。
４．１つの図形をいろいろな図形を用いて構成・分解できる。
５．ある特定の図形を核に，相似形を作るように同心円状に広がって敷き詰める。
６．敷き詰める操作活動を通して，自然にへ面の広がりを理解することができる。
７．操作活動を通して，図形の不思議さ・面白さを実感することができる。
８．パターンブロックを用いた敷き詰めは，紙でのそれと違ってカットがしっかりして，厚みがあるため扱いやすい。
９．低・中学年では彩色がある方が図形ばかりでなく，配色にも着目するため敷き詰めやすい。色があるため敷き詰められないということがない。
１０．低・中学年では「敷き詰める」というより「隙間なく，重ならないように模様を作る」という押さえが適切である。
１１．Ｍ．Ｃ．エッシャーや五角形の複雑な敷き詰め模様を提示することは児童の興味・関心を喚起する。

Ｖ．今後の課題

１．パターンブロックを用いた敷き詰めの学習の系統立てた指導課程の確立を必要とする。
２．敷き詰めを用いたカリキュラムの開発をする必要がある
３．敷き詰められた模様から，図形の学習だけでなく他の領域にも学習が発展できるような学習課題の開発が望まれる。
４．下の図からも分かるように，六角形を核に，六角形の相似形を同心円状に敷き詰めていくため，正三角形より，正三角形が４つでできる平行四辺形を用意した方が，多様な敷き詰めやいろいろな図形が発見でき，楽しさが倍増すると考えられる。





５．等脚台形だけを用いた敷き詰めは，２つの等脚台形の多様な組み合わせ（９パターン）を発見でき，図形の楽しさや不思議さを味わうことができると考えられる。

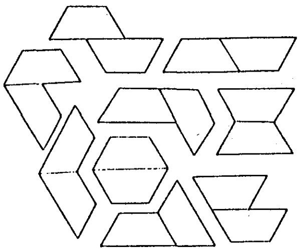


図１

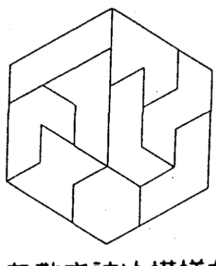


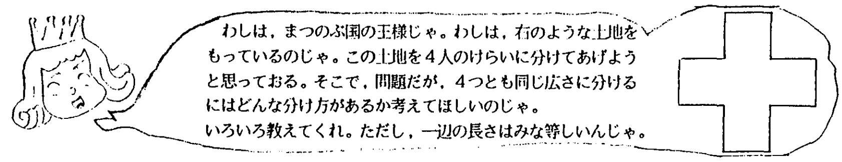
図２

・図１のそれぞれ９種類の図形を単一に敷き詰めると伝統的な敷き詰め模様が現れる。規則性の発見と美しさを感得できる学習材であると考える。
・図２は図１の９種類の形を全て使ってできる正六角形

Ⅵ．オープンエンドの問題

以下に２例　オープンエンドの問題を示すことにする。例１は十字架の土地を合同な形に４等分する問題であり，例２は第３学年の「分数」の学習の導入問題として扱うと児童の学習への意欲や数量感覚，あるいは図形感覚を磨くために有効であると考え，開発したものである。

例１



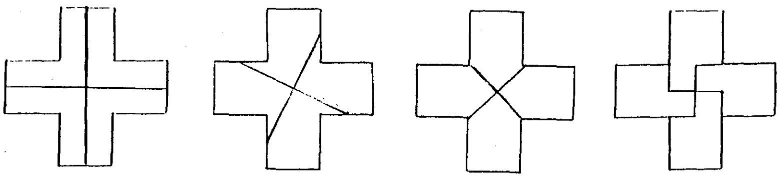
１．対象学年　：　４年生から６年生

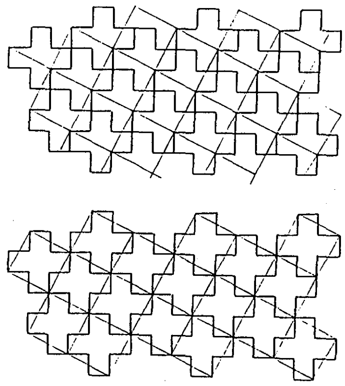
○　問題の中の十字の一辺に長さを明記すると５年生以上だと面積を求めて，四等分した面積になるように解を求める児童も多くいると予想される。

○　十字に長さが入らなければ，図形に着目しそれを四分割することを考えるのではなかろうか。

○　図形に着目して四等分してできた広さの図形は，合同な図形が多い。次の課題として，この合同な図形を用いて新たな問題が設定できる。

問題 自分が四等分に分けて，できあがった図形をすき間なく，重ならないように上手にならべてください。 ただし，もとの形の十字にしてはいけないよ。



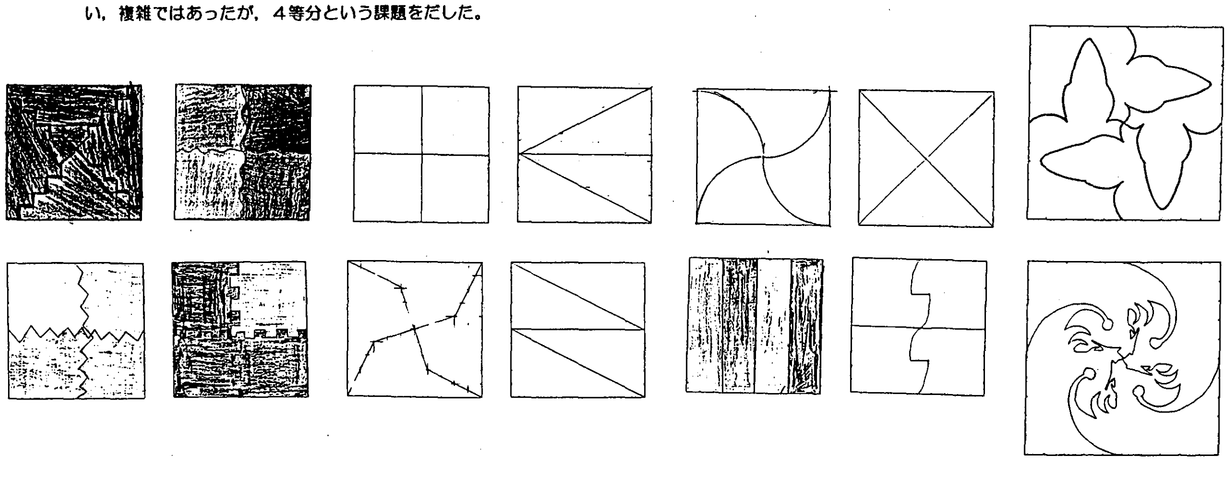


例２

『下図の正方形を同じ形に４等分しなさい。』という課題を与えた。

最初は，折り紙で遊ぶことを思い出し，直線的に折って，４等分していたが，ひとりの子がコンパスを使って正方形の中に模様づくりをしたときのことを思い出し，しきりにそのアイデアを用いて４等分しようと試みていた。完成した後，全体に紹介したら，他の児童も曲線や方眼を書いて升目を数えながら等分する子も表れた。

当初正方形を１/２の同じ図形に等分するか１/４に迷った。しかし，正方形を２等分し，その分け方を９０゜回転すると４と分になることに気づくと驚きや活動に楽しさが生まれると思い，複雑ではあったが，４等分という課題をだした。



ジオボードを使った二年生の図形指導

東京学芸大学附属世田谷小学校
高橋　昭彦

1．数学的な考え方を育てる図形指導

図形領域では、基本的は図形や空間の観念について理解できるようにし、図形についての豊かな感覚を育てるとともに、図形の概念や簡単な図形の性質を活用して、適切に判断したり、的確に表現したり処理できるようにすることを主たるねらいとしている。そして、我々は、この過程において、子どもたちが具体物を抽象化し図形としてとらえ処理するといった数学的な考え方を身につけてほしいと願っている。

ところが、高学年で「合同」や「拡大縮小」の指導をしていると、図形の位置や向きを捨象して考えることに強い抵抗を示し、合同な図形や拡大縮小の関係にある図形を見抜くことができなかったり、また「対称な図形」の指導でも、図形を回転させた場合の位置や向きがどうなるかを想像することができずに、問題解決の入り口の部分でつまづきをみせる子どもが少なくない。

図形の特徴や性質などに関する知識を持っていても、図形の概形をとらえて「この図形とこの図形は、向きは違っても同じ形ではないか」とか「この図形を180°回転させるとこんな形になるのではないか」といった見通しを持てないのである。

本実践は、このような高学年の子どもたちの実態が、低学年からの図形指導のあり方に起因するものと考え、小学校の図形指導の見直しを試みるものである。

2．教材に対する解釈

現在行われている図形指導の多くは、「まずいくつかの図形を示し、次に構成要素に着目して図形を分類し定義する。さらにその構成要素について調べ、性質や作図の方法を指導する」といった順でなされている。図形を、構成要素に着目して分析的に見る学習である。しかし、その一方で図形の概形に目をむけ、その特徴を調べることは６年生の対称の指導までほとんど行われることはない。

指導要領の各学年の目標を見ても、１年生では「具体的な操作などの活動を通して、図形や空間についての理解の基礎となる経験を豊かにする」という目標をかかげているものの、２年生では早くも「図形を構成する要素に着目して、基本的な図形の概念について漸次理解できるようにする」と、図形を分析的に考察していくことを目標としている。そして、この後は扱う対象を広げ、また着眼点を増やしていく形で図形を分析的に考察していく学習が積み重ねられていく。

確かに、図形を構成要素に着目し考察させることは図形の概念や性質を理解させる上で欠かすことのできない内容である。しかし、だからといって図形を常に分析的に見るだけではなく、図形そのものの形に目を向けた活動を十分に経験させ、図形の概形からその図形の特徴や性質を見抜くことができるような力を育てる学習にも力を入れていくことが必要であると考える。

3．本実践のねらい

以上のような図形教材に対する考えに基づく指導を具体化するために、ここではいくつかの実践を通してその具体的な方法を探っていくことにした。

まず基本的な考えとして、子どもたちに図形の概形からその特徴や性質を見抜く力を育てるためには、図形を分析的に考察していく内容の指導に加え、以下の様な活動を取り入れた指導を行うことが望ましいと考えた。

①低学年では、つみきや色板、パズルといった教具を積極的に用いて、実際に手を動かして図形を構成したり分解したりといった活動を十分に経験させること。

②中学年ではコンピュータなどを利用し、より豊富な具体例から図形の特徴や性質を明らかにする活動を十分に経験させること。

本実践は、昨年度の「かたちあそび」（一年生）の実践に引き続き，①の点に着目した低学年の図形指導のなかから、二年生に於ける「三角形，四角形などの基本的な図形の概念理解」の指導のあり方をさぐっていく。

４．本実践の特徴

(1)一般的な指導とその問題点

平成８年版教科書のうち，東京書籍，学校図書，教育出版の３社の教科書を見ると，三角形と四角形の概念指導に関する単元では，どれも「点と　点を　直線でむすんで　どうぶつを　かこむ」というかたちで作図をさせた後，「３本の　直線で　かこまれた　形を，三角形と　いいます。」「４本の　直線で　かこまれた　形を，四角形と　いいます。」として，三角形と四角形を定義している。そしてこの後，「へん」「ちょう点」といった用語を指導し，練習問題などを通して三角形，四角形の弁別などを行う。その後，「直角」を導入した後，四角形，三角形を直角という視点から分類し，「長方形」「正方形」「直角三角形」を指導する。

ここでは，まず三角形，四角形を子どもたちが「点を直線で結ぶ」といった活動を通してつくり，これをもとに「三角形」「四角形」といった用語を定義し，さらにこれらを，辺や頂点といった構成要素に着目してその特徴を調べ，さらに直角という新たな概念で分類する，といった一連の学習を意図したものである。

このような指導は，三角形，四角形の概念指導として２年生で一般的に行われているものであり，今回の改訂で特に新しくなったというものではない。

ところが，実際にこれらの教科書を使って指導をしていくとき，最初の段階で，子どもたちに「点を直線で結ぶ」という活動を通して多くの三角形や四角形をつくり，豊富な具体例から「三角形」や「四角形」を定義したり，またこれらをもとに単元後半の指導を展開していくという事が難しいという問題点がある。というのは，どの教科書でも，教科書のページを用い，点を結んでつくることのできる三角形と四角形はあわせて６こであり，これだけで十分な具体例とは言えない。
また，教科書の体裁や大きさなどの関係から，様々な大きさの形をつくったり，つくったかたちの向きを変えて見たりすることなどにも制限がある。

したがって，教科書が意図するような指導を行うためにも，単元の早い段階で子どもたちがより多くの形をつくる活動を行うための何らかの手だてが必要であるといえる。

また，前項で述べたような「図形を分析的に見る前に，子どもたち自身の活動を通して多くの図形を構成し，これらをもとに図形に対する概念を理解させる」ということを具体化するためにも，この単元の指導で最初に子どもたちにどの様な活動を通して図形を構成させるかということが重要になる。

(2)ジオボード（Geoboard)を用いた図形の構成

ジオボード（Geoboard）は，西欧の国々で広く用いられている図形教具であり，わが国でも自作のジオボードによる実践が行われているが，一般の教室で簡単に手にはいるようなものは現在日本では市販されていない。

ジオボードには大きさやペグ（グギ状の突起）の打ち方の違いによって数種類あるようだが，最も一般的なものは，縦横５インチの正方形に，１インチ間隔で２５本のペグが打たれたものである。この２５本のペグに輪ゴムをかけ，いろいろな形をつくるのがこの教具の基本的な使い方である。

このジオボードの特徴としては，次の３点が考えられる。

・作図よりも簡単にいろいろな形をつくることができるために，図形の概念，面　積の概念などの育成に適している。特に図形の向きや位置の捨象といった抽象　化が具体的に経験できるところは，入門期の図形指導に適している。

・ペグに輪ゴムをかけるだけで形をつくることが可能であると同時に，輪ゴムを掛け替えるだけで簡単に形をつくりかえることができるので，子どもたちの試行錯誤を十分に保障することが出来る。
・ドットペーパー（ペグの位置を印刷したワークシート）用いればつくった形を記録することができる。

本実践では，教科書で「点を直線で結んで動物を囲む」という活動に換えて，ジオボードを使った形つくりを行い，子どもたちのなるべくたくさんの異なった三角形をつくる活動を経験させることにした。そして，ここでつくった三角形を学習材として，単元の後半で直角三角形や他の三角形とを分類する学習を展開したいと考えている。また，四角形についても同様の展開を考えている。

4．単元の展開と実践授業の概要

(1)　単元名　　三角形と四角形

(2)　ねらい

・３つの点を直線で結ぶ活動などを通して三角形や四角形を構成し，これらをもとに考え，三角形，四角形の概念を理解する。
・図形を構成する要素について知り，三角形や四角形の特徴を理解する。
・直角について知り，これを用いて三角形や四角形を分類する活動を通して，正方形，長方形，直角三角形などを知る。

(3)　実践授業のねらいと単元の指導計画

本実践の大きな特徴は，導入時にジオボードを用いて子どもたちが自分たちの手で多くの三角形や四角形を作り，これを用いることによって三角形や四角形に対する豊かなイメージを持たせることにある。

三角形や四角形の概念指導で，ジオボードを用いて図形を構成させる事例は，既にいくつか行われているようであるが，本実践を計画するにあたっては，
“Geoboard Sorting Game (1)”を参考に，“みんなと　ちがう　さんかくを　つくろう (2)”の実践を土台にしながら修正を加えていった。

指導計画は以下の通りである。

第１次　三角形と四角形（３時間）　**本時1/3**
・ジオボードを使って三角形を構成し，三角形という形について知る。
・ジオボードを使って四角形を構成し，四角形という形について知る。
・へん，ちょう点を知り，構成要素に着目して三角形と四角形の特徴をまとめる。

第２次　長方形と正方形（３時間）
・直角について知る。
・直角がいくつあるか，という視点で四角形を分類し，長方形や正方形を知る。

第３次　直角三角形（１時間）
・直角があるかないか，という視点で三角形を分類し，直角三角形を知る。

第４次　三角形や四角形でつくろう（２時間）
・三角形や四角形をかいたり切ったりして作り，これを材料に簡単な工作をする。
・作った三角形や四角形で，きれいな模様を作る。

第５次　適用問題（１時間）

※本単元の導入前に，ジオボードに親しむことを目的とした遊びの時間を１単位時間ないし２単位時間程度設定する。

(4)第一次第一時の展開案

①ねらい

・ジオボードを使って三角形を構成し，三角形という形について知る。

②展開案

学　習　活　動	指　導　上　の　留　意　点
1.ジオボードを使って三角形を作る。 ・グループでなるべくたくさんの異なる三角形を作ることを知る ・同じ三角形というのはどういうものか，違う三角形というのはどういうものかについて考える	・３つのペグに一本の輪ゴムをかけてできる形が三角形であることを知らせる。この時，ジオボードのペグを結ぶゴムは直線になっていると考えること，ぺぐの部分は丸くなっていないと考えることを知らせる。 ・グループの中で「同じ」「違う」と判断した根拠を中心に各グループの活動を観察し，後の活動のための資料とする ・手元のジオボードでは足りなくなった場合には，ドットペーパーを与え，これに記録させるようにする。 ・大きさが異なるもの（相似），裏返しの合同にあたるものついては，「同じ」とするか「違う」とするかを子どもたちの話し合いに委ねることにする。
2.グループ毎にできあがった三角形を発表し，どのグループが最も多くの三角形を作ったか競う ・「同じ」「違う」の視点を吟味する過程を通して，位置を捨象することを理解する。	

③評価

・ジオボードを用いて作った形が三角形であることを理解したか。

・多くの種類の三角形を作る過程を通して，「同じ三角形」や「違う三角形」を自分なりの根拠を持って分類することができたか。

(5)実践授業の概要（第一次）

９月１２日（火曜日），９月１４日（木曜日）の両日，第一次の第一時，第二次の授業を行った。

①第一時の概要

第一時では，ゲームとしての三角形づくりの説明，三角形づくり，できあがった三角形の検討と，各グループ毎に作った三角形の数の集計までの行い，この過程を通して図形に対する理解を深めていくことをねらっていた。特に，ここでは，それぞれの子どもが三角形の概念を築き上げていく過程を丁寧に扱い，図形の向きや位置が図形そのものの特徴や性質とはかかわりがないといった，具体物から図形を抽象する過程における考え方を用いて「同じ形」「違う形」について考えていくことを意図していった。そして「直線」「三角形」「ちょう点」などの用語については，子どもたちが話し合いの過程で必要としたところで簡単に知らせようと考えていた。

ところが，実際の授業では，ゲームとしての三角形づくりの説明の段階で，子どもたちから，当初三角形づくりの過程で出されると予想していた疑問だ次々に出されていった。そこで，授業ではゲームに先立って三角形の定義をしたり，用語の説明などを行ったため，子どもたちが実際にジオボードを使った活動をはじめるまでに授業時間を半分を費やした。

この後，約10分程度，それぞれのグループ毎になるべくたくさんの三角形を作る活動に入った。こ

の活動では子どもたちは夢中になってジオボードに向かい次々に三角形を作った。結果的には各グループでつくった三角形の数が多すぎるほどで，後の吟味に時間がかかりすぎる結果となった。

続いて，グループ毎にできあがった三角形の中に三角形以外の形がまざっていないか，同じ形のものがないかを吟味した。ここでは，当初グループ毎に子どもたち同士の話し合いで吟味をすることを予定していたが，授業のはじめに出された疑問を扱ったときの子どもたちの様子から，一つのグループの作品を取りあげて全体で考えながら，全ての子どもたちに三角形か否かの吟味，またできあがった物の中に「同じ三角形」が含まれていないかの吟味は如何にすればよいかを考えさせようとした。実際には，時間内に取りあげたCグループの全ての三角形について吟味することすらできなかったが，この過程で子どたちに，三角形か否かについては考えさせることが出来た。

