

均質化法によるゴム系複合材料の解析

横浜国立大学附属図書館



10415791

平成10年3月

小石 三隆

717.51
K0

博士学位論文

均質化法によるゴム系複合材料の解析

横浜国立大学附属図書館



10415791

平成 10 年 3 月

指導教官 白鳥正樹教授

横浜国立大学
大学院工学研究科
生産工学専攻
小石正隆

Abstract

Today, composite materials are used widely because of their excellent characteristics, such as high strength to weight ratios and high thermal resistance.

Since there are many cases in which it is impossible to compute structural response of global structure made of heterogeneous composite materials, heterogeneous composite materials have been treated as homogeneous materials. It is important to choose the effective method for prediction microscopic structural response as well as equivalent material properties. The homogenization method, which has been proposed by applied mathematician, is one of the most effective tools to compute accurately both the equivalent material properties and the microscopic response of composite materials. Since the homogenization method is based on a rigorous mathematical theory, it can provide reasonable solutions for some problems.

This study is on the homogenization method for material and structural design of rubber-based composite materials.

Firstly, the homogenization analysis system of elasticity, heat conduction and thermal elasticity is developed based on general purpose finite element analysis code, ABAQUS. The analysis system is enhanced to conduct boundary layer theory, by which microscopic stresses are corrected in boundary layer of a global structure. To discuss the efficiency and the accuracy of the developed analysis system, numerical experiments are conducted.

Secondly, new homogenization method of dynamic visco-elasticity is proposed to compute the equivalent loss tangent that is defined as the ratio of equivalent loss modulus to equivalent storage modulus of rubber-based composite materials. The developed homogenization analysis system is enhanced to dynamic visco-elasticity. The comparison between numerical results and experimental results of rubber composite containing a stiff rubber and a soft rubber shows the efficiency of the proposed method.

Next, the stochastic homogenization method is proposed for the analysis of the stochastic nature of composite materials made of uncertain microstructures. The results of numerical analysis indicate that the proposed method is useful from the points of view of both efficiency and accuracy.

Lastly, the equivalent material properties and stochastic microscopic response of twisted steel-cord/rubber composite, which is reinforcement of automobile radial tire, are studied using proposed homogenization method.

The results of this study are very useful for tire engineering.

目次

1 緒言	1
1.1 本研究の背景と目的	2
1.2 均質化法(Homogenization Method)	6
1.3 本論文の構成	11
参考文献	12
2 弾性問題のための均質化法	16
2.1 緒言	17
2.2 均質化法	18
2.2.1 仮想仕事の原理による定式化	18
2.2.2 有限要素法による定式化	24
2.3 均質化法解析システムの概要	29
2.4 数値解析例	33
2.4.1 繊維強化複合材料	33
2.4.2 熱可塑性エラストマーの等価弾性定数	33
2.4.3 多くの円孔を有する平板	38
2.5 境界層理論による微視的応力の補正	46
2.5.1 境界層理論と均質化法	46
2.5.2 一方向強化複合材料	48
2.5.3 多くの円孔を有する平板	55
2.6 結言	58
参考文献	58
3 熱伝導・熱弾性問題のための均質化法	60

目次

3.1	緒言	61
3.2	均質化法の定式化	62
3.2.1	熱伝導問題	62
3.2.2	熱弾性問題	65
3.3	解析プログラムの検証	68
3.3.1	熱伝導率	68
3.3.2	線膨張係数	71
3.4	結言	74
	参考文献	74
4	動的粘弾性問題のための均質化法	75
4.1	緒言	76
4.2	周波数領域の動的粘弾性解析	79
4.2.1	応力-ひずみ関係式	79
4.2.2	仮想仕事の原理	81
4.3	動的粘弾性解析のための均質化法	82
4.3.1	仮想仕事の原理による定式化	82
4.3.2	有限要素法による定式化	84
4.4	解析プログラムの検証	87
4.4.1	積層タイプ	87
4.4.2	円柱状補強材埋め込みタイプ	91
4.5	数値解析例	96
4.5.1	繊維強化ゴム(FRR)の有効損失正接	96
4.5.2	熱可塑性エラストマーの有効損失正接	96
4.6	結言	102
	参考文献	102
5	確率均質化法	104
5.1	緒言	105
5.2	確率有限要素法の概要	107
5.3	均質化法の概要	109
5.4	確率均質化法	111

目次

5.4.1	微細構造に関する定式化	111
5.4.2	マクロ構造に関する定式化	114
5.4.3	微細構造における構造応答の評価	115
5.5	数値解析例	117
5.5.1	母材の弾性定数が変動する粒子分散複合材料	117
5.5.2	円孔の半径が二次元空間確率過程として変動する多孔質平板	120
5.6	結 言	128
	参考文献	128
6	均質化法による撚りコード/ゴム複合体の解析	129
6.1	結 言	130
6.2	撚りコード/ゴム複合体	131
6.3	軸方向の周期対称性	136
6.4	等価材料特性の解析	142
6.4.1	実験で得られた等価剛性との比較	142
6.4.2	等価弾性係数のパラメトリックスタディー	144
6.4.3	等価熱伝導率のパラメトリックスタディー	146
6.4.4	等価線膨張係数のパラメトリックスタディー	146
6.4.5	有効損失正接のパラメトリックスタディー	149
6.5	確率均質化法による撚りコード/ゴム複合体の解析	151
6.5.1	引張り変形時の応力解析	151
6.5.2	確率均質化法による一方向強化平板の応力解析	154
6.6	結 言	163
	参考文献	163
7	結 論	164
	付録 A	166
	公表一覧	168
	謝辞	170

目 次

1.1	乗用車用ラジアルタイヤの断面図	3
2.1	全体(巨視的)構造と微細(微視的)構造	19
2.2	均質化解析システムの概要(解析の流れ)	31
2.3	繊維強化複合材料の単位セル	34
2.4	熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 27.2\%$), 左図:マトリック ス, 右図:介在物	36
2.5	熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 79.3\%$), 左図:マトリック ス, 右図:介在物	36
2.6	熱可塑性エラストマーの有効弾性係数	37
2.7	熱可塑性エラストマーの有効ポアソン比	37
2.8	多くの円孔を有する平板	39
2.9	全体構造の不均質有限要素モデル	40
2.10	単位セルの有限要素モデル	41
2.11	全体構造の均質有限要素モデル	41
2.12	重み平均による微視的応力評価	43
2.13	A-B断面に沿った応力分布	44
2.14	境界層モデルの概念図	47
2.15	全体構造と微細構造	49
2.16	均質化法による特性変位と境界層理論による補正項	50
2.17	直線A B上の微視的応力分布	51
2.18	直線C D上の微視的応力分布	52
2.19	全体構造と微細構造	53
2.20	直線A B上の微視的応力分布	54

目次

2.21 有孔平板における境界近傍の微視的応力分布	57
3.1 熱伝導問題における全体構造と微細構造	63
3.2 繊維強化型複合材料の単位セル	69
3.3 熱伝導率に与える繊維の体積含有率の影響	70
3.4 線膨張係数に与える繊維の体積含有率の影響	72
4.1 正弦波入力(ε)に対する粘弾性体の応答(σ)	77
4.2 積層タイプのゴム複合体	88
4.3 積層タイプゴム複合体の単位セルの有限要素モデル($\theta = 20^\circ (70^\circ)$)	89
4.4 均質化法で得られた有効損失正接と実験値との比較	89
4.5 硬ゴムの体積含有率と有効損失正接(積層タイプ)	92
4.6 円柱状補強材埋め込みタイプのゴム複合体	93
4.7 円柱状補強材埋め込みタイプの単位セルの有限要素モデル	94
4.8 均質化法で得られた有効損失正接と実験値との比較	94
4.9 ポリエステル強化FRRの単位セルの有限要素モデル	97
4.10 一方向強化FRRの有効損失正接	98
4.11 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 26.6\%$), 左図:マトリック ス, 右図:介在物	100
4.12 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 79.7\%$), 左図:マトリック ス, 右図:介在物	100
4.13 熱可塑性エラストマーの有効損失正接	101
5.1 粒子分散複合材料の単位セルと全体構造	118
5.2 微視的応力の期待値および 3σ バンド	119
5.3 多孔質平板の単位セルと全体構造	121
5.4 全体構造の有限要素モデル(上図)と単位セルの有限要素モデル(下 図)	122
5.5 微視的応力の一次変動率	124
5.6 平板の1/4領域における自己相関関数	125
5.7 微視的応力の期待値と 3σ バンド	126
6.1 乗用車用ラジアルタイヤの構造	132

目次

6.2	1×5タイプの撚りコード	133
6.3	1×5タイプの撚りコード/ゴム複合体の断面図	134
6.4	撚りコード/ゴム複合体の1ピッチ長さを単位セルとした有限要素モデル	135
6.5	撚りコード/ゴム複合体の1/5ピッチ長さを単位セルとした有限要素モデル	137
6.6	1ピッチモデルの特性変位(1/5領域のみ表示)	139
6.7	1/5ピッチモデルの特性変位	140
6.8	撚りコード/ゴム複合体の荷重-ひずみ曲線	143
6.9	ピッチ長さがT方向の有効弾性係数に与える影響	145
6.10	ピッチ長さがL方向の有効弾性係数に与える影響	145
6.11	ピッチ長さがT方向の熱伝導率に与える影響	147
6.12	ピッチ長さがL方向の熱伝導率に与える影響	147
6.13	ピッチ長さがT方向の線膨張係数に与える影響	148
6.14	ピッチ長さがL方向の線膨張係数に与える影響	148
6.15	ピッチ長さがT方向の有効損失正接に与える影響	150
6.16	ピッチ長さがL方向の有効損失正接に与える影響	150
6.17	有限要素法による撚りコードの応力分布(Mises stress)	152
6.18	有限要素法によるマトリックスの応力分布(Mises stress)	152
6.19	均質化法による撚りコードの応力分布(Mises stress)	153
6.20	均質化法によるマトリックスの応力分布(Mises stress)	153
6.21	撚りコードで補強された一方向強化平板	155
6.22	一方向強化平板の微細構造(撚りコード/ゴム複合体)	155
6.23	一方向強化平板の有限要素モデル	156
6.24	繊維配向角が20°の場合の平板の変形図	156
6.25	微細構造におけるMises応力分布(撚りコード)	157
6.26	微細構造におけるMises応力分布(マトリックス)	157
6.27	平板中心部の繊維配向角による平板中心部のひずみの変化	159
6.28	平板中心部の繊維配向角による平板中心部の微細構造におけるMises応力の変動率(確率均質化法)	160

図目次

6.29 平板中心部の繊維配向角による平板中心部の微細構造における Mises応力の変動率(差分近似)	160
6.30 二次元空間確率過程として不確かな繊維配向角の自己相関関数	161
6.31 撚りコードにおけるMises応力の期待値+標準偏差	162
6.32 マトリックスにおけるMises応力の期待値+標準偏差	162

表 目 次

2.1	均質化法解析システムの概要(主要モジュールでの処理)	32
2.2	補強材の平均応力とマトリックスの平均応力の比	34
3.1	グラスファイバーおよびエポキシの材料定数	69
4.1	有効損失正接の解析手順	86
4.2	硬ゴムと軟ゴムの動的粘弾性特性(周波数: 20Hz, 温度: 20°C)	88
4.3	硬ゴムと軟ゴムの動的粘弾性特性(周波数: 20Hz, 温度: 20°C)	93
4.4	ゴムとポリエステル製の動的粘弾性特性	97
5.1	粒子分散複合材料の材料特性	118
6.1	スチール素線およびゴムの材料定数	134
6.2	1ピッチモデルと1/5ピッチモデルの等価弾性定数(MPa)	138
6.3	1ピッチモデルと1/5ピッチモデルの計算コストの比較	138
6.4	均質化法, 実験, 有限要素法で得られた等価剛性	143

Chapter 1

緒 言

1.1 本研究の背景と目的

複合材料は単一の材料では得られない比強度，比剛性，耐熱性などの性能を得ることができるため，今日では航空・宇宙分野からスポーツ用品に至るまで広く利用されている．ひとくちに複合材料といっても，繊維強化プラスチック(Fiber Reinforced Plastic)，金属基複合材料(Metal Matrix Composite)，繊維強化ゴム(Fiber Reinforced Rubber)など，さまざまな補強材と母材(マトリックス)を組み合わせたものが利用されている．自動車用タイヤに利用されている繊維強化ゴム(FRR)は身近にある複合材料の中の一つである．しかしながら，外見上丸くて黒いゴムにしか見えないタイヤに複合材料(FRR)が利用されていると認識している人はそれほど多くないのではないだろうか．

今日，自動車用タイヤとして一般的に利用されている空気入りタイヤは，1888年，Dunlopによって発明されて以来，現在に至るまでに数多くの改善がなされ，自動車の足として必要不可欠なものとなっている．中でも，フランスのMichelin社によって1948年に開発されたラジアルタイヤ[†]は，従来のバイアスタイヤ[‡]と比較して，操縦性能，寿命，転動抵抗等多くの点で優れていることから，現在ではほとんどの自動車に使用されるようになった．

タイヤは自動車と路面とのインターフェイスとしての重要な役割を担っており，

- 1) 荷重支持機能
- 2) 制動・駆動機能
- 3) 緩衝機能
- 4) 進路保持機能

の4つの基本機能に加えて，耐摩耗性，低転動抵抗性などのさまざまな機能が要求されている⁽¹⁾．それら複数の要求性能を満足させるために，タイヤはゴム単体の部材と繊維強化ゴム(FRR)の部材をうまく組み合わせて造られている．

図1.1に乗用車用ラジアルタイヤの断面構造を示す．図中のキャップトレッド，サイドウォール，インナライナー，ビードフィラーはゴム単体の部材を示し，ベ

[†]カーカスコードがタイヤ断面(ラジアル)方向に配置されており，さらにタイヤの形状を保持するために，タガ効果としてのベルト層(バイアス積層構造)が挿入されたタイヤ．

[‡]タイヤの骨格をなすカーカス層がバイアス積層されたタイヤ．

CHAPTER 1.

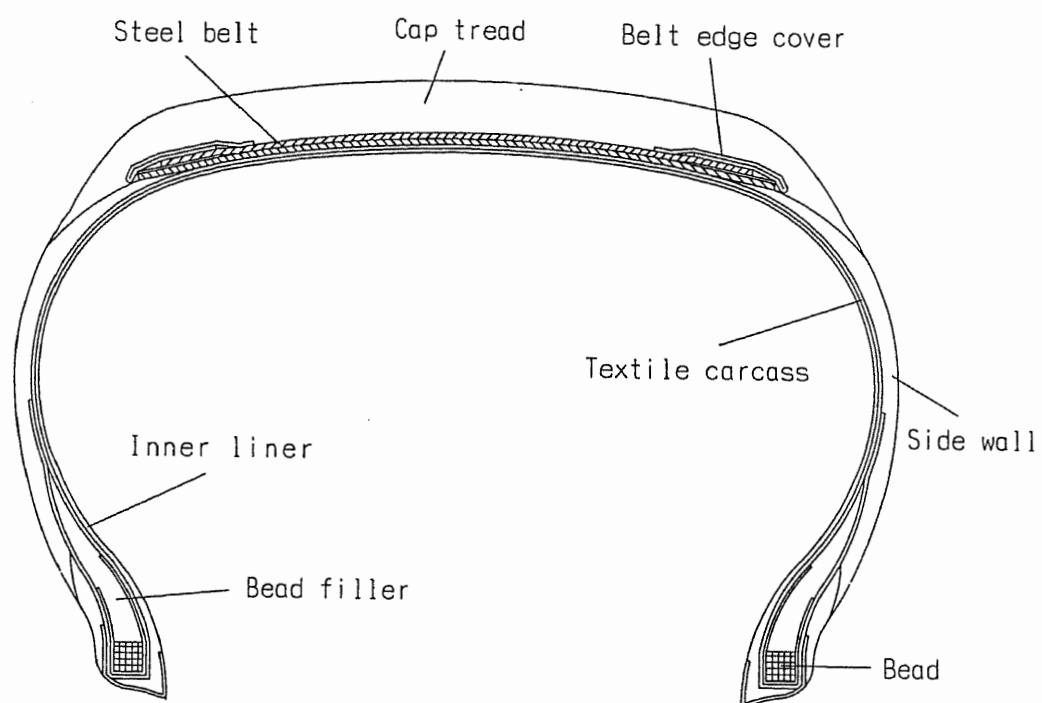


図 1.1: 乗用車用ラジアルタイヤの断面図

CHAPTER 1.

ルト、カーカス、ビードはFRR部材である。カーカスはタイヤの骨格をなす補強層で、タイヤに空気を充填した際に圧力容器の役目をする強度メンバーであり、主にポリエステルコードが補強材として利用される。その内圧により荷重を支え、走行中の動的荷重に耐える機能を持っている。ベルトはキャップトレッドとカーカスの間に配置され、形状保持、強度メンバーとして重要である。ベルトの補強用コードは通常スチール撚りコードが利用されるが、アラミドコードも一部で利用されている。スチール撚りコードとは、スチール素線を複数撚り合わせたものである。スチール撚りコードを多数横に並べ、ゴムで被覆したものがベルト用のFRR部材となる。乗用車用ラジアルタイヤのベルトは2枚のFRRをバイアス積層した2層構造となっている。ベルトはアングルプライに積層されることで適度な伸縮性と剛性が得られ、タイヤの運動性能などに大きく寄与している。

このようにさまざまな部材で構成されたタイヤを開発するにあたっては、構造物としてのタイヤの性能評価はもとより、タイヤを構成する各部材の材料特性を適切に評価する必要がある。実験による評価とともに数値解析によるシミュレーションも一部実施されているが、開発の効率化が求められている今日では数値解析によるシミュレーションがいっそう重要視されている。タイヤはその構造の特性上、タイヤ内部に応力集中が生じるため、有限要素法による応力解析が早くから利用されてきた⁽²⁾。タイヤに限らず、一般に複合材料を利用した構造物について、その不均質な複合材料の微細構造にいたるまでモデル化した詳細な数値解析は、現在の最速なコンピュータをもってしても非常に困難である。そこで、複合材料の巨視的な構造応答を解析するため、不均質な複合材料を等価な均質材料に置き換えて解析している。

タイヤに関しても、繊維強化ゴム(FRR)は一般に繊維の素線を撚り合わせた構造、すなわち撚りコードの形態で利用されるため、撚りコードの複雑な構造までモデル化したタイヤ全体の解析は不可能である。したがって、FRRの等価な材料特性を複合則⁽³⁾を用いて評価したり、特殊な補強材要素を用いて均質なFRRに置き換えたモデル^{(4),(5)}を用いてタイヤ全体の有限要素解析を行っている。しかしながら、均質なFRRモデルでは計算結果として得られる応力は平均値としての応力であり、不均質な微細構造における応力集中を得ることができない。さらに、複合則や等価介在物法⁽⁶⁾等による等価弾性特性の評価では、撚

CHAPTER 1.

りコードの撚り構造を考慮できないため、撚りコードの材料設計には利用できない。等価な材料特性を実験で測定することも可能であるが、設計・開発の効率化という面からシミュレーションによる材料設計手法の開発が望まれている。また、スチール素線とゴムとの弾性率の比は10,000~100,000であるため、スチール撚りコードと母材(マトリックス)とを含めた撚りコード/ゴム複合体としての有効損失正接など、実験では正確に測定できないものもある。そこで、撚りコードを取り扱えるようなマルチレベルの解析手法が望まれる。

1970年代の半ばにLions⁽⁷⁾らの応用数学者により構築された均質化法(Homogenization Method)は、周期的に配置された微細構造を有する構造物の等価な材料特性を予測できるだけでなく、微細構造レベルでの構造応答を効率よく計算できる理論として注目されている。均質化法は、他の解析手法と異なり厳密な数学理論として導かれているため、他の手法では上界・下界しか評価できないような複雑な微細構造や実験が適用できない問題に対しても妥当な結果を導くことができる。

以上の背景をもとに、本研究ではゴム系複合材料の材料設計および解析を目的として、均質化法による弾性・熱伝導・熱弾性・動的粘弾性問題のための解析システムを汎用有限要素解析プログラムABAQUS⁽⁸⁾をベースに開発する。その際、動的粘弾性問題のための均質化法を提案する。さらに、複合材料の微細構造や全体構造の構造パラメータの不確かさを考慮した確率論的マルチレベル解析手法として確率均質化法を提案する。これらの開発した各解析プログラムの妥当性を検討した後に、撚りコード/ゴム複合体を中心としたゴム系複合材料の解析へ適用する。

1.2 均質化法 (Homogenization Method)

均質化法は、微細構造を有する巨視的(全体)構造の等価な材料特性や微細構造における応答を評価するための理論である。工学的な適用分野として複合材料や多孔質材料などが考えられる。複合材料を利用した構造物の巨視的な応答を評価するために、複合材料の等価な材料特性を算出する手法は、均質化法以外にも多くの人々により研究されてきた。それらの研究を含め、均質化法に関する研究の経緯について以下に述べる。

等価な材料特性を評価する研究の始まりは、Maxwell⁽⁹⁾とRayleigh⁽¹⁰⁾らの研究であろう。Maxwellは粒子分散複合材料の有効拡散係数に関する研究を行い、Rayleighは球形粒子が正方格子に配置された複合材料の有効熱伝導係数をLegendre関数を用いて導き系統的に研究した。また、Einstein⁽¹¹⁾は剛体球を充填した液体の有効粘性係数を定式化している。

等価な材料特性を得るための最も簡単な評価式は複合則(Law of Mixture)と呼ばれるものである。弾性定数に関する複合則では、2種類の材料が並列に配置された一様ひずみ状態(Voigt⁽¹²⁾)、あるいは直列に配置された一様応力状態(Reuss⁽¹³⁾)を仮定し、それぞれの材料の体積含有率と弾性特性をもとに等価な弾性特性を評価する。このReussとVoigtによる予測は、一方向強化材の有効弾性率の上界・下界を与えることが、Hill⁽¹⁴⁾による研究で明らかとなった。複合則は手軽に評価できる反面、補強材の形状や配置等の複雑な要因を考慮することができない。その欠点を補うために、Tsai⁽¹⁵⁾は複合則に経験的に決定する係数を導入した定式化を行った。さらに、HashinとShtrikman⁽¹⁶⁾は、粒子がランダムに配置された等方性を示す複合材料について、最小ポテンシャルエネルギーの原理と最小コンプリメンタルエネルギーの原理を用いて有効弾性率の上界・下界を導いた。

その他の手法として、MoriとTanaka⁽⁶⁾による等価介在物法とAboudi⁽¹⁷⁾のセル法がある。Eshelby⁽¹⁸⁾により提案された等価介在物法は無限体中に埋め込まれた単一の異種物質を、マトリックスと同質材料で固有ひずみ(Eigen strain)を分布させた等価介在物に置き換えて解析を進める方法である。MoriとTanaka⁽⁶⁾は複合材料に適用するためEshelbyの方法を多数の強化材が埋め込まれた問題へと拡張した。その後、熱弾性問題⁽¹⁹⁾、熱伝導問題⁽²⁰⁾などへと適用範囲を広げ、

CHAPTER 1.