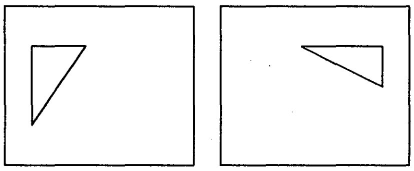
また，子どもたちの一人から「大きさが違うのものは同じ形か」という疑問が出され，これについては次の時間に考えようと言うことになった。

②第二時の概要

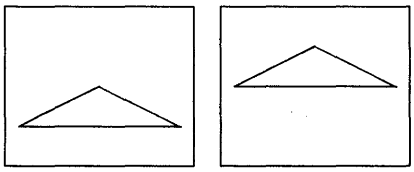
前時に続いてCグループの作った三角形を学習材として，できあがったものの吟味を続けていった。

この時間には最終的に，「向きが違っていても，形が同じならば同じ形」「場所が違っていても，形が同じならば同じ形」ということが話し合いを通してまとめられたが，この過程では活発な意見が出され，子どもたちが「同じ形」ということに対していろいろな見方をしていることがわかった。

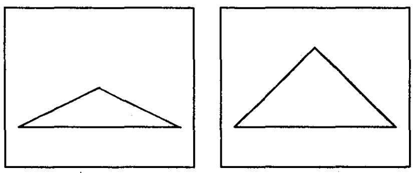
図①



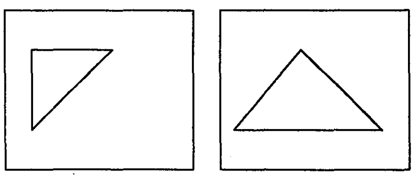
図②



図③



図④



まず始めに子どもたちが納得したのは図①のような「向きの違う物も形が同じならば同じ形としよう」という考え方である。これは既に一年生の時に，パターンブロックによるかたち遊びで経験した考え方に基づくものである。パターンブロックを使ってできる模様の種類を考えるときに向きについて考えた経験が生かされたものと思われる。

図②のジオボード上のどの位置に作られているかということについては，少々意見が分かれた。「同じ形」というのは「同じペグを結んで出来た形」と考えていた子どもとの話し合いの過程で，図③のような２つも同じ形ではないかという子が表れたりしたからである。

しかし，ここでは最終的に「同じ形」というのを「重ねたときにぴったり重なる形」とまとめ，前時の「相似形」にあたるものもふくめて「同じ」「違う」についてのルールとした。

また，一見同じようでも違う形として図④のことも話題になり，子どもたちの図形に対する見方は深まっていった。

５．実践から得た知見

(1)ジオボードを用いて三角形を作る活動について

最初に子どもたちがジオボードに触れたとき，パターンブロックの時と同様何も指示をされなくとも夢中になって遊ぶことが出来た。このことは，まずこの教具が子どもたちの興味関心の対象として優れているという事を表していると言える。

また，実践で「３つのペグを結んで形をつくろう」と提案したときにも子どもたちは夢中になってたくさんの形を作り，活動その物に夢中になり熱中して取り組むことが出来た。

さらに，この10分程度で作ったたくさんの形を学習材として展開した授業が，本来の予定よりも多くの時間を要しているという事は，ジオボードによる活動を通さない授業に較べて，子どもたちの図形に対する多くの疑問を生じさせたという点で大変価値のある活動だったといえよう。つまり，自分たちが実際に作ったという経験が，「向きの違い」や「位置の違い」「大きさの違い」などに対するこだわりを生み出し，「三角形か否か」「同じ形か否か」という話し合いを充実させることにつながった。

このような点から考えて，一般に行われているように単に紙にかかれた点を結んでいくつかの形を作る授業よりも，ジオボードを用いて行う方が，子どもたちの図形に対する考え方を育てる上で有効であると考えられる。

(2)本実践におけるジオボードの用い方について

ジオボードを用いた活動を本単元に位置づけるにあたっては，いくつかの問題点があった。

その内最も大きな問題点は，40人の子どもたちを如何に授業に巻き込むかという事である。

たとえば，“Geoboard Sorting Game (1)”の実践は，せいぜい10名程度を対象にしたものだし，“みんなと　ちがう　さんかくを　つくろう (2)”についても，20名弱を対象としたときに大きな成果が上がる実践である。

実践を計画する段階では，第一に，ジオボードでつくった15～20位の形を吟味する場を作ることを目的に考えた。というのは，作られた形が少なければその中に位置や向きが異なる「同じ形」が存在することが期待できなくなるし，多すぎれば吟味に時間がかかるからである。

本実践では，学級を8人ずつの5つのグループに分けそれぞれのグループ毎に作った形を吟味する活動を計画したが，実際にはドットペーパを与えてたくさんの形を作らせたために，作った形が多すぎる結果になってしまった。

少人数の学級ではより能率的かつ丁寧に行えるこのような活動を，その結果を十分に納得のいくような形で保ちつつ40人を対象に行うためには，「グループ編成」「作るための時間」「ドットペーパーの与え方」などの点についてさらに検討する必要がある。

参考文献

(1)Mary Baratta-Lorton：“Mathmatics Their Way” Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1976, p.80

(2)拙稿：「１年生楽しい算数活動の場づくり」明治図書，1994，pp.67-69

低学年におけるオープンな活動について

横浜国立大学大学院
佐藤 佳世

今回の研究にあたって、小学校低学年部会ではいくつかのオープンエンドの問題・問題づくりの問題を開発、発掘してきた。他の部会でも、これらの問題がたくさん紹介されている。オープンエンドという視点から集められているこれらの問題を、低学年部会では『数と計算』『量と図形』という領域で分類を行った（部会報告参照）が、ここでは『活動の種類』『用いる材料』『ねらい』など別の観点から整理してみたい。小学校（特に低学年）の問題を例にあげて整理を行うが、問題の紹介をねらいとするものではなく、どのような分類の観点があるかを探ることがねらいである。こうすることで、問題の位置付けがはっきりし、新たな問題の開発を促すことにもつながる。さらにより普段の指導の中にオープンエンドの問題を取り入れやすくなるのではないかと考える。

1．分類の観点について

まず、考えられる分類の観点をあげていきたい。「A．教具の種類」「B．領域と内容」「C．活動の種類」「D．活動のねらい」「E．オープンエンドの種類」があげられよう。「C．活動の種類」については小学校高学年部会で提案されたものを参考に、低学年部会で新たに付け加えられた“つくる”という活動を含めて６種類をあげた。

A．教具の種類

１：パターンブロック
２：色板
３：タングラム
４：折り紙
５：立体の積み木
６：カード（模様）
７：カード（数字）
８：サイコロ
９：お金
１０：数え棒
１１：方眼紙
１２：ジオボード
１３：ドットペーパー
１４：九九表
１５：カレンダー
１６：絵本（絵や写真）
１７：グラフ
１８：電卓
１９：教科書の問題
２０：教室の中のもの
２１：ワークシート

（＊各内容の具体例については後ろのページに掲載している。
表のアルファベットはそれを表している。）

B．領域と内容（内容は例である）

ａ．数と計算・・・かぞえる
大きさを比べる
合成分解
計算
ｂ．量と測定・・・長さ
体積
角度
ｃ．図形・・・・・いろいろな形を知る
図形の構成
形をつくる
敷き詰め
対称・移動
ｄ．数量関係・・・グラフ
式にあらわす
表

C．活動の種類

ア：つくる・・・・・・・・形をつくる、お話しをつくる、問題を完成させる
イ：みつける・・・・・・きまりをみつける、理由をみつける、共通する特徴をみつける
ウ：わける・・・・・・・・分類する（みつける活動も入ってくる）、数を分ける
エ：あらわす・・・・・・式にあらわす、グラフにあらわす
オ：ひろげる・・・・・・問題を発展させる
カ：その他・・・・・・・・ゲームの偶然性を用いる

D．活動のねらい

①：意欲・関心をもたせる
②：数学的な見方・考え方を育成する
③：論理的な思考力を育成する
④：直観力を育成する
⑤：知識・技能を身につける
⑥：本質を見いだす
⑦：次の学習への橋渡し

E．オープンエンドの種類

・答えが無限（何でも答えになる）
・答えが有限(答えが1つではないが有限)
・答えに至る過程がいくつかある
・問題がたくさんできる

以上のような分類の観点があげられる。オープンエンドの問題として紹介された問題は、これらの観点を通してみるとそれぞれどのような位置にあるのだろうか。低学年としては、具体物を用いた活動を重視したいため、「A．教具の種類」を主な軸としてみたい。縦軸を「A．教具の種類」とすると、横軸は「B．領域と内容」「C．活動の種類」「D．活動のねらい」の３種類が考えられる。それぞれの表をつくり、どの場合が使いやすいか、比較してみたい。

《B．領域と内容について》

	数と計算	量と測定	図形	数量関係	その他
パターンブロック	F	E	A B C D	F	
色板		E	A B C D		
タングラム	D		A B C		
折り紙		C	A B		
立体の積み木			A B C		
カード(模様)			A B		
カード(数字)	A B C D E			C E	
サイコロ	A B				
お金	A B				
数え棒	A B E	B D	C	A E	
方眼紙	A C	F	B D E	C	
ジオボード		D	A B C D E F	F	
ドットペーパー	G	D	A B C D E F	F	
九九表	A B			A B	
カレンダー	A			A	
絵本（絵や写真）					A
グラフ	A B			A	
電卓	A B				
教科書の問題					A B
教室の中の物	C	A B	D	E	
ワークシート	A B			A	

《C．活動の種類について》

	つくる	みつける	わける	あらわす	ひろげる	その他
パターンブロック	A B C D E	B C D E		F		
色板	A B C D E	B C D E				
タングラム	A B C	B C		D		
折り紙	A B C	A B	A B			
立体の積み木	A B	B	C			
カード（模様）	A B	A B				
カード（数字）		A C D E		A C		B
サイコロ		A		A		B
お金		A B	A B			
数え棒	A B C	A B	E	D		
方眼紙	E F	B	A C D	A		
ジオボード	A B C D	C D F	E	B F		
ドットペーパー	A B C D	C D F G	E	B F G		
九九表	B	A		A		
カレンダー		A		A		
絵本（絵や写真）	A					
グラフ	A					
電卓		A	B			
教科書の問題	A	A B			A B	
教室の中の物	C	A B D		E		E
ワークシート		A	B			

《D．活動のねらいについて》

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
パターンブロック	A	B C D E	C	B	B D E F		
色板	A	B C D	C	B	B D E		
タングラム	A	B	C	B	D		
折り紙				A			A
立体の積み木	A	A B	C	A	C	C	
カード（模様）	A B			B	A B		
カード（数字）		C	D E	A	A B C		
サイコロ					A B		
お金		A B			A B		
数え棒				D	A B C D E		
方眼紙	D	A E	B		C F		B
ジオボード	A	C D E F	E	D	G	E	B
ドットペーパー	A	C D E F	E			E	B
九九表		A B			B		
カレンダー		A					
絵本（絵や写真）	A				A		A
グラフ			A		A		
電卓	B			B	A		
教科書の問題	A	B			B	A B	A B
教室の中の物	A B D E			A B C	C		
ワークシート		A	A B		A B		

2．各分類についての考察

まず、以上のように３つの分類を行ってみて気づいてたことは、オープンな活動で表をすべて埋めることができるということだ。また、ある活動が多くの内容やねらいを含んでいるということもわかった。

☆「B．領域と内容」で分類してみてわかったこと

よい点として、活動が重複することなく表に位置づけることができる。よって、実際の指導でもっとも使いやすい形ではないかと思われる。さらに領域の中を単元や内容で区切り、細かくすることもできる。教具によって、［数と計算］が得意なものや、また［図形］が得意なものがある。万能なものもあるので多いに利用されればよいと思う。低学年としては、［図形］［数と計算］における活動が多かった。なお、一応分類の項目に入れた［数量関係］については低学年にはない領域なので、［数と計算］と重なるところがある。

☆「C．活動の種類」で分類してみてわかったこと

まず、活動の種類の定義がはっきりしていないため、分類においてもあやふやなところが多い。だが、わたしなりの定義を前ページにア～カとして記述しておいたので、それを参考にしながら表を見ていただきたい。分類してみてわかったことは、オープンな活動はいくつかの活動を重複して成り立っているということだ。オープンな活動に限ったことではないのかもしれないが、「活動の種類」での分類は、かなりエッセンスを取り出す形でないとはっきり行うことができないのではないか、という感じがする。例えば、“つくる”ということにしても、自由につくる場合とと制限や条件がある場合がある。この制限や条件がある場合の“つくる”活動には“みつける”という要素も関わってくる。また、つくった後には、連続して“わける”“ひろげる”といった活動が展開されることも可能である。

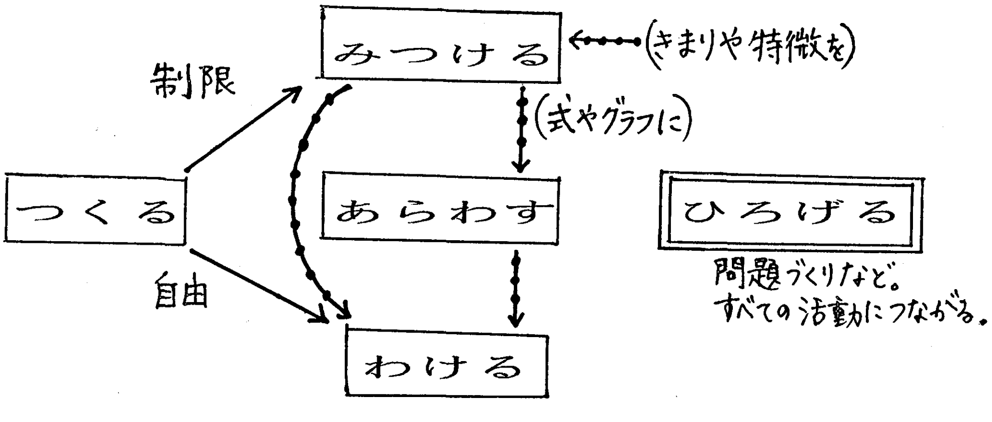


図１．活動の関連の例

☆「D．活動のねらい」で分類してみてわかったこと

これも、具体例をもとに、わたしなりの考えで①～⑦まで分けてみたが、かなり重複するところがある。分類が難しかった理由としては、それぞれの活動の使い方によってねらいを変えることができるところにあるだろう。しかし、大別してオープンな活動は、『関心・意欲を湧かせる・数や図形に対するセンスを磨く・知識・技能を育成する・本質を見抜く・算数を創り出す』というようなねらいがあることがわかった。また、これらは観点別学習評価と大変似ているので、評価による分類も行うことができる。ぜひ、その分類も行ってみる必要があるだろう。

さらに、これから求められている「情報の処理や選択の能力」や「論理的な思考力」を育成できるような問題の開発も必要である。

3．まとめ

大変不完全なものではあるが、これは教材を配列する際の一つの試みである。低学年におけるオープンな活動は、実際に手でさわり、動かし、体験していけるものを重視したいため、今回は教具（教材）で分類を行ったが、さらに「足し算」などの指導内容で分類することもできる。多様な視点から問題や活動を分析することで、それらのパターンが抽出されてくるだろう。例えば、今回はふれられなかった「Ｅ．オープンな活動の種類」や「Ａ～Ｇまでの問題のタイプ」がさらに精練されるとよい。それらの分析が、多くの経験と柔軟な考えを与えたい低学年にとって最高の活動である“問題づくりとオープンエンドアプローチ”の研究をさらに進め、教育現場に広めていくための一助になるだろう。

《活動の具体例》

１：パターンブロック・・・・・・・・Ａ．好きな形をつくる（花、果物、魚、模様など）
Ｂ．指定された形（三角形、対称など）をいろいろなつくり方でつくる
Ｃ．指定された個数だけ使ってできるだけ違う形をつくる
Ｄ．しきつめをする
Ｅ．ブロックの角を使って角度をつくる
Ｆ．各ブロックを数に見立てて形を式で表す

２：色板・・・・・・・・・・・・・・・・・・・Ａ．好きな形をつくる（花、果物、魚、模様など）
Ｂ．指定された形（三角形，対称など）をいろいろなつくり方でつくる
Ｃ．指定された個数だけ使ってできるだけ違う形をつくる
Ｄ．しきつめをする
Ｅ．角を使って角度をつくる

３：タングラム・・・・・・・・・・・・・Ａ．好きな形をつくる（花、果物、魚、模様など）
Ｂ．指定された形（凸多角形など）をつくる
Ｃ．指定された個数だけ使ってできるだけ違う形をつくる
Ｄ．それぞれのピースを分数で表し計算する

４：折り紙・・・・・・・・・・・・・・・・Ａ．切って開いたらどんな形かな
Ｂ．半分に折る折り方を考える、半分パズルをつくる
Ｃ．いろいろな角度を折る

５：立体の積み木・・・・・・・・・・・Ａ．立方体でいろいろな形（３次元）をつくる
Ｂ．立方体で指定された数だけ使ってできるだけ違う形をつくる
Ｃ．いろいろな立体を分類する

６：カード（模様）・・・・・・・・・・Ａ．黒白反転カード
Ｂ．道をつなげよう

７：カード（数字）・・・・・・・・・・Ａ．４枚のカードの数を四則計算で２４にする
Ｂ．１枚ずつカードを出して数が大きい人がカードをもらえる大きさ比べゲーム、分数の大きさ比べゲーム
Ｃ．カード９枚を使って□□□＋□□□＝□□□を埋めよう
Ｄ．数当てゲーム
Ｅ．きまりをつくろう（ブラックボックスを使って）

８：サイコロ・・・・・・・・・・・・・・・Ａ．４個のサイコロの数を四則計算で２４にする
Ｂ．サイコロをふって数が大きい人が勝ちの大きさ比べゲーム

９：お金・・・・・・・・・・・・・・・・・・・Ａ．１５０円の払い方を考えよう
Ｂ．１０００円使ってどんな買い物ができるかな

１０：数え棒…………………Ａ．赤と黄色の数え棒を合わせて１０本使って長い棒をつくる
Ｂ．長さの違う棒を使って３０センチをつくる
Ｃ．棒を使っていろいろな形をつくる
Ｄ．教室のものの長さを測る
Ｅ．手持ちの棒から何本か出して大きさを比べるゲーム
１１：方眼紙…………………Ａ．１０×１０のますを使って６３個のますを塗ろう
Ｂ．５個のますを必ず辺がくっつくように塗ろう
Ｃ．３×３の方眼紙を２つに切ろう（数の合成分解）
Ｄ．３×３の方眼紙を２つに切ってパズルをつくる
Ｅ．立方体の展開図をつくる
Ｆ．決められらた体積の立体をつくる
１２：ジオボード……………Ａ．好きな形をつくる
Ｂ．ペグにひらがながふってあるもので単語をもとに形をつくる
Ｃ．指定された形（三角形など）をつくる
Ｄ．指定された面積やまわりの長さの形をつくる
Ｅ．つくった形を分類する
Ｆ．つくった形から面積と点の数などの関係をしらべる
１３：ドットペーパー………Ａ．好きな形をつくる
Ｂ．ひらがながふってあるもので単語をもとに形をつくる
Ｃ．指定された形（三角形など）をつくる
Ｄ．指定された面積やまわりの長さの形をつくる
Ｅ．つくった形を分類する
Ｆ．つくった形から面積と点の数などの関係をしらべる
Ｇ．ドットの数え方を考える
１４：九九表…………………Ａ．きまりをみつける
Ｂ．２の段と３の段で他の段をつくる
１５：カレンダー……………Ａ．きまりをみつける
１６：絵本（絵や写真）……Ａ．算数のおはなしをつくる
１７：グラフ…………………Ａ．何のデータを表しているかを考える
１８：電卓……………………Ａ．指定された数とと演算記号だけを使って他の数をつくる
Ｂ．ある数から５以下の数を交互にひいていき１にした方が勝ちというゲーム
１９：教科書の問題…………Ａ．問題、式、答え、絵からの問題づくり
Ｂ．問題を条件不足（「□人に配る」など）にする
２０：教室の中の物…………Ａ．自分の腕の長さと同じ長さの物を探そう
Ｂ．100ｇのものを探そう
Ｃ．答えは１２です。問題は何でしょう。
Ｄ．いろいろな形や立体を探そう
Ｅ．いろいろなデータをとろう
２１：ワークシート…………Ａ．魔方陣
Ｂ．違うもの探し

《参考文献》

「The Mathematical Toolbox」1992 Cuisenaire Company of America, Inc
「算数科のオープンエンドアプローチ」明治図書、坪田耕三著
「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」東洋館出版社、島田茂編著
「算数数学の問題づくりとオープンエンドアプローチをもとにしたカリキュラムの開発研究」中間報告書　平成７年３月、研究代表者：橋本吉彦

中学校『平行四辺形の単元』における考察より

『平行四辺形の性質』の指導

横浜市立大綱中学校
安藤　秀朗

はじめに

オープンエンドアプローチでは，それぞれの課題に応じて問題の意図を明確にし，解答を発展させたり，解答相互の関連性を考えることも必要である。解答相互の関係には次のようなパターンが考えられる。

1）　それぞれの解答が独立しているもの

問題・ → ・解答１ ／ ・解答２ ／ ・解答３

2）　１つの解答から次の解答が得られるもの

問題・ ── 解答１ ── 解答２ ── 解答３ ── 解答４ → ・・・・

3）　いくつかの解答から新しい解答が得られるもの

問題・ → 解答１ ／ 解答２ ／ 解答３ → ・解答４

以下に『平行四辺形の性質』についての指導の流れと，その扱いを示す。

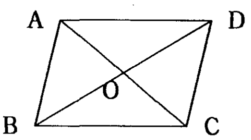
１．指導の流れと課題のねらい

①導入課題；性質をあげ相互の関連を知る。また平行四辺形特有の性質をまとめる。

＜課題１＞　平行四辺形について成り立つ性質をいろいろあげてください。

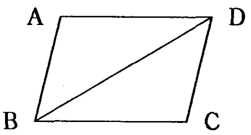
②練習課題；平行四辺形の性質の利用。解答の多様性として，特殊，発展の考えにもふれる。

＜課題２＞　平行四辺形ＡＢＣＤの対角線の交点をＯとし，Ｏを通る直線がＡＤ，ＢＣと交わる点をそれぞれＥ，Ｆとする。直線ＥＦを引いたことにより等しくなったものをあげなさい。



③練習課題；平行四辺形の性質の利用の他，課題２を生かし，特殊，発展に慣れる。

＜課題３＞　平行四辺形ＡＢＣＤの直線ＢＤ上に，ＢＰ＝ＤＱとなるような，２点，Ｐ，ＱをとりＡＰ，ＣＱを結ぶ。このときＡＰ，ＣＱを引いたことにより等しくなったものをあげなさい。（またはＡＰ，ＣＱにはどのような関係が成り立ちますか。）またそのことを証明しなさい。

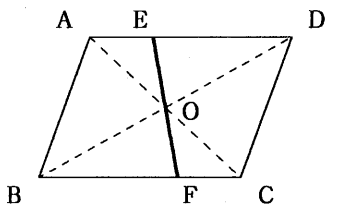


2．課題の扱い

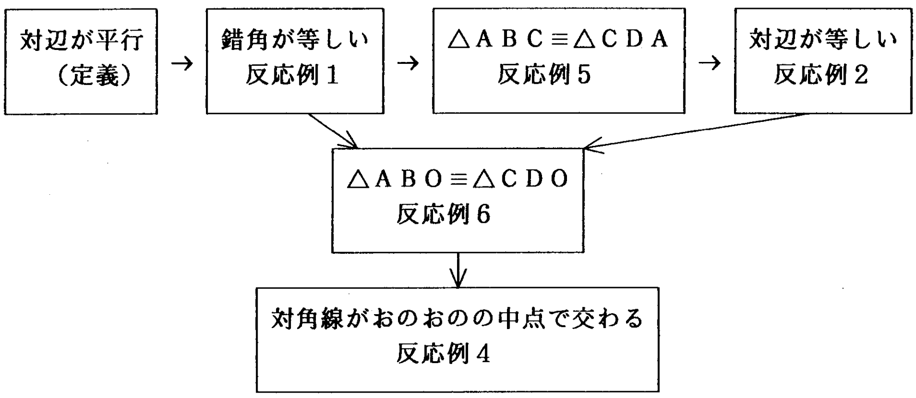
＜課題１＞

反応例

1　対角線を引くことにより錯角が等しい　（∠ＤＡＣ＝∠ＢＣＡほか）
2　対辺が等しい（ＡＢ＝ＤＣ，ＡＤ＝ＢＣ）
3　対角が等しい（∠Ａ＝∠Ｃ，∠Ｂ＝∠Ｄ）
4　対角線がおのおのの中点で交わる
　（ＯＡ＝ＯＣ，ＯＢ＝ＯＤ）
5　△ＡＢＣ≡△ＣＤＡ，△ＡＢＤ≡△ＣＤＢ
6　△ＡＢＯ≡△ＣＤＯ，△ＡＯＤ≡△ＣＯＢ
7　△ＡＢＯ＝△ＢＯＣ＝△ＣＯＤ＝△ＤＯＡ
8　Ｏを中心に点対称である。
9　Ｏを通る直線で合同な四角形に分割される。（四角形ＡＢＦＥ≡四角形ＣＤＥＦ）



課題１は考えられる性質を数多く上げ反応数をみることもできるが，その中から「平行四辺形だからこそ成り立つ」というような平行四辺形特有の性質を区別して指導する必要がある。（反応例１と３，４，５など）また，解答相互の関連性（下図など）も解答数同様，生徒の力に応じて単純な表記から全体構造をとらえたものなどが予想されるが，最初は各自があげた性質からまとめ，少しずつ全体像に近付けるよう指導をすればよい。

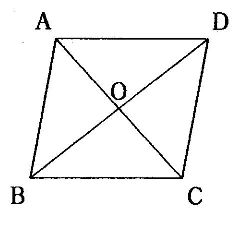


7.のような解答は未習の範囲であるが，なぜ等しいかを考えさせた上で発表者に簡単に説明させておくことで，後に出てくる三角形を等積に分割するときの素地になる。8.は課題を動的に，9.は課題を発展的にとらえた着想である。9.は四角形の合同条件を扱っていないため証明しにくいが，２つの四角形は構成要素である「４つの角及び４つの辺がすべて等しい」ので，合同であることが理解できようさらにこの解答を通して四角形の合同にはどのような条件が必要なのかを生徒に投げ掛けてやることも可能となる。このような着想に対しては生徒にその価値と解決の道筋，さらに発展を示す指導が求められる。

また，現行の教科書では性質を次のようにまとめ，３つであるかのように扱っているが，実際には６つあり，これをまとめたものであるということは押さえたい。これは平行四辺形の条件の指導のときに重要な意味をもってくる。

1．２組の対辺が等しい。
2．２組の対角が等しい。
3．対角線はおのおのの
　中点で交わる。

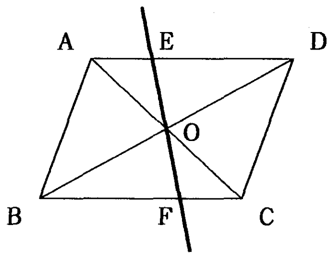
①ＡＢ＝ＤＣ　②ＡＤ＝ＢＣ
③∠Ａ＝∠Ｃ　④∠Ｂ＝∠Ｄ
⑤ＡＯ＝ＣＯ　⑥ＢＯ＝ＤＯ



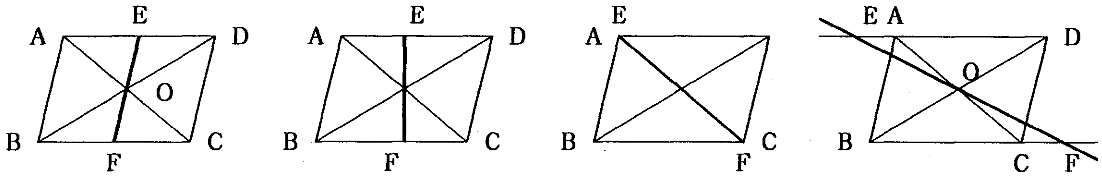
＜課題２＞

反応例

1. ∠ＥＯＡ＝∠ＦＯＣ，∠ＥＯＤ＝∠ＦＯＤ（対頂角）
2. ∠ＡＥＯ＝∠ＣＦＯ，∠ＤＥＯ＝∠ＢＦＯ（錯角）
3. △ＡＥＯ≡△ＣＦＯ，△ＤＥＯ≡△ＢＦＯ
4. ＡＥ＝ＣＥ，ＥＤ＝ＢＦ
5. ＥＯ＝ＦＯ
6. 四角形ＡＢＦＥ≡四角形ＣＤＥＦ
7. ∠ＡＯＦ＝∠ＣＯＥ，∠ＥＯＢ＝∠ＦＯＤ
8. △ＡＯＦ＝△ＣＯＥ，△ＥＯＢ＝△ＦＯＤ

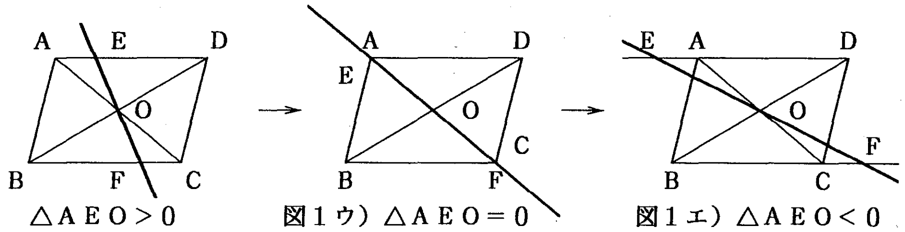


直線ＥＦのとりかたは一般的には図のようになるが，図１のようなものも考えられる。特殊化（ア，イ，ウ），発展（エ）などを取り上げ指導する必要がある。また図２のようにＥＦを動的に見ることも可能で，この場合△ＡＯＥの面積に意味付けをすることもできる。



ア）ＡＥ＝ＥＤ　イ）ＡＤ⊥ＥＦ　ウ）ＥＦ＝ＡＣ　エ）ＥはＤＡの延長上

図－１　＜直線ＥＦの引き方＞



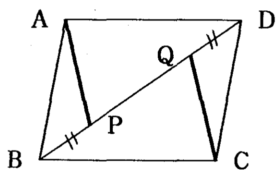
△ＡＥＯ＞０　図１ウ）△ＡＥＯ＝０　図１エ）△ＡＥＯ＜０

図－２　＜ＥＦを動的にみる＞

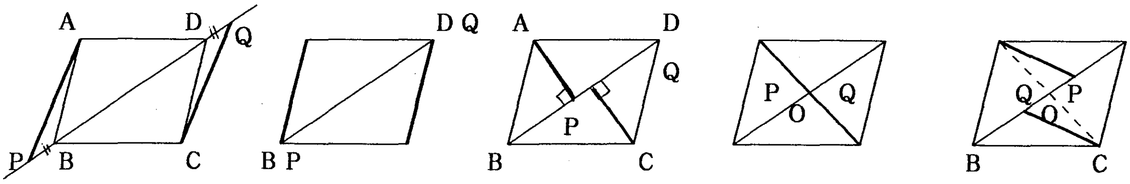
＜課題３＞

反応例

1. ∠ＢＡＰ＝∠ＤＣＱ，∠ＤＡＰ＝∠ＢＣＱ
2. ∠ＡＰＢ＝∠ＣＱＤ，∠ＡＰＤ＝∠ＣＱＢ
3. ＡＰ＝ＣＱ
4. ＰＤ＝ＱＢ
5. ＡＰ//ＱＣ
6. △ＡＢＰ≡△ＣＤＱ，△ＡＰＤ≡△ＣＱＢ
7. ＢＣの中点を中心にＡＰ，ＣＱが点対称の位置にある。



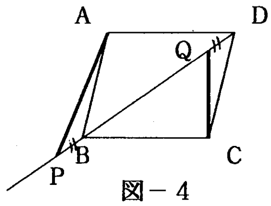
Ｐ，Ｑのとりかたは図３のようにも考えられる。



ｱ)ＰはＢの外　ｲ)ＰとＢが一致　ｳ)ＡＰ⊥ＢＤ　ｴ)ＰとＯが一致　ｵ)ＢＰ＞ＢＯ

図－３　＜点Ｐ，Ｑのとり方＞

ここでは課題２同様，特殊化，発展の考えを指導できる。さらに特別なとりかたのひとつに，図４のようなものも考えられる。この場合ほとんどの性質は成り立たなくなるが，△ＡＢＰ＝△ＣＤＱは成り立ち，△ＡＢＰの面積を負と考えることで，面積についての意味付けも可能である。



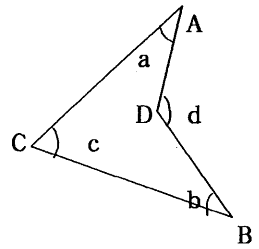
図－４

これらの課題の素地として平行線や角の指導においては，次のような指導が効果的である。事前にふれておきたい。

課題

図で内角ａ，ｂ，ｃ，の和がｄとなることを示しなさい。

∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝∠ｄ



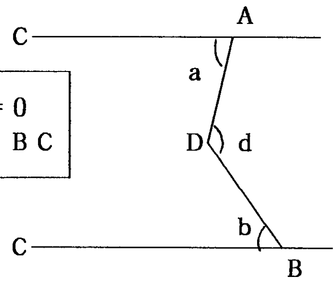
① 上の課題の発展としてＡＣ，ＢＣを広げ∠ｃを０に近付けていくと，ＡＣ // ＢＣとなり∠ｃ＝０と考えることができる。

すなわち

∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝∠ｄ

→　　∠ａ＋∠ｂ＝∠ｄ

∠ｃ＝０
ＡＣ // ＢＣ



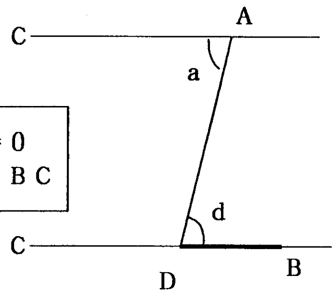
② 次に，ＢＤを動的にとらえ，∠ｂを０に近付けていき，ＤをＢＣ上に重ねる。この状態は平行線の錯角が等しいことを表している。

すなわち

∠ａ＋∠ｂ＝∠ｄ

→　　∠ａ＝∠ｄ

∠ｂ＝０
ＡＣ // ＢＣ



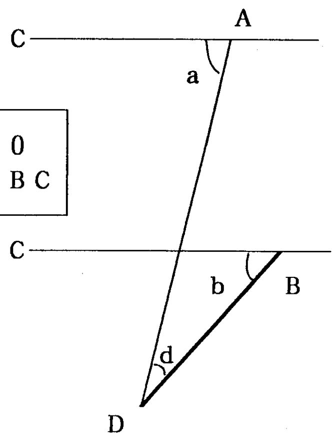
③ さらにＢＤがＢＣの下にきた状態を考え，このときの∠ｂの値を負と考えれば，三角形の外角と内角の関係を表している。

すなわち

∠ａ＋∠ｂ＝∠ｄ

の関係が成り立つ

∠ｂ＜０
ＡＣ // ＢＣ



中学校2年 平行と合同の単元での問題づくりについて

横浜国立大学教育学部附属横浜中学校　石川　昌

1．単　元　名　　平行と合同「問題づくり」

2．単　元　観

(1)　平行と合同の単元の位置づけとねらい

中学校2年の平行と合同の単元は、中学校の数学の論証活動の第一歩として重要な位置を占めている。“数式の計算はよいのだけれども、図形の証明は苦手だ”という生徒は多いが、論証指導の第一歩を工夫することによって、“証明っておもしろい、数学っておもしろい”と感じる生徒が増えることを期待したい。

初期の論証活動では、証明の記述ができることに重点をおかずに、図を利用して、あるいは、図の中の記号を用いて、口頭で説明できることを目標にすべきであろう。本単元の学習では、既習事項の根拠とすることを明確にし、筋道立てて説明できることをくり返すことによって、論理的考えていく活動に慣れ、その後の本格的な論証活動につなげていきたい。

(2)　問題づくりの効用

問題づくりは、「原題」（もとになる問題）から条件や場面の一部を変えて、新たな問題をつくろう、という投げかけから始まる。問題づくりの効用としては、次のようなことが考えられる。

第1に、問題をつくる活動そのものが、「数学をする（Do Math.)」ということであり、それによって、学習したことを発展させようとする態度が育ち、数学に対する関心・意欲を高めることになる。第2に、自分や級友がつくった問題は、他から与えられたものより自力解決しようとする意欲が湧き、さらに、原題で学んだことを活用することによって、数学的な見方・考え方が育つという利点がある。第3に、つくった問題のねりあげ過程で、多様な解決方法が発表され、級友の考えを理解し、認めあっていくなかで、数学的な考え方を用いるよさや数学のよさを各自が感得できるという点である。

以上のことから、数学をする意欲や、数学的な考え方の育成が図れる機会が、問題づくりの学習には含まれているといえよう。

(3)　原題の選択と平行と合同の単元での問題づくりの授業の位置づけ

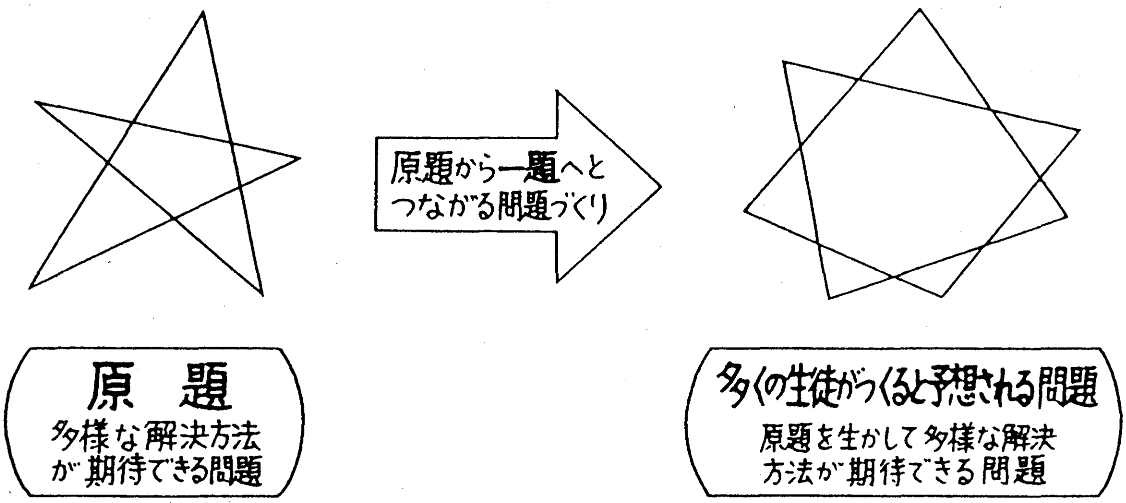
原題が、多様な解決方法の期待できる問題であると、そこでの解決が、原題からつくった問題の解決に生かされ、そこでも多様な解決方法が期待できる。したがって、今回の原題には、多様な解決が期待できる問題を使って、授業を展開することにした。