補強材とマトリックスとの界面の応力解析⁽²¹⁾へと拡張された。さらに、弾塑性問題への適用^{(22)~(24)}に関する研究が広く進められている。一方、Aboudiの方法も弾性問題だけでなく粘弾性問題や弾塑性問題へと拡張され、文献(17)に集大成されている。また、傾斜機能材料への適用⁽²⁵⁾も試みられている。等価介在物法やAboudiの方法は代数計算で等価材料特性を手軽に評価できる反面、補強材の形状や配置を自由に選ぶことができない、あるいは近接補強材どうしの相互作用を十分考慮できないなどの欠点を有している。

等価剛性に関する研究では補強材を等方性として仮定したものがほとんどであるが、カーボンやアラミドは異方性弾性を示す。小林と石川^{(26),(27)}はカーボン/エポキシFRPにけるカーボンファイバーの異方性に着目し、等価弾性定数の算出ならびにファイバーの配置が等価弾性定数に与える影響に関する研究を行った。

一方、均質化法は厳密な数学理論を基礎としているため、実験が困難な問題への適用や、微細構造が複雑なため他の解析手法では等価な材料特性の上界・下界しか評価できない問題に対しても適切な答えを得ることができる。さらに、補強材の異方性も簡単に考慮できる。

Hill⁽²⁸⁾によれば、不均質材料の代表領域(RVE; Representative Volume Element)をモデル化し、その境界上に一様ひずみを与えて得られる応答から算出される等価弾性テンソル \hat{D}_{RVE} と、一様応力を与えて得られる等価コンプライアンステンソル \hat{C}_{RVE} との積には次式の関係が成立する。

$$\hat{D}_{RVE} : \hat{C}_{RVE} - I = O\left(\left(\frac{d}{l}\right)^3\right) \quad (1.1)$$

ここで、 I は単位テンソルを表す。 d, l はそれぞれ、不均質性の基本周期領域(均質化法の単位セルに相当)とRVE領域の代表長さを表し、その比が小さいほど精度良く等価弾性特性を評価できることを示している。すなわち、RVEの境界上に一様応力や一様ひずみを与えて不均質材の等価な材料特性を評価するためには基本周期領域(単位セル)よりも大きなRVEをとらねばならないことと、与える境界条件の選択の重要性を示している。一方、Suquet⁽²⁹⁾は、均質化法で得られるひずみエネルギーは、RVEの境界上に一様応力や一様ひずみを与えて得られるひずみエネルギーの上界・下界の間にあることを示した。さらに、HollisterとKikuchi⁽³⁰⁾は、多孔質材料を対象として、RVEを用いる手法ではRVE

CHAPTER 1.

を大きくとらなければ等価弾性特性やひずみエネルギーが収束しないのに比べ、均質化法では周期性の条件を厳密に考慮できるため精度良く等価弾性特性を評価できることを数値解析例により示した。このように均質化法は他の手法に比べ、精度良く等価な材料特性を評価できることがわかる。また、均質化法では周期対称性以外の補強構造に対する制約が無いため、非常に広範囲な複合材料への適用が可能となる。

均質化法では、周期的に配置された微細構造を有する(全体)構造, 例えば複合材料や多孔質材料を対象とし, しかも微細構造が全体構造に比較して非常に小さいという仮定が前提となっている。周期的に配置された微細構造の最小単位, すなわち1周期にあたる基本領域を単位セル(unit cell)と呼ぶ。微細構造のオーダーを y , 全体構造のオーダーを x とし, それぞれのオーダーの比を ε とすると次式が成り立つ。

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (1.2)$$

微細構造, 全体構造それぞれのオーダーとは, それぞれをモデル化したときの寸法(単位)と見なすことができる。

周期的な微細構造を有する構造物では, その材料特性(偏微分方程式の係数)がその周期に応じて急激に変化する。均質化法では微細構造と全体構造との比をゼロに近づけたとき($\varepsilon \rightarrow 0$)の極限として等価材料特性が評価される。これは, 未知数の収束とともに係数も収束することを意味する。均質化法はDe GiorgiとSpagnolo⁽³¹⁾により提案されたG-収束問題の特殊な場合, すなわち周期的に配置された微細構造というトポロジーを考慮した場合と捉えることができる。微細構造に周期対称性を仮定し, 全体構造に比べ微細構造が非常に小さいという極限操作を行うことにより, 以下に示すG-収束の定義に現れる微分方程式の係数(a^h)の収束先を閉じた形で導くことができる。この係数の収束先が不均質材料の等価な材料特性を表す。

R を実数の空間, V を実Hilbert空間とし, V' をその共役空間とする。 Ω は R^n の有界な連結開集合とする。また, $a^h: \Omega \rightarrow R$ は有界で対称な作用素の列で, V で強圧的とする。このときG-収束は以下のように定義される。

定義 1.1 (G-convergence) すべての $f \in V'$ について, a^h が G-収束するとは,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a^h(x) \frac{du_h}{dx} \right) = f & \text{on } \Omega \\ u_h \in V \end{cases} \quad (1.3)$$

の解 u_h が V の中で弱収束する ($u_h \rightharpoonup u_0$) ことである.

ここで, u_0 は以下の方程式の解である.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a^0(x) \frac{du_0}{dx} \right) = f & \text{on } \Omega \\ u_0 \in V \end{cases} \quad (1.4)$$

均質化法は1970年代半ばにフランス^{(7),(32)}, 旧ソビエト⁽³³⁾, 米国⁽³⁴⁾の応用数学者により理論構築された. 中でも, 1975年のBabuska⁽³⁴⁾による研究では, はじめて微細構造の単位セルに関する境界値問題を有限要素解析プログラム(NON-SAP)で解いた解析例が示している. 1976年には, BourgatとLanchon⁽³⁵⁾やBourgat⁽³⁶⁾は繊維強化された棒のねじり問題に関して, 微細構造のサイズと全体構造のサイズの比が微視的な解に与える影響など均質化された有効弾性特性について系統立てて数値解析的に研究した. 日本においても1980年にはすでに, 均質化法に関する萌芽的研究が行われた. 菊地と谷沢⁽³⁷⁾は面内周期性を有する三次元平板(ゼータ補強板)の等価弾性定数の決定に関する研究を行った. それ以降, 均質化法はヨーロッパの研究者を中心に基礎的な研究が続けられ, その適用分野を広げて行く. Lene⁽³⁸⁾は複合材料の界面での損傷に着目し, 界面でのすべりを考慮した均質化法を定式化し, 界面強度を表すパラメータと弾性率の関係を研究した. さらに, Leneは均質化法による複合材料の損傷解析の方法論を提案し⁽³⁹⁾, グラスファイバー/エポキシの一方方向強化複合材料⁽⁴⁰⁾や平織り複合材料⁽⁴¹⁾の損傷解析に適用した. Suquet⁽²⁹⁾は均質化法を弾塑性問題に拡張し, LichtとSuquet⁽⁴²⁾はAugmented Lagrange法を用いた非圧縮性粘塑性問題のための均質化法について研究した. また, Francfort^{(43),(44)}は均質化法を熱弾性問題に拡張した. さらに, FrancfortとSuquet⁽⁴⁵⁾は熱粘弾性問題のための均質化法を定式化し, ショートレンジメモリーを有する粘弾性の古典理論(Kelvinモデル, Maxwellモデル)が, 均質化法によりフェーディングメモリーを有する粘弾性理論に関係づけられることを示した. 均質化法では, 周期的微細構造を有す

CHAPTER 1.

る全体構造物の表面近傍では周期性が欠如するために微視的応力を精度良く評価できない欠点がある。そこで、Dumontet⁽⁴⁶⁾は、境界層理論を用いて均質化法による解を修正する手法を提案した。一方、KohnとVogelius⁽⁴⁷⁾やLewinski⁽⁴⁸⁾らは厚さが周期性をもって急激に変化する薄板問題を対象とした均質化法について研究した。

均質化法は主にヨーロッパを中心とした応用数学者達の研究対象であったが、1989年にGuedes⁽⁴⁹⁾による大変形弾塑性問題に関する研究以来、日米の工学分野においても均質化法が注目され、非線形問題への拡張^{(50)~(53)}やトポロジー最適化への適用⁽⁵⁴⁾に関する研究などが行われた。非線形問題への均質化法の適用に関しては、Suquet⁽²⁹⁾以来さまざまな非線形問題へと拡張されてきたが、計算時間の問題が大きく横たわっている。線形問題では、微細構造と全体構造の境界値問題をそれぞれ別に一度だけ解けばよいため均質化法は非常に有効であるが、非線形問題ではミクロ・マクロそれぞれの問題が連成し、さらに繰り返し計算を伴うため膨大な計算コストを伴う。マクロ構造に関する非線形解析の各インクリメントごとに解かねばならないミクロ構造の解析は、空間的には相互に連成しないため超並列計算機を利用する方法も可能であるが、ミクロ構造の分岐問題⁽⁵⁵⁾が生じるため、実用化には更なる研究が必要である。高野ら⁽⁵⁶⁾により提案された非連成化解析手法は、微視的な構造応答が評価できないものの均質化法を利用した非線形解析の一つの可能性を示している。均質化法に関しては有限要素法で離散化した研究がほとんどであるが、境界要素法を利用したクリープコンプライアンスの予測に関する研究⁽⁵⁷⁾も行われている。また、ボロノイセル有限要素法と均質化法を組み合わせた手法⁽⁵⁸⁾や、ガラキン・ウェーブレット法と組み合わせた手法⁽⁵⁹⁾も研究されている。

ヨーロッパを中心とした均質化に関する研究成果の一部はWorld Wide Web上の電子ジャーナル^{††}で見ることができる。ここには、1993年にTriesteのICTPにおいて開催された均質化法に関するチュートリアルセミナー(School on Homogenization)の講義ノート^{(60)~(64)}が公開されている。この講義は、均質化法の応用面ではなくG-収束、H-収束、 Γ -収束など、均質化法の数学的基礎に重点を置いた内容となっており、ヨーロッパでの均質化法研究の奥深さが見て取れる。

^{††}<http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>

1.3 本論文の構成

本論文は、ゴム系複合材料の材料設計と解析を目的として、動的粘弾性問題のための新たな均質化法の提案と、汎用有限要素解析プログラムABAQUSを利用した弾性・熱伝導・熱弾性・動的粘弾性問題のための均質化法解析システムの開発に関するものである。さらに、微細構造や全体構造の構造パラメータの不確かさを考慮した確率論的マルチレベル解析のための確率均質化法を新たに提案し、これらの開発したプログラムを撚りコード/ゴム複合体を中心としたゴム系複合材料の解析へ適用する。

本論文は本章を含め全7章からなっており、その構成を以下に示す。

第2章では、まず本論文の核となる均質化理論を弾性問題について解説する。すなわち、マルチスケール漸近展開を用いた微細(微視的)構造と全体(巨視的)構造それぞれの境界値問題の弱形式の導出過程について詳しく述べる。前節で示したように均質化法の手順自体はすでに多くの研究がなされ、それ自体に新規性は無いが、本研究において提案する動的粘弾性問題のための均質化法や確率均質化法の基礎となるため本章において詳しく述べる。微細構造ならびに全体構造に関する境界値問題の弱形式を有限要素法で離散化した後に、汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに弾性問題のための均質化法解析システムを開発する。数値解析例により、開発した均質化法解析システムの妥当性と有効性を示した後に、熱可塑性エラストマーの有効弾性定数に関するパラメトリックスタディーを行う。さらに、開発したプログラムを境界層理論による補助問題用に拡張し、重み平均と境界層理論による微視的応力の補正に関して検討を加える。

第3章では、熱伝導問題および熱弾性問題に関する均質化法について解説した後に、前章にて開発した均質化法解析システムを熱伝導・熱弾性問題のために拡張する。開発した解析システムで得られたFRP(ガラスファイバー/エポキシ)の有効熱伝導率および有効線膨張係数について等価介在物法など従来の解析手法による計算結果と比較することにより、開発した均質化法解析システムの有効性を示す。

CHAPTER 1.

第4章では、動的粘弾性問題のための均質化法を新たに提案する。複素表示された周波数領域における動的粘弾性問題の弱形式を導いた後にマルチスケール漸近展開を適用し、動的粘弾性問題のための均質化法を定式化する。有効貯蔵弾性テンソルと有効損失弾性テンソルを用いて動的粘弾性特性を表す有効損失正接を導いた後に、ABAQUSを利用した均質化法解析システムを開発する。硬軟2相のゴムからなるゴム複合体に関する数値解析結果と、並行して行った実験結果との比較から提案手法および開発プログラムの妥当性と有効性を示す。さらに、一方向強化FRRと熱可塑性エラストマーの有効損失正接に関するパラメトリック・スタディーを行う。

第5章では、複合材料における微細構造の構造パラメータの不確かさが等価な材料特性や微視的な構造応答に与える確率論的な変動を効率的に解析する手法として確率均質化法を提案する。均質化法では、微細構造は周期的に規則正しく配置されているという仮定のもとで理論が展開されているが、実際の複合材料では規則正しい周期性が満たされていない場合が少なくない。そこで、摂動法に基づく確率有限要素法とマルチスケール漸近展開に基づく均質化理論を組み合わせた確率均質化法を定式化する。定式化に基づいて解析プログラムを開発した後に数値解析例により提案手法の妥当性と有効性を示す。

第6章では、以上において開発した均質化法解析システムを利用して、撚りコード/ゴム複合体の解析を行う。撚りコード/ゴム複合体の単位セルモデルについて検討した後に、等価弾性係数、等価熱伝導率、等価線膨張係数および有効損失正接に関するパラメトリック・スタディーを行う。最後に、確率均質化法を適用して、撚りコードで補強された一方向強化平板の繊維配向角が2次元空間確率過程として不確かな場合の確率論的な微視的応力解析を行う。

以上のまとめを結論として第7章に示す。また、マルチスケール漸近展開の2次の項まで考慮したときの均質化法を付録Aに示す。

CHAPTER 1.

参考文献

- (1) 自動車用タイヤの研究, 横浜ゴム株式会社編, (1995), 山海堂.
- (2) Kaga,H, Okamoto,K. and Tozawa,Y., *Tire Sci. Tech.*, 5-2, 1977, pp.102-118.
- (3) Halpin,J.C. and Kardos,J.L., *Poly. Eng. Sci.*, 16-5 (1976), 344.
- (4) Meschke,G. and Helnwein,P., *Comput. Mech*, 13, (1994), 241.
- (5) 小石, 鈴木, 加部, 機構論, 95-2A, (1995), 353.
- (6) Mori,T. and Tanaka,K., *Acta Meta.*, 21, (1973), 571.
- (7) Lions,J.L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, (1981), Science Press.
- (8) ABAQUS Users Manual, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., (1996).
- (9) Maxwell,J.C., *Electricity and Magnetism*, vol.1, (1892), Clarendon Press.
- (10) Rayleigh,W.R., *Phys. Mag.*, 34, (1892), 241.
- (11) Einstein,A., *Ann. Phys.*, 19, (1906), 289.
- (12) Voigt,W., *Wied. Ann.*, 38, (1889), 573.
- (13) Reuss,A., *Z. Angew. Math. Mech.*, 9, (1929), 49.
- (14) Hill,R., *Proc. Phys. Soc.*, A65, (1952), 349.
- (15) Tsai,S.W., *NASA CR-71*, (1964).
- (16) Hashin,Z. and Shtrikman,S., *J. Mech. Phys. Solid*, 11, (1963), 127.
- (17) Aboudi,J., *Mechanics of Composite Materials*, (1991), Elsevier.
- (18) Eshelby,J.D., *Proc. Roy. Soc. London*, A241, (1957), 376.
- (19) Takao,Y. and Taya,M., *Trans. ASME*, 52, (1985), 806.
- (20) Hatta,H. and Taya,M., *Int. J. Eng. Sci.*, 24-7, (1986), 1159.
- (21) Hatta,H. and Taya,M., *J. Eng. Mater. Tech.*, 109, (1987), 59.
- (22) Daimaru,A. and Taya,M., *Progress in Science and Engineering of Composite*, edited by Hayashi,T. et al., ICCM-IV, Tokyo, Japan Soc. Comp. Mater., (1982), 1099.
- (23) Dunn,M.L., *J. Compos. Mater.*, 29-8, (1994), 2053.
- (24) Lease,K.B., Wu,H.C. and Kurath,P., *ASME AMD*, 202, (1995), 153.
- (25) Aboudi,J. Arnold,S.M. and Pindera,M-J., *Compos. Eng.*, 4, (1994), 1.
- (26) 小林, 石川, 日本航空学会誌, 23-256, (1975), 53.

CHAPTER 1.

- (27) 小林, 石川, 日本航空学会誌, **23**-260, (1975), 516.
- (28) Hill,R., *J. Mech. Phys. Solids*, **15**, (1967), 79.
- (29) Suquet,P.M., Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics, In : *Homogenization Techniques for Composite Media*, Sanchez-Palencia,E. and Zaoui,A. (eds), (1987), Springer-Verlag, 191.
- (30) Hollister,S.J. and Kikuchi,N., *Comput. Mech.*, **10**, (1992), 73.
- (31) De Giorgi,E. and Spagnolo,S., *Boll. Un. Mat. Ital.*, **4**-8, (1973), 391.
- (32) Duvaut,G., *Theoretical and Applied Mechanics*, Koiter,W.T., (eds), (1976), 119., North-Holland.
- (33) Oleinik,O.A., *Trends and Application for Pure Mathematics to Mechanics*, (1984), 248, Springer.
- (34) Babuska,I., *Tech. Note BN-821*, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, (1975), 89.
- (35) Bourgat,J.F. and Lanchon,H., *INRIA Rapport de Recherche*, **208**, (1976).
- (36) Bourgat,J.F., *Lecture Note in Mathematics*, **704**, (1977), 330., Springer.
- (37) 菊地, 谷沢, 東京大学宇宙航空研究所報告, **16**-1, (1980), 615.
- (38) Lene,F. and Leguillon,D., *Int. J. Solids Struct.*, **18**-5,(1982), 443.
- (39) Lene,F., *Eng. Fract. Mech.*, **25**-5/6, (1986), 713.
- (40) Devries,F., Dumontet,H., Duvaut,G. and Lene,F., *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **27**, (1989), 285.
- (41) Lene,F. and Paumelle,P., *ASME PD*, **45**, (1992), 97.
- (42) Licht,C. and Suquet,P.M., *Numerical Methods for Nonlinear Problems vol.3*, (1986), 106, Dubrovnik.
- (44) Francfort,G., *Ph.D. Dissertation*, (1982), Stanford University.
- (43) Francfort,G., *S.I.A.M. J. of Math. Anal.*, **14**, (1983), 696.
- (45) Francfort,G. and Suquet,P.M., *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **96**-3, (1986), 265.
- (46) Dumontet,H., *Local Effects in the Analysis of Structures*, Ladeveze,P., (eds), (1985), 215. Elsevier.
- (47) Kohn,R.V., and Vogelius,M., *Int. J. Solids Struct.*, **20**-4, (1984), 333.
- (48) Lewinski,T., *Int. J. Solids Struct.*, **29**-3, (1992), 309.
- (49) Guedes,J.M., *Ph.D. Dissertation*, (1990), The University of Michigan.

CHAPTER 1.

- (50) Cheng,C.H., *Ph.D. Dissertation*, (1992), The University of Michigan.
- (51) Heguri,H., *Ph.D. Dissertation*, (1995), The University of Michigan.
- (52) 寺田, 弓削, 菊池, 機論, 61-590, A(1995), 2199.
- (53) 寺田, 弓削, 菊池, 機論, 62-601, A(1996), 2072.
- (54) Suzuki,K., *Ph.D. Dissertation*, (1991), The University of Michigan.
- (55) Muller,S., *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 99-3, (1987), 189.
- (56) 高野, 座古, 大西, 材料, 45-2, (1996), 163.
- (57) 渋谷, 機論, 62-599, A(1996), 1665.
- (58) Ghosh,S., Lee,K. and Moorthy,S., *Int. J. Solids Structures*, 32-1, (1995), 27.
- (59) Dumont,S. and Lebon,F., *ASME PD*, 78, (1996), 229.
- (60) Braides,A., <http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>, (1993).
- (61) Buttazzo,G., <http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>, (1993).
- (62) Defranceschi,A., <http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>, (1993).
- (63) Allaire,G., <http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>, (1993).
- (64) Allaire,G., <http://www.fiz-karlsruhe.de/ejournals/homogenization/homogeni.html>, (1993).

Chapter 2

弾性問題のための均質化法

2.1 緒 言

均質化法^{(1)~(4)}とは，周期性を有する微細構造からなる構造物の等価な(有効)材料特性や，微細構造レベルでの詳細な応答を効率よく計算するための数学理論である。

本章ではまず本研究の中核をなす均質化理論を弾性問題について解説する。すなわちマルチスケール漸近展開による，微細(微視的)構造と全体(巨視的)構造それぞれに関する境界値問題の導出過程と，等価弾性特性や微視的応力分布の算出方法について詳しく述べる。

次に有限要素法に基づく計算アルゴリズムを示し，弾性問題のための均質化法解析システムを汎用有限要素解析プログラムABAQUS⁽⁵⁾をベースに開発する。汎用有限要素解析プログラムを用いる利点は，その豊富な解析機能を利用して比較的容易に各種境界値問題の均質化法解析システムを開発できる点にある。本研究ではこの利点を利用し，次章以降において熱伝導・熱弾性・動的粘弾性問題のための均質化法解析システムを順次開発する。

繊維強化複合材料と多孔質平板の微視的応力解析に関する数値解析例により，開発したプログラムの妥当性と有効性について検討する。その際，重み平均による微視的応力の計算精度向上についても検討を加える。さらに，熱可塑性エラストマー(Thermoplastic Elastomer)の等価弾性定数に関するパラメトリックスタディーを行う。

均質化法は有効なマルチレベル解析手法であるが，全体構造物の表面(境界)では微細構造の3次元的な周期性が仮定できないため，均質化法で計算された境界近傍の微視的応力は少なからず誤差を含んでいる。この点は早くから指摘され，境界層理論を用いた補正手法がLions⁽¹⁾やDumontet⁽⁶⁾により提案されている。そこで，すでに開発した均質化法解析システムを境界層理論による補助問題解析のために拡張し，一方向強化材と多孔質平板の数値解析例を用いて境界層理論の有効性に検討を加える。

2.2 均質化法

2.2.1 仮想仕事の原理による定式化

均質化法では図2.1に示すような周期性を持った微細構造(単位セル)からなる構造物を考える。繊維強化複合材料や粒子分散複合材料など、実際の複合材料の多くはその微細構造に周期性を仮定できるものが少なくない。また、仮に構造物の各所で微細構造が異なつたとしても、図のように全体構造の各所において異なる微細構造が分布していると仮定することにより、さらに多くの構造物を対象とする事ができる。図では二種類の微細構造を示しているが、以下の定式化では各種の単位セルを特に区別しない。

簡単化のために、初期応力が存在しない線形弾性問題を対象とする。初期応力が存在する場合の均質化法の定式化は次章に示す熱弾性問題のための定式化と同じである。全体構造物を記述する巨視的な座標系を \boldsymbol{x} 、また、微細構造の単位セルを記述する微視的な座標系を \boldsymbol{y} とすると、全体構造物と微細構造との大きさの比を表す ε を介して次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

上式の関係をもとに、微細構造の構成要素である単位セルと全体構造物の座標系をそれぞれ独立に選ぶことができる。

ここで、全体構造の領域 Ω は3次元ユークリッド空間 \boldsymbol{R}^3 の有界な連結開集合であり、 $\Gamma = \partial\Omega$ は Ω の境界で、法線が存在する程度になめらか(Lipschitz連続)であると仮定する。トラクションが規定された境界を Γ_t 、変位が規定された境界を Γ_g とすると、 $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_g$ 、 $\Gamma_t \cap \Gamma_g = \emptyset$ なる関係がある。また、単位セルの領域 Y は次式に示す様に、直方体領域とし \boldsymbol{R}^3 の開集合とする。

$$Y =]0, y_1[\times]0, y_2[\times]0, y_3[\quad (2.2)$$

弾性問題における仮想仕事の原理は、未知変位を $\boldsymbol{u} \in U_\Omega$ とすると次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\boldsymbol{u}} \in U_\Omega = \{ \bar{\boldsymbol{u}} \mid \bar{\boldsymbol{u}} \in (H^1(\Omega))^3, \bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_g \} \quad (2.3)$$

CHAPTER 2.

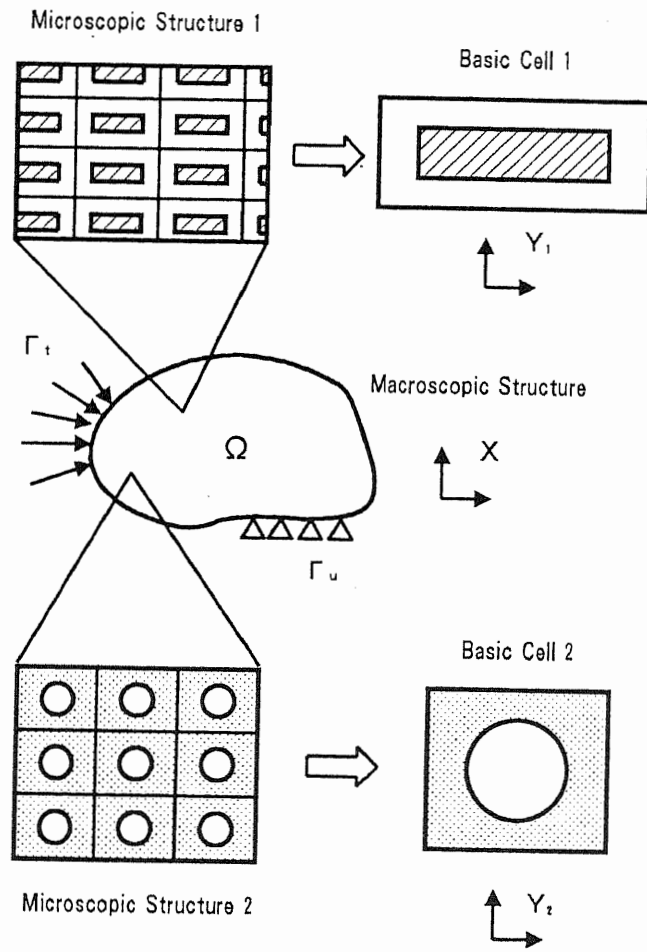


図 2.1: 全体(巨視的)構造と微細(微視的)構造

CHAPTER 2.

ここで, U_Ω , $H^1(\Omega)$ はそれぞれ変位の許容集合, Sobolev空間を表す. また, ひずみ-変位関係式と, 応力-ひずみ関係式をそれぞれ次式で表す.

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.5)$$

ここで考える全体構造は微細構造(単位セル)の集まりであるため, 物体力 f や弾性定数 D は各微細構造(単位セル)内で変化する. すなわち, これらは次式に示すように x と $y (= x/\varepsilon)$ それぞれの関数と見なすことができる.

$$\Phi(x) = \Phi(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (2.6)$$

また, 変位 u も同様に x と y の関数である.

$$u(x) = u(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (2.7)$$

さらに, 全体構造における物質点 x 近傍での微細構造からの寄与は周期的であると考えられる. 以下この周期性を特に Y -周期性 (Y -Periodicity) と呼ぶ. 上式に示した物体力, 弾性定数や変位はそれぞれ Y -周期関数である.

Y -周期関数である変位を次式のように漸近展開できると仮定する.

$$u = u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

ここで, $(x, y) \in \Omega \times Y$ である. また, Y -周期関数に関しては微分の連鎖則から次式が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi \left(x, y = \frac{x}{\varepsilon} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (2.9)$$

Y -周期関数 $\Psi(y)$ に関しては, 極限操作により次式が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \Psi(y) dY d\Omega \quad (2.10)$$

ここで, $|Y|$ は単位セルの測度, すなわち体積を表す.

ここで, 以下に示す3つの許容集合を定義する.

$$U_{\Omega \times Y} = \{ \bar{u}(x, y) \mid \bar{u} \in (H^1(\Omega \times Y))^3, \bar{u}(\cdot, y) \text{ } Y\text{-Periodic}, \bar{u} = \mathbf{o} \text{ on } \Gamma_g \} \quad (2.11)$$

$$U_\Omega = \{ \bar{u}(x) \mid \bar{u} \in (H^1(\Omega))^3, \bar{u} = \mathbf{o} \text{ on } \Gamma_g \} \quad (2.12)$$

$$U_Y = \{ \bar{u}(y) \mid \bar{u} \in (H^1(Y))^3, \bar{u} \text{ } Y\text{-Periodic}, \bar{u} = \mathbf{o} \text{ on } \Gamma_g \} \quad (2.13)$$

CHAPTER 2.

式(2.8)を式(2.3)へ代入し式(2.9)を考慮すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} \right] + \varepsilon(\dots) \right\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

上式を ε について整理し, ε に関する恒等式であることを考慮すると以下の各式を得る.

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} \right] d\Omega \\ = \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

⋮

均質化法の基礎方程式である微細構造と全体構造それぞれの境界値問題を導く手順を3段階(STEP 1~3)に分けて以下に示す.

STEP 1

式(2.15)の両辺に ε^2 を乗じ, 式(2.10)を考慮することにより次式を得る.

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \quad (2.18)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ は任意なので $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ とする. 発散定理を適用し, 単位セルの周期性, すなわち単位セルの向かい合った境界面での項が相殺されることを考慮すると上式は次式となる.

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \left\{ \int_Y \left[-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) \right] \bar{u}_i dY \right\} d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_Y \quad (2.19)$$

ここで, $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ は任意なので, 単位セルの領域 Y での \mathbf{u}^0 に関する次式の境界値問題を導くことができる.

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y \quad (2.20)$$

命題 2.1 (Lemma 2.1 in Lions⁽¹⁾) x は Ω 内で定義されていると仮定する.

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \right) = F(y), & y \in Y \\ \Phi \text{ is periodic in } Y \end{cases} \quad (2.21)$$

以下の条件を満たす場合においてのみ, この方程式には解が存在する. ただし, 解は一意に決まらず付加定数項分の不定性がある.

$$\int_Y F(y) dY = 0 \quad (2.22)$$

上記命題1は, 周期境界条件下での解の存在条件を示している. なお, 命題1の証明は例えばLions⁽¹⁾により与えられている.

式(2.20)に命題1を適用することにより, 以下の結果を得ることができる.

$$u^0 = u^0(x) \quad (2.23)$$

すなわち, u^0 は全体構造のみに依存することが分かる.

STEP 2

式(2.16)に, 式(2.23)を代入し, 両辺に ε を乗じた後に式(2.10)を適用すると次式を得る.

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY \right] d\Omega = 0, \quad \forall \bar{u} \in U_{\Omega \times Y} \quad (2.24)$$

上式において, \bar{u} は任意なので $\bar{u} = \bar{u}(y)$ とすると次式を得る.

$$\int_Y D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY = 0, \quad \forall \bar{u} \in U_Y \quad (2.25)$$

ここで, 次式を満たす解 $\chi(x, y)$ を導入する.

$$\int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \bar{u} \in U_Y \quad (2.26)$$

上式において解 χ が存在することは命題1から保証される. この χ は単位セルに固有な変形モードであり, 特性変位あるいは特性関数と呼ばれる. その意味

CHAPTER 2.

で $\chi(\mathbf{y})$ と見なすことができるが、ここでは、全体構造にさまざまな微細構造が分布していることを明示するため $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と記す。

式(2.26)を満たす χ を導入すると、式(2.25)より \mathbf{u}^1 は次式のように変数分離した形で表すことができる。

$$u_i^1 = -\chi_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \quad (2.27)$$

すなわち、式(2.26)に示す微細構造に関する境界値問題を解くことにより、微細構造からの寄与 \mathbf{u}^1 を評価できる。

STEP 3

式(2.17)に、式(2.23)を代入し、式(2.10)を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} \right] dY \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i \bar{u}_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

上式において、 $\bar{\mathbf{u}}$ は任意なので $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ とすると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) dY \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i \bar{u}_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega} \end{aligned} \quad (2.29)$$

これは、全体構造における仮想仕事の原理(境界値問題の弱形式)を表していることが分かる。

式(2.29)に式(2.27)を代入することにより次式を得る。

$$\boxed{\int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega}} \quad (2.30)$$

ここで、 D_{ijkl}^H は次式に示す単位セルの均質化された有効弾性テンソルを表している。

$$\boxed{D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY} \quad (2.31)$$

有効弾性テンソルに関して、 $D_{ijkl}^H = D_{ijlk}^H = D_{jikl}^H = D_{klij}^H$ の対称性が成り立つ。

以上より、式(2.26)を χ について解いた後に、式(2.31)を評価することで微細構造の有効弾性テンソルを求めることができ、ひいては、式(2.30)より全体構造の応答を計算できる。

CHAPTER 2.

最後に、微細構造レベルでの応答(微視的応力)を評価する式を導く。

式(2.23), (2.27)より, 式(2.8)の一次近似式は次式となり, 微細構造の微視的な変位 $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を決定できる。

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^0(\mathbf{x}) - \varepsilon \chi_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \quad (2.32)$$

式(2.32)を式(2.4), (2.5)に代入し, 式(2.9)を考慮することにより, 次式に示す微視的なひずみ $\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と応力 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ をそれぞれ導くことができる。

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial y_j} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (2.33)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (2.34)$$

ここで注目すべき点は, 均質化法では式(2.34)にて微視的な応力を評価する際, 再度, 有限要素法等のソルバーを用いる必要がない点である。

全体構造を粗いメッシュで分割し, 注目する部分だけ詳細なメッシュで分割した2つの解析モデルを用いるGlobal/Local法^{(7),(8)}がき裂問題の解析などに利用されている。この方法は均質材料でしかも着目する応力評価点が少ない構造, たとえば一個所にき裂が存在する構造物などには有効である。しかしながら複合材料では, 別途等価な材料特性を評価する必要があり, しかも応力評価点が多くなると有限要素法による計算コストが増加するため, 微細構造を有するマルチレベルの解析にはあまり効率的ではない。

一方, 線形弾性問題の均質化法では微細構造と全体構造に関する基礎方程式はお互いに連成しないため, 別々に一度だけ有限要素法で解けばよいことになる。微細構造から全体構造への寄与は等価な材料定数として考慮されるため全体構造のモデル化が簡単であり, しかも全体構造の各着目点における微細構造レベルの応力分布は, 微細構造と全体構造に関して有限要素法ですでに計算した結果を利用することで非常に効率的に計算できる。

2.2.2 有限要素法による定式化

均質化法で得られた微細構造および全体構造に対する境界値問題を解くには, 有限要素法等の離散化数値解析手法を用いる。ここでは, まず微細構造に

CHAPTER 2.

関する境界値問題を前述の弱形式をもとにアイソパラメトリック要素を用いた変位法に基づく有限要素法⁽⁹⁾により定式化する。

微細構造における特性変位 χ と座標 y はそれぞれ次式により補間近似できるものとする。

$$\begin{cases} \chi_i^{mn} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) \chi_{ai}^{mn} \\ y_i = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) y_{ai} \end{cases} \quad (2.35)$$

ここで、 $N_a(\xi, \eta, \zeta)$ は自然座標系($\xi \in \square$, $\square = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)$)における形状関数を、また n_{en} は要素を構成する節点数を表す。

上式の関係を用いると、変位(特性変位)勾配は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial \chi_i^{mn}}{\partial y_j} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{\partial N_a}{\partial y_j} \chi_{ai}^{mn} = B_y \chi_e \quad (2.36)$$

上式に現れる B_y , χ_e は微細構造を記述する座標における離散化された微分演算子マトリックスと要素節点における特性変位マトリックスをそれぞれ表し、各マトリックスの成分を以下に示す。

$$B_y = [B_y^1 \ B_y^2 \ \dots \ B_y^{n_{en}}] \quad (2.37)$$

$$B_y^i = \begin{bmatrix} N_{i,y_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y_2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y_3} \\ N_{i,y_2} & N_{i,y_1} & 0 \\ N_{i,y_3} & 0 & N_{i,y_1} \\ 0 & N_{i,y_3} & N_{i,y_2} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \sim n_{en} \quad (2.38)$$

$$\chi_e = \begin{bmatrix} \chi_1^{11} & \chi_1^{22} & \chi_1^{33} & \chi_1^{12} & \chi_1^{13} & \chi_1^{23} \\ \chi_2^{11} & \chi_2^{22} & \chi_2^{33} & \chi_2^{12} & \chi_2^{13} & \chi_2^{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n_{edf}}^{11} & \chi_{n_{edf}}^{22} & \chi_{n_{edf}}^{33} & \chi_{n_{edf}}^{12} & \chi_{n_{edf}}^{13} & \chi_{n_{edf}}^{23} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

ここで、 N_{i,y_1} は $\partial N_i / \partial y_1$ を表し、 $n_{edf}(= n_{en} \times 3)$ は要素の自由度数を表す。

以上の手順に従って、微細構造の境界値問題の弱形式は以下の有限要素方程式に書き換えることができる。

$$K_y \chi = F_y \quad (2.40)$$

ここで,

$$K_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D B_y dY = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\square} B_y^T D B_y J_y d\square \quad (2.41)$$

$$F_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D dY = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\square} B_y^T D J_y d\square \quad (2.42)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1^{11} & \chi_1^{22} & \chi_1^{33} & \chi_1^{12} & \chi_1^{13} & \chi_1^{23} \\ \chi_2^{11} & \chi_2^{22} & \chi_2^{33} & \chi_2^{12} & \chi_2^{13} & \chi_2^{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n_{df}}^{11} & \chi_{n_{df}}^{22} & \chi_{n_{df}}^{33} & \chi_{n_{df}}^{12} & \chi_{n_{df}}^{13} & \chi_{n_{df}}^{23} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

を表し, n_{df} は全自由度数, 肩付きの T は転置, J_y は次式に示すヤコビアンの変換係数をそれぞれ表す.

$$J_y = \det \begin{bmatrix} y_{1,\xi} & y_{1,\eta} & y_{1,\zeta} \\ y_{2,\xi} & y_{2,\eta} & y_{2,\zeta} \\ y_{3,\xi} & y_{3,\eta} & y_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

以上より, 単位セルの特性変位 χ は対称性を考慮して6ケース(2次元弾性問題の場合は3ケース)の荷重ベクトルをもとに得られる単位セルに固有な変形モードであることがわかる. しかも, 荷重ベクトルさえ別途計算できれば既存の有限要素解析プログラムを流用することが可能であることがわかる. ただし, 単位セルの周期境界条件を考慮するため, MPC(多点拘束)等により境界上節点の変位を拘束する必要がある.

均質化された弾性マトリックスは有限要素近似により次式に書き換えることができる.

$$D^H = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\square} D (I - B_y \chi_e) J_y d\square \quad (2.45)$$

ここで, I は単位マトリックスを表す.

等価な弾性マトリックスから次式により等価なコンプライアンスマトリックスを算出することができる.

$$C^H = [D^H]^{-1} \quad (2.46)$$

さらに, 直交異方性が仮定できるならば, 以下の関係から等価な縦弾性係数,

CHAPTER 2.

等価なポアソン比，等価な横弾性係数をそれぞれ算出することができる．

$$C^H = \begin{bmatrix} 1/E_1^H & -\nu_{21}^H/E_2^H & -\nu_{31}^H/E_3^H & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}^H/E_1^H & 1/E_2^H & -\nu_{32}^H/E_3^H & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}^H/E_1^H & -\nu_{23}^H/E_2^H & 1/E_3^H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12}^H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13}^H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}^H \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

次に，全体構造に関する境界値問題の弱形式を同様にアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法により定式化する．

全体構造における変位 \mathbf{u}^0 と座標 \mathbf{x} はそれぞれ次式により補間近似できるものとする．

$$\begin{cases} u_i^0 = \sum_{a=1}^{N_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) u_{ai} \\ x_i = \sum_{a=1}^{N_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) x_{ai} \end{cases} \quad (2.48)$$

ここで， N_{en} は要素を構成する節点数を表す．

上式の関係を用いると，変位勾配は次式で表すことができる．

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \sum_{a=1}^{N_{en}} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} u_i^{0a} = \mathbf{B}_x \mathbf{u}^{0e} \quad (2.49)$$

上式に現れる \mathbf{B}_x ， \mathbf{u}^{0e} は全体構造を記述する座標における離散化された微分演算子マトリックスと要素節点における変位ベクトルをそれぞれ表し，各成分を以下に示す．

$$\mathbf{B}_x = [\mathbf{B}_x^1 \mathbf{B}_x^2 \cdots \mathbf{B}_x^{N_{en}}] \quad (2.50)$$

$$\mathbf{B}_x^i = \begin{bmatrix} N_{i,x_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x_2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x_3} \\ N_{i,x_2} & N_{i,x_1} & 0 \\ N_{i,x_3} & 0 & N_{i,x_1} \\ 0 & N_{i,x_3} & N_{i,x_2} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \sim N_{en} \quad (2.51)$$

CHAPTER 2.

$$\mathbf{u}^{0eT} = [u_1^{01} \ u_2^{01} \ u_3^{01} \ \dots \ u_1^{0N_{en}} \ u_2^{0N_{en}} \ u_3^{0N_{en}}] \quad (2.52)$$

ここで, N_{i,x_1} は $\partial N_i / \partial x_1$ を表し, $N_{\text{edf}} (= N_{\text{en}} \times 3)$ は要素の自由度数を表す.

全体構造物に関する以下の有限要素剛性方程式を得ることができる.

$$\mathbf{K}_x \mathbf{u}^0 = \mathbf{F}_x \quad (2.53)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_x = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_x^T \mathbf{D}^H \mathbf{B}_x d\Omega \quad (2.54)$$

$$\mathbf{F}_x = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{H}^T \mathbf{f}^H d\Omega + \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{H}_s^T \mathbf{T} d\Gamma \right) \quad (2.55)$$

を表し, N_{df} は全自由度数, \mathbf{H} , \mathbf{H}_s はそれぞれ形状関数のマトリックス表示を表す. また, 上式に表れる \mathbf{D}^H は式(2.45)で得られる有効弾性マトリックスである.

最後に, 全体構造物の解析で得られた変位 \mathbf{u}^0 , ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^0 (= \mathbf{B}_x \mathbf{u}^0)$ 及び単位セルの特性変位 $\boldsymbol{\chi}$ をもとに, 微視的な変位 \mathbf{u}^ϵ , ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^\epsilon$ と応力 $\boldsymbol{\sigma}^\epsilon$ は一次近似解として以下のように導くことができる.

$$\mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{u}^0 - \epsilon \boldsymbol{\chi} \epsilon^0 \quad (2.56)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^\epsilon = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\epsilon}^0 \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\epsilon = \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\epsilon}^0 \quad (2.58)$$

ここで, 各式の右辺第一項は全体構造による項で, 各第二項は微細構造からの寄与を表している.

2.3 均質化法解析システムの概要

以上の定式化をもとに汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに弾性問題のための均質化法解析システムを開発した。ABAQUSを利用したのは、その豊富な解析能力を利用して解析システムの機能拡張が比較的容易なためである。また、微細構造と全体構造の有限要素モデルの作成および解析結果(応力分布等)の表示には、商用のプリ・ポストプロセッサであるI-DEASを利用している。

解析システムのフローチャートを図2.2に示す。構築した解析システムの中で今回開発したプログラムは、図中のPhase 1~3のモジュールである。図の左側が微細構造に関する処理を示し、右側が全体構造に関する処理を示している。また、図中の代表的なモジュールにおける処理内容を表2.1に示す。

図2.2のフローチャートに沿って解析手順を説明する。

- I-DEASにて微細構造(単位セル)の有限要素モデルを作成する。ここで、作成するのは、節点、要素に関する幾何形状と材料特性のみである。境界条件の指定は一切必要ないが、Phase 1にて周期境界条件を処理するため、単位セルの相対する境界面の要素分割を同じにする必要がある。
- Phase 1では、微細構造に関する境界値問題における荷重ベクトルを計算し、ABAQUSで境界値問題を解くための完全な入力データを自動作成する。その際、周期境界条件を満足させるために、単位セルの相対する境界面の節点に関して変位拘束の処理を行う。
- ABAQUSで微細構造に関する境界値問題を解き、単位セルの特性変位を求める。
- Phase 2では、特性変位を用いて等価な弾性マトリックスを算出する。
- 別途I-DEASにて全体構造物の有限要素モデルを作成する。この時、上で算出した等価な弾性マトリックスを材料特性として入力する。
- ABAQUSで全体構造に関する境界値問題を解き、変位や応力など平均的な構造応答を求める。

CHAPTER 2.

- 最後のPhase 3では，全体構造に関する境界値問題で得られた変位と，微細構造に関する境界値問題の解(特性変位)を用いて，微視的な応力分布を計算する。

なお，開発したプログラムでは，4面体，5面体(三角柱)，6面体それぞれの一次，二次要素が利用可能である。また，あわせて開発した2次元問題用のプログラムでは，3角形，4角形それぞれの一次，二次要素が利用可能である。

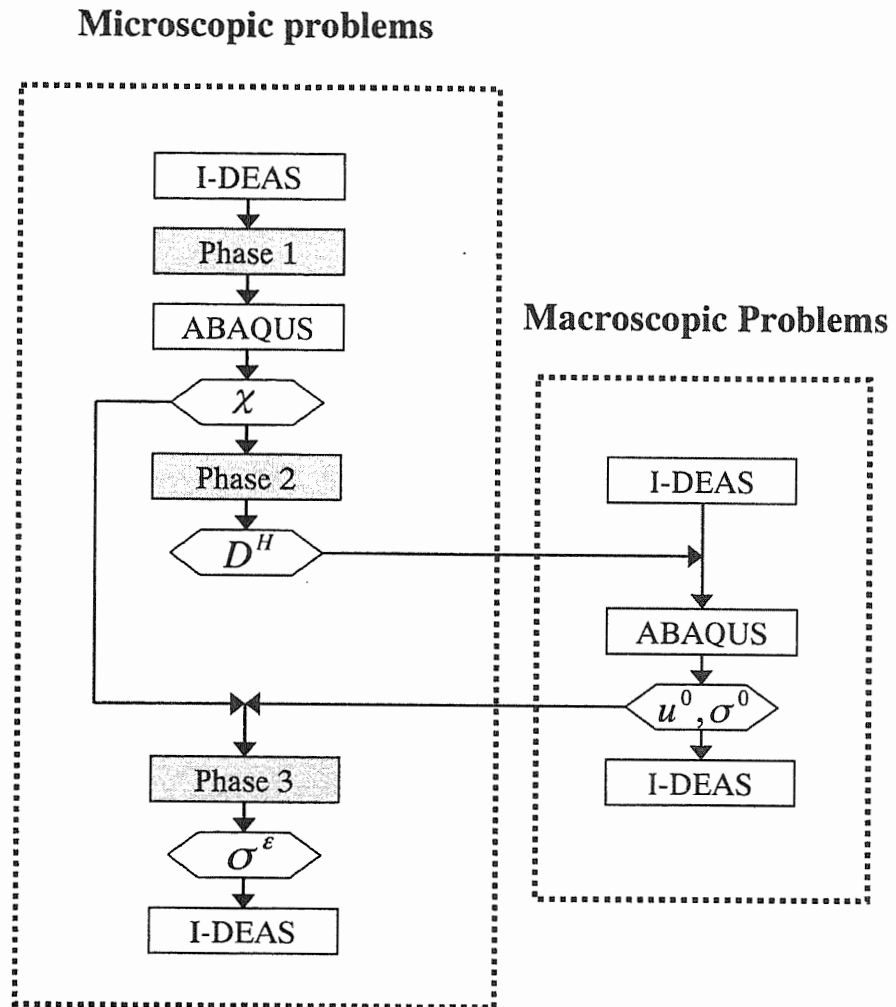


図 2.2: 均質化解析システムの概要(解析の流れ)

表 2.1: 均質化法解析システムの概要(主要モジュールでの処理)

Phase 1
<ul style="list-style-type: none"> • Compute load vector and obtain input data for ABAQUS ; $F_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D dY$
ABAQUS(microscopic problem)
<ul style="list-style-type: none"> • Solve microscopic boundary value problem using ABAQUS ; $K_y \chi = F_y \quad \text{where} \quad K_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D B_y dY$
Phase 2
<ul style="list-style-type: none"> • Compute homogenized D-matrix ; $D^H = \frac{1}{ Y } \int_Y D (I - B_y \chi) dY$
ABAQUS(macroscopic problem)
<ul style="list-style-type: none"> • Solve macroscopic boundary value problem using ABAQUS ; $K_x u^0 = F_x \quad \text{where} \quad K_x = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} B_x^T D^H B_x d\Omega$
Phase 3
<ul style="list-style-type: none"> • Compute microscopic stress ; $\sigma^\varepsilon = D (I - B_y \chi) \epsilon^0 \quad \text{where} \quad \epsilon^0 = B_x u^0$