原題は、星形の5角形の内角の和の問題とし、平行と合同の単元の「平行と角」（7時間扱い）の終わりの3時間で、原題の解決・問題づくり・つくった問題の解決を行うことにした。

(4) 原題から一題へとつながる問題づくりの投げかけ

問題づくりは、原題を解決した後、原題からいろいろな問題をつくり、つくった問題を分類・整理し、いくつかのつくった問題を解決するという形が一般的である。しかし、たくさんの問題がつくられた場合、その意欲・態度を高く評価できる反面、たくさんのつくった問題をまとめること、それぞれを解決することは、たいへんな労力と時間を要する。

そこで、生徒たちのつくる問題が自然に一題へとつながる問題づくりの投げかけを考えた。つまり、「原題から問題をつくろう。」という投げかけに加えて、「原題からいろいろな問題をつくることが予想されますが、この原題の次に、みんなの課題として扱う問題を一題予想してつくってみよう。」という投げかけをすることにした。それには、星形７角形の和の問題をつくってほしいという意図がある。星形７角形は、図が複雑なこともあり、初期の論証活動には適切でないと懸念されるが、原題から一題へとつながる問題づくりの投げかけで、自分が・自分たちがつくったんだという意識によって意欲的な学習が期待できる。また、星形５角形のときには自力解決できなかった場合でも、そこで学んだ数学的な見方・考え方を生かして、星形７角形の内角の和のときには自力解決できるようになるのでは、と考え扱うことにした。



3. 単　元　目　標

(1) 対頂角・同位角・錯角の意味、および、対頂角、平行線と同位角・錯角の性質を理解する。
(2) 三角形の内角の和・内角と外角の関係を既習事項を使って導くことができる。
(3) 多角形の内角の和・外角の和を既習事項を使って導くことができる。
(4) 角度問題を多様な方法で解決することができる。
(5) 多様な方法で解決した角度問題を原題として、発展的な角度問題をつくることができ、それを多様な方法で解決することができる。

4. 指　導　計　画「平行と角」―――――――――――――― 9時間扱い

(1) 対頂角・同位角・錯角、平行線と同位角・錯角 …………………………… 3時間
(2) 三角形の内角・外角、多角形の内角・外角 ……………………………………… 3時間

(3) 原題（星形５角形の内角の和）の解決 ……………………………………………… 1時間

(4) 問題づくり ……………………………………………………………………………… 1時間（本時）

(5) つくった問題（星形７角形の内角の和）の解決・検討 ……………………… 1時間

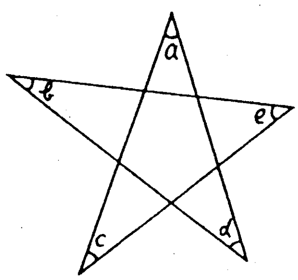
5．本 時 目 標

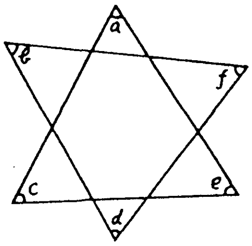
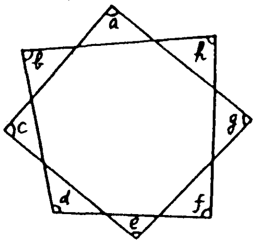
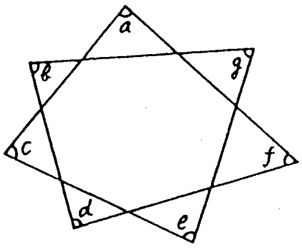
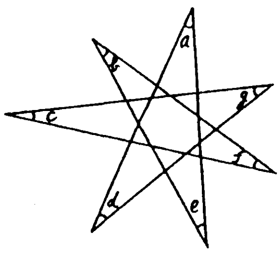
(1) 原題をもとに自らの課題として意欲的に問題をつくることができる。（関心・意欲・態度）

(2) つくった問題を原題の解決方法から類推したり、記号化や演繹的な考え方を用いて、解決する事ができる。（数学的な考え方､表現・処理）

(3) 解決のために必要な根拠となる図形の性質を理解している。（知識・理解）

6．展　開

<table>
<tr><th>教師の発問と活動</th><th>生 徒 の 活 動 と 反 応</th><th>評 価 と 手 立 て</th></tr>
<tr><td>1．原題の提示
「前時に学習した星形５角形の内角の和の問題をふりかえってみよう。」</td><td>◦原題を理解し、前時の学習内容でのさまざまな解決方法をプリントを見てふりかえる。</td><td>◦前時の学習内容に関心を持ってふりかえっている態度を認め、今日の学習に期待を持つよう促す。</td></tr>
<tr><td colspan="3">適当な点を５つとります。その５つの点を１つおきに結ぶと右の図のような星形５角形ができます。このとき、ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ＋ｅの角の大きさは何度　なるのでしょうか。

</td></tr>
<tr><td>2．問題づくりの投げかけ
「今日の学習はどんなことだと思いますか。」</td><td>◦原題をもとに問題づくりをするのであろうと考える。</td><td>◦原題をもとに問題づくりをしようとする姿勢を認め、問題づくりをする準備をさせる。</td></tr>
<tr><td colspan="3">この原題から問題をつくってみよう。いろいろな問題をつくることが予想されますが、この原題の次に、みんなの課題として扱うだろうと思われる問題を一題予想してつくってみよう。</td></tr>
</table>

3．問題づくりの実行		
「原題の場面・一部を変えて、問題をつくってみよう。」	◦5つの点を6つにして考える。 	◦点の数をふやしたことを数学的によい態度と認めるが、その解決が1つで単純であることに気づかせる。そして、5、6ときたら次は、と問う。
◦机間指導しながら生徒が問題をつくれるよう助言を与える。	◦5つの点を8つにして考える。 	◦点の数が偶数個のときは、解放が1つで単純であることに気づかせ、なぜそうなのかに目を向けさせる。 ◦点をふやすのではなく、形を変えて問題をつくった生徒を認め、解決するよう促す。
「問題をつくった人は、自分のつくった問題を解決してみよう。」	◦5つの点を7つにして、1つおきに結んで考える。 	◦つくった問題のよさを認めまずは、1つの方法で解決するよう促し、さらに別の方法で解決するよう促す。
◦机間指導しながら生徒が自力解決できるよう既習事項・原題の解決方法をふりかえるよう促す。		◦既習事項・原題での解決方法を活用して解決していることを認める。
◦多様な方法で自力解決するよう促す。	◦7つにして、2つおきにして考える。 	◦1つおきではなく2つおきの問題をつくったことを認め解決するよう促す。 ◦記号化することや演繹的に考えることを認め、根拠を明確にして証明するよう促す。
4．つくった課題の発表・検討		
つくった問題を発表してもらいます。みんなで検討してみましょう。		

9．評　価

(1) 原題をもとに自らの課題として意欲的に問題をつくることができたか。(関心・意欲・態度)

(2) つくった問題を原題の解決方法から類推したり、記号化や演繹的な考え方を用いて、解決することができたか。(数学的な考え方、表現・処理)

(3) 解決のために必要な根拠となる図形の性質を理解していたか。(知識・理解)

「中学２年　相似な図形」を題材に
ー長期にわたるオープンエンドアプローチと問題づくりの指導の中でー

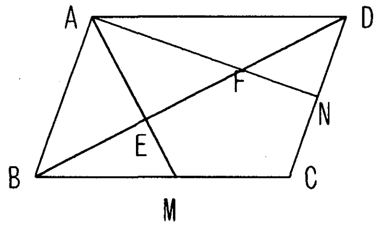
東京学芸大学附属世田谷中学校　　山崎　浩二

本稿では、特に中学２年の図形指導におけるオープンな活動を取り入れた一事例を示すことにする。この事例をも含めて、オープンエンドアプローチ及び問題づくりを取り入れたカリキュラムの縦断的研究との関連についても言及してみたい。

1　原題とねらい

(1) 原　題（澤田他編 1995)

平行四辺形ＡＢＣＤの辺ＢＣ，ＣＤの中点をM，Nとし、AM，ANとＢＤとの交点をE，Ｆとする。
このとき、成り立つ関係をできるだけあげなさい。



(2) 指導のねらい

① 「見つける」ことから

この図形の中には様々な関係がかくれている。等しい辺や角にはじまり、相似、辺の比など、見方によっていろいろと取り出せる。場合によっては、新たに線を加えて関係を引き出せるものもあるかもしれない。見つけたものがそれぞれ「本当に成り立つか」どうかわからないものもある。証明することを前もって与えてしまうと、せっかくこのような興味深い活動が省略されかねない。自分たちで見つけたことを自分たちの手で確かめていく。「見つける」活動を取り入れることは、図形に対する見方や考え方をふくらますきっかけをつくり、加えて証明に対する意識や必然性も生まれてくる。

② 「つくる」ことへと

この問題をもとに今度は新しい問題をつくってみる。原題をもとにおのおの「似たような」問題をつくってみるのである。形や辺の比、線の数などを変えることで、生徒一人ひとりの独自の問題ができる。「原題のこの条件をこう変えたら関係はどうなるだろう」、「原題のこの条件を生かしておもしろい問題ができないか」など、変える部分をいろいろと検討したり、関係をより深く追求したり、何とか難問をひねりだそうとしたり、様々な活動が期待できそうである。図を変え関係をさらに見つける、解が存在するように問題をととのえる、第１時で「見つけた」ことを一般化するなど、多様な発展的アプローチが生徒一人ひとりの活動の中で見られよう。「つくる」こと自体に、数学的な活動がたくさん盛り込まれている。

③ 「解くこと」から「ひろげる」ことも

友達のつくった問題を解き合う。教科書の問題を解くときとはちょっと違った活動が予想できそうである。その中には、成り立つかどうかわからないもの、条件が足りないもの、未習の内容を必要とするもの、なども含まれている。このようなタイプの問題は教科書にはほとんど見られない。それでも生徒の取り組み方は違ってくる。

つくった問題を何題か発表してもらい、共通に解決する問題を決める。このときには、例えば次のようなタイプの問題を用意しておく。

・原題に用いた知識や表現の習熟が図れるような問題
・原題で見られた関係をさらに一般化できる問題
・次の指導内容へと関連づけられる問題
・原題とは逆の構造をもつ問題
・条件が不備な問題

これらは、どれもその問題を「解く」中で様々な「ひろがり」が可能となるタイプの問題である。これらを上手に展開していくことは、問題づくりを取り入れた授業のよさを引き出すこのになろう。

④ 予想される反応

ア. 「見つける」ことの予想

・∠ADE＝∠CBM, ∠ABD＝∠CDB, ∠AED＝∠BEMなど（角に関すること）
・AE:ME＝BE:DE, AB:DN＝AD:BM, AE:ME＝AF:FN, MN:BD＝1:2など
（辺の比に関すること）
・△ADE∽△BME, △CMN≡△CBD（相似に関すること）
・△DNF:△ABF＝1:4, △ABE:　ABCD＝1:6など（面積に関すること）
・BE＝EF＝DFなど（辺に関すること）

イ. 「つくる」ことの予想

・形を変える。（平行四辺形→正方形、長方形、台形、一般四角形、円、三角形など）
・辺の比を変える。（中点→３等分など）
・求めるものを変える。
・逆の問題にする。　など

(3) 指導計画（３時間扱い）

第１時　原題の解決（関係を見つける　関係を証明する）
　　　　問題づくり
第２時　つくった問題の発表と分類　共通問題の解決
第３時　友達のつくった問題の解決と評価　感想の記入

２　授業の実際

(1) 指導目標

・与えられた図形の中から、いろいろな関係を見つけ、それらを証明しようとする。
・原題をもとに新しい問題をつくることができる。
・つくった問題を証明し、原題を発展的に見ていくとともに、さらに見つけた関係をひろげていこうとする。

(2) 生徒の反応

① 「見つける」ことの反応（第１時で発表された反応）

ア．△AED∽△MEB
イ．△ABF∽△NFD
ウ．BE：EF：FD＝１：１：１
　（BE＝EF＝DF）
エ．△ABD≡△CDB
オ．四角形AMCN＝$\frac{1}{2}$ 平行四辺形ABCD
カ．△CNM∽△CDB
キ．△AEF∽△AMN
ク．△BCZ≡△DAN
　（ZはCEの延長とABの交わる点）

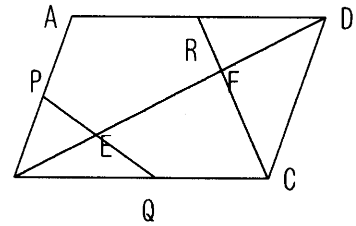
② 「つくる」ことの反応（第２時で取り上げた問題を中心に）

ア．問題の分類

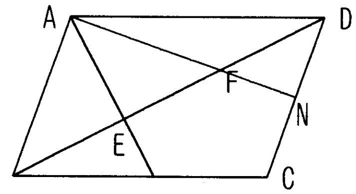
平行四辺形を別の図形に変えたもの	１４
点の位置や辺の数を変えたもの	１８
辺の比を変えたもの	１６
求めるものを変えたもの	１２
逆 の 問 題	３
オープンエンドの問題	３
合　　計	６６

イ．生徒の反応例

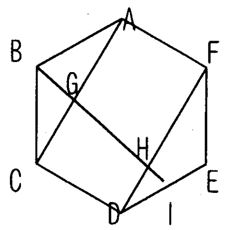
Ａ．平行四辺形がある。辺AB，BC，DAの中点をP，Q，Rとする。対角線BDとPQ，CRとの交点をE，Fとする。
BE：FD＝3：4のときBE：BDを求めよ。
（点の位置を変えたもの）



Ｂ．平行四辺形ABCDの辺BCの中点をMとし、直線DC上にDN：NCが1：2となるような点Nをとる。AM：ANとBDとの交点をE，Fとする。このとき、BE：EF：FDの比を求めよ。　（辺の比を変えたもの）

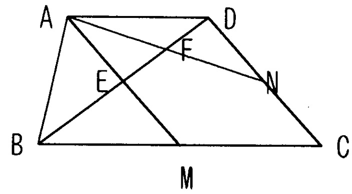


Ｃ．正六角形ABCDEFの点IはDEの中点である。BG：GH：HIを求めよ。
（形を変えたもの）



Ｄ．とある四角形ABCDの辺BC，CDの中点をM，Nとし、AM，ANとBCとの交点をE，Fとする。　△AED∽△MEBのときこの四角形は平行四辺形といえるか。
いえない場合は反例をあげてください。（逆の問題）

Ｅ．AD//BCの台形の辺BC，CDの中点をそれぞれM，Nとし、AM，ANとBDとの交点をE，Fとする。
AD＝1/2BCのとき、BE：EF：FDをを求めよ。
（形を変えたもの）



３　長期にわたるオープンエンどアプローチと問題づくりの指導とこの授業の考察

資料１に示すように、年間を通じてオープンな活動を取り入れたカリキュラムの概略と、本事例との関連について考察する。

(1) オープンな活動を企図したカリキュラムの具体化

① オープンな活動の実施（どの程度実施したのか）

オープンエンド及び問題づくりの授業は年間６回実施した。学期ごとの内訳は、１学期に２回、２学期３回、３学期１回である。その総授業時間数は14時間（１時間あたり50分）である。授業者が年間実施した総授業時間数は今年度54時間であり（平成８年２月19日現在 うち５時間は教育実習生が実施　また各学期ごとの考査及びその講評時間はいずれも除いてある）、オープンエンド及び問題づくりにあてた授業時間は全体の約４分の１である。

② オープンな活動の内容（どんな題材を取扱ったのか）

６回の実施のうち、オープンエンドの授業を４回、問題づくりの授業を２回実施した。内容的には、オープンエンドの授業では、「見つける」活動（図形から関係や性質を見つける）を３回、「つくる」活動（一定の大きさの面積をつくる）を１回実施した。問題づくりについては２回であるが、いずれも関係を見つけてから問題をつくるといった、オープンエンドと問題づくりの連動のものであった。

(2) 授業の考察

本事例は、３学期に実施した６回目の授業である。

① オープンエンドや問題づくりの指導のよさ

生徒が原題から見つけた関係は全部で８つで、いずれも図形をよく観察しているものである。学級全体で証明はウのBE＝EF＝DFを取り上げたが、ウの証明がアやイを含んでいることは当然議論された。証明の方法も３通り出され、生徒どうしお互いの方法を聞き、楽しんでいたようである。問題づくりについても、反応例に見られるように、概ね６つの視点から66題の問題がつくられた。どの問題も、原題との関連を保ちながら内容的にも豊かなものであった。共通問題の解決、個人での解決など、教師の介入を少なく、生徒どうしで活動をすすめていった印象がある。このような考察の背景の一つには、これまでの５回の授業の中で、その展開の手順を生徒がある程度理解し、このような学習を生徒自身も教師自身も楽しんできたという影響が考えられよう。達成されたカリキュラムとその評価に関しては、全授業が終了した時点で試みるつもりではあるが、これまでの生徒の学習の感想ではこのような授業に対する好意的な意見が多かった。

② ふだんの授業の中でのはたらきかけ

６回の授業の他にも、例えば、ふだんから教科書に見られるクローズドな問題を、意図的にオープンな取り扱いを取り入れたり、逆の問題を常に考えたり、あるいは教科書に取り上げられている問題を互いに関連づけて取り扱ってきた。本事例では、逆の問題やオープンエンドの問題を生徒が自然につくる場面が見られた。原題がオープンエンドの問題であったこともあるが、少なくとも数学の中でこのようなタイプの問題や発展が、生徒にとってあまり特別なものではないと捉えていることもうかがえる。こうしたことも、ふだんの授業の中でのはたらきかけの継続の一つの影響であると考えられよう。

資料１　意図したカリキュラムと実施したカリキュラムの対比

意図したカリキュラム	実施したカリキュラム
図形の調べ方　15時間扱い	14時間扱い
平行線と角（３）	平行線と角（2.5）
図形を調べていくときの基礎になる見方 対頂角の性質 平行線と同位角の関係	
平行線と錯角の関係	三角形の角（4.5）
三角形の角（３） 三角形の内角の和 三角形の内角と外角の関係 角の分類と三角形の角による分類 多角形の内角の和、外角の和 三角形の合同（１）	星形n角形の内角の和の証明方法（２）
移動で重ねることができる２つの図形が	三角形の合同（１）
合同な図形であること 合同な図形の性質 三角形の合同条件 問　題（１）	
証　明（１）	証明・証明のしくみ（３）
証明の必然性 証明の意味 証明のしくみ（２） 仮定と結論の意味 証明のすじみち 証明の根拠となるおもなことがら	オープンエンド（２つの三角形）（１）
合同条件と証明の進め方（３）	合同条件と証明の進め方（３）
合同条件を使って簡単な図形の性質を証明すること 合同条件を使って基本の作図を正しいことを証明すること。	オープンエンド（２つの正三角形）（３）
問　題（１）	
図形と合同　22時間扱い	20時間扱い
二等辺三角形（４）	二等辺三角形（５）※
図形の基本性質を根拠にすると、いろいろな図形の性質が次々と導き出されること 二等辺三角形の基本性質とその証明 定義の意味 定理の意味 ２角の等しい三角形は二等辺三角形であること 正三角形の性質とその証明 逆の意味とその真偽 直角三角形（２）	
直角三角形の合同条件とその使い方	直角三角形（１）
合同条件を使って（２）	
合同条件を使って図形の性質を調べること	合同条件を使って（２）
仮定を変えて問題をつくり、それの証明	
問　題（２）	
平行四辺形（５）	平行四辺形（５）
平行四辺形の定義とその性質、性質の証明 平行四辺形になるための条件とその証明	オープンエンド（平行四辺形をつくろう）（３）
長方形とひし形（２）	長方形とひし形（１）
長方形、ひし形、正方形の定義	

四角形の包摂関係 長方形、ひし形、正方形の対角線についての性質	
	平行線と面積（3）
平行線と面積（3）	
平行線の距離の意味とその性質 平行線間による等積変形とそれを使った台形の性質の証明 等積変形を使った作図	オープンエンド（○○の面積をつくろう）（2）
	問　題（2）
問　題（2）	
図形と相似　17時間扱い	20時間扱い
拡大・縮小と相似（3）	拡大・縮小と相似（3）
ある図形と、それを拡大または縮小した図形の関係を学び、それをもとにして、図形の性質を調べること １点を中心として図形を拡大したときの対応する辺や角の関係を調べること 相似の意味と相似な図形の性質、相似比 三角形の相似条件	
相似条件と証明（2）	相似条件と証明（7）
三角形の相似条件を使って図形の性質を調べること	問題づくり（平行四辺形をつかって１）（2）
平行線と線分の比（5）	
三角形の１辺に平行な直線で他の２辺を切り取るときの線分の比と、その逆 ２つの直線を平行な直線で切り取るときの線分の比	問題づくり（平行四辺形をつかって２）（3）・・・本事例
三角形の２辺を等しい比に切りとるときの線分の比と位置関係	平行線と線分の比（3）
中点についての定理（4）	
三角形の中点連結定理とこれらを用いる図形の性質の証明	中点についての定理（3）
三角形の中線の交点が重心であるという定理	
縮図の利用（1）	
縮図をかいて、高さや距離などを求めること	縮図の利用（2）
問　題（2）	
	問　題（2）
計　54時間扱い	計　54時間扱い

括弧内の数字は時間数を表す。意図したカリキュラムは、啓林館の教師用指導書に書かれている指導計画である。また、※は教育実習生が実施した授業を示す。実施したカリキュラムには、オープンエンド及び問題づくりの活動の内容のみを記載してあり、その他の空欄部分については概ね意図したカリキュラムの内容と同じものとする。

本事例の指導案を含めたこのカリキュラムの指導の詳細については、VFG10633@nifty.or.jpにて提供しています。

<引用文献>

澤田利夫・坂井裕編（1995）．中学校数学科課題学習 問題づくりの授業．東洋館出版社．p.213.