2.4 数値解析例

2.4.1 繊維強化複合材料

図2.3に示す繊維強化複合材料($H=W=L=1.0\text{mm}$, $D=0.6\text{mm}$)を軸方向に引っ張った際の補強繊維とそれぞれの応力について、均質化法による解析結果と有限要素法による解析結果との比較を行い、本解析システムの妥当性について検討する。

均質化法に基づく本解析システムでは、巨視的ひずみ $\epsilon^0 = [0, 0, 0.01, 0, 0, 0]$ を与え、単位セルの微視的応力分布を求める。ここで注意すべきことは、均質化法による解析では巨視的ひずみを境界条件として単位セルの有限要素解析を行うのではなく、単位セルの特性変位と呼ばれる固有関数 χ と式(2.34)をもとに単位セル内の応力を計算する点である。一方、有限要素法による数値解析では、単位セルと同じ有限要素モデルを用い、軸方向の片側を拘束し同じひずみになるように反対側に強制変位を与えた。

一般に、ゴム系複合材料では(ゴム)の弾性率 E_m と補強材(ナイロンやスチール等)の弾性率 E_f との比 E_f/E_m は100~10,000に及ぶ。そこで、 E_f/E_m を1~10,000まで変化させたときの本解析システムと有限要素解析による計算結果を各場合について、主軸方向(Z方向)成分における補強材の平均応力 $\bar{\sigma}_{fz}$ とマトリックスの平均応力 $\bar{\sigma}_{mz}$ との比 $\bar{\sigma}_{fz}/\bar{\sigma}_{mz}$ として表2.2に示す。表2.2より、均質化法と有限要素解析の結果は1%未満の誤差範囲でよい一致をみており、本解析システムの妥当性が確認できる。

2.4.2 熱可塑性エラストマーの等価弾性定数

ゴム弾性を示す加硫ゴムは、現在タイヤ、ベルト、ホースなど広く工業用品や家庭用品に用いられている。一方、加工とリサイクルが容易であるところから、近年ゴムに替わり、ゴムに近い性質をもつプラスチックである熱可塑性エラストマーが用いられ始めている。熱可塑性エラストマーとは、熱可塑性樹脂の中に粒子状の加硫ゴムを分散させた構造になっており、お互いの長所を生かすことによる高性能化が期待できるため、今後ますます重要になると考えられる。

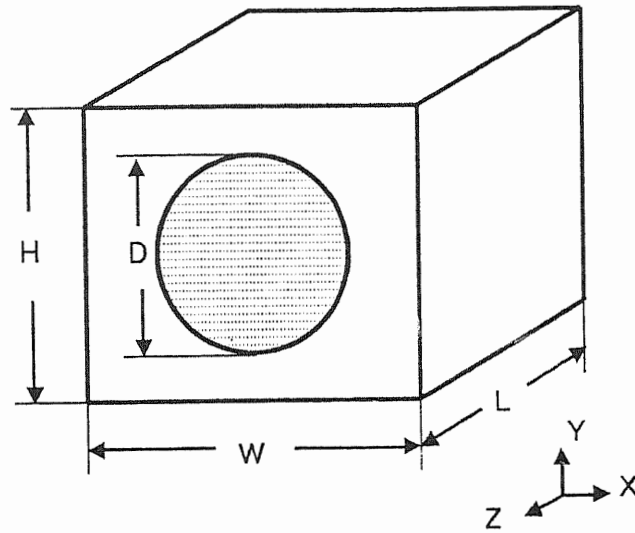


図 2.3: 繊維強化複合材料の単位セル

表 2.2: 補強材の平均応力とマトリックスの平均応力の比

E_f/E_m	$\bar{\sigma}_{fz}/\bar{\sigma}_{mz}$	
	Homogenization	FEM
1.0	1.00000	1.00000
10.0	7.28895	7.28253
100.0	6.80865×10^1	6.80437×10^1
1000.0	6.75895×10^2	6.75467×10^2
10000.0	6.75219×10^3	6.74620×10^3

CHAPTER 2.

ここでは、図2.4に示す単純化したゴム/樹脂複合体を考える。図は介在物の体積含有率(V_I)が27.2%の場合の単位セルを示している。球状介在物の体積含有率をパラメータにしたときのモデル作成を簡略化するために、あらかじめ単位セルの領域を8000要素($20 \times 20 \times 20$)に分割し⁽¹⁰⁾、球状介在物に相当する部分領域(要素)の材料特性を変更する方法で単位セルの有限要素モデルを作成している。通常熱可塑性エラストマーは樹脂がマトリックス(海)、ゴムが介在物(島)の構造(海島構造)で利用されるが、ここでは、通常海島構造とともに逆海島構造(マトリックスがゴム、介在物が樹脂)の場合も含め、介在物の体積含有率が変化したときの等価弾性係数を検討する。図2.5は介在物の体積含有率が高くなり($V_I=79.3\%$)球状介在物同士が連結した場合を想定したモデルである。このモデル化では介在物の体積含有率が約50%を上回った場合、隣り合った単位セルの介在物どうしが連結し、マトリックスと介在物の各相が孤立することのない連続相(パーコレイティッド・ドメイン)をなす。

ここでは、ポリエステルとゴムとの熱可塑性エラストマーを想定し、以下の弾性係数を用いる。

	Young's modulus (MPa)	Poisson's ratio
Polyester	2000.0	0.4
Rubber	10.0	0.49

海島構造、逆海島構造それぞれの場合について、ゴムの含有率を変化させたときの等価弾性係数の変化を図2.6に示す。また、それぞれの有効ポアソン比に関する結果を図2.7に示す。これらのグラフはゴムの体積含有率をパラメータにしているため、ポリエステルがマトリックスである海島構造では、ゴムの体積含有率が50%以上の領域でパーコレイティッド・ドメインを形成し、ゴムがマトリックスである逆海島構造では、逆に、ゴムの体積含有率が、50%以下の領域でパーコレイティッド・ドメインを形成している点に注意を要する。

図2.6より、海島構造の有効弾性係数がゴムの体積含有率の変化に対しほぼ線形に変化しているのに対し、逆海島構造では、パーコレイティッド・ドメインへと遷移する領域で急激に変化しているのがわかる。一方、図2.7より、有効ポアソン比に関しては特異な傾向が見られる。海島構造においては、ゴムの含有率が増えるにしたがい、ポアソン比は低下し、パーコレイティッド・ドメインに

CHAPTER 2.

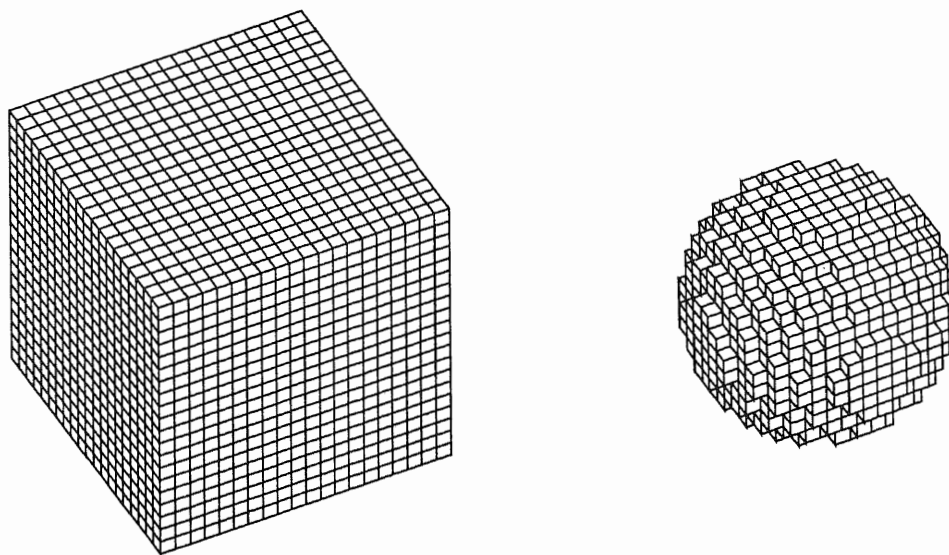


図 2.4: 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 27.2\%$), 左図: マトリックス, 右図: 介在物

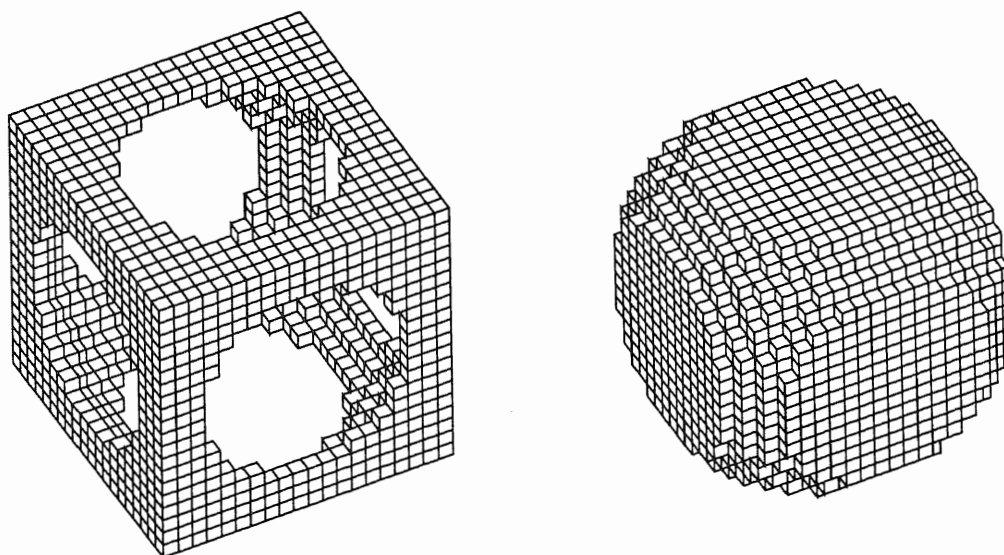


図 2.5: 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_f = 79.3\%$), 左図: マトリックス, 右図: 介在物

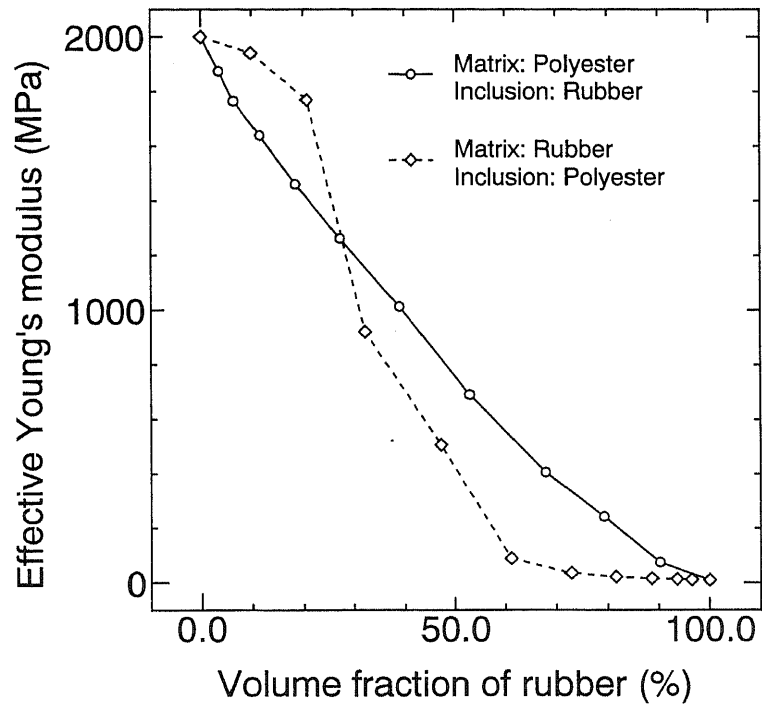


図 2.6: 熱可塑性エラストマーの有効弾性係数

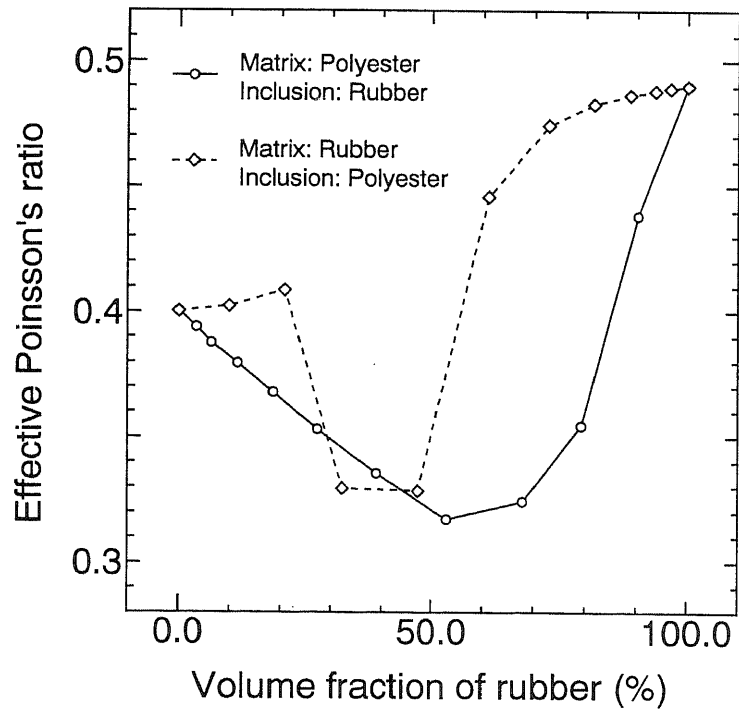


図 2.7: 熱可塑性エラストマーの有効ポアソン比

変化した後にポアソン比が高くなる。一方、逆海島構造においては、遷移領域においてポアソン比の著しい低下が見られる。

2.4.3 多くの円孔を有する平板

均質化法では、理論的に単位セルと全体構造物の寸法比を表す ε に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ を要請するが、実際に均質化法を適用する場合、必ずしもこの条件を満たしている場合ばかりではない。そこで、 ε が十分小さくない場合にも均質化法が有効かどうかを確認する。

図2.8に示す多くの円孔を有するゴム平板($H=8.0\text{mm}$, $L=8.0\text{mm}$, 円孔の直径 $=0.5\text{mm}$, 板厚 $=0.1\text{mm}$, $E=10.0\text{MPa}$, $\nu=0.49$)の片側を拘束し、面内曲げ変形を受けるように平板の反対側に線形分布した強制変位 $u(Y2)$ を境界条件として与えたときの各円孔まわりの応力集中を、均質化法と、円孔を忠実にモデル化した不均質モデルによる有限要素解析の二つの手法について比較検討する。なお、ここでは平面応力問題でとして取り扱う。

不均質モデルの有限要素解析では図2.8をもとに各円孔を含め忠実にモデル化している。不均質モデルの有限要素モデルを図2.9に示す。ここでは4節点の平面応力要素を用い、32768要素、35009節点からなる。

一方、均質化法による解析では、図2.8の全体モデルを64の単位セルから構成されているとみなす。単位セルの有限要素モデルと全体構造の有限要素モデルを図2.10, 2.11にそれぞれ示す。ここで、単位セルモデルは512要素、636節点からなる。なお、この単位セルの要素分割は、無限平板中にある円孔部の応力集中を十分な精度で計算できることを別途確認している。全体構造モデルは64要素、81節点からなり、円孔のない均質化されたモデルである。本解析例では便宜的に図2.11に示す全体モデルの要素一つ一つが図2.10に示す単位セルに対応するようモデル化しているが、均質化法では本来このような対応付けは必要ない。サブストラクチャー(スーパー要素)法と違い、均質化法では全体構造のメッシュと単位セルのメッシュはそれぞれ独立に分割することができるため、微細構造単位に全体構造の要素分割を行う必要がない。

均質化法では、まず単位セルモデル(図2.10)をもとに特性変位と有効弾性定数を計算し、次に、全体モデル(図2.11)で全体構造の変位勾配分布を求め、最後に、全体構造の変位勾配と単位セルの特性変位をもとに微視的応力分布を計

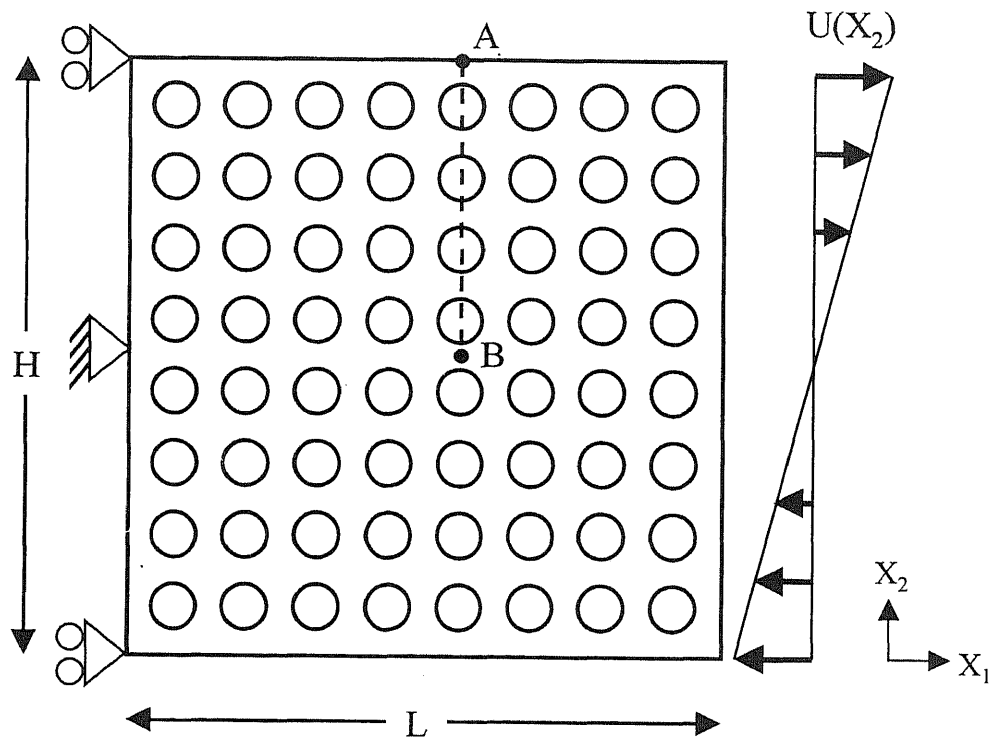


図 2.8: 多くの円孔を有する平板

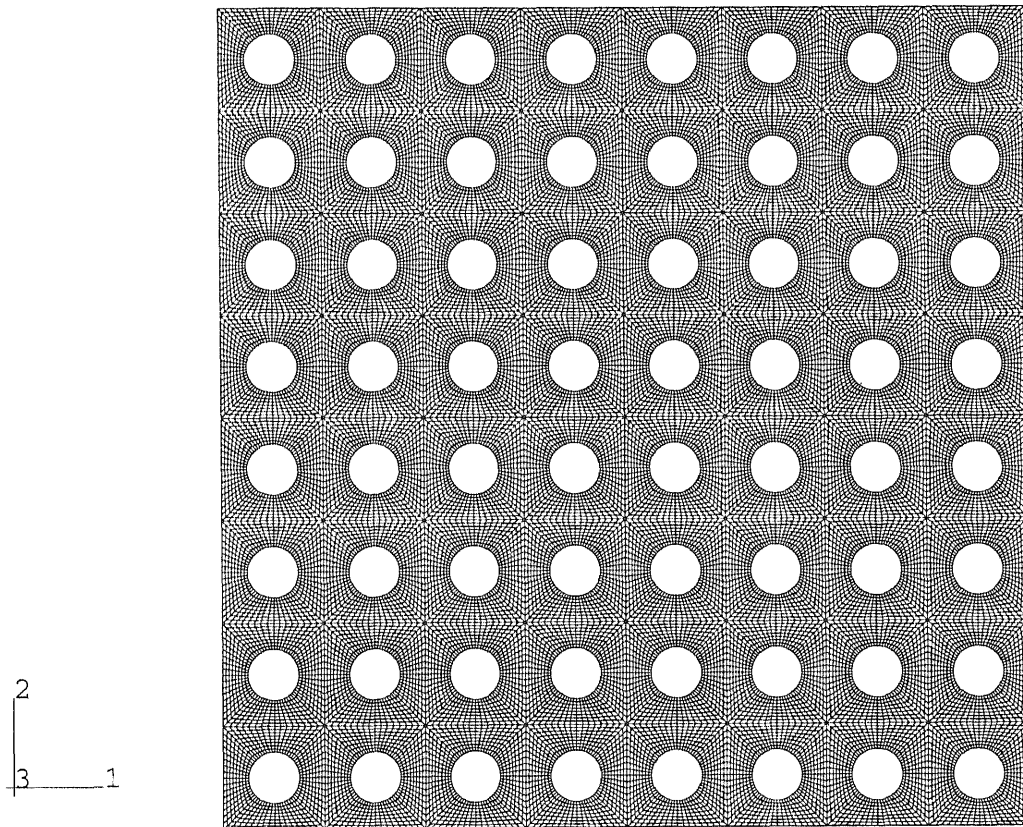


図 2.9: 全体構造の不均質有限要素モデル

CHAPTER 2.

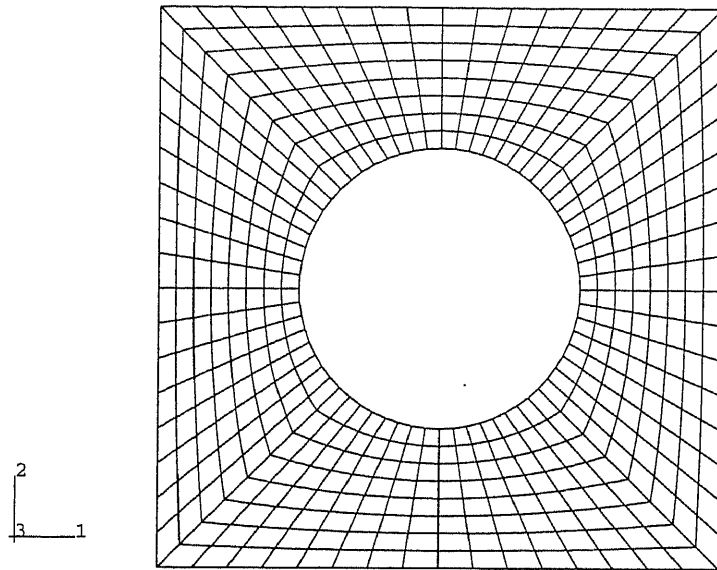


図 2.10: 単位セルの有限要素モデル

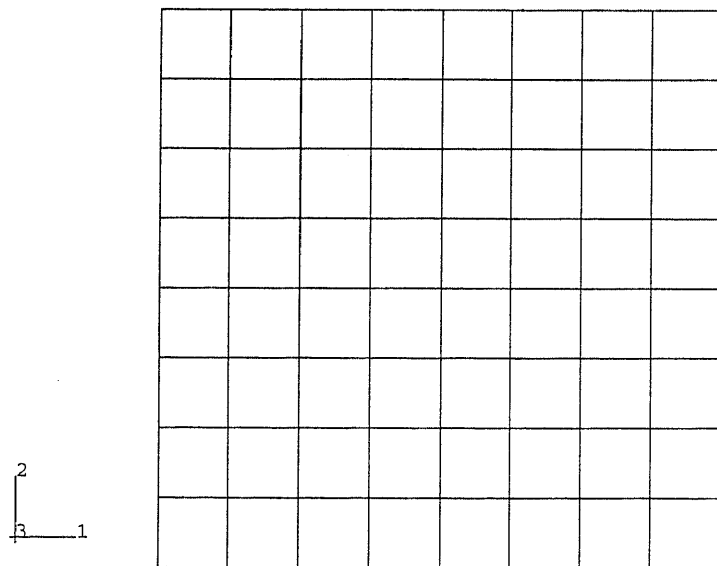


図 2.11: 全体構造の均質有限要素モデル

CHAPTER 2.

算する。均質化法では、単位セルと全体構造物の寸法比を表す ε に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ を仮定しているため、たとえマクロ構造において大きな応力勾配が生じていても微視的応力分布を評価する際には1点のマクロ構造の評価点での変位勾配を基に計算すれば良いことになる。しかしながら、本解析例のようにマクロ構造とミクロ構造の比が十分小さくない場合には、マクロ構造のただ1点の評価点における変位勾配では精度良く微視的応力分布を評価できない場合が考えられる。そこで、複数のマクロ構造の着目点での微視的応力分布を計算した後に、それらにマクロ構造の応力勾配に応じた重み関数で重み平均を取り、微視的応力を評価してみる。図2.12に重み平均による微視的応力評価の概念図を示す。図中左のマクロ構造のサブドメインとは応力評価点でのミクロ構造(単位セル)と同寸法の領域を示す。通常はb点での巨視的変位勾配を用いて微視的応力を評価するのであるが、重み平均による方法では、a点、c点における微視的応力を計算した後にそれぞれの応力分布に重み関数を乗じて平均する。本例題では、マクロ構造の応力はX2方向に線形分布するためこのように2点による重み平均で十分である。

均質化法及び不均質モデルによる有限要素解析で得られた微視的応力分布を図2.13に示す。この応力分布図は、図2.8におけるA-B断面に沿った応力分布(σ_{11})をプロットしたものであり、計4つの単位セルを縦断している。均質化法による結果は、1点での巨視的変位勾配をもとに得られたもの(図中実線)と、マクロ構造の応力勾配を考慮するため重み平均した微視的応力分布(図中黒丸)をそれぞれ示す。

図より、マクロ構造の1点の変位勾配をもとに均質化法で評価した応力分布(図中実線)は各円孔を中心に左右対称となり、円孔部での応力が十分な精度で評価できていないのがわかる。また、隣り合った単位セル間で応力が連続でないのは、全体構造における円孔の中心位置で微視的応力分布を評価していることによる。一方、重み平均による方法では、不均質モデルによる有限要素解析の結果と非常に良く一致しているのがわかる。しかし、A点(フリーエッジ)に最も近い単位セルでは精度良く評価できていないことがわかる。これは、境界近傍において均質化法で仮定する周期性が満たされていないことが原因しており、通常の均質化法の限界を示している。また、比較のためにABAQUSのサブストラクチャー法による計算も行った。サブストラクチャー法では、単位セル

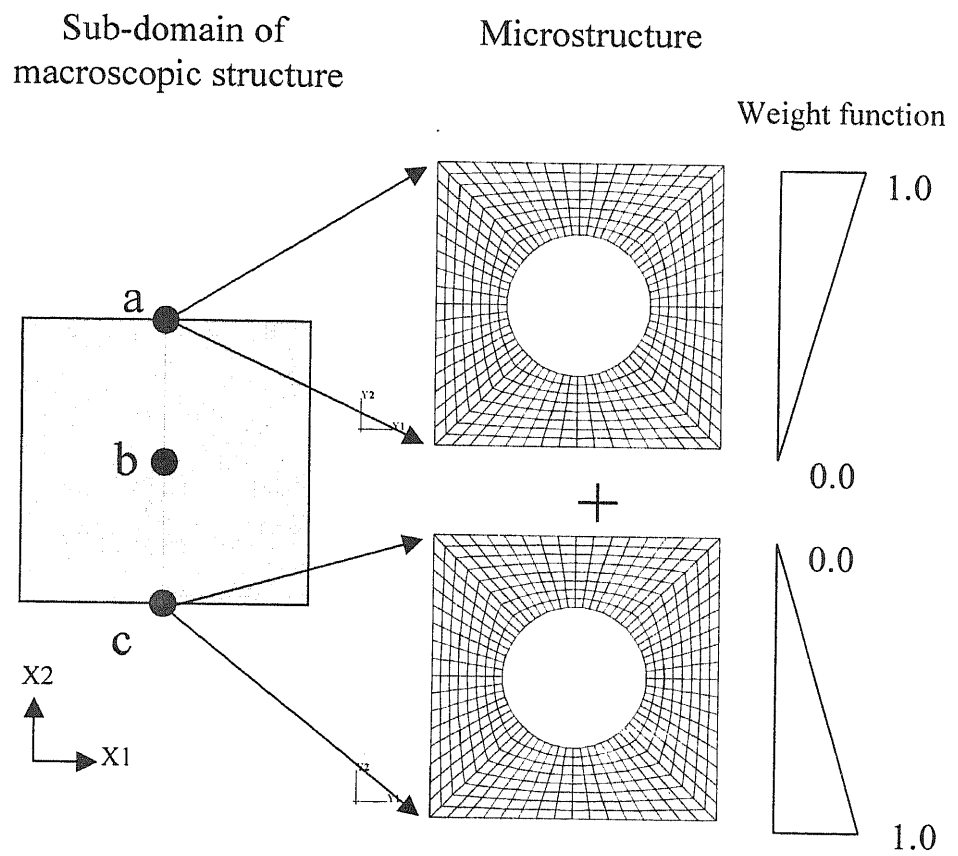


図 2.12: 重み平均による微視的応力評価

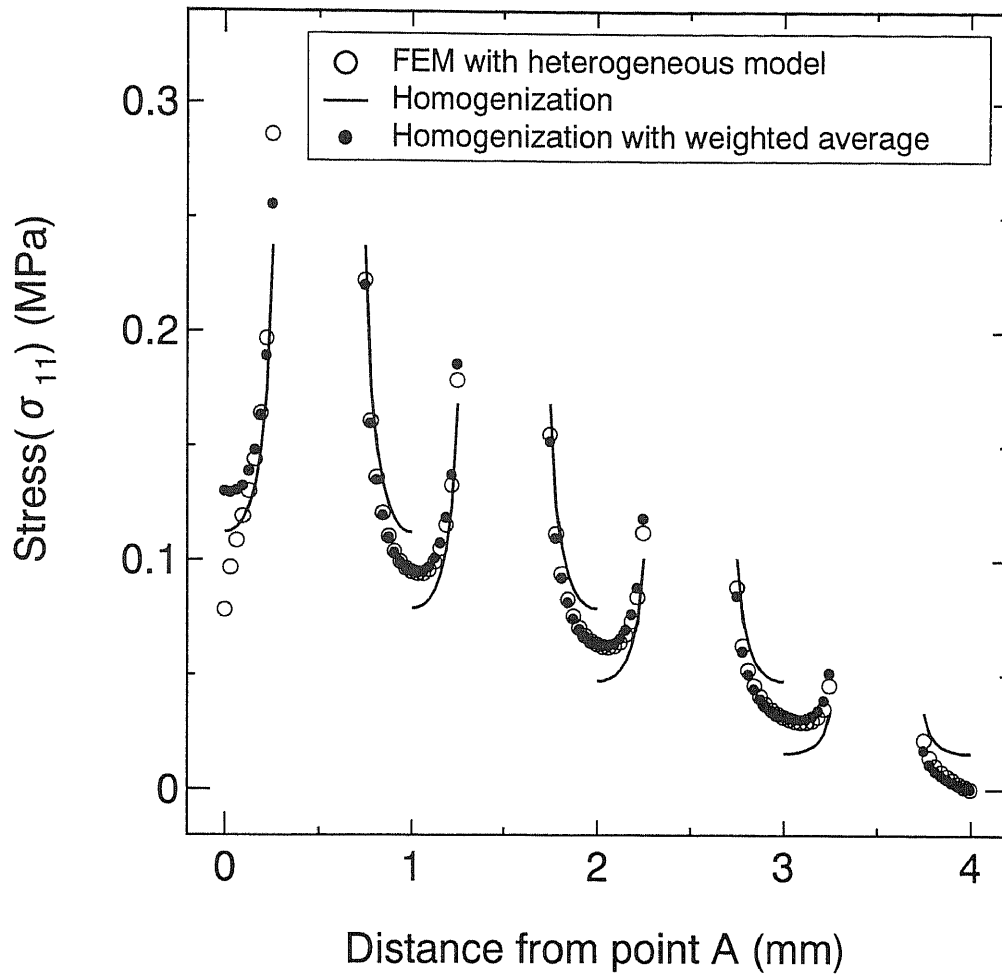


図 2.13: A-B断面に沿った応力分布

CHAPTER 2.

をスーパー要素とし、全体構造を64のスーパー要素でモデル化した。図示していないが、サブストラクチャー法による計算結果は境界近傍を含め不均質モデルによる直接有限要素解析と完全に一致していることを確認した。

本解析例はワークステーション(IBM RS6000 Model 591)にて実行したが、不均質モデルによる直接有限要素解析には123.83秒を要し、均質化法による解析には合計3.36秒を要した。なお、均質化法による解析では、等価材料特性の計算、全体構造の計算および4つの単位セルに関する応力計算の合計時間を示している。また、サブストラクチャーによる計算時間はスーパー要素の作成時間を含め、5.38秒であった。サブストラクチャー法では計算精度を落とすことなく計算効率を高めることが可能であるが、全体構造をスーパー要素で離散化するためモデル作成が困難となる場合が少なくない。一方、均質化法は境界近傍の微視的応力評価に問題点があるものの、効率的なマルチレベル計算手法であるといえる。

本数値解析例のモデルは比較的簡単な構造をしており、しかも二次元問題なので有限要素法による詳細なモデル化が可能であるが、一般の複合材料からなる構造物を詳細にモデル化することは不可能に近い。また、均質化法はサブストラクチャー法と違い、マクロ構造とミクロ構造をそれぞれ独立にモデル化できるため、複合材料の微視的応力分布を予測するための有効な解析手法の一つである。ただし、境界近傍では均質化法で仮定する周期性が満たされないため、十分精度のよい微視的応力分布を得ることができない。この点に関しては次節の境界層理論による微視的応力の補正においてさらに検討を加える。

2.5 境界層理論による微視的応力の補正

2.5.1 境界層理論と均質化法

均質化法では微細構造は R^3 において周期的に配置されていると仮定しているため、前節2.4.3にも示したように構造物の境界近傍においては微細構造が本来満たすべき境界条件(周期境界条件)を満たし得ないという欠点を有している。したがって、均質化法で算出された境界(構造物表面)近傍の応力は少なからず誤差を含んでいる。この誤差は、微細構造の形態によっては無視できない場合がある。

この欠点を補い、複合材料のフリーエッジ近傍における詳細な応力分布を評価するために、境界層理論(Boundary Layer Theory)を用いた手法が提案された(1),(6)。境界層とは微分方程式の解が急激に変化する狭い領域として定義され、境界層理論とは摂動法で得られた境界層の解を補正するための理論である(11)。本節では、開発した均質化法解析プログラムをもとに境界層理論による補助問題解析のためのプログラムを開発し、境界層理論の有効性を検討するとともに、微視的応力評価の精度向上に関して検討を加える。

境界層理論を均質化法に適用する場合、境界層における補正項 u^{1BL} を加えた次式により、構造物の変位をマルチスケール漸近展開できると仮定する。

$$u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon(u^1 + u^{1BL}) + O(\varepsilon^2) \quad (2.59)$$

ここで、右辺の第2項は境界層の外側、すなわち構造物の内部では u^1 に一致する。

図2.14に境界層モデルの概念図を示す。図中左が境界近傍の拡大図である。一意に存在する補正項を得るため境界層のモデル化においては z_2 , z_3 方向それぞれについて周期性(Z-周期性)を満たし、 z_3 方向のみに周期性の欠如した半無限領域 S を考える。一般的には z_2 あるいは z_3 方向に関しても周期性が欠如している場合も考えられるが、この場合は力学的境界条件の取り扱いに関して今後さらに検討を要する。また、境界層ではZ-周期性を満たすために、全体構造の境界部の曲率が境界層の周期長さに比べ十分小さくなければならない。すなわち、均質化法において境界層理論を適用するには、全体構造に比べ微細構造が十分小さいこと、あるいは着目する境界の曲率が十分小さいことが前提となる。

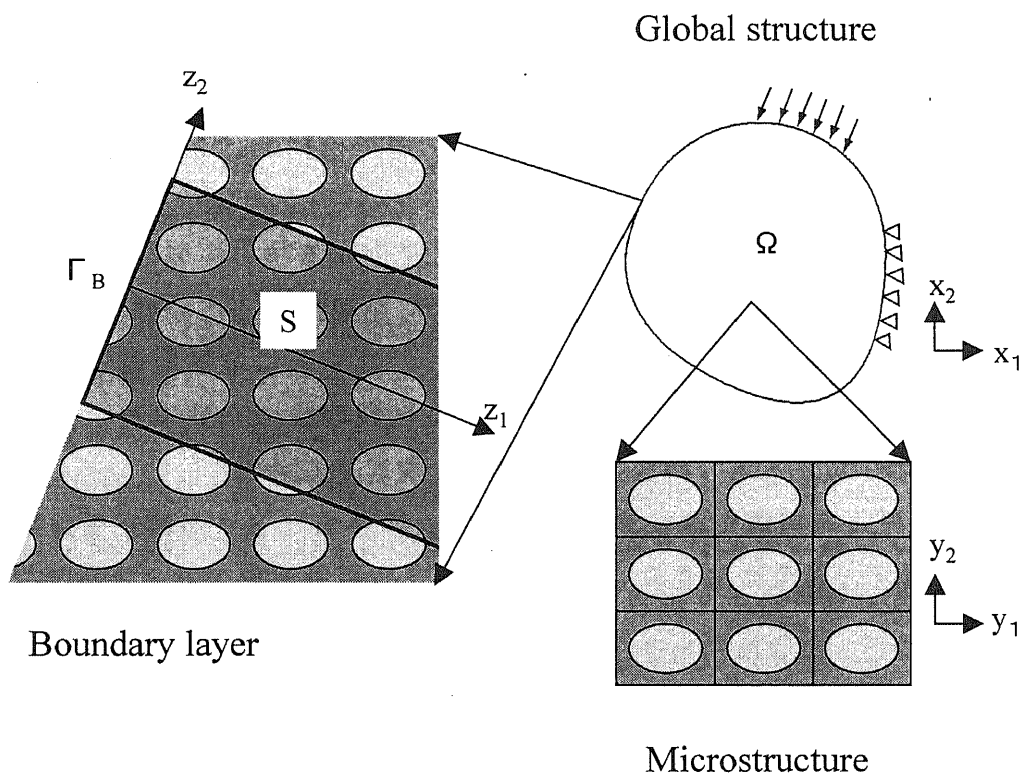


図 2.14: 境界層モデルの概念図

CHAPTER 2.

図2.14に示す半無限領域 $S(z_1 \in (0, +\infty))$ を考えると、力の釣り合いから境界層理論による補正項は次式を満たすことがわかる。

$$\int_S D_{ijmn} \frac{\partial u_m^{1BL}}{\partial z_n} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} dz = - \int_{\Gamma_B} \sigma_{1j}^{\mathcal{E}} v_j dz_2 dz_3 \quad (2.60)$$

$$\left. \frac{\partial u_i^{1BL}}{\partial z_j} \right|_{z_1 \rightarrow +\infty} \rightarrow 0 \quad (2.61)$$

式(2.61)は、境界層の外側(物体内部)において摂動解(均質化法による解)と補正項を接続させるための境界条件、すなわち Asymptotic Matching を表す。

また、式(2.60)の右辺に表れる $\sigma_{1j}^{\mathcal{E}}$ は次式に示す通常の均質化法から得られる微視的な応力を表している。

$$\sigma_{1j}^{\mathcal{E}} = D_{1jmn} \left(I_{mnkl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (2.62)$$

ここで、図2.14に示すように一般には境界層の領域 S と均質化法における単位セルの領域 Y とが異なるため、単位セルを基にして得られた微視的な応力分布を境界層にマッピングする必要がある。境界層領域と単位セルとを同じ領域でモデル化できる場合は、境界層理論による評価が非常に簡便になる。

最後に、境界層における補正された微視的な応力は次式で評価できる。

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{E}BL} = \sigma_{ij}^{\mathcal{E}} + \sigma_{ij}^{1BL} \quad (2.63)$$

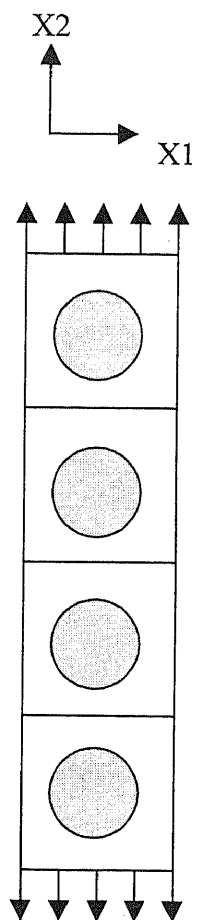
2.5.2 一方向強化複合材料

境界層理論の有効性を検討するための数値解析例として、繊維強化ゴムの2次元問題を考える。本解析例では、簡単化のために均質化法の単位セルモデルと同じものを境界層の領域モデルに利用している。

図2.15は繊維強化ゴムの平板を繊維方向に向って見た横断面を示しており、2軸方向に0.5%のひずみに相当する強制変位を与える。図2.15の右図は微細構造の単位セルを表す。補強材、マトリックスそれぞれの弾性率とポアソン比は、100MPa, 0.3, 1MPa, 0.49とする。通常の均質化法による特性変位と境界層理論による補正項(u^{1BL})のモード図を図2.16にそれぞれ示す。

図2.15に示す直線A Bにおける応力分布を図2.17に、直線C Dにおける応力分布を図2.18にそれぞれ示す。これらは対称性を考慮してそれぞれ点Aから2点

Global Structure



Unit Cell

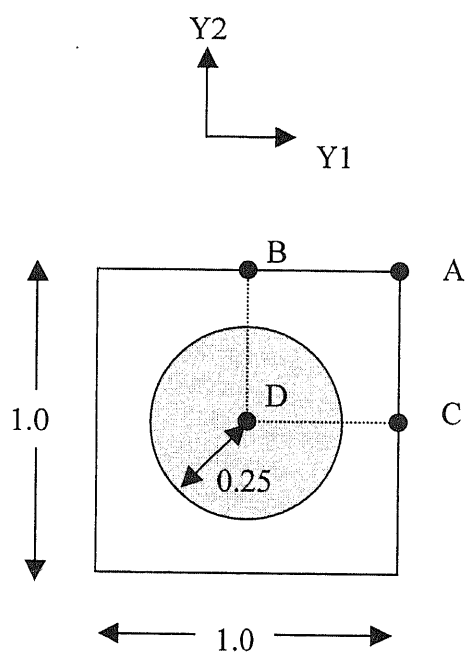


図 2.15: 全体構造と微細構造

CHAPTER 2.

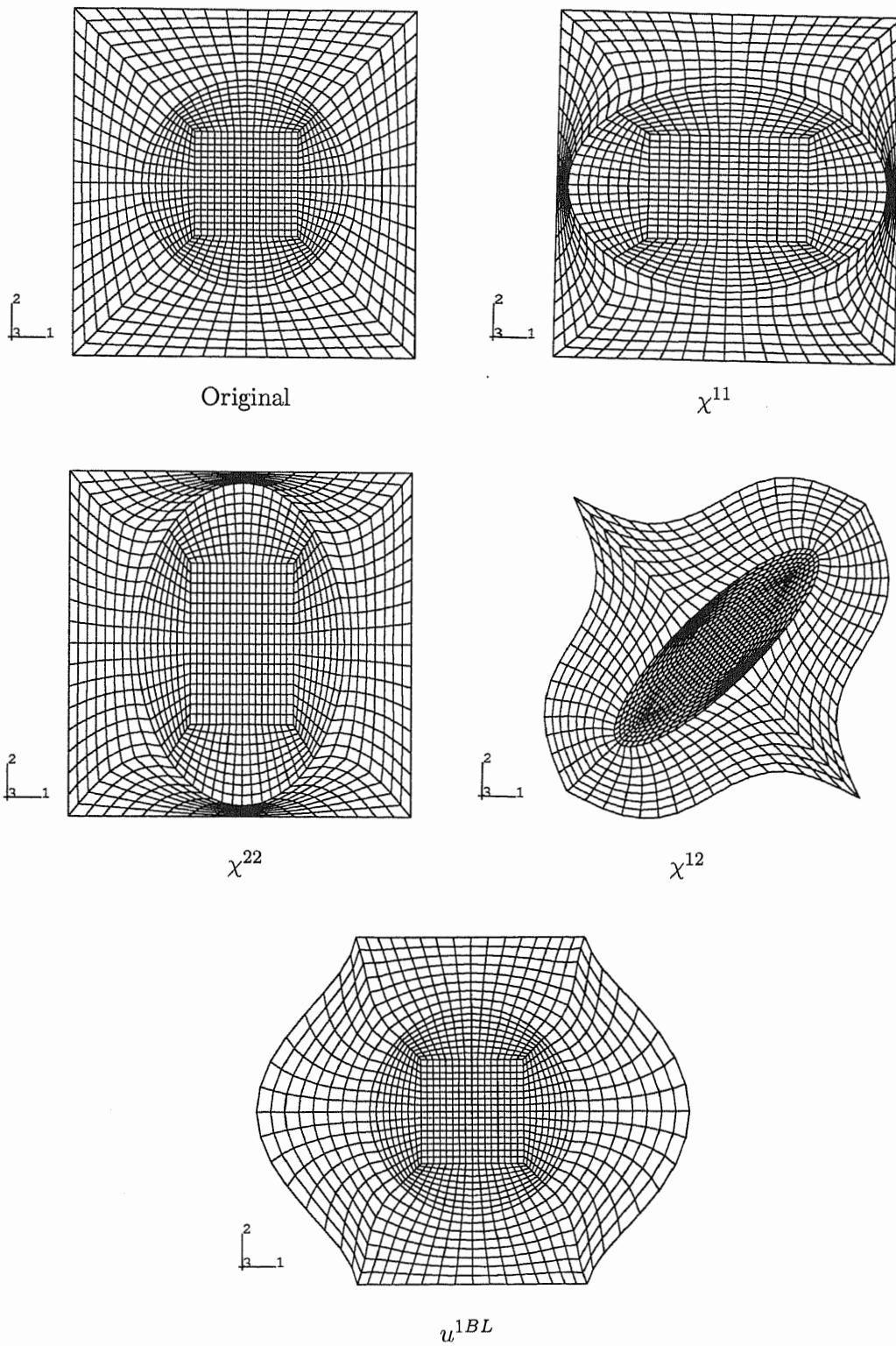


図 2.16: 均質化法による特性変位と境界層理論による補正項

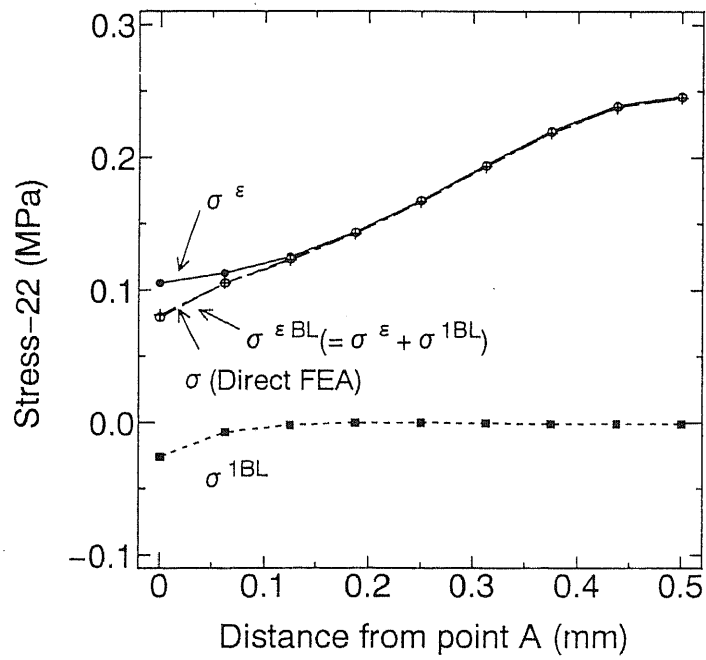
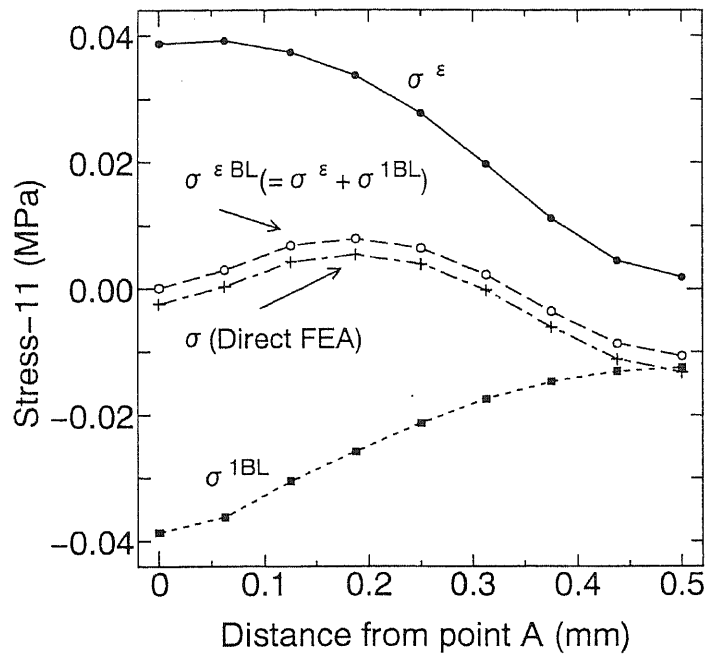