この中の清宮俊雄先生の「幾何の問題をどう作るか」で取り上げられている問題の一部を引用させていただいた。

「ととのえる」活動から「ひろげる」活動へ

－条件不備の問題を原題とした問題づくり－

横浜国立大学大学院
小林　哲郎

１．はじめに

本研究においては，オープンエンドアプローチ，問題づくりの共通点であるオープンな活動を軸としたカリキュラムの開発が主題とされている。本稿では，オープンな活動のうち特に，「ととのえる」活動と「ひろげる」活動に着目し，その活動によって得られた反応をもとにして内容を構成するという考えにたち，１つの事例によりその可能性について考察してみる。

２．「ととのえる」活動と「ひろげる」活動について

本研究においてはオープンな活動といったものが提案されている。ここでいうオープンな活動とは，「みつける」，「わける」，「あらわす」，「ひろげる」，「ととのえる」といったものである。そのうち，「ひろげる」活動というものは，問題の発展的な扱い（問題づくり）から抽出できる活動であり，「ととのえる」活動というものは，数学化を要求するような問題や条件不備の問題の条件を整えることから抽出できる活動である。

「ととのえる」活動においてはを，「構成要素に着目する考え」，「依存関係に着目する考え」といった数学的な考え方を用いることとなる。そして，「ととのえる」活動も「ひろげる」活動も最終的には数学的な問題をつくるという点では共通点があるといえよう。そこで，ここでは「ととのえる」活動と「ひろげる」活動を関連づけて考え，「ととのえながらひろげる」あるいは「ひろげながらととのえる」といった指導展開の可能性について考察することとした。

ここでは，生徒に条件不備の問題を与え，条件を「ととのえる」活動を通して「ひろげて」いく指導展開について考える。

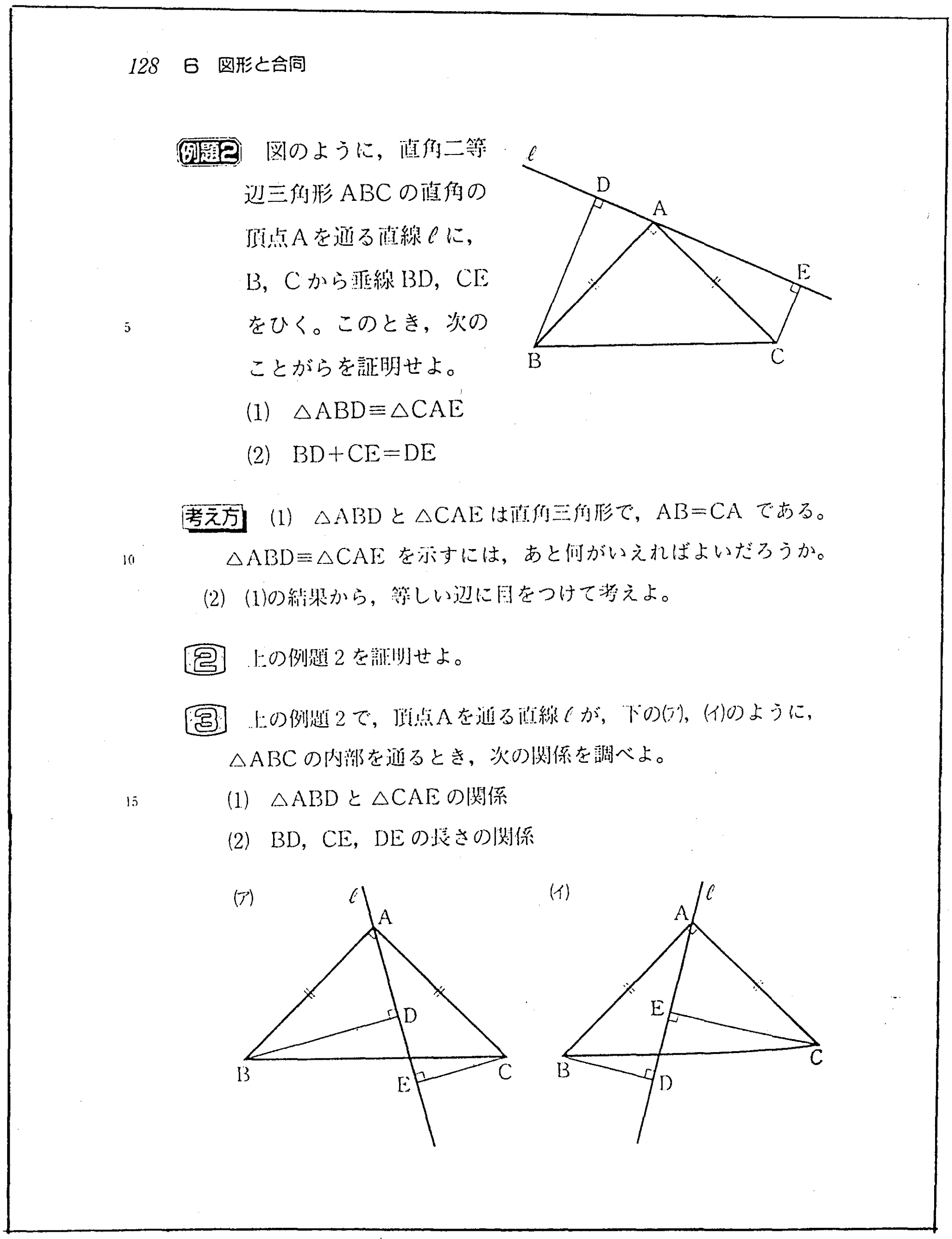
石田淳一氏は，本研究前年度報告書において，教科書の問題を条件不備の問題にすることに，

(1) いろいろな答が出る
(2) 多様な答を使って新しい問題が生まれる
(3) 原題の構造を理解できる

といった意義が見出せると述べている。このことからも条件不備の問題を扱うこと（「ととのえる」活動）と問題づくり（「ひろげる」活動）の共通性が伺える。したがって，ここでは教科書の問題を条件不備の問題にすることで，「ととのえながらひろげて」いき，生徒自身で内容を構成していくことができないか，その可能性を探っていくこととする。

3．原題について

ここでは，中学校第２学年「図形と合同」の単元における１つの課題について考察する。現行の６社の教科書のうち，４社に次のような課題が掲載されている。（４社のうち，K社については問３のような発展的な課題が続いている。）



128 6 図形と合同

例題2 図のように，直角二等辺三角形ABCの直角の頂点Aを通る直線ℓに，B，Cから垂線BD，CEをひく。このとき，次のことがらを証明せよ。

(1) △ABD≡△CAE

(2) BD+CE=DE

考え方 (1) △ABDと△CAEは直角三角形で，AB=CAである。△ABD≡△CAEを示すには，あと何がいえればよいだろうか。

(2) (1)の結果から，等しい辺に目をつけて考えよ。

2 上の例題2を証明せよ。

3 上の例題2で，頂点Aを通る直線ℓが，下の(ア)，(イ)のように，△ABCの内部を通るとき，次の関係を調べよ。

(1) △ABDと△CAEの関係

(2) BD，CE，DEの長さの関係

この課題の流れは，例題２を問題づくりの原題とし，問３を発展的な問題と考えると問題づくりの授業の流れに類似している。しかし，問３のような発展的な課題は教科書から与えられて取り組むのではなく，本来，生徒自身から内発的に発生することが望ましい。そこで，２で述べた，意義(1)～(3)を考慮に入れて，次のような条件不足の問題を与え，「ととのえながらひろげる」活動を行うこととした。

原題

ＡＢ＝ＡＣである二等辺三角形について，頂点Ａを通る直線ℓにＢ，Ｃから垂線ＢＤ，ＣＥを引く。 このとき，△ＡＢＤと△ＡＣＥが合同であることを証明せよ。

４．予想される生徒の反応

上記の原題を生徒に与え，まず，取り組ませる。この問題が条件不備の問題であることは作図を通してすぐに確認することができる。条件不備の問題であることを確認した後，「この問題に何か条件を加えて△ＡＢＤと△ＡＣＥが合同となるような問題につくり変えてみよう。」と発問する。「ととのえる」活動はオープンな活動であるから，予想される生徒の反応としては，次のような多様なものが考えられる。

(1) ＡＢ＝ＡＣである直角二等辺三角形ＡＢＣについて・・・直線ℓを（△ＡＢＣの外部に）引く。・・・
(2) ＡＢ＝ＡＣである直角二等辺三角形ＡＢＣについて・・・直線ℓを（△ＡＢＣの内部に）引く。・・・
(3) ・・・頂点Ａを通り辺ＢＣと平行な直線ℓを引く。・・・
(4) ・・・頂点Ａから辺ＢＣに垂線ℓを引く。・・・
(5) ・・・∠Ａの二等分線ℓを引く。・・・
(6) ・・・ＡからＢＣに中線を引く。・・・

５．考察

このような原題での，条件を整えて問題をつくりなおす活動は，「みつける」，「あらわす」などのオープンエンドアプローチや問題づくりの授業と比べると総反応数は少ない。また，反応(3) ～(6) については，完成された問題としては同じものとなり，証明などは統合的に扱っていくことができる。しかし，こうした授業においては，完成された問題を証明することよりも，問題の条件を「ととのえて」あらわす活動に重点をおく必要がある。

授業中に生徒の反応として得られないものについては教師側から紹介することが必要である。特にここでの，反応(1),(2) などはかなり高度な反応であるといえよう。そうしたものについては，教師側から紹介することにし，それについて生徒が吟味するということが重要な点である。まずは，「ととのえる」，あるいは「ひろげる」といった活動がオープンなものであるということに気づかせる必要があろう。

これらの反応を扱い，それらを統合的に吟味することで，１ページの内容を１つの課題によるオープンな活動で網羅することができるといえよう。そして，問題の構造を理解することに迫ることができると考える。

一方，オープンエンドアプローチ，問題づくりに共通していえることでもあるが，特にこうした指導展開では時間がかかることが問題点としてあげられよう。

また，他の単元についても「ととのえる」活動から「ひろげる」活動を行うことの意義・問題点について考察する必要がある。そして，そのような展開により，内容を統合し，知識・技能を獲得していくことの可能性を探っていく必要がある。

中国・上海市現行教科書にみられるオープンエンドの問題とその考察

横浜国立大学大学院２年

周　光海

中・日の算数・数学科におけるオープンエンドアプローチの取り扱い方に関する比較調査研究を行うために、中国・上海市の現行教科書をオープンエンドの問題の取り扱い方について調べることにした。

調べる対象となったのは、中国・上海市の小・中学校数学科教科書で、いずれも《九年制義務教育数学科課程標準》にもとづき、上海市小・中学校課程教材改革委員会検定済、１９９４年６月発行のものである。また、学年については、小学校では３、４学年、中学校では中１学年の３つの学年を対象とした。内容については、次の３つについて調べることにした。

1)中国・上海市現行教科書にみられる問題の類型。

2)現行教科書にみられる問題総数とオープンエンドの問題数。

3)オープンエンドの問題数と各領域別の関連。

次の表1、表2は中国・上海市現行教科書にみられる問題の類型と現行教科書にみられる問題総数とオープンエンドの問題数のまとめである。

(表 1)　中国・上海市の教科書の問題の類型

	上海市現行教科書
問	準備問題 思考
例題	例、試一試 練一練
章末	練習 総復習
特設	動脳筋 祢知道嗎 想想算算 思考題

（表２）

	問題数	合計
３年	１１ ７１１	11 ７１１ (1.54%)
４年	５ ８２１	5 ８２１ (0.61%)
中１	1 ４７７	1 ４７７ (0.21%)

（表の上段はオープンエンドの問題数，中段は教科書の問題総数，下段はその割合数。）

中国、上海市の教科書にみられるオープンエンドの問題の内容については、資料に示す通りで、一番多いもの　は、いわゆる創造的、発展的な考え方を育つ図形の問題で、３ヶ学年の１７題　のうち９題だった（５３％）。そのうち、条件に合うような図形を自由につくる問題は５題、図形の敷き詰め問題１題、図形から関係を見つける問題１題、　条件を加え、選択する問題２題であった。次いては、問題の発展的な取り扱い　を意図した問題づくりの問題で、３ヶ学年の１７題のうち６題だった（３５％）。　この中に、図をみて問題をつくりなさい問題２題、数、式に関する問題２題、　未完成の問題から完成して解きなさい問題２題であった。

他には、数表からきまりを見つける問題１題，数、式に関する問題２題であった（１２％）。

学年別のオープンエンドの問題数については、３学年では１１題（６５％），4学年では５題（２９％），中１学年では１題（６％）となっている。又、問題づくりの問題はすべて３学年に占められている。また、上の数字からみると、学年

を高くにつれてオープンエンドの問題、オープン化可能な問題の数が減っていく。これは、学年を高くに連れて、学習内容が指導しにくくなっていくのが原因である。また、小６、中３学年の進学試験，高３の大学試験には、これらの問題が入れないのも原因であった。

中国、上海市の教科書にみられるオープンエンドの問題の特徴は次の通りである。

① 図形を用いたオープンエンドの問題、（全部１７題のうち９題、５３％）。

これは、考え方の豊かさ、算数・数学の美しさを教え、育つ領域なので、重視していることが考えられる。

② ３学年の（２）、（９）のような「問題を完成してから、解きなさい」問題は日本の教科書からあまり見られない。このタイプの問題は一般の問題づくりの問題（生徒が何をつくればよいのかわからない問題）より生徒の自分のレベルに合わせてつくりやすい問題だと思う。

③ 教科書の問題は、「問、例題」、「章末」、「特設ページ」と３つに分けるとオープンエンドの問題の割合は次の通りである。

	問、例題	o	割合	章末	o	割合	特設	o	割合
３学年	220	0	0.0%	456	8	1.7%	35	3	8.6%
４学年	251	0	0.0%	542	4	0.7%	28	1	3.6%
中１年	281	0	0.0%	196	1	0.5%	0	0	

＊oはオープンエンドの問題。数字は問題数と割合数。

オープンエンドの問題は「章末」、「特設ページ」に集中していたことからみると、中国ではこれらの問題が単元、学期を終わってから復習、総復習として取り扱っている傾向がある。また、「特設ページ」で取り扱った問題は、思考問題として、授業中ではなくて家に帰って自由に考えさせることも多い。そして、表から中１学年の「問、例題」の問題数、「章末」の問題数は、小学校段階の同じ類型の問題数と逆転になっていることが分かった。

④　教科書の問題では、各領域別に分ける。小学校では「数と計算」、「量と測定」、「図形」、「数量関係」４つに分け、中１学年では「数と式」、「数量関係」、「図形」３つに分けるとオープンエンドの問題は次の通りである。

	数と計算	割合	数量関係	割合	図形	割合	量と測定	割合
3学年	5	29.4%	1	5.9%	3	17.6%	2	11.8%
4学年	1	5.9%	0	0.0%	3	17.6%	1	5.9%
	数と式	割合	数量関係	割合	図形	割合		
中1年	0	0.0%	0	0.0%	1	5.9%		

＊中国の教科書からみられる領域別のオープンエンドの問題数とその割合率の統計量

＊前項の数字は各領域のオープンエンドの問題数。割合数は全部のオープンエンドの問題数（17題）を割った数である。

中学３年生の図形領域におけるオープンエンドアプローチ

横浜国立大学大学院　相川　博彦

１．はじめに

第５回の研究会のときに周先生が提案された図形の問題について、別の指導展開を考えそれを第７回の研究会のときに発表させて頂いた。そのときに問題として指摘されたことは、生徒に全てのチャート表作成してもらうことは困難であること。どのような授業展開にすればＡＥ＋ＡＦ＝ＡＢを発見してくれるのか、ということを指摘して頂いた。

前回指摘して頂いたことを踏まえて、今回も同じ課題でオープンエンドアプローチの授業展開を考えてみた。授業の主な目的を３つ考え、それぞれについて、生徒が発見した事柄の生かし方を具体的に示してみた。

２．周先生が提案された図形の問題

図１のように、△ＡＢＣはＡＢ＝ＡＣの直角二等辺三角形で、点Ｐは頂点Ａから底辺ＢＣに引いた垂線とＢＣとの交点である。またＥ，Ｆはそれぞれ２点Ａ，Ｐ，を通る円と辺ＡＢ、辺ＡＣとの交点である。

このとき図１をみて、成り立つ関係をできるだけたくさん挙げなさい。下の(1)～(4)は関係を見つけるときの目のつけどころです。

(1)辺　(2)形　(3)角　(4)その他(合同、相似など)

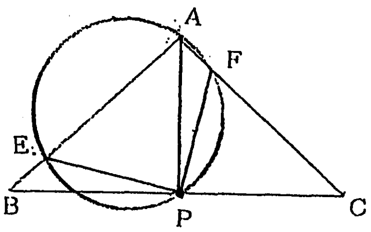


図1

３．本授業の実施時期と時間数

本授業の実施時期は、教師が何を目的とするかによって異なってくる。

実施時期：1)円周角の定理を学習した直後(次時に学習する円に内接する四角形を目的とした場合)
　　　　　2)接弦定理の内容に入る前（ＡＥ＋ＡＦ＝ＡＢの証明を目的とした場合）
　　　　　3)接弦定理の内容に入る前(いろいろな性質を見つけ関連づけることを目的とした場合)