図 2.17: 直線 A B 上の微視的応力分布

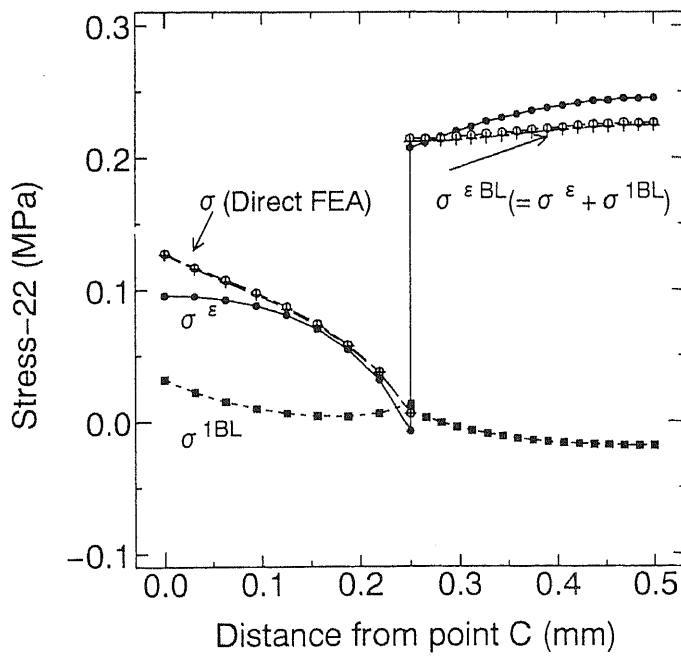
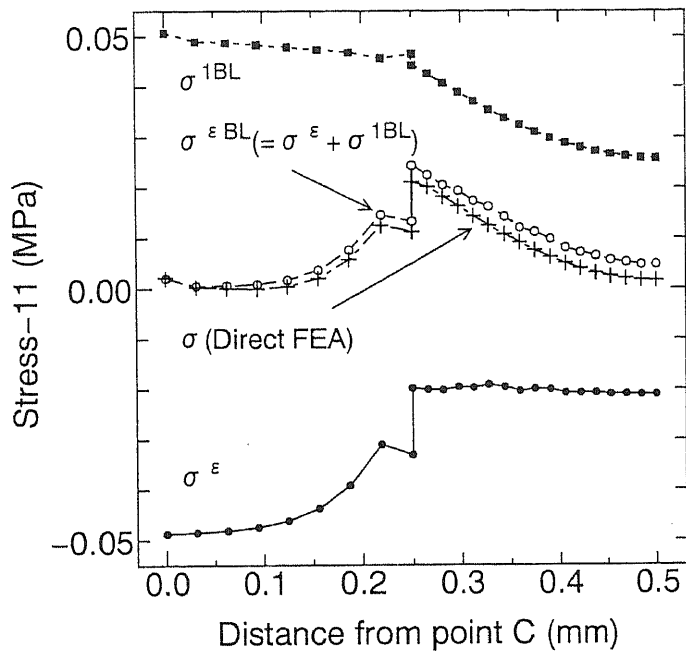


図 2.18: 直線CD上の微視的応力分布

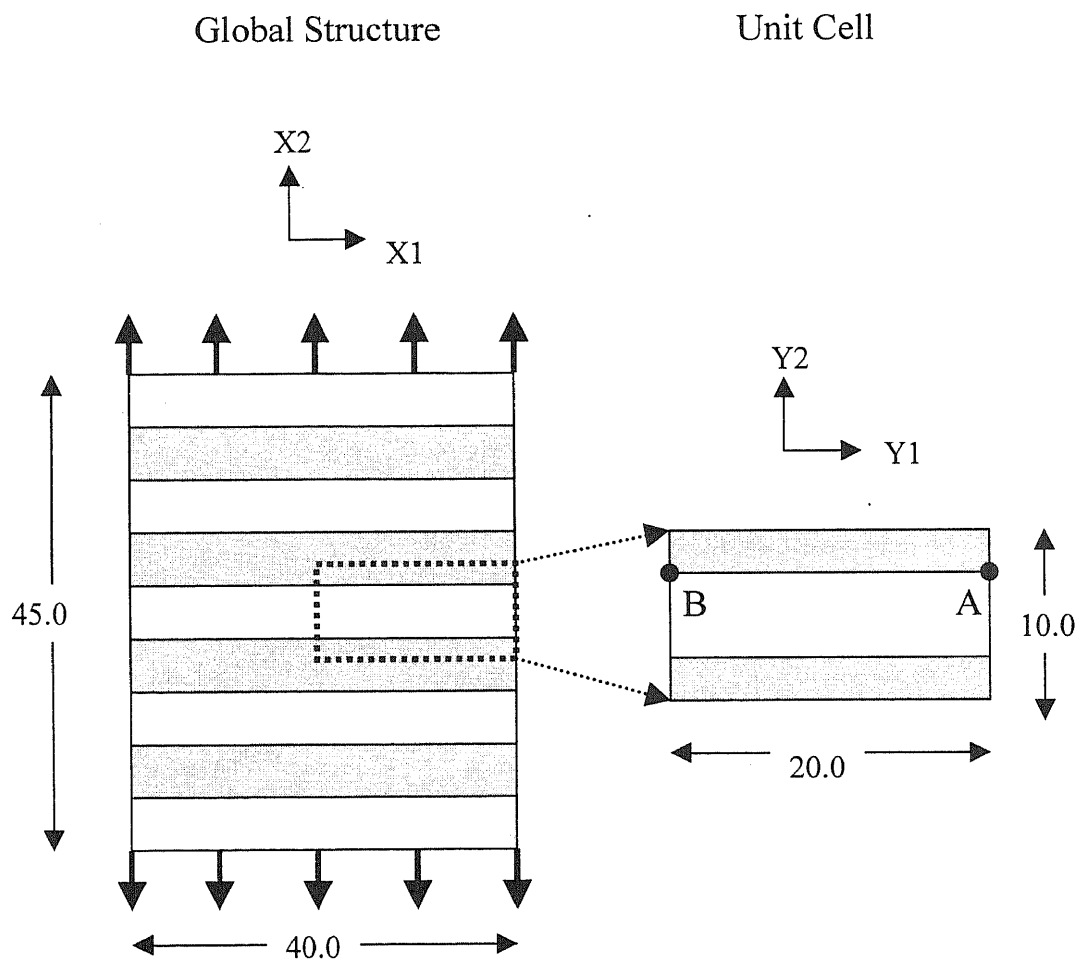


図 2.19: 全体構造と微細構造

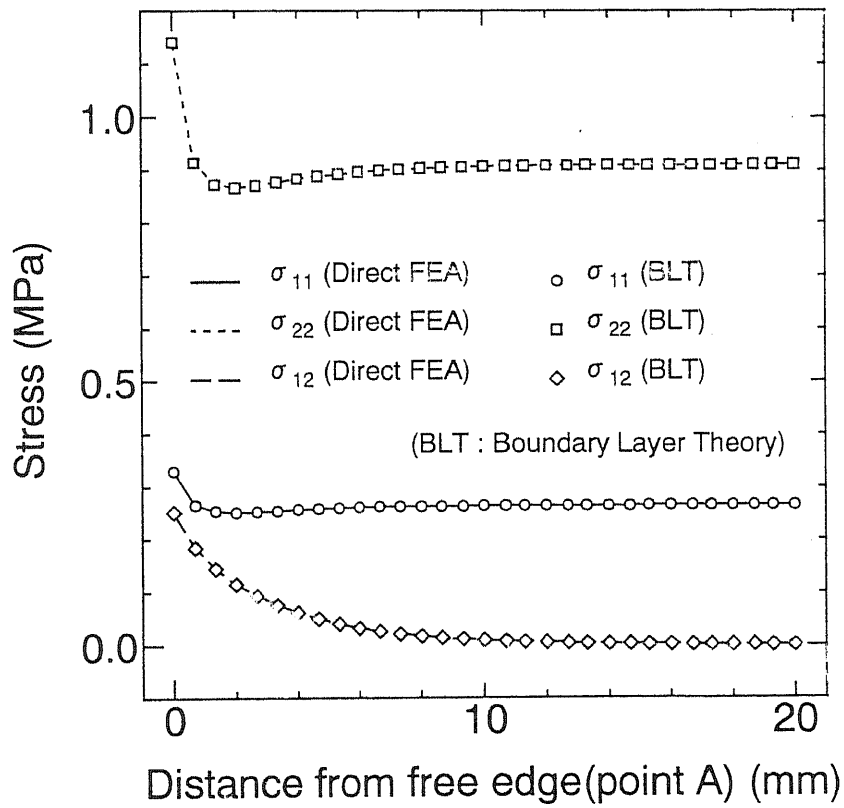


図 2.20: 直線 A B 上の微視的応力分布

CHAPTER 2.

A B間の中点までの応力分布であり、直線C D間では点Cから0.25mmの位置に補強材界面が存在するため応力の不連続が生じている。これらの結果より、均質化法と境界層理論を組み合わせ得られた応力は、全体構造に対して直接有限要素法を適用して得られた応力と非常によく一致しているのがわかる。

図2.19は繊維強化ゴムの平板を面外方向からみた2次元モデルである。ただし、座標の取り方や、物性、寸法は図2.15の解析例とは異なる設定となっている。補強材、マトリックスそれぞれの弾性率とポアソン比を、1000MPa, 0.3, 1MPa, 0.49とし、2軸方向に5%のひずみに相当する強制変位を与える。

図2.19に示す直線A B上の点Aから2点A B間の中点までの応力分布(マトリックス側で評価)を図2.20に示す。均質化法と境界層理論を組み合わせ手法による結果は、全体構造に対して直接有限要素法を適用した結果と非常によく一致しているのがわかる。Dumontet⁽⁶⁾によると境界層における応力は指数関数的に変化し、均質化法の解に収束することであるが、図を見ると成分により収束の状況が異なるので境界層の厚さの設定に関しては若干の注意を要する。

2.5.3 多くの円孔を有する平板

ここでは、前節の数値解析例にて取り上げた多孔質平板の境界近傍での応力評価について検討する。問題設定は図2.8にて示したものと同一である。この解析例では、前節2.4.3にて述べたように重み平均を取ることによって微視的応力分布の精度向上が可能であるが、境界近傍では依然小さくない誤差がみられた。そこで、境界層理論を適用して境界近傍の微視的応力分布の精度改善を試みる。

境界層理論を適用した結果を図2.21に示す。図は、境界(A点)に最も近い一周領域における応力分布を示す。横軸はA点からの距離を、縦軸は1方向の応力を表す。図中、白丸、実線、黒丸は図2.13に示したものと同一く不均質モデルによる有限要素解、円孔中心位置(1点)での巨視的変位勾配を用いた均質化法による解、2点における巨視的変位勾配を用いて得られた微視的応力分布を重み平均した解をそれぞれ示す。また、境界層理論による解(図中十字)は、境界層理論を用いて補正した解をさらに重み平均した結果である。図より、境界層理論を用いた結果はフリーエッジを含むいずれの位置においても直接有限要素解と非常に良く一致していることがわかる。

CHAPTER 2.

この結果から，均質化法で得られる微視的応力分布の計算精度を向上させるには，重み平均と境界層理論が非常に有効であることが確認された．

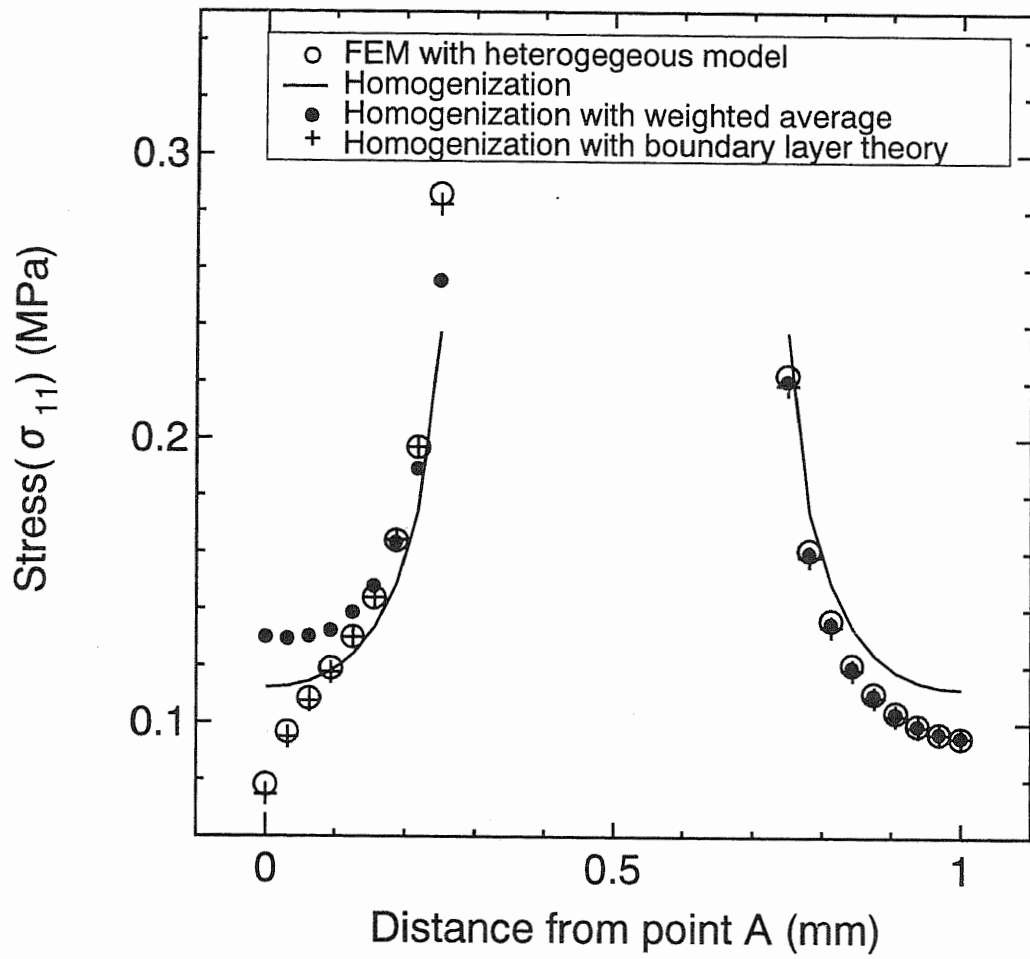


図 2.21: 有孔平板における境界近傍の微視的応力分布

2.6 結 言

弾性問題のための均質化法の定式化を示し、汎用有限要素解析プログラム ABAQUS をベースにした均質化法解析システムを開発した。

数値解析例により、均質化法および本解析システムの妥当性と有効性を示した。

熱可塑性エラストマーの有効弾性特性についてパラメトリックスタディーを行い、介在物の体積含有率およびドメイン構造の違いによる有効弾性係数と有効ポアソン比の関係を示した。

開発した均質化法解析システムを境界層理論による補助問題解析用に拡張した。さらに、数値解析例により境界層理論の有効性を確認した。しかしながら、境界層理論の適用は、その前提条件である Z-周期性を満たしている問題に限定される。

均質化法で得られる微視的応力分布の計算精度を向上させるには、重み平均と境界層理論が非常に有効であることが数値解析例により確認された。これらの手法により計算精度の向上を図ることができるものの、誤差の定量的評価にはいたっていない。微視的応力の誤差評価については今後の課題である。

本解析システムは汎用有限要素解析プログラムをベースにしているため、その豊富な解析機能を利用した解析システムの柔軟な拡張性を有する。この柔軟性を利用して、次章以降各種境界値問題のための均質化法解析システムを開発する。

参考文献

- (1) Lions, J.L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, (1981), Science Press.
- (2) Duvaut, G., *Theoretical and Applied Mechanics*, Koiter, W.T., (eds), (1976), 119., North-Holland.
- (3) Oleinik, O.A., *Trends and Application for Pure Mathematics to Mechanics*, (1984), 248, Springer.
- (4) Babuska, I., *Tech. Note BN-821*, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, (1975), 89.

CHAPTER 2.

- (5) ABAQUS Users manual, (1997), Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc.
- (6) Dumontet,H., *Math. Mod. Num. Analy.*, **20-2**, (1986), 265-286.
- (7) Mao,K.M. and Sun,C.T., *Int. J. Num. Methods. Eng.*, **32**, (1991), 29.
- (8) Knight,N.F., Ransom,J.B., Griffin,O.H. and Thompson,D.M., *Finite Element Analysis Design*, **9**, (1991), 91.
- (9) Hughes,T.J.R., *The Finite Element Method*, (1987), Prentice-Hall,Inc..
- (10) 高野, 座古, 機論, **61-583,A**(1995),905.
- (11) Bender,C.M. and Orszag,S.A.,*Advanced Mathematical Methods for Scintists and Engineers*, (1978), MaCraw-Hill,Inc.

Chapter 3

熱伝導・熱弾性問題のための均質 化法

3.1 緒 言

タイヤは、加工性のよい未加硫ゴムの状態でゴム部材と補強部材(FRR)をその粘着性を利用して貼り合わせて成形される。その後、加硫という製造工程で硫黄架橋され完成品となる。未加硫ゴムはポリマー同士の結合が弱く粘弾性流体の特性を示し、硫黄架橋された加硫ゴムはいわゆるゴム弾性を示す。加硫工程においては、未加硫ゴムで成形された半製品であるグリーンタイヤを目的の製品形状のモールド内に装着し、高温・高圧のもとで架橋反応を促進させる。加硫中の温度履歴は耐久性や耐摩耗性等の製品性能にも影響を与えるため、適切なコントロールが要求される。加硫後にモールドから取り出されたタイヤは、温度の低下とともにゴムが収縮し、ゴムと補強材の熱弾性特性のミスマッチによりタイヤ形状はモールド形状から変化する。

一方、自動車に装着されたタイヤは、走行中において加硫ゴムの粘弾性特性により内部発熱が生じる。ゴムは熱により劣化するため、走行中のタイヤ内部の温度予測は耐久性評価上重要である。

このようにタイヤの開発において熱伝導・熱弾性解析が担うべき役割は大きく、ゴム系複合材料の熱的特性を把握することは単に製品性能の予測のみならず、製造工程における熱伝導や熱収縮といった製造過程シミュレーションにおいても重要である。しかしながら、撚りコード/ゴム複合体の等価弾性率に関する研究^{(1)~(5)}は行われているものの、熱的特性に関する研究は現在まで行われていない。

Lions⁽⁶⁾らにより理論構築された均質化法は、周期性を有する任意構造の複合材料の材料特性を予測できるだけでなく、全体構造物(巨視的構造)中の複合材料の微視的構造を考慮した詳細な力学応答を効率よく計算できる理論として注目されている。熱に関する均質化法についてもFrancfort⁽⁷⁾やCheng⁽⁸⁾らにより研究された。

このような背景より、本章ではゴム系複合材料の等価熱伝導率および等価線膨張係数を評価するため、汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに弾性問題用に開発した均質化法解析システムを熱伝導・熱弾性問題用に拡張する。以下、熱伝導・熱弾性問題のための均質化法について解説し、開発したプログラムの妥当性をFRP(カーボンファイバー/エポキシ)に関する数値解析例により検討する。

3.2 均質化法の定式化

3.2.1 熱伝導問題

ゴム系複合材料の有効熱伝導率を求めるために、前章で述べた手順(マルチスケール漸近展開)に基づいて熱伝導問題における均質化法の定式化を行う。ここでは、図3.1に示すような周期性(Y-周期性)を持った微細構造からなる複合材料を解析対象としている。

まず、全体構造物を記述する巨視的な座標を \boldsymbol{x} 、また、微細構造の単位セルを記述する座標を \boldsymbol{y} とすると、全体構造物と微細構造との大きさの比を表す ε を介して次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

熱伝導率を K_{ij} 、内部発熱率を f 、境界 Γ_h 上に与えられる熱流束を h とし、未知温度を $T \in V_\Omega$ とすると、定常熱伝導問題の弱形式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} f \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h \bar{T} d\Gamma, \\ \forall \bar{T} \in V_\Omega = \{\bar{T} \mid \bar{T} \in (H^1(\Omega))^3, \bar{T} = 0 \text{ on } \Gamma_g\} \quad (3.2)$$

ここで、 $H^1(\Omega)$ はSobolev空間を表し、熱伝達および熱輻射の境界条件は考慮していない。

周期性を持つ微細構造からなる構造物の温度を次式のように漸近展開できると仮定する。

$$T = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \stackrel{\text{def}}{=} T^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varepsilon T^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \dots, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (3.3)$$

ここで、 T^0, T^1, \dots, T^j に関して次式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T^j \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \right) = \frac{\partial T^j}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial T^j}{\partial y_i} \quad (3.4)$$

また、一般的なY-周期関数 $\Psi(\boldsymbol{y})$ に関して次式が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \Psi(\boldsymbol{y}) dY d\Omega \quad (3.5)$$

ここで、 $|Y|$ は単位セルの体積を表す。

式(3.3)を式(3.2)へ代入した後に式(3.4)に注意して ε について整理すると以下の各式を得る。

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} K_{ij} \frac{\partial T^0}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_i} d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