時間数　：２時間（ただし2)の場合は１時間扱い）

４．本授業の目的

３．の1)2)3)の目的以外に、次のような目的も各授業の共通した目的としたい。

①発見する面白さ、創造の喜びを感じてもらうこと（情意面）

１時間目に発見した個々の事柄を関連付けていきチャート表を作成していく過程を通して数学的活動の面白さや、物事を筋道立てて考えていく面白さを感じてもらうこと。

また、図形の証明の面白さを感じている生徒がいる一方で、図形の証明を苦手としている生徒も大変多いのが現状であろう。図形の証明に関して遅れた生徒に対してはその子たちの反応を取り上げてあげ関連づけていく過程で、それらの反応がある事柄の発見において重要な根拠となっていることを感じてもらいたい。そのことが学習への意欲につながるであろう。

②図形における性質の発見の仕方を学ぶこと

見つけた性質を式で表すという経験がなければ、ＡＥ＋ＡＦ＝ＡＢの関係を発見することはできないであろう。同様に相似の三角形を見つけているだけで、それを基に辺の関係を見つけることも難しい。合同や相似の関係を、辺や角までの関係に発展させることの面白さを感じてもらいたい。

③筋道立てて考えていく力（演繹的な考え方）の育成（数学的な考え方）

１時間目に生徒たちが発見してくれたものを構造化していく過程で、筋道立てて考えていく力（演繹的な考え方）を育成することである。

５．本授業の展開

●１時間目

(1)問題提示（５分）・・・問題の意味をきちんと理解してもらう。分からなければ例を挙げる。

(2)いろいろな関係を見つける（２０分）・・・辺、角、合同、相似などの関係を生徒たちに発見してもらう。一つも発見出きない生徒に対しては教師が個別に対応して、その原因を探る。なるべく理由も考えてもらうようにするが、予想でもよいことを押さえる。

(3)見つけた関係を発表する。（２０分）・・・辺、角、合同、相似、その他の順に発表してもらう。正しいかどうかは後で考えることにして、誤答も取り上げる。

(4)１時間目のまとめと次時の予告（５分）

●２時間目

(5)「ならばカード」の個人作成（１０分）・・・いきなり生徒が見つけた性質を関連づけたチャート表を作成することは難しいので、右の図２のようなカードに記入してもらうことによってまず、小命題を作成してもらう。カードに記入しておくことによって、前時に発見した個々の事柄を関連づけやすくなる。

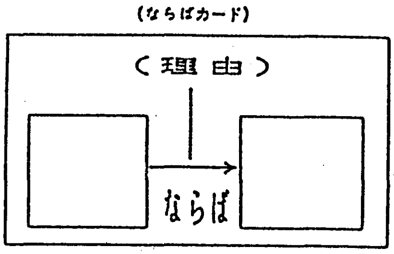


図２「ならばカード」

(6)個々で「ならばカード」を関連付けていく。（５分）・・・関連付けられたカードの関係をノートに記入しておくように指示する。

(7)班（５～６人）ごとに集まって話し合う.（１５分）・・・個々が作成したチャート表を持ち寄って討論し、より大きなチャート表を作成し、それをノートに写しておく。また１時間目に出た誤答についてなぜいけないのかの理由についても話し合うよう指示する。

(8)全体で「ならばカード」を関連付けていく。（１５分）・・・班ごとに自分たちが作成したチャート表を発表してもらう。教師は１時間目に生徒たちが発見した事柄を書いたカードをたくさん用意しておき、それを黒板に張りつけて説明してもらう。

(9)まとめ（５分）・・・全体的なまとめと次時へのつながりを伝える。

６．課題提示において線分ＥＦが記入されている場合とそうでない場合との比較について

まず量的な面から比較してみる。

	線分ＥＦの存在に関係なく発見可能な性質	線分ＥＦが存在しているときだけに発見可能な性質（ただし線分APとEFとの交点をGとする）
角	∠ＡＥＰ＋∠ＡＦＰ＝２∠Ｒ ∠ＥＡＦ＋∠ＥＰＦ＝２∠Ｒ ∠ＰＦＣ＝∠ＡＥＰ，∠ＢＥＰ＝∠ＡＦＰ ∠ＥＰＡ＝∠ＦＰＣ，∠ＢＰＦ＝∠ＡＰＦ ∠ＡＢＰ＝∠ＢＡＰ＝∠ＡＣＢ＝∠ＰＡＣ ＝½∠Ｒ ∠ＥＰＦ＝∠Ｒ	∠ＡＦＥ＝∠ＡＰＥ，∠ＦＡＰ＝∠ＦＥＰ ∠ＡＥＦ＝∠ＡＰＦ，∠ＥＡＰ＝∠ＥＦＰ ∠ＥＰＢ＝∠ＡＥＦ，∠ＰＥＦ＝∠ＰＦＥ＝½∠Ｒ ∠ＧＥＰ＝∠ＦＣＰ＝∠ＥＡＰ＝½∠Ｒ ∠ＡＧＥ＝∠ＦＧＰ，∠ＡＧＦ＝∠ＥＧＰ
辺	ＢＰ＝ＡＰ＝ＣＰ，ＦＣ＝ＥＡ，ＰＥ＝ＰＦ ＡＦ＝ＢＥ，ＡＥ＋ＡＦ＝ＡＢ	ＡＧ：ＧＦ＝ＧＥ：ＧＰ
合同 相似	△ＡＢＣ∽△ＰＢＡ △ＢＥＰ≡△ＡＦＰ △ＦＣＰ≡△ＥＡＰ	△ＡＥＧ∽△ＦＰＧ，△ＡＧＦ∽△ＥＧＰ △ＦＰＣ∽△ＧＰＥ，△ＧＥＰ∽△ＥＡＰ △ＥＰＦ∽△ＢＡＣ，△ＥＰＦ∽△ＢＰＡ
その他	点Ｐは△ＡＢＣの外心，$\overset{\frown}{PE}=\overset{\frown}{PF}$	線分ＥＦは直径

点線が引いてある関係は、授業の目的に応じて扱いたい性質である。それらは全て、線分ＥＦの存在に関係なく生徒が発見可能であることが分かる。よって線分ＥＦが引いてあることの長所は、

●生徒が発見することのできる性質、命題の数が多くなること

が考えられる。

逆に、線分ＥＦが引いてあることの短所としては、

●ＡＥ＋ＡＦ＝ＡＢの発見をしづらくさせている可能性があること
●内接四角形の性質である∠ＡＥＰ＋∠ＡＦＰ＝２∠Ｒの証明において、生徒の証明方法を制約している可能性があること

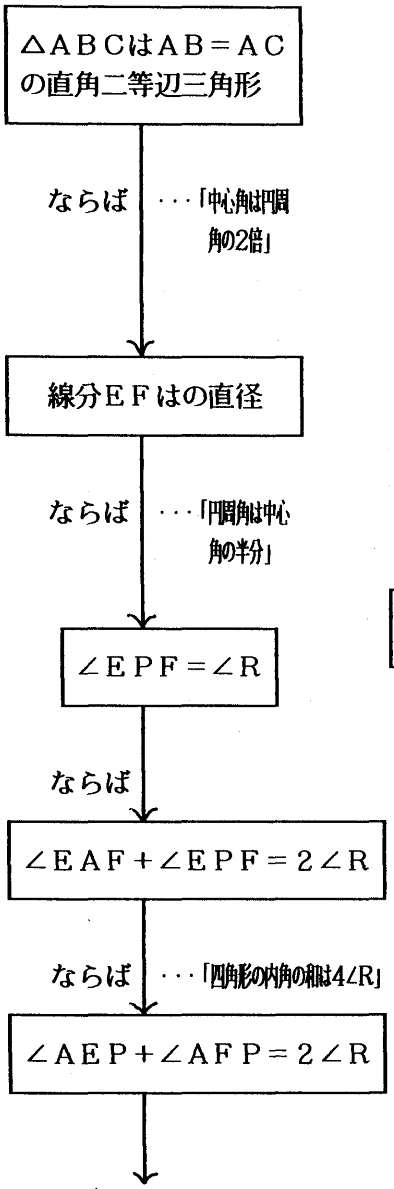
が考えられる。特に２番目の短所について詳しく説明する。向かい合う２つの内角の和が２∠Ｒである証明は、円周角は中心角の半分であるということ、もしくは三角形の内角の和が２∠Ｒであることを用いて証明することができる。好ましい方法は、できるだけ近い時期に学んだ知識を用いている、前者の方法である。しかし、線分ＥＦが引いてあることによって、後者の方法に生徒の思考を制約してしまう可能性がある。

以上の考察から、線分ＥＦを削除したかたちで課題を提示した。線分ＥＦを引いて、いろいろな性質を見つけた生徒が出てきた時点で、「点ＥとＦを結んだらどんな性質が新たに見つかるかな？」と発問すればよいであろう。

7．各授業の目的における生徒の反応の扱い方の具体例

下の1)2)3)はそれぞれの目的に応じた生徒の反応の生かし方の例である。1)の例は必ず授業でとりあげ、その他のものについても時間の許す限り取り上げていく。3)の場合は1)と違って必ず取り上げたい反応はない。2)の場合はオープンエンドアプローチの授業とはならない。

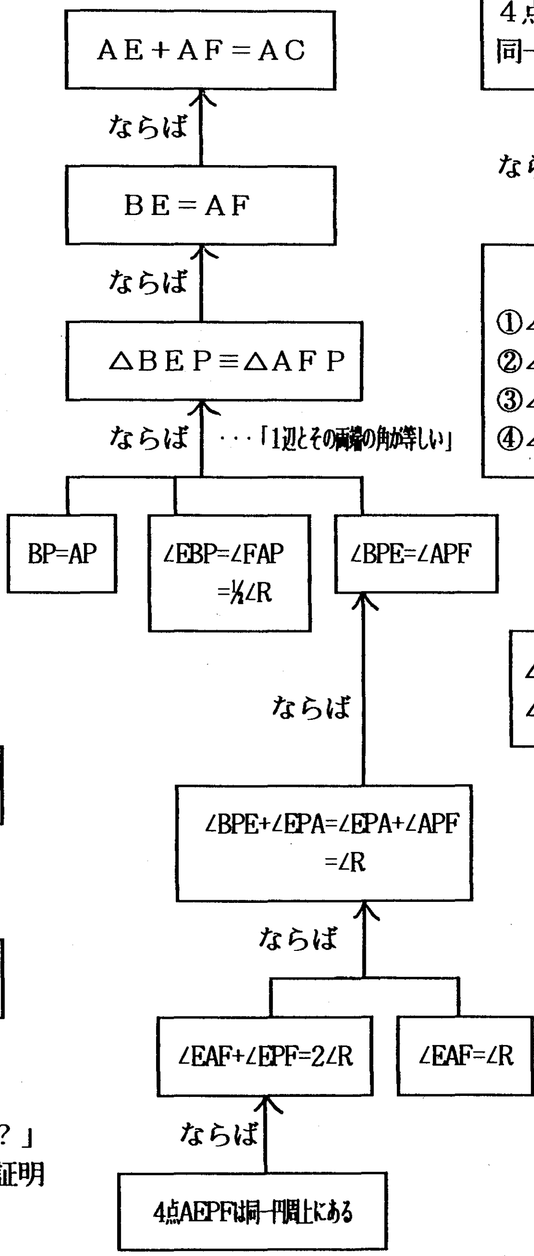
1)円に内接する四角形の性質を目的とした授業の場合



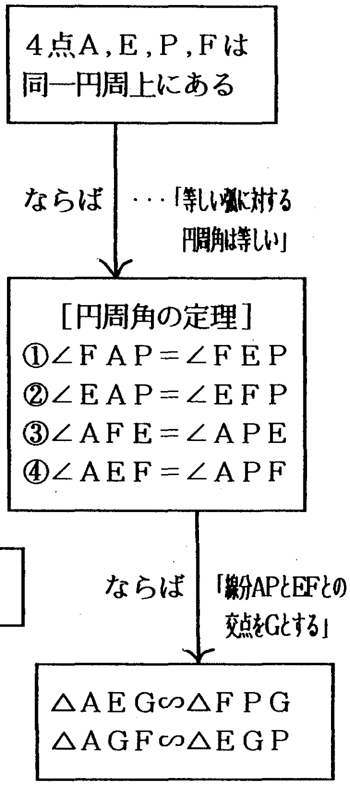
「一般的に言えることだろうか？」と教師が投げ掛け、次の時間に証明を行うことを伝える。

2)ＡＥ＋ＡＦ＝ＡＣの証明を目的とした授業の場合

ならばカードをAE+AF=ACを出発点として逆につなげていく（解析的な思考の流れ）。



3)いろいろな性質を見つけ関連づけることを目的とした授業の場合



参考文献

・柳本　成一；生徒達が複数の命題と証明を同時につくり上げていく幾何の授業，科学教育研究 Vol.18 No.2 ,1994 ,pp.74-80

パスカルの三角形を用いた「場合の数」の指導に関する一考察

横浜国立大学大学院
小　山　　直　人

［1］はじめに

現行の高等学校学習指導要領では、数学Ⅰの「個数の処理」で順列・組合せを取り扱うことになっている。ここでは、教材にパスカルの三角形を用い、指導法にオープンエンドアプローチを取り入れることによって生じる学習効果について考察することにする。

［2］指導のねらい

パスカルの三角形は高校数学の中で、主に次の内容と関連して取り上げられることが考えられる。

・数学A：「数と式」における　$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ 等の多項式の展開
・数学Ⅰ：「場合の数」における ${}_nC_r$ の概念
・数学A：「数列」における二項定理、数列とその和の求め方

本稿では、これらの内容のうち、特に「場合の数」の理解の深化を目指す意図でパスカルの三角形を用い、現象に潜む性質や法則性を発見し、それをもとに学習活動を進めていく過程を通して、論理的思考力や表現力を身に付けていくことをねらいとしている。このような指導目標のもとで、オープンエンドアプローチを用いた授業を考えることにする。

［3］授業の展開と考察

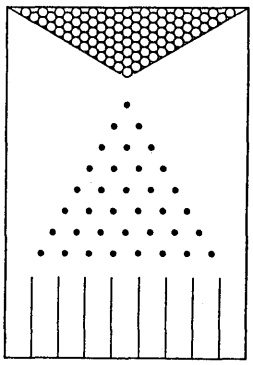
数学Ⅰの「個数の処理」の学習を終えた高校一年の生徒を対象に、以下のような二時間扱いの授業を行なう。

【第一時】

（1）本時のねらい

パスカルの三角形を初めから完成したものとして与えるのではなく、生徒自ら「作る」過程を通して第二時で課題を解決する際の意欲の高まりを促す。

（2）授業の流れ

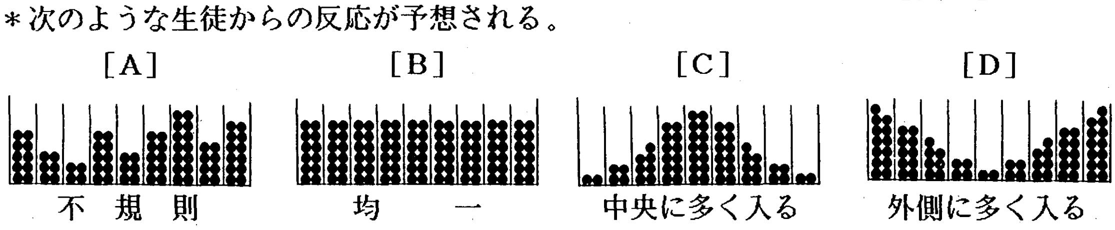


【図1】

提示課題Ⅰ

右図のようなパチンコ台でたくさんの玉を上から落としたとき、下にどのように溜(たま)るか考えなさい。

＊次のような生徒からの反応が予想される。



＊ここでの留意点は、生徒に必ず理由を考えさせることである。これが、事象を数理的に考察するきっかけとなるからである。

予想される理由

［A］：玉の落ち方は偶然に左右されるから。

［B］：等間隔でクギが打ち付けられているので、どの場所へも均等に玉が散らばる。

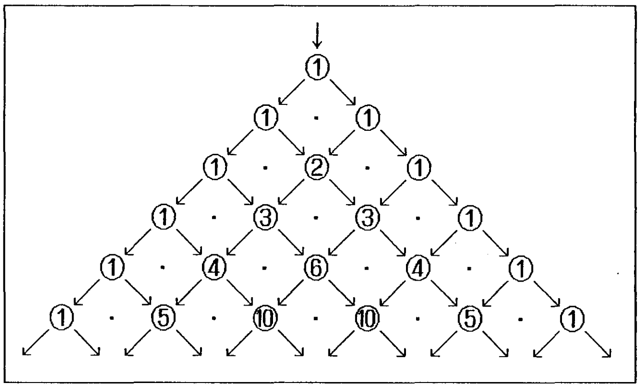
［C］：最初に中央から玉を落としているから。

［D］：打ち付けられたクギに邪魔されて、玉が中央から外側へ弾かれてしまうから。

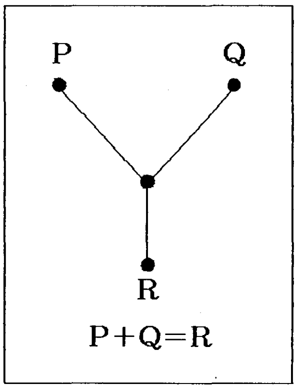
＊この段階での生徒の反応は、直感的思考に裏付けれらたものがほとんどであろう。指導者としては、それを否定するのではなく、後の授業展開とのつながりから直感的思考の限界を実感するきっかけとして生かしたいところである。

－実　験－

実際に図１のような教具を用意して上から玉を落としてみることにより、［C］型が正答であることがわかる。何度実験を繰り返しても、必ずこのような山型になることへの不思議さと驚きを、その理由を探究しようとする意欲へとつなげたい。理由を思索する際に、生徒の思考がまだ直感的なものから抜け出せない場合は、教師の支援活動として図２のように玉の落ち方を「場合の数」の考え方を使うように方向付けする。これにより、三角形状に打ち付けられたクギの間を玉が落ちるに従って、外側よりも内側の方が通る場合の数が多いことがわかる。これは、図３のように、どの場所でも必ず右上と左上の両方から玉が集まることに起因する。この現象が段数が増加するごとに累積して外側と内側の差が増大し、最終的には前出の［C］型のようになるのである。このような思索経験を通して、直感的思考法では、ともすれば“真”とも受け止められがちな ［A］，［B］，［D］ 型の状態が、実は現象を論理的に考察することによって誤りであることがわかり、ものごとを数理的に処理することのよさと必要性を教え込みでなく、学習者自ら実感することができるのではないだろうか。



【図２】板　書



【図３】

【第二時】

（１）本時のねらい

パスカルの三角形について成り立つ性質を発見し、それを証明する過程を通して事象を数理的に表現し、処理する能力を養う。

（2）授業の流れ

前時のパチンコ玉が落ちる場合の数を取り出して並べることによって、右図のようなパスカルの三角形が得られる。これが、図3の P+Q=R 以外にも様々な性質をもっていることを生徒に告げ、どのような性質があるのか考えさせるために次のような課題を提示する。

パスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

【図4】

提示課題Ⅱ

パスカルの三角形にはどのような性質があるか、できるだけたくさん考えなさい。また、自分の発見した性質が成り立つ理由を数学的に説明しなさい。

予想される生徒の反応として、主に次のようなものが考えられる。

1：左右対称である。 $[\ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}\ ]$

2：どの段も一番外側は、必ず1である。
$[\ {}_nC_0 = {}_nC_n = 1\ ]$

3：斜めの2列目の数の並び方は、等差数列 $a_n = n$ に等しい。

4：斜めの3列目の数の並び方は、階差数列

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(n+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

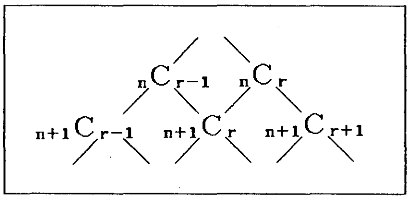
に等しい。

$${}_0C_0$$
$${}_1C_0 \quad {}_1C_1$$
$${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$$
$${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$$
$${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$$
・・