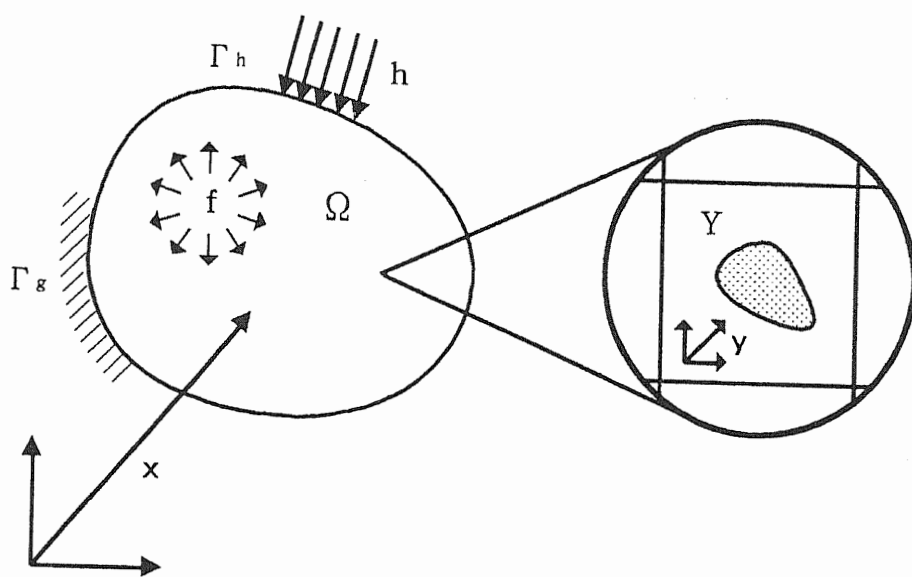


図 3.1: 熱伝導問題における全体構造と微細構造

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} K_{ij} \left[\left(\frac{\partial T^0}{\partial x_j} + \frac{\partial T^1}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_i} + \frac{\partial T^0}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} K_{ij} \left[\left(\frac{\partial T^0}{\partial x_j} + \frac{\partial T^1}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial T^1}{\partial x_j} + \frac{\partial T^2}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_i} \right] d\Omega = \int_{\Omega} f \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h \bar{T} d\Gamma \quad (3.8)$$

⋮

式(3.6)に、式(3.5)と発散定理を適用し、命題2.1を考慮することにより次式を得る。

$$T^0 = T^0(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

つまり、 T^0 は全体構造のみに依存することが分かる。

式(3.7)に、式(3.5)、(3.9)及び発散定理を適用し、式(3.10)を満たす ϕ を導入することにより式(3.11)を得る。

$$\int_Y K_{ij} \frac{\partial \phi^p}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_i} dY = \int_Y K_{ip} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_i} dY, \quad \forall \bar{T} \in V_Y \quad (3.10)$$

$$T^1 = -\phi^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial T^0}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

式(3.8)に、式(3.5)、(3.9)、(3.11)及び発散定理を適用することで、全体構造に関する弱形式を導くことができる。

$$\int_{\Omega} K_{ij}^H \frac{\partial T^0}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f dY \right) \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h \bar{T} d\Gamma, \quad \forall \bar{T} \in V_{\Omega} \quad (3.12)$$

ここで、 K_{ij}^H は次式に示す単位セルの有効熱伝導率を表している。

$$K_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(K_{ij} - K_{ip} \frac{\partial \phi^j}{\partial y_p} \right) dY \quad (3.13)$$

式(3.10)を ϕ について解いた後に、式(3.13)を評価することで微細構造の有効熱伝導率を求めることができる。ひいては、式(3.12)より全体構造における温度場を評価することができる。

また、式(3.9)、(3.11)より、式(3.3)の一次近似式は次式となり、微細構造の微視的な温度場 T を決定できる。

$$T = T^0(\mathbf{x}) - \varepsilon \phi^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial T^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

3.2.2 熱弾性問題

次に、複合材料の有効線膨張係数を求めるために、熱弾性問題における均質化法の定式化を行う。

弾性率を D_{ijkl} 、物体力を f_i 、境界 Γ_t 上に与えられるトラクションを t_i とし、未知変位を $u \in U_\Omega$ とすると、熱弾性問題の弱形式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} A_{ij} (T - T_0) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega$$

$$\forall \bar{u} \in U_\Omega = \{ \bar{u} \mid \bar{u} \in (H^1(\Omega))^3, \bar{u} = 0 \text{ on } \Gamma_g \} \quad (3.15)$$

ここで、 T 、 T_0 はそれぞれ現在の温度と参照温度を表し、熱弾性係数 A_{ij} は α_{ij} を線膨張係数とすると次式で与えられる。

$$A_{ij} = D_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (3.16)$$

また、ここでは以下の構成式と変位-ひずみ関係式を仮定している。

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.18)$$

周期性を持つ微細構造からなる構造物の変位と温度を次式のように漸近展開できると仮定する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cdots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (3.19)$$

$$T = T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} T^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cdots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (3.20)$$

式(3.19),(3.20)を式(3.15)へ代入した後に式(3.4)に注意して ε について整理すると以下の各式を得る。

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} A_{ij} (T^0 - T_0) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} d\Omega \quad (3.22)$$

$$\int_{\Omega} D_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} A_{ij} (T^0 - T_0) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} A_{ij} T^1 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (3.23)$$

⋮

式(3.21)に、式(3.5)と発散定理を適用し、命題2.1を考慮することにより次式を得る.

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

つまり、 \mathbf{u}^0 は全体構造のみに依存することが分かる.

式(3.22)に、式(3.5)、(3.24)及び発散定理を適用し、式(3.25)を満たす χ と式(3.26)を満たす ψ を導入することにより式(3.27)を得る.

$$\int_Y D_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_Y \quad (3.25)$$

$$\int_Y D_{ijpq} \frac{\partial \psi_p}{\partial y_q} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY = \int_Y A_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_Y \quad (3.26)$$

$$u_i^1 = -\chi_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})(T^0 - T_0) \quad (3.27)$$

式(3.23)に、式(3.5)、(3.24)、(3.27)及び発散定理を適用することで、次式の全体構造に関する弱形式を導くことができる.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} A_{ij}^H (T^0 - T_0) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ここで、 D_{ijkl}^H と A_{ij}^H は次式に示す単位セルの有効弾性率と有効熱弾性係数を表している.

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(D_{ijkl} - D_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY \quad (3.29)$$

$$A_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(A_{ij} - D_{ijpq} \frac{\partial \psi_p}{\partial y_q} \right) dY \quad (3.30)$$

式(3.26)を ψ について解いた後に、式(3.30)を評価することで微細構造の有効熱弾性係数を求めることができる. さらに、有効線膨張係数は次式で評価できる.

$$\alpha_{ij}^H = C_{ijkl}^H A_{kl}^H \quad (3.31)$$

ここで、 C_{ijkl}^H は式(3.29)より求められる有効弾性テンソルのインバース、すなわち有効コンプライアンステンソルを表す.

CHAPTER 3.

また, 式(3.24),(3.27)を式(3.19)に代入すると, 以下に示す微細構造における変位の一次近似式を決定できる.

$$u_i = u_i^0(\mathbf{x}) - \varepsilon \chi_i^{pq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{x})}{\partial x_q} + \varepsilon \psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})(T^0 - T_0) \quad (3.32)$$

さらに, 微細構造における応力の一次近似式は次式で与えられる.

$$\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl} - D_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + D_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} (T^0 - T_0) \quad (3.33)$$

なお, 本定式化においては, 参照温度 T_0 に関して,

$$T_0 = T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} T_0^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T_0^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (3.34)$$

との漸近展開を仮定していないが, 上式のごとく漸近展開を仮定しても, 式(3.28)の導出過程において T_0^1 の項は消失し, 同じ結果となる.

3.3 解析プログラムの検証

3.3.1 熱伝導率

以上の熱伝導および熱弾性の定式化に従い、前章で開発した弾性問題用の均質化法解析システムを改良し、有限要素法による熱伝導問題および熱弾性問題用の均質化法解析システムを開発した。

本解析システムの妥当性を検討するため、図3.2に示す一方向強化FRP($h=w=l=1.0\text{mm}$)において、補強繊維の体積含有率(V_f)が繊維方向(L方向)および繊維に垂直な方向(T方向)の有効熱伝導率に与える影響を、他の解析手法による結果と比較検討する。

繊維(グラスファイバー)とマトリックス(エポキシ)それぞれの材料定数を表3.1に示す。表3.1において、 E , ν , α , κ はそれぞれヤング率, ポアソン比, 線膨張係数, 熱伝導率を表す。

今回作成した均質化法解析プログラムで計算したL方向およびT方向の熱伝導率を繊維の体積含有率をパラメータとして図3.3に示す。縦軸の熱伝導率は繊維の熱伝導率で正規化した値(κ_L/κ_f , κ_T/κ_f)である。比較データとして、Hashinら⁽⁹⁾による上界・下界およびHattaら⁽¹⁰⁾の等価介在物法による結果を併せて示す。

Hashinらの上界・下界は次式で与えられる。

$$\kappa^{(+)} = V_f \kappa_f + (1 - V_f) \kappa_m \quad (3.35)$$

$$\kappa^{(-)} = \frac{\kappa_f \kappa_m}{V_f \kappa_m + (1 - V_f) \kappa_f} \quad (3.36)$$

また、Hattaらの解は次式で与えられる。

$$\kappa_{ii} = \kappa_m + \frac{V_f (\kappa_f - \kappa_m) \kappa_m}{(\kappa_f - \kappa_m) (1 - V_f) S_{ii} + \kappa_m} \quad (3.37)$$

ここで、 S_{ii} はEshelbyテンソルを表し、L方向を3とする半径aの円柱では以下の値をとる。

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{2}, S_{33} = 0 \quad (3.38)$$

L方向におけるHattaらによる結果はHashinらの上界に一致するが、これらと均質化法の結果は非常によく一致している。また、T方向に関する均質化法

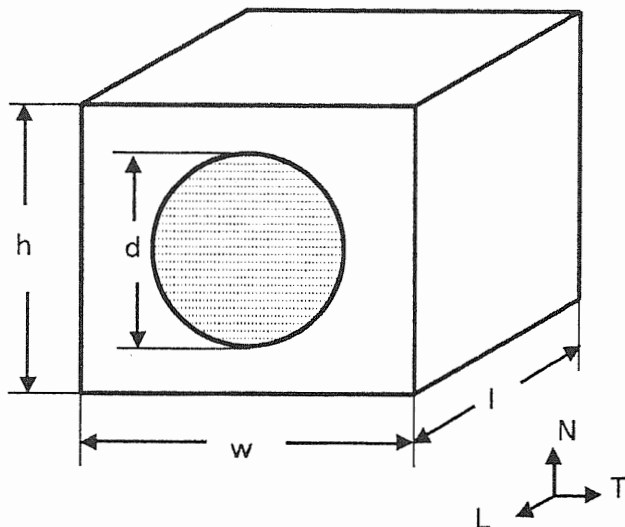


図 3.2: 繊維強化型複合材料の単位セル

表 3.1: グラスファイバーおよびエポキシの材料定数

	E(GPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}$)	κ (W/m/ $^{\circ}\text{C}$)
Glass	72.4	0.20	5.0×10^{-6}	0.92
Epoxy	2.75	0.35	5.4×10^{-5}	0.31

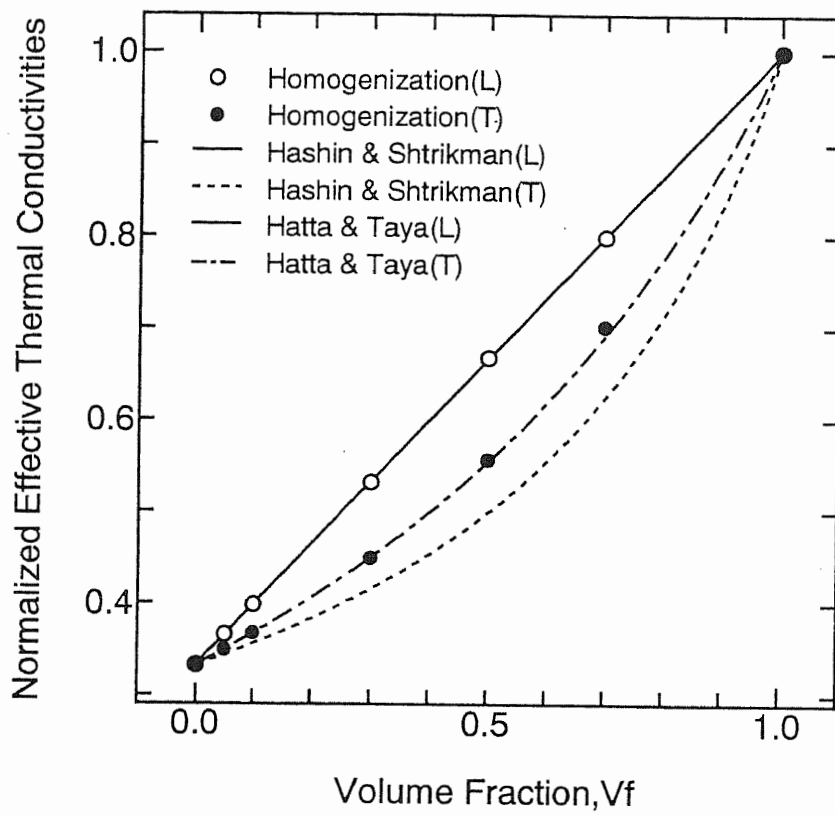


図 3.3: 熱伝導率に与える繊維の体積含有率の影響

の結果は、Hashinらの上下界の間に位置し、Hattaらの結果に非常によく一致していることが分かる。このことから、均質化法による一方向強化材の有効熱伝導率は等価介在物法による結果と一致することが確認できる。

3.3.2 線膨張係数

前項で示したものと同一方向強化FRPにおいて、繊維の体積含有率が線膨張係数に与える影響について各種解析手法による結果を比較する。均質化法による計算結果を、Schapery⁽¹¹⁾により与えられた解析解およびTakaoら⁽¹²⁾の等価介在物法による結果と併せて図3.4に示す。

Schaperyの上界・下界は次式で与えられる。

$$\alpha^{(+)} = \frac{E_f \alpha_f V_f + E_m \alpha_m (1 - V_f)}{E_f V_f + E_m (1 - V_f)} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)} &= (1 + \nu_m) \alpha_m (1 - V_f) + (1 + \nu_f) \alpha_f V_f \\ &- \alpha_L \{(\nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f))\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

一方、Takaoらの解は以下の固有ひずみを未知数とした代数方程式を解くことで得られる。

$$\begin{aligned} (1 - V_f)(D_m - D_f)(S - I)\alpha^* \\ = \{(1 - V_f)(D_f - D_m)(S - I) + D_f\} e^* \end{aligned} \quad (3.41)$$

ここで、 S , I , D , e^* はEshelbyテンソル, 単位テンソル, 弾性テンソル, 固有ひずみテンソルをそれぞれ表し, α^* は温度差を ΔT とすると次式で与えられる。

$$\alpha^* = (\alpha_f - \alpha_m) \Delta T \quad (3.42)$$

式(3.41)を固有ひずみテンソルについて解き, 次式に代入することで等価な線膨張係数を得ることができる。

$$\alpha_c = \alpha_m + V_f(e^* + \alpha^*)/\Delta T \quad (3.43)$$

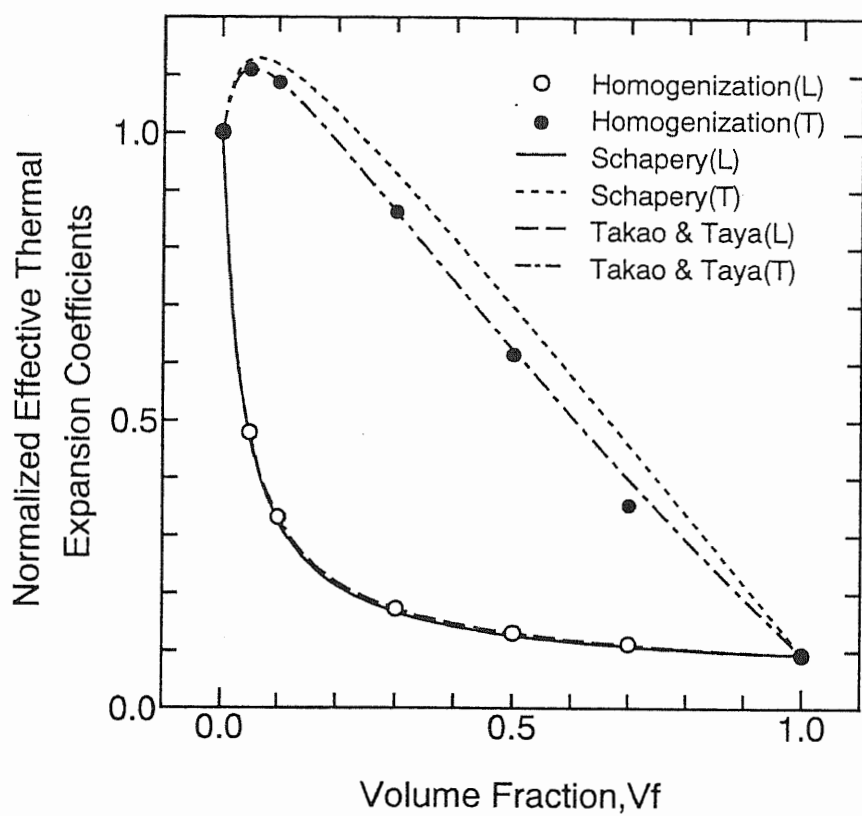


図 3.4: 線膨張係数に与える繊維の体積含有率の影響

CHAPTER 3.

なお、介在物が円柱の場合のEshelbyテンソルは以下に与えられる⁽¹³⁾.

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)}, & S_{2222} &= \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)}, & S_{3333} &= 0, \\
 S_{1122} &= \frac{4\nu-1}{8(1-\nu)}, & S_{2211} &= \frac{4\nu-1}{8(1-\nu)}, & S_{2323} &= \frac{1}{4}, \\
 S_{2233} &= \frac{\nu}{2(1-\nu)}, & S_{3311} &= 0, & S_{1133} &= \frac{\nu}{2(1-\nu)}, \\
 S_{3322} &= 0, & S_{1212} &= \frac{3-4\nu}{8(1-\nu)}, & S_{3131} &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

図の縦軸はマトリックスの線膨張係数で正規化した値(α_L/α_m , α_T/α_m)である。T方向に関する結果を見ると、どの手法においても繊維の体積含有率が約20%以下のところで正規化線膨張係数が1.0を越え、有効値の方が補強材とマトリックスそれぞれのものより高くなっているのが分かる。これは、弾性率が高く線膨張係数の低い繊維と弾性率が低く線膨張係数の高いマトリックスからなる複合材料に特有な現象で、繊維の拘束による影響であると考えられており⁽¹⁴⁾、実験的にもこの現象はChatterjeeら⁽¹⁵⁾により報告されている。また、均質化法による解析結果をShaperyの結果(上界)と比較すると幾分下側に位置し、等価介在物法による結果と非常によく一致していることが分かる。一方、L方向に関してはいずれの手法による結果も非常によく一致している。線膨張係数においても均質化法による結果は等価介在物法による結果とよく一致することが確認できる。

3.4 結 言

熱伝導・熱弾性問題のための均質化法解析システムを，汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに開発した。

一方向強化FRPによる数値解析例において，他の解析手法による計算結果と比較したところよい一致を得ることができ，開発したプログラムの妥当性が確認できた。

均質化法では等価介在物法等の他の解析手法と異なり複雑な形状をした補強材も取り扱うことができるため，本解析システムは非常に有効な材料設計のためのツールといえる。

参考文献

- (1) Akasaka, T., Kabe, K. and Sako, K., *Compos. Sci. Tech. J.*, **24**, (1985), 215.
- (2) Kabe, K., Koishi, M. and Akasaka, T., *Proc. Int. Rubber Conf. '94, Moscow*, **4**, (1994), 222.
- (3) Pidaparti, R.M.V., *Int. Compos. Struct.*, **24**, (1993), 291.
- (4) Shield, C.K. and Costello, G.A., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **23**, (1993), 1.
- (5) Shield, C.K. and Costello, G.A., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **24**, (1993), 1.
- (6) Lions, J.L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, (1981), Science Press.
- (7) Francfort, G., *SIAM J. Math. Anal.*, **14**(1983), 696.
- (8) Cheng, C.H., Ph.D Dissertation, University of Michigan, (1992).
- (9) Hashin, Z. and Shtrikman, S., *J. Mech. Phys. Solids*, **10**(1962), 343.
- (10) Hatta, H. and Taya, M., *Int. J. Engng. Sci.*, **24-7**(1986), 1159.
- (11) Schapery, R.A., *J. Composite Mater.*, **2**(1968), 380.
- (12) Takao, Y. and Taya, M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 806.
- (13) 村，森，破壊力学と材料強度講座5-マイクロメカニクス，(1976)，培風館。
- (14) Aboudi, J., *Mechanics of Composite Materials*, (1991), Elsevier.
- (15) Chatterjee, A., Tandon, G.P. and Matson, L.E., *Proc. Am. Soc. Composites*, (1989), 198.

Chapter 4

動的粘弾性問題のための均質化法

4.1 緒 言

ゴムをはじめ高分子材料は常温においても内部摩擦によるエネルギー損失のため、クリープや応力緩和といった時間依存の材料特性、すなわち粘弾性特性を示すことが知られている。よって、高分子材料からなる複合材料を用いて製品を設計するには、複合材料としての粘弾性特性を考慮しなければならない。また、図4.1に示すように周期的な入力に対する粘弾性体の応答は位相遅れが生じるため、この場合は周波数領域における損失特性を表す損失正接 $\tan \delta$ (貯蔵弾性率と損失弾性率の比)が問題となる。

内部摩擦により失われたエネルギーは熱となって散逸する。ゴムとスチールコード等の補強材との複合構造物である自動車用タイヤでは、この内部摩擦により走行中の内部発熱や転動抵抗が発生する。タイヤの低転動抵抗化は省エネルギーや環境保護の面から重要な要求品質の一つとなっている。有限要素法によりタイヤの転動抵抗や内部発熱を予測するためには、タイヤを構成する各部材の損失正接が必要となる。ゴム部材に関しては実験によりその損失正接を得ることが可能であるが、補強材であるFRR(Fiber Reinforced Rubber)については、補強材であるスチールコードとマトリックスであるゴムとの弾性率比が10,000以上にもなるため実験でその損失正接を正確に得ることが困難となっている。さらに最近では内部損失を利用した材料として、制振鋼板、制振合金等の制振材料⁽¹⁾が注目されている。制振材料とは、振動エネルギーを吸収し熱に換えて散逸させる性能の大きな材料であり、その性能は通常損失係数で表示される。損失係数を高くするためには粘弾性特性の損失正接が大きいことが求められる。このように構造物全体、あるいはその材料の損失正接を数値解析で予測することは、さまざまな製品を設計する上で非常に重要となっている。

時間領域における粘弾性解析のための均質化法に関しては、FrancfortとSuquet⁽²⁾やSuquet⁽³⁾の研究がある。彼らは、Kelvin-VoigtタイプやMaxwellタイプのショートレンジメモリーを有する線形粘弾性材料に対しラプラス空間において均質化法の定式化を行い、均質化された複合材料は長期的な記憶効果であるフェイディングメモリー(fading memory)⁽⁴⁾を有することを陽な形で示した。また、渋谷は畳み込み積分で表される粘弾性材料にラプラス変換を用いて均質化法の定式化を行い、境界要素法による数値解析で時間領域における有効応

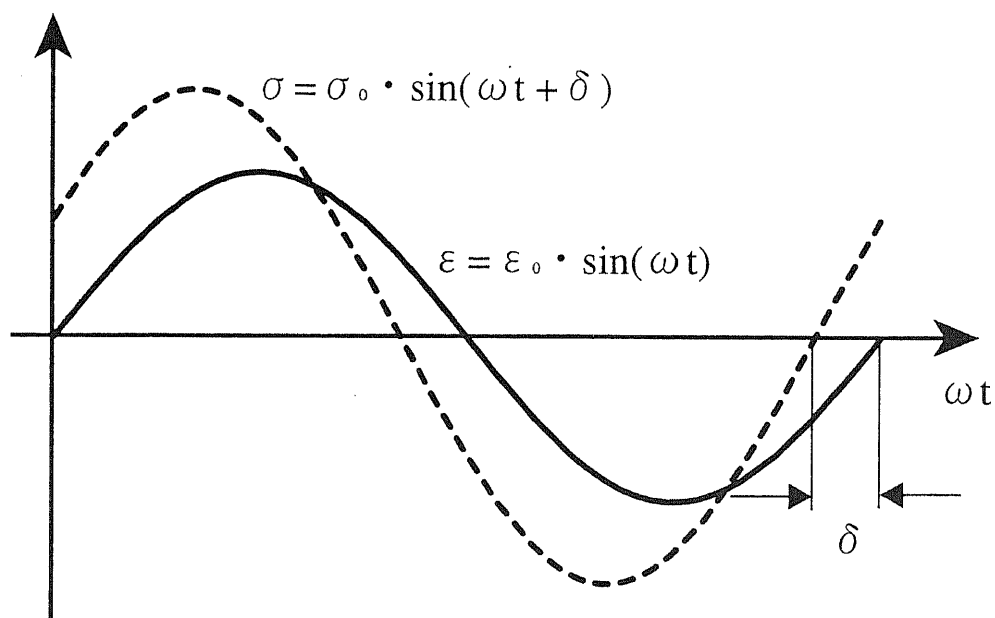


図 4.1: 正弦波入力(ε)に対する粘弾性体の応答(σ)

CHAPTER 4.