【図5】

5：各段とも横一列の数の並びは、多項式 $(a+b)^n$ の展開式の係数の並びと同じである。

6：横一列の数の和の2倍が次の段の横1列の数の和に等しい。（図6）



【図6】

Ex. 2（1+1）=1+2+1

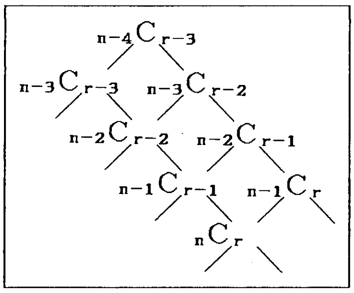
$(\because)\quad 2(\,{}_nC_{r-1} + {}_nC_r\,) = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r + {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$
$= {}_{n+1}C_{r-1} + {}_{n+1}C_r + {}_{n+1}C_{r+1}$

7：一番左上から右下のある場所まで斜めに数をすべて加えたものは、最後に加えた数の左下の数と一致する。（図7）

Ex. 1+3+6+10=20

$(\because)\quad {}_{n-4}C_{r-3} + {}_{n-3}C_{r-2} + {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_{n-3}C_{r-3} + {}_{n-3}C_{r-2}$
$+ {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_{n-2}C_{r-2} + {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$
$= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$

図4をもとにしてこれらの法則を考えるうちに、教師が提示しなくても自然と図5のような構造が生徒の頭の中で出来上がってくるはずである。また、第一時で取り扱ったＰ＋Ｑ＝Ｒは、 ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$ そのものであり上記$\boxed{1}$, $\boxed{2}$等とともに、ともすれば、「公式として暗記」してしまいがちな、これらの法則を生徒自ら発見し、数学的に表現する過程を通して、「自然な形で」理解することができる。そして何よりも、これらの法則が成り立つことは、第一時でパチンコ玉が山型に落ちるという実験結果に基づいており、数学が自然科学であるという認識を改めて実感する一つのきっかけにもなるに違いない。



【図７】

数学教育本来の目標は、人から与えられた事柄をそのまま覚えて、教えられた通りにしか行動できない人間を育てることではなく、むしろ自らの意思で現象を論理的に考察する姿勢を養い、そこから法則性や性質を発見する喜びを通してものごとを数理的に処理し、表現する能力を育成するところにある。これは「数学をつくる」という精神にも通じており、学習者がそれまで抱いていた数学観をも変えうる可能性をもっている。数学離れが深刻化する中で、オープンエンドアプローチは学習者の情意的側面をも動かす可能性をもった指導法と言える。

［４］今後の課題

生徒の予想される反応例のうち$\boxed{3}$, $\boxed{4}$等のように、内容としては「場合の数」とのつながりが薄いものもでてくることが考えられる。これらの反応に対して、指導者はどのような価値づけを行い、それ以降の授業展開に生かすかについて考察する必要がある。本授業で取り扱う内容を「場合の数」のみに限定するか、「数と式」、「数列」等も包括させるかによって、授業の構成が変化することが考えられるからである。また、学習内容の枠に捕らわれずに現象を数学的にモデル化する活動に重点を置くことによって、第一時での展開の際に、さらにオープン性をもたせた指導を行うことが可能となる。今回は生徒の思考を「場合の数」の考え方を用いるように方向付けしてある為、自らの力でパスカルの三角形を作り上げたとは言い難い側面もある。論理的思考力や表現力を育てることが本授業の目標である以上、現象のモデリングに重点を置くことの効果を考慮に入れなければならない。さらに、今回は場合の数の理解の深化を図るという目的で、学習が終了した後に本授業を設定したが、 ${}_{n}C_{r}$ の概念形成そのものが目的であれば、導入場面での位置づけが妥当である。これらの点についての考察が今後の研究課題と言えよう。

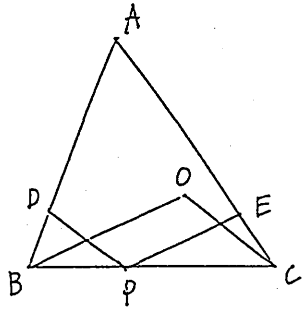
［５］参考文献

島田茂：『算数・数学科のオープンエンドアプローチ　－授業改善への新しい提案－』
東洋館出版　1995 pp.191-197.

本稿は、中学校３年生を対象に 初等幾何学講座 「発見的研究法」として、東京学芸大学名誉教授であられる清宮俊雄先生が１９９５年（平成７年）７月１１日（火）に東京学芸大学附属世田谷中学校で授業されたものをテープをもとに起こしたものである。なお、文中のアンダーラインは清宮先生が強調されていたと思われる部分である。

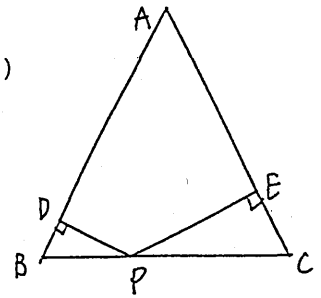
なお、生徒にはあらかじめプリントの「問題」は配布されていた。

「問題」



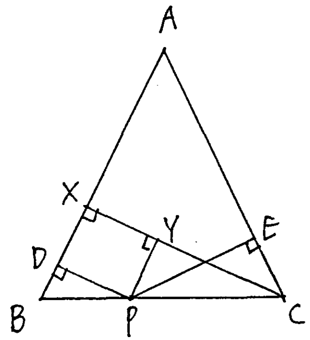
△ＡＢＣの内部にＯという点があって、ＡＢの長さとＢＯの長さを加えたものが、ＡＣの長さとＣＯの長さを加えたものと等しいとします。そのとき辺ＢＣ上の任意の点を通ってＣＯとＢＯに平行な直線をひき、ＡＢ,ＡＣとの交点をそれぞれＤ，Ｅとします。そうすると四角形ＡＤＰＥの四角形の周の長さ、つまりＡＤ＋ＤＰ＋ＰＥ＋ＥＡという長さは、Ｐが線分ＢＣ上のどの点であっても同じである。つまり点Ｐが辺ＢＣ上のどの点でも、その周の長さが一定であるというのがこの問題です。この問題は私がつくった問題ですが、この問題がどういうふうにしてつくられたか、という話をします。最終的にはこの問題の解答もでてくるわけですが、そういう話をしようと思います。

（１）



最初は問題１です。△ＡＢＣは二等辺三角形で、ＡＢとＡＣの長さが等しいとします。そのとき、辺ＢＣ上の任意の点ＰからＡＢ，ＡＣに垂線をひき、その足をＤ，ＥとするとＰＤとＰＥの長さの和は一定である、という問題ですね。これは昔からある有名な問題です。
ですから、参考書の中にもこの問題は載っていると思います。私も昔中学校で幾何を習っているとき、やったことのある問題です。

さて、ＰＤとＰＥの長さの和が一定ということですから、点Ｐがどういうふうに動いてもその一定の長さは変わらないわけです。そこで点Ｐがずっと端まで動いて、例えば点Ｃにきた場合、ＰとＥが点Ｃに重なりますね。で、その場合を考えますと、ＣからＡＢに垂線をおろして、その足をＸとしますと、ＰＤ＋ＰＥがもし一定であれば点Ｐをずっと動かしていってＰがＣに重なる場合でも、その一定の和というものは変わらないわけです。このときＰＤはＣＸでＰＥの長さは０ですから、したがってこの一定の長さというのはＣＸの長さであろうというふうに考えられます。ＰＤ＋ＰＥが一定であって、それがもしＣＸになるならば、ＰＤ＋ＰＥ＝ＣＸとかけますね、これが証明できればＰＤ＋ＰＥが一定でそれがＣＸに等しいということを証明できるわけです。そこで、ＰＥ＝ＣＸ－ＰＤを証明しようと考えます。ＣＸ－ＰＤをつくるために、ＣＸの長さからＰＤの長さをひいた長さを作ります。そのためにＰからＣＸに垂線をひき、その足をＹとしますと、ＰＹＸＤという長方形ができましてＰＤの長さはＹＸにうつります。これからＣＸからＰＤをひいたものが、ＣＹということが判ります。ですから、ＰＥとＣＹの長さが等しいということが証明できればよい、ということになります。



$$PE = CX - PD$$
$$= CX - XY$$
$$= CY$$

（合同条件について；略）

△ＰＹＣと△ＣＥＰについて

∠ＸＢＣ＝∠ＥＣＰ（二等辺三角形の底角）

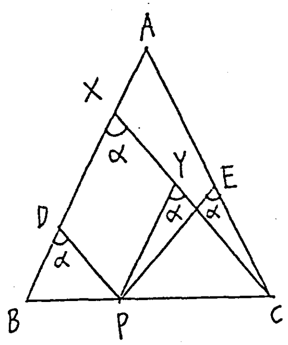
∠ＸＢＰ＝∠ＹＰＣ（ＡＢ∥ＰＹより）

∴∠ＹＰＣ＝∠ＥＣＰ

したがって一辺とそれに対する角ともう１つの角が等しいので

△ＥＰＣ≡ △ＹＣＰ

ということがいえる。そうしてＰＥとＣＹが等しいということが証明できたわけです。



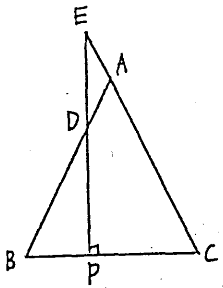
なお、この場合直角ということで、やりましたけれども、二等辺三角形で点Ｐから直角の代わりに、これが一定の角α、つまり∠ＰＤＢ＝∠ＰＥＣ＝αという場合でも同じく、ＰＤ＋ＰＥという和が一定であるということがいまと同じでわかります。つまりＣＸというのをひくときに、∠ＣＸＢが一定の角αであるようにひくわけです。そうしてＰからＤＡに平行な直線ＰＹをひきますと∠ＰＹＣ＝αとなります。ＰＹＸＤは平行四辺形ですから、ＰＤ＝ＹＸとなり、同様に△ＥＰＣ≡△ＹＣＰがいえて、ＰＥ＝ＣＹがわかります。

これからＰＤ＋ＰＥ＝ＹＸ＋ＣＹ

＝ＣＸ（一定）

といえるので、垂直の代わりに、∠ＰＤＢ＝∠ＰＥＣ一定という直線をひく場合も、ＰＤとＰＥの和が一定ということがいえるわけですね。

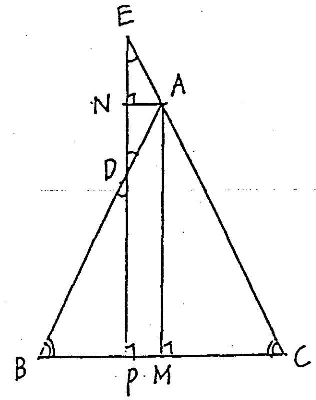
（２）



この２番も昔からある問題です。参考書に載っています。二等辺三角形ＡＢＣの底辺ＢＣ上の、任意の点Ｐを通ってＢＣに垂線をひいてＡＢ，ＡＣとの交点をＤ，Ｅとします。そうするとＰＤ＋ＰＥは一定であるというのが問題です。

これはいろんな証明があります。たとえば、Ｃを通ってＢＣに垂線をひくと、ＰＥの長さが０の場合で、その和に等しくなるはずの線分がでてくる。あるいはＢの場合でも良い。ここでは、この垂線がＡを通る場合を考えます。

二等辺三角形ですからＡからＢＣに垂線ＡＭをひくとＢＭ＝ＭＣとなります。



ＰがＭの場合はＤ，ＥはＡに一致しＰＤ＝ＭＡ，ＰＥ＝ＭＡになります。したがってこの場合ＰＤ＋ＰＥ＝２ＭＡです。そこでもしＰＤ＋ＰＥが一定となるなら、その一定量は２ＭＡだと考えられる。△ＣＰＥと△ＢＰＤにおいて、∠ＣＥＰはＣの余角（つまり直角から∠Ｃをひいたもの）で、また∠ＢＤＰも同じくＢの余角です。∠Ｂと∠Ｃは等しいから、余角同士も等しく、∠ＢＤＰと∠ＡＤＥは対頂角で等しくなります。したがって∠ＡＥＤ＝∠ＡＤＥで△ＡＥＤは二等辺三角形ですから、ＡからＤＥに垂線ＡＮをひきますと、その足ＮはＥＤの中点になります。そうしますと（図において）

ＰＤ＝ＰＮ－ＤＮ

ＰＥ＝ＰＮ＋ＮＥとなり、これを加えますと、

ＰＤ＋ＰＥ＝２ＰＮ－ＤＮ＋ＮＥ　（ＤＮ＝ＮＥより）

＝２ＰＮ　（ＡＮＰＭは長方形だからＰＮ＝ＭＡ）

＝２ＭＡ

と証明ができるわけです。

そこで今度は比例を使って考えてみます。

このＰＤ＋ＰＥ＝２ＭＡの両辺をＭＡで割った

$$\frac{PD}{MA}+\frac{PE}{MA}=2$$ が証明できればよい。

$$\text{左辺}=\frac{PD}{MA}+\frac{PE}{MA}$$ （ＥＰ∥ＡＭ、ＤＰ∥ＡＭより）

$$=\frac{PB}{BM}+\frac{PC}{MC}$$ （ＢＭ＝ＭＣより）

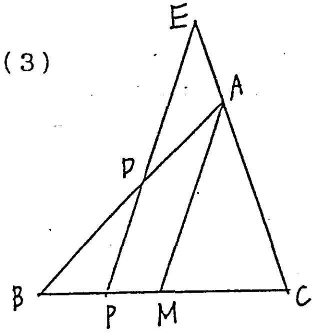
$$=\frac{BP+PC}{BM}$$ （ＭはＢＣの中点より）

$$=\frac{BC}{BM}=2=\text{右辺}$$

この証明を見ますと、ＭがＢＣの中点であることと、ＰＤＥという直線がＡＭと平行である、ということだけを使ってこの証明がすすんでいるわけですね。つ

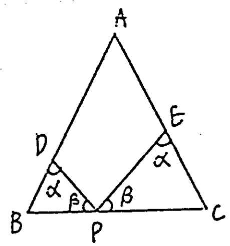
まり△ＡＢＣが二等辺三角形という条件は直接的には使われていないわけです。これから次の（３）の問題が得られるわけです。

（３）

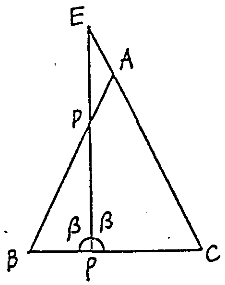


つまり、（一般の）三角形ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとし、辺ＢＣ上の任意の点Ｐを通りＡＭに平行にひいた直線とＡＢ，ＡＣとの交点をＤ，ＥとすればＰＤ＋ＰＥの長さは一定である。このも昔からある問題です。

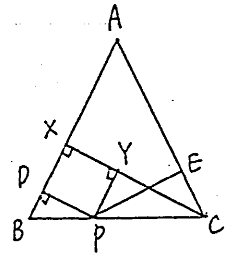
先程の問題に戻ります。



二等辺三角形ＡＢＣで、底辺ＢＣ上の任意の点をＰとし、ＡＢ，ＡＣ上にＤ，Ｅを∠ＰＤＢと∠ＰＥＣが一定αであるようにとると、ＰＤ＋ＰＥが一定であるということをやった訳です。そこで、∠ＤＰＢ＝∠ＥＰＣ＝βとおきますと、αが一定ならばβも一定となるわけです。ですから先程やりました問題は、ＡＢ，ＡＣ上にＤ，Ｅを∠ＤＰＢ＝∠ＥＰＣ＝β（一定）にとればＰＤ＋ＰＥが一定になるといいかえることができます。βはいろいろとることができますが、特にβ＝９０°の場合を考えますと、ＰＤとＰＥは重なります。つまりＰを通ってＢＣに垂直にひいた直線と、ＡＢ，ＡＣとの交点をＤ，Ｅとすると、ＰＤ＋ＰＥが一定という問題になります。つまり最初の問題（１）で∠ＰＤＢ＝∠ＰＥＣ＝90°というのを、∠ＰＤＢ＝∠ＰＥＣ＝α（一定）、あるいは∠ＤＰＢ＝∠ＥＰＣ＝β（一定）のように拡張した問題で考えると、その拡張した問題の特別な場合として問題（２）がでてくるわけですね。だから（１）と（２）は一見形が違っていて、違う問題というふうに見えるわけですが、実は（１）と（２）は同じ問題のそれぞれ特別な場合ということが分かるわけです。



最初の問題に戻ります。

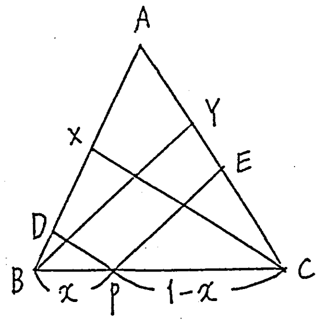


ＰＤ＋ＰＥ＝一定ということをさっき証明した訳ですが、そのとき△ＥＣＰ≡△ＹＰＣとなりました。さっきはＰＥ＝ＣＹを示したわけですが、この合同からさらにＰＹ＝ＣＥということもわかります。ＰＤＸＹは長方形ですからＰＹ＝ＤＸ，したがってＤＸ＝ＣＥとなります。

そうすると

ＡＤ＋ＡＥ＝（ＡＸ＋ＸＤ）＋（ＡＣ－ＥＣ）　　（ＸＤ＝ＥＣより）
　　　　　＝ＡＸ＋ＡＣ
　　　　　＝一定　　　　もわかります。

さっきの証明をもう少し詳しく考えてみると、ＰからＡＢ，ＡＣに垂線をひくとＰＤ＋ＰＥ＝一定であるほかに、さらにＡＤ＋ＡＥ＝一定ということがわかったわけです。そこで垂線を方向が一定の直線というふうに拡張して、次の（４）（５）（６）の問題を考えます。



一般の三角形ＡＢＣで、ＡＢ，ＡＣ上にＸとＹという点を固定します。ＢＣ上の任意の点ＰからＣＸ，ＢＹに平行にＰＤ，ＰＥをひき、ＡＢ，ＡＣとの交点をＤ，Ｅとします。そしてＰＤ＋ＰＥ＝一定となるための条件を考えます。これが問題（４）です。またＡＤ＋ＡＥ＝一定であるための条件を考えます。これは問題（５）です。さらに両方を加えたものが一定である、つまり四角形ＡＤＰＥの周の長さが一定であるための条件を考えます。これが問題（６）です。

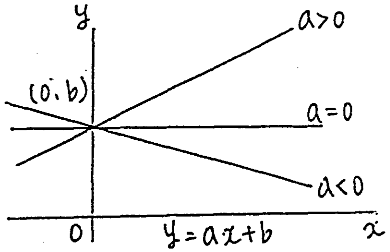
簡単にするために、ＢＣの長さを１とします。Ｐが動きますからＢＰの長さを変数ｘにとります。するとＰＣの長さは１－ｘとなるわけですね。こうしておいて

ＰＤ，ＰＥ，ＡＤ，ＡＥをｘで表わそうと思います。

$\frac{PD}{CX}=\frac{BP}{BC}=\frac{x}{1}=x$　　　　∴ＰＤ＝ｘＣＸ

$\frac{PE}{BY}=\frac{PC}{BC}=\frac{1-x}{1}=1-x$　　　　∴ＰＥ＝（１－ｘ）ＢＹ

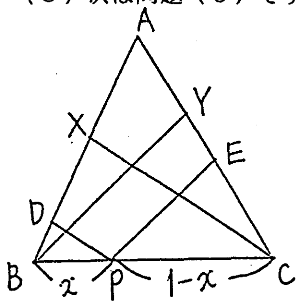
したがって問題（４）はＰＤ＋ＰＥ＝ｘ（ＣＸ－ＢＹ）＋ＢＹ＝一定の条件を求める問題となります。この式は変数ｘの一次関数ですから、一次関数について少し考えてみます。



いまｙ＝ａｘ＋ｂという一次関数を考えます。このグラフはｙ軸上の（０，ｂ）を通る直線です。ａ＞０の場合は右上がりの直線、つまりｘが増えるとｙは増えるわけです。ａ＝０の場合はｙ＝ｂでｘ軸に平行な直線、この場合はｘの如何にかかわらずｙは一定です。ａ＜０の場合は右下がりの直線でｘが増えるとｙは減ります。すなわち一次関数ａｘ＋ｂでｘの如何にかかわらずその値が一定であるというのは、ａ＝０の場合に限るわけです。

上の場合、ＰＤ＋ＰＥが一定になる条件はＣＸ－ＢＹ＝０すなわちＣＸ＝ＢＹとなります。

（５）次は問題（５）です。



今度はＡＤ＋ＡＥ＝一定の条件を調べます。これはＡＸ＋ＸＤ＋ＡＹ＋ＹＥ＝一定ということです。ＡＸとＡＹは一定で動きませんから、動くのはＸＤとＹＥです。ですから問題はＸＤ＋ＹＥ＝一定ということです。そこでＸＤ＋ＹＥを変数ｘを用いて表そうと考えます。

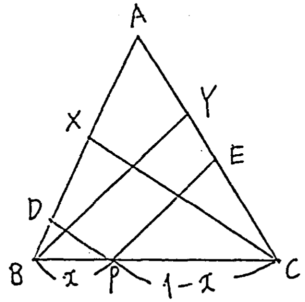
$\frac{XD}{XB}=\frac{CP}{CB}=1-x$　　　　∴ＸＤ＝（１－ｘ）ＸＢ

$\frac{YE}{YC}=\frac{BP}{BC}=x$　　　　∴ＹＥ＝ｘＹＣ

したがってＸＤ＋ＹＥ＝ｘ（ＹＣ－ＸＢ）＋ＸＢ＝一定の条件を求めるわけですから、同様にＹＣ－ＸＢ＝０、ゆえにＡＤ＋ＡＥ＝一定となる条件はＹＣ＝ＸＢとなります。

ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣでＢ，ＣからＡＣ，ＡＢへの垂線の足をＹ，Ｘとすると、△ＸＢＣ≡△ＹＣＢですから、ＢＹ＝ＣＸおよびＹＣ＝ＸＢとなります。したがってＢＣ上の任意の点Ｐから、ＡＢ，ＡＣへの垂線の足をＤ，Ｅとすれば、ＰＤ＋ＰＥおよびＡＤ＋ＡＥがそれぞれ一定となるわけです。

（６）



二等辺三角形ＡＢＣでは、ＰＤ＋ＰＥとＡＤ＋ＡＥは一定です。したがって、その和、つまり四角形ＡＤＰＥの周の長さが一定となるわけです。では一般の三角形ＡＢＣで、この四角形ＡＤＰＥの周の長さが一定であるための条件は何だろうかというのが問題（６）です。つまりＡＤ＋ＡＥ＋ＰＤ＋ＰＥ＝一定となるための条件はなんだろうかというわけです。この条件に見当をつけるために、点ＰがＢに重なった場合を考えてみます。そのときＰ，ＤはＢに重なりますから、ＰＤ＝０になり、ＰＥはＢＹに一致します。そうすると四角形ＡＤＰＥは△ＡＢＹになるでしょう。また点ＰがＣに重なれば、Ｐ、ＥはＣに重なり、ＰＥ＝０になり、ＰＤはＣＸに一致します。そうすると四角形ＡＤＰＥは△ＡＸＣになるでしょう。四角形ＡＤＰＥの周の長さが一定であるとすれば、その一定の長さというのはＰ＝Ｂ、Ｐ＝Ｃのときも同じはずですから、△ＡＢＹの周、△ＡＸＣの周が等しくなるのではあるまいか、という予想がつくのですね。果たしてそれが今の条件からでてくるかどうか、さっきと同じようにやってみます。

ＡＤ＋ＡＥ＋ＰＤ＋ＰＥ

＝ＡＸ＋ＸＤ＋ＡＹ＋ＹＥ＋ＰＤ＋ＰＥ　　とすると

ＡＸとＡＹは一定なので、ＸＤ＋ＰＤ＋ＰＥ＋ＹＥという変動する部分に着目して、それをｘの関数に表そう、というふうに考えていきます。前にやったのと同

様に

$\dfrac{XD}{XB}=\dfrac{CP}{CB}=1-x$　　　　$\therefore XD=(1-x)XB$

$\dfrac{PD}{CX}=\dfrac{BP}{BC}=x$　　　　$\therefore PD=xCX$

$\dfrac{PE}{BY}=\dfrac{PC}{BC}=1-x$　　　　$\therefore PE=(1-x)BY$

$\dfrac{EY}{CY}=\dfrac{PB}{CB}=x$　　　　$\therefore YE=xCY$

したがって、与式＝ｘ（－ＢＸ＋ＣＸ－ＢＹ＋ＣＹ）＋ＸＢ＋ＢＹ＝一定という条件になりますから、前と同様に、－ＢＸ＋ＣＸ－ＢＹ＋ＣＹ＝０

つまりＢＸ＋ＢＹ＝ＣＸ＋ＣＹが条件となるわけです。

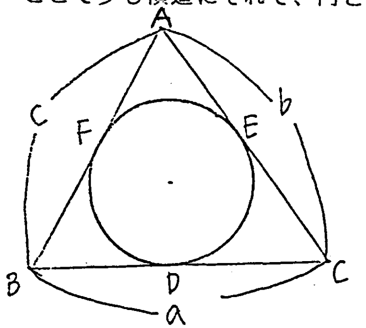
そこでとっておいたＡＸ＋ＡＹを両辺に加えますと

　ＡＸ＋ＡＹ＋ＢＸ＋ＢＹ＝ＡＸ＋ＡＹ＋ＣＸ＋ＣＹ

つまり△ＡＢＹの周の長さ＝△ＡＣＸの周の長さ

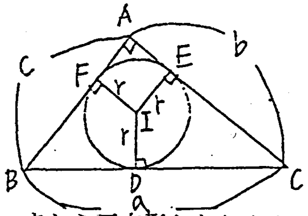
となり、結局条件はこれだと分かったわけです。

ここで少し横道にそれて、円と接線について復習しましょう。



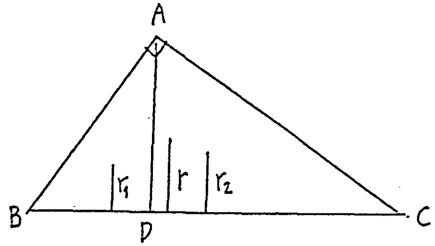
図のように△ＡＢＣの内接円の接点をＤ，Ｅ，Ｆとします。Ａ，Ｂ，Ｃからひいた接線の長さがそれぞれ等しいので、ＡＦ＝１／２（ＡＢ＋ＡＣ－ＢＣ）が成り立ちます。これは教科書にもありますね。でいまＡＢ＝ｃ、ＢＣ＝ａ、ＣＡ＝ｂとおきますと

ＡＦ＝１／２（ｂ＋ｃ－ａ）となるわけですね。



特別な場合として直角三角形の場合を考えて、内心をＩとします。そうするとＩから各辺におろした垂線の長さは皆等しくなり、これをｒとします。そうすると、∠Ａ＝∠Ｒの場合には四角形ＡＦＩＥは長方形になりＩＦ＝ＩＥ＝ｒですから正方形となります。したがって直角三角形の場合の内接円の半径ｒというのはＡＦに等しいからｒ＝ＡＦ＝１／２（ｂ＋ｃ－ａ）とかけるわけです。ですから直角三角形では三角形の三辺の長さが与えられていれば、内接円の半径はその三辺の値を用いて表すことができるわけです。そこで次の問題です。

（７）



直角三角形ＡＢＣの直角の頂点Ａから斜辺に垂線をおろし、その足をＤとします。そして△ＡＢＤの内接円の半径をr_1、△ＡＣＤの内接円の半径をr_2、△ＡＢＣの内接円の半径をｒとします。そうするとこれらの間には$r_1+r_2+r=AD$（高さ）という性質があります。これは日本の江戸時代の数学、和算というのですけれど、その中にもでてきます。先程やりましたように△ＡＢＤは直角三角形ですから、（１／２は面倒なので２倍して）$2r_1=AD+BD-AB$

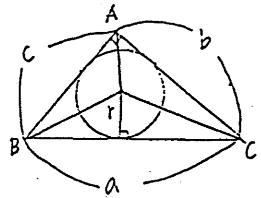
同様に　$2r_2=AD+DC-AC$

　　　　$2r\ =AB+AC-BC$

この３式を加えますと

　　$2(r_1+r_2+r)=2AD$

　よって　$r_1+r_2+r=AD$　　　となります。



それから余談になりますが、（一般の）△ＡＢＣの面積をＳとしますとＳ＝１／２ｒ（ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ）というのをやっていますね。面積は３辺の和に半径ｒをかけて２で割ったものに等しい、つまり内接円の中心と頂点を結んでできた３つの三角形の面積の和ということですね。これは教科書にもありますね。そこで直角三角形についてｒ＝１／２（ｂ＋ｃ－ａ）がいえました。面積はＳ＝１／２ｒ（ａ＋ｂ＋ｃ）です。面積はまた直角三角形ですからＳ＝１／２ｂｃとも書けます。そこでこの２つを結び付けようと思います。

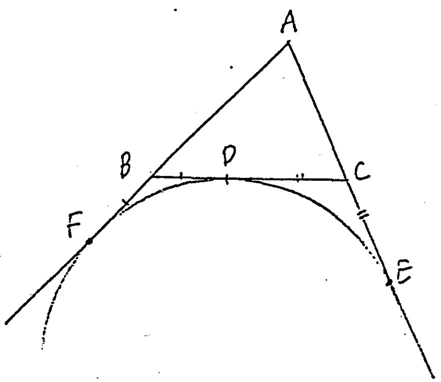
　$1/2\,bc=1/2\,r(a+b+c)$

　　　　$=1/2(a+b+c)\,1/2(b+c-a)$

$$2bc=(b+c)^2-a^2$$

よって $a^2=b^2+c^2$

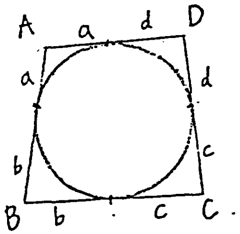
つまり直角三角形であればこんな関係があると分かったのです。これは諸君がもう少しで習う、いわゆる三平方の定理というものですね、ピタゴラスの定理ともいいます。もう知ってる人もいるかも知れませんね。これが、今のような考察からでてきたわけです。余談ですけれども。



つぎに内接円で考えたようなことを、今度は傍接円を考えてみましょう。三角形の一辺と他の二辺の延長に接する円、これを傍接円といったのですね。接点を図のようにD，E，Fとしましょう。さっきと同じようにＡＦ＝ＡＥ＝１／２（ＡＢ＋ＡＣ＋ＢＣ）といえます。さっきの内接円の場合はＢＣの部分がマイナスでしたが、傍接円ではプラスです。これは次のように簡単に分かります。

$$AF+AE=AB+BF+AC+CE$$
$$=AB+BD+AC+CD$$
$$=AB+AC+BC$$

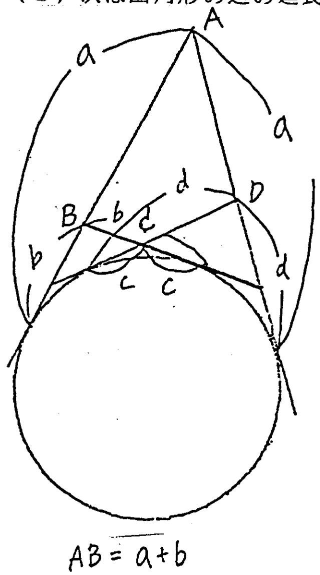
このように傍接円の場合は頂点からの接線の長さが三角形の周の長さの半分に等しいという性質があるわけですね。



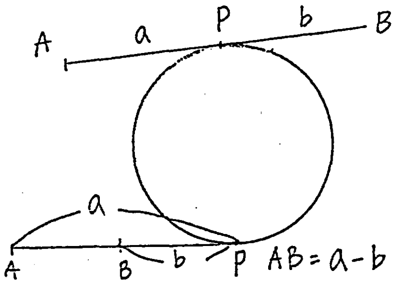
今度は四角形の場合を考えます。つまり円に外接する四角形を考えるわけです。で、この図の場合は対辺の和が等しい、つまりＡＢ＋ＣＤ＝ＢＣ＋ＡＤ、という問題が教科書にもありましたね。この場合頂点からの接線の長さを用いて証明していくわけです。A，B，C，Dからの接線の長さをそれぞれa，b，c，dとおきますと、$AB+CD=a+b+c+d$

$BC+AD=a+b+c+d$　　となって、等しいことが簡単に分かります。

（８）次は四角形の辺の延長が一つの円に接する場合です。



凸四角形ＡＢＣＤの各辺の延長が図のように、一つの円に接しているとき、この四角形の辺の間にはどの様な関係があるか、という問題です。最初に線分ＡＢまたはその延長が円に接するとき、Ａ，Ｂからの接線の長さと、線分ＡＢの長さの間の関係を調べます。

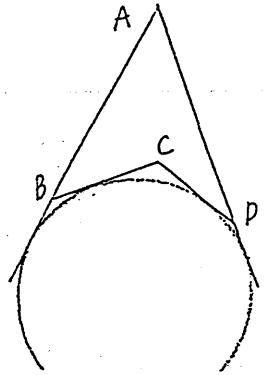


いま直線ＡＢが円に接していてＡ，Ｂからの接線の長さをa，bとすると、接点Ｐが線分ＡＢの上にある場合、ＡＢ＝a＋b（和）となり、接点が延長上にあるという場合にはＡＢ＝a－b（差）となるわけです。

問題（８）でＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄからの接線の長さをa，b，c，dで表します。そうすると各辺の延長で接しているので、ＡＢ＝a－b、ＢＣ＝b－c、ＣＤ＝d－c、ＤＡ＝a－dですね。加えると、ＡＢ＋ＢＣ＝a－c、ＣＤ＋ＤＡ＝a－cとなり、したがって、ＡＢ＋ＢＣ＝ＣＤ＋ＤＡがわかります。

延長が接している場合にはＡＢ＋ＢＣとＣＤ＋ＤＡが等しいということが分かりました。

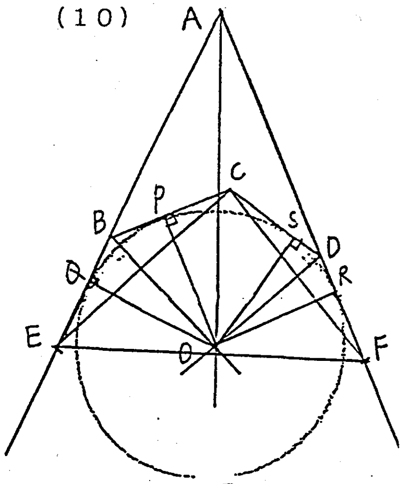
（９）今度は、四角形がへこんでいる場合です。



凹四角形ＡＢＣＤの辺または辺の延長が図のように１つの円に接しているとき、この四角形の辺の間にはどんな関係があるか、という問題です。

ＡＢは接点が延長上ですから　ＡＢ＝ａ－ｂ
ＢＣは接点が辺上ですから　ＢＣ＝ｂ＋ｃ　∴ＡＢ＋ＢＣ＝ａ＋ｃ
ＣＤは接点が辺上ですから　ＣＤ＝ｃ＋ｄ
ＡＤは接点が延長上ですから　ＡＤ＝ａ－ｄ　∴ＣＤ＋ＡＤ＝ｃ＋ａ
ですから凹四角形の二辺が接し、二辺が延長で接するという場合はＡＢ＋ＢＣ＝ＡＤ＋ＣＤとなります。

（１０）

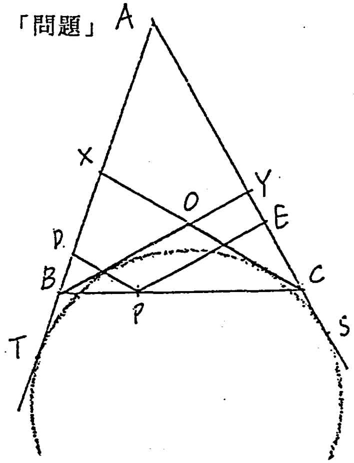


（９）の逆です。凹四角形ＡＢＣＤの辺の間に、（９）で得られた関係が成り立つならば、この凹四角形の辺または延長は一つの円に接しているだろうか、という問題です。

この場合、ＡＢ＋ＢＣをつくります。つまりＢＥをＢＣに等しくなるようにＥをＡＢの延長上にとり、同様にＡＤの延長上にＣＤに等しくＤＦをとります。そして△ＥＣＦを作ります。∠ＥＢＣ，∠ＣＤＦの二等分線をひきますと、これらは二等辺三角形ですから底辺ＥＣ，ＣＦを垂直に二等分します。同じように∠ＥＡＦの二等分線を考えますと、ＡＢ＋ＢＣ＝ＡＥ，ＡＤ＋ＣＤ＝ＡＦ，ＡＥ＝ＡＦですから∠ＥＡＦの二等分線はＥＦを垂直に二等分します。すると、∠Ｂの二等分線はＣＥの垂直二等分線、∠Ｄの二等分線はＣＦの垂直二等分線、∠Ａの二等分線はＥＦの垂直二等分線になりますから、この３つの直線は△ＣＥＦの外心Ｏで交わりますね。そこで、ＯからＢＣ，ＥＢ，ＤＦ，ＣＤに垂線をひき、その足をＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとします。そうするとＢＯは∠Ｂの二等分線だから、ＯＰ＝ＯＱ、またＡＯは∠Ａの二等分線だからＯＱ＝ＯＲ、またＤＯは∠Ｄの二等分線だからＯＳ＝ＯＲとなり、つまりＯからの垂線の長さがみんな等しいわけです。ですからＯを中心としてＯＰを半径とする円をかけば、凹四角形ＡＢＣＤの辺及び延長に接する円になるわけです。

そこで最初の問題に戻ります。

「問題」



ＡＢ＋ＢＯ＝ＡＣ＋ＣＯという条件があります。そこで凹四角形ＡＢＯＣは今やりました問題によって１つの円に接するわけです。そこでこのＣＯを伸ばしてＡＢとの交点をＸ、ＢＯを伸ばしてＡＣとの交点をＹとします。またＡＢ、ＡＣの延長とこの円の接点をそれぞれＴ，Ｓとおきます。△ＡＢＹについて考えますと、円は△ＡＢＹの傍接円ですからＡＴ＝ＡＳ＝１／２（△ＡＢＹの周の長さ）となり、△ＡＣＸについて考えますと、円はまた△ＡＣＸの傍接円ですから、ＡＴ＝ＡＳ＝１／２（△ＡＣＸの周の長さ）ということがわかります。したがって△ＡＢＹの周＝△ＡＣＸの周、がわかったわけですね。そこで、ふたたび問題（６）に戻りますと、上の条件からＢＣ上の任意の点ＰからＣＸ、ＢＹに平行な直線ＰＤ，ＰＥを図のようにひきますと、四角形ＡＤＰＥの周の長さは一定だと証明できたわけです。

これで問題づくりの物語を終わります。

以上

（横浜国立大学４年　黒崎珠実）