力緩和特性⁽⁵⁾とクリープ・コンプライアンス⁽⁶⁾を求めている。しかしながら、筆者の知る限り周波数領域の動的粘弾性解析のための均質化法に関する研究は行われていない。

このような背景をもとに、本研究では特に周期的微細構造を有する複合材料の有効損失正接を予測するため、動的粘弾性解析のための均質化法を新たに提案し、有限要素解析プログラムABAQUS⁽⁷⁾をベースにした均質化法解析システムを開発する。実験の比較的容易な2相のゴムからなるゴム複合体による数値解析結果と実験結果を比較し、提案手法と開発プログラムの妥当性と有効性を示す。さらに、開発した解析システムを利用して繊維強化ゴムと熱可塑性エラストマーの有効損失正接に関するパラメトリックスタディーを行う。

4.2 周波数領域の動的粘弾性解析

4.2.1 応力-ひずみ関係式

粘弾性体において一般的なひずみ負荷履歴 $\epsilon(t)$ に対する応力応答 $\sigma(t)$ は次式に示すボルツマンの重ね合わせ原理を用いて記述することができる⁽⁸⁾.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\hat{\tau}) \frac{d\epsilon(\hat{\tau})}{d\hat{\tau}} d\hat{\tau} \quad (4.1)$$

次式に示す無次元化緩和関数を導入する.

$$\phi(t) = \frac{E(t)}{E_{\infty}} - 1 \quad (4.2)$$

ここで、 E_{∞} は長期弾性率を表す.

式(4.1)へ式(4.2)を代入すると、次式を得る.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_{\infty}(t) + \int_{-\infty}^t \phi(t-\hat{\tau}) \frac{d\sigma_{\infty}(\hat{\tau})}{d\hat{\tau}} d\hat{\tau} \\ &= \sigma_{\infty}(t) - \int_0^{\infty} \phi(\tau) \frac{d\sigma_{\infty}(t-\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、 $\sigma_{\infty}(t)$ は $E_{\infty}\epsilon(t)$ を表し、 $\tau = t - \hat{\tau}$ とおいた.

次式に示す定常的に調和振動するひずみを考える.

$$\epsilon(t) = \epsilon^* e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

式(4.4)を長期応力緩和を表す式(4.3)へ代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_{\infty}\epsilon(t) - \int_0^{\infty} \phi(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(E_{\infty}\epsilon^* e^{i\omega(t-\tau)} \right) d\tau \\ &= E_{\infty} \left(1 + i\omega \int_0^{\infty} \phi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \epsilon(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

上式において、 $\tau < 0$ のとき $\phi(\tau) = 0$ なので、

$$\phi^*(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.6)$$

は $\phi(t)$ のフーリエ変換を表している. よって、式(4.5)は次式に書き換えることができる.

$$\sigma(t) = E^*(\omega)\epsilon(t) \quad (4.7)$$

ここで、 $E^*(\omega)$ は次式で与えられる.

$$E^*(\omega) = E_{\infty} (1 + i\omega\phi^*(\omega)) \quad (4.8)$$

CHAPTER 4.

さらに、 $\phi^*(\omega)$ を複素表示し、実部を ϕ' 、虚部を ϕ'' とすると式(4.8)は次式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} E^*(\omega) &= E_\infty (1 - \omega\phi'') + iE_\infty\omega\phi' \\ &= E' + iE'' \end{aligned} \quad (4.9)$$

上式において、 E' 、 E'' はそれぞれ貯蔵弾性率、損失弾性率と呼ばれている。また、損失正接 $\tan\delta$ は次式で定義される。

$$\tan\delta = \frac{E''}{E'} \quad (4.10)$$

式(4.4)におけるひずみ振幅 ϵ^* を複素表示し、式(4.9)とともに式(4.7)へ代入すると次式に示す複素表示の応力-ひずみ関係式を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & -E'' \\ E'' & E' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon' \\ \epsilon'' \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

なお、上式では実部と虚部を分けて表示している。

上式を三次元に拡張すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D' & -D'' \\ D'' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon' \\ \epsilon'' \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D'_d + D'_v & -D''_d - D''_v \\ D''_d + D''_v & D'_d + D'_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon' \\ \epsilon'' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

D_d 、 D_v は弾性マトリックスの偏差成分と体積成分をそれぞれ表し、各成分を以下に示す。

$$D_d = G \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & & \\ & & & \frac{4}{3} & & \\ & & & & 1 & \\ \text{sym.} & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$D_v = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \text{sym.} & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

ここで, G, K はせん断弾性率, 体積弾性率を表し, それぞれについて独立に粘弾性特性を考慮することができる.

4.2.2 仮想仕事の原理

d'Alembertの原理により慣性力を考慮した仮想仕事の原理は次式で表される.

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (4.15)$$

ここで, ρ , $\ddot{\mathbf{u}}$, \mathbf{v} , \mathbf{b} および \mathbf{t} は, 質量密度, 速度, 仮想変位, 物体力および表面力をそれぞれ表し, $()^T$ はマトリックスの転置を表す.

変位 \mathbf{u} および外力 $\mathbf{f}(=\mathbf{b}, \mathbf{t})$ の応答が定常状態の調和振動であると仮定すると, 変位および外力は次式で表すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= (\mathbf{u}' + i\mathbf{u}'')e^{i\omega t} \\ \mathbf{f}(t) &= (\mathbf{f}' + i\mathbf{f}'')e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.16)$$

上式と式(4.12)の構成則を考慮すると, 仮想仕事の原理(式(4.15))を次式に示す複素表示の仮想仕事の原理に書き換えることができる.

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega} \rho [\mathbf{v}' \mathbf{v}''] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}' \\ \mathbf{u}'' \end{array} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial \mathbf{x}} \right] \begin{bmatrix} D' & -D'' \\ D'' & D' \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} [\mathbf{v}' \mathbf{v}''] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{array} \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [\mathbf{v}' \mathbf{v}''] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}' \\ \mathbf{t}'' \end{array} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.3 動的粘弾性解析のための均質化法

4.3.1 仮想仕事の原理による定式化

ここでは、前節で導いた周波数領域における粘弾性体の仮想仕事の原理をもとに均質化法の定式化を行う。マクロ構造(全体構造物)を記述する座標系を \boldsymbol{x} 、また、微細構造を記述する座標系を \boldsymbol{y} とすると、微細構造の実際の大きさを表すパラメータ ε を介して次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (4.18)$$

周期的に微細構造(微細構造の基本周期を単位セルと呼ぶ)が配置された構造物の変位振幅を、次式のように漸近展開できると仮定する。

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon*} = \boldsymbol{u}^{0*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varepsilon \boldsymbol{u}^{1*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \cdots, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (4.19)$$

上式を仮想仕事の原理(式(4.17))に代入する。 ε の次数ごとに式を整理し、式(4.18)や周期性の境界条件等を考慮して式を変形すると、以下に示す微細構造と均質化されたマクロ構造に関する二つの仮想仕事の原理を導くことができる。

$$\begin{aligned} \int_Y \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{v}''}{\partial \boldsymbol{y}} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}' & -\boldsymbol{D}'' \\ \boldsymbol{D}'' & \boldsymbol{D}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}'}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}''}{\partial \boldsymbol{y}} \end{Bmatrix} dY \\ = \int_Y \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{v}''}{\partial \boldsymbol{y}} \right] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}' \\ -\boldsymbol{D}'' \end{Bmatrix} dY \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int_{\Omega} \rho^H [\boldsymbol{v}' \boldsymbol{v}''] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}^{0'} \\ \boldsymbol{u}^{0''} \end{Bmatrix} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{v}''}{\partial \boldsymbol{x}} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{H'} & -\boldsymbol{D}^{H''} \\ \boldsymbol{D}^{H''} & \boldsymbol{D}^{H'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}^{0'}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}^{0''}}{\partial \boldsymbol{x}} \end{Bmatrix} d\Omega \\ = \int_{\Omega} [\boldsymbol{v}' \boldsymbol{v}''] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{b}^{H'} \\ \boldsymbol{b}^{H''} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [\boldsymbol{v}' \boldsymbol{v}''] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{t}'' \end{Bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.21)$$

CHAPTER 4.

ここで、 χ は微細構造の変形モードを表し、特性変位と呼ばれる。物理的には、周期境界条件の下で単位ひずみを与えたときの内部応力に相当する物体力(3次元の場合は6成分)を外力として与えたときの変位と見なすことができる。また、

$$\rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho dY \quad (4.22)$$

$$D^{H'} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[D' - \left(D' \frac{\partial \chi'}{\partial \mathbf{y}} - D'' \frac{\partial \chi''}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dY \quad (4.23)$$

$$D^{H''} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[D'' - \left(D'' \frac{\partial \chi'}{\partial \mathbf{y}} + D' \frac{\partial \chi''}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dY \quad (4.24)$$

$$b^{H'} = \frac{1}{|Y|} \int_Y b' dY \quad (4.25)$$

$$b^{H''} = \frac{1}{|Y|} \int_Y b'' dY \quad (4.26)$$

は均質化された質量密度、貯蔵弾性マトリックス、損失弾性マトリックス、体積力の実部および虚部をそれぞれ表し、 $|Y|$ は単位セルの体積を表す。

式(4.20)を特性変位の実部と虚部について解き、それらを式(4.23),(4.24)に代入し計算することで均質化された貯蔵弾性マトリックスと損失弾性マトリックスをそれぞれ得ることができる。なお、 $D'' = \mathbf{o}$ 、すなわち弾性体を仮定すると、式(4.20),(4.21)は弾性体に対する均質化法(式(2.26),(2.30))に一致する。

さらに、均質化された有効損失正接を以下の手順で導く。

式(4.23),(4.24)で得られる均質化された複素弾性マトリックスから、以下に示す有効複素コンプライアンスマトリックスを定義する。

$$C^{H*} \stackrel{\text{def}}{=} (D^{H*})^{-1} = \begin{bmatrix} D^{H'} & -D^{H''} \\ D^{H''} & D^{H'} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.27)$$

次に、以下の有効弾性率の実部と虚部をそれぞれ定義する。

$$E_{ij}^{H'} \stackrel{\text{def}}{=} \Re \left(\frac{1}{C_{ijij}^{H*}} \right) = \frac{C_{ijij}^{H'}}{C_{ijij}^{H'}{}^2 + C_{ijij}^{H''}{}^2} \quad (4.28)$$

$$E_{ij}^{H''} \stackrel{\text{def}}{=} \Im \left(\frac{1}{C_{ijij}^{H*}} \right) = \frac{C_{ijij}^{H''}}{C_{ijij}^{H'}{}^2 + C_{ijij}^{H''}{}^2} \quad (4.29)$$

ここで、 $i, j = 1 \sim 3$ であり、 $\Re(\cdot)$ 、 $\Im(\cdot)$ はそれぞれ実部、虚部を表す。

有効損失正接を，有効弾性率の実部と虚部の比として以下のように定義する．

$$\tan \delta_{ij}^H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{ij}^{H''}}{E_{ij}^{H'}} = \frac{C_{ijij}^{H''}}{C_{ijij}^{H'}} \quad (4.30)$$

すなわち，有効損失正接は有効複素コンプライアンスマトリックスの実部と虚部の比として定義できる．

4.3.2 有限要素法による定式化

ここでは有限要素法による定式化とABAQUSをソルバーにした有効粘弾性特性解析システムの概要について述べる．

微細構造に関する仮想仕事の原理(式(4.20))を有限要素法で離散化すると，特性変位の実部 χ' と虚部 χ'' を未知数とした以下の有限要素剛性方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} K_y' & -K_y'' \\ K_y'' & K_y' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi' \\ \chi'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y' \\ -F_y'' \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

ここで， K_y' ， K_y'' ， F_y' ， F_y'' は以下のように表される．

$$K_y' = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D' B_y dY \quad (4.32)$$

$$K_y'' = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D'' B_y dY \quad (4.33)$$

$$F_y' = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D' dY \quad (4.34)$$

$$F_y'' = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} B_y^T D'' dY \quad (4.35)$$

ここで， $B_y (= \partial N / \partial y)$ は離散化されたひずみ変位マトリックスを表し， N は要素の形状関数を， n_{en} は要素を構成する節点数をそれぞれ表す．

式(4.31)の係数マトリックスは非対称マトリックスであるため，この式を解くには非対称マトリックス用のソルバーを備えた有限要素法プログラムが必要となる．また，各節点には実部，虚部の自由度を考慮する必要がある．本研究で利用している汎用有限要素解析プログラムABAQUSには周波数領域における粘弾性解析機能が備わっているためこれを利用して動的粘弾性問題のための均質化法解析システムを比較的容易に開発することが可能である．

CHAPTER 4.

ABAQUSでは、貯蔵弾性マトリックス D' および損失弾性マトリックス D'' はそれぞれ次式で与えられる。

$$D' = (1 - \omega g'') D_{\infty} \quad (4.36)$$

$$D'' = -\omega g' D_{\infty} \quad (4.37)$$

ここで、

$$\omega g'' = 1 - \frac{E'}{E_{\infty}} \quad (4.38)$$

$$\omega g' = \frac{E''}{E_{\infty}} \quad (4.39)$$

なる関係があり、 $D_{\infty}, E', E'', E_{\infty}$ は長期弾性マトリックス、貯蔵弾性率、損失弾性率、長期弾性率をそれぞれ表す。計算の際必要とされる材料データは、長期弾性率、貯蔵せん断弾性率、貯蔵体積弾性率、損失せん断弾性率および損失体積弾性率の計5種類である。

これらの各貯蔵弾性率と損失弾性率は温度と周波数の関数として定義することができる。ゴムの動的粘弾性特性は温度と周波数により大きく異なるため、周波数依存性の問題に対しても本解析システムは有効である。

開発した解析システムの概要を表4.1に示す。フェーズ1では、I-DEASで作成された単位セルの有限要素モデルを基に、式(4.31)の荷重項を計算し、変位拘束により周期対称性を考慮したABAQUSの入力データを作成する。ソルバー部ではABAQUSにより、特性変位の実部と虚部を計算する。最後のフェーズ2では、得られた特性変位により有効貯蔵弾性マトリックスと有効損失マトリックスを計算した後に有効損失正接を評価する。

表 4.1: 有効損失正接の解析手順

<p>Phase 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compute load vector and obtain input data for ABAQUS ; $\mathbf{F}'_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{D}' dY, \quad \mathbf{F}''_y = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{Y^e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{D}'' dY$
<p>Solver</p> <ul style="list-style-type: none"> • Solve microscopic boundary value problem using ABAQUS ; $\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_y & -\mathbf{K}''_y \\ \mathbf{K}''_y & \mathbf{K}'_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\chi}' \\ \boldsymbol{\chi}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}'_y \\ -\mathbf{F}''_y \end{Bmatrix}$
<p>Phase 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compute homogenized complex D-matrix and complex compliance matrix ; $\begin{aligned} \mathbf{D}^{H'} &= \frac{1}{ Y } \int_Y [\mathbf{D}' - \mathbf{D}'(\mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}') + \mathbf{D}''(\mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}'')] dY \\ \mathbf{D}^{H''} &= \frac{1}{ Y } \int_Y [\mathbf{D}'' - \mathbf{D}''(\mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}') - \mathbf{D}'(\mathbf{B}_y \boldsymbol{\chi}'')] dY \\ \mathbf{C}^{H'} &= \Re((\mathbf{D}^{H*})^{-1}), \quad \mathbf{C}^{H''} = \Im((\mathbf{D}^{H*})^{-1}) \end{aligned}$ <ul style="list-style-type: none"> • Compute effective loss tangent ; $\tan \delta_{ij}^H = C_{ijij}^{H''} / C_{ijij}^{H'}$

4.4 解析プログラムの検証

提案した定式化および開発した解析システムの妥当性を評価するために、実験の比較的容易な硬いゴムと軟らかいゴムの2相からなる2種類のゴム複合体を考える。積層タイプと円柱状補強材埋め込みタイプの2種類のゴム複合体を作成し、それぞれの有効損失正接を伸張型の粘弾性測定装置を用いて測定する。得られた結果と均質化法による計算結果を比較検討する。

4.4.1 積層タイプ

まず、積層タイプのゴム複合体について検討する。積層タイプとは、図4.2に示す形状のゴム複合体を指す。試験片は、未加硫の硬いゴム(硬ゴム)と軟らかいゴム(軟ゴム)を交互に積層したものを加硫した後に厚さ1mmのシート状にスライスし、さらに任意の傾斜角度(配向角) θ をつけて幅5mm、長さ40mmの寸法に打ち抜いて作成した。試験片はL軸との傾斜角度 θ を、 0° 、 20° 、 45° 、 70° 、 90° の5種類と、硬ゴム単体、軟ゴム単体の計7種類用意した。なお、複合体における硬ゴムの体積含有率は45%(実測値)である。

計測は 20°C の雰囲気温度のもとで行なった。5%の初期ひずみを与えた状態から20Hzの周波数で $\pm 2\%$ のひずみで加振し、そのときの応答から貯蔵弾性率(E')と位相遅れ角(δ)を測定した。

表4.2に硬ゴムと軟ゴム各単体における損失正接($\tan \delta$)および貯蔵弾性率の測定結果を示す。これらの値は各5回ずつ測定した値の平均値を示している。

表4.2のデータをもとに本解析システムを用いて積層タイプのゴム複合体の有効損失正接を計算する。なお、計算では各ゴムの長期弾性率は貯蔵弾性率に等しいものとし、ポアソン比は0.49を用いる。傾斜角度 $\theta = 20^\circ$ の場合の単位セルの有限要素モデルを図4.3に示す。解析は平面応力状態を仮定し、1600個の3節点平面応力要素でモデル化している。傾斜角度をパラメータにしたときの計算結果および実験結果を図4.4に示す。測定結果を白丸で、均質化法による計算結果を黒丸で示し、さらに実線は 0° の基本単位セルについての計算結果をもとに以下に示す座標変換則により得られた有効損失正接を表す。実験結果は各5回ずつ測定した結果の平均値を示している。また、破線は複合則で計算した 0° 、 90° の動的粘弾性特性をもとに、阿部ら⁽⁹⁾により提案された手法を用いて得

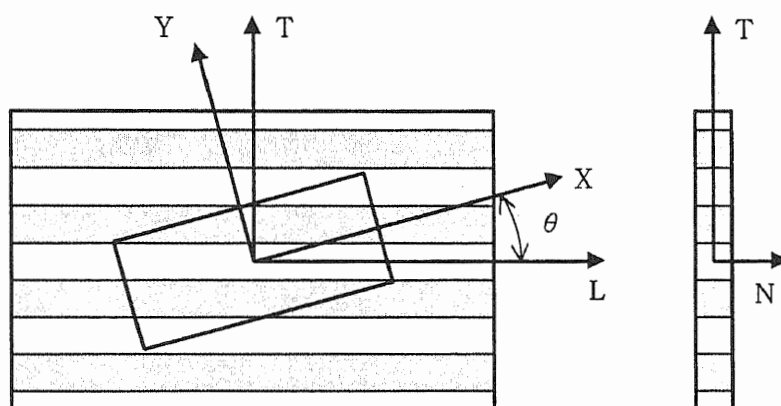


図 4.2: 積層タイプのゴム複合体

表 4.2: 硬ゴムと軟ゴムの動的粘弾性特性(周波数: 20Hz, 温度: 20°C)

	$\tan \delta$	E' (MPa)
soft rubber	0.087	2.77
stiff rubber	0.253	15.2

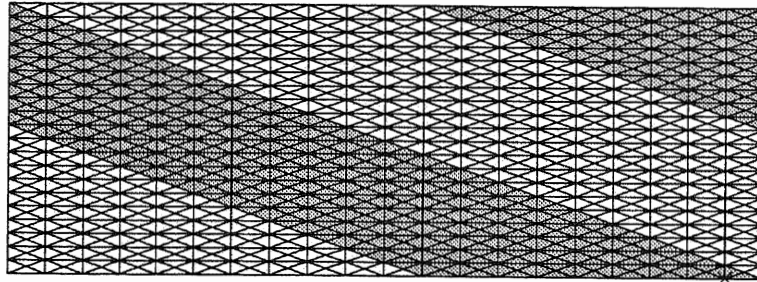


図 4.3: 積層タイプゴム複合体の単位セルの有限要素モデル ($\theta = 20^\circ$ (70°))

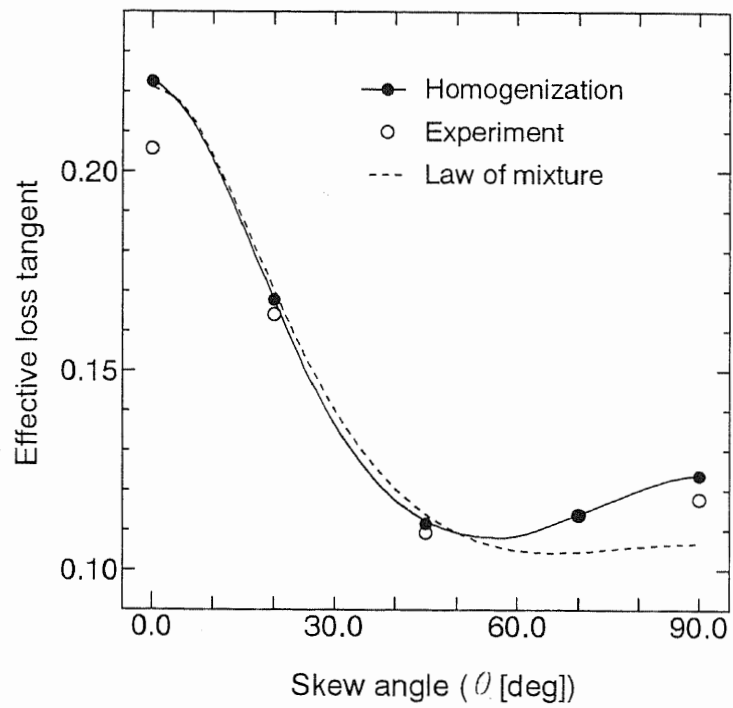


図 4.4: 均質化法で得られた有効損失正接と実験値との比較

られた各傾斜角度での結果を表す。

本数値解析例では 0° 、 90° 以外の傾斜角度についてもそれぞれの角度に応じた単位セルモデルを作成し計算しているが、 0° の基本単位セルについての計算結果から任意の傾斜角度における有効損失正接を計算する手順を以下に示す。なお、均質化法に基づいた本解析システムでは 0° の基本単位セルの結果から 90° の結果も同時に算出される。

図4.2に示すL-T平面を考え、L-方向およびT-方向をそれぞれ1および2で表すと、基本単位セルの有効複素コンプライアンスは次式で表される。

$$C^{H*} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{H*} & C_{1122}^{H*} & 0 \\ C_{2211}^{H*} & C_{2222}^{H*} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{H*} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

座標変換マトリックスを R とすると、任意の傾斜角度における有効複素コンプライアンスは次式で与えられる。

$$\overline{C^{H*}} = R^T C^{H*} R \quad (4.41)$$

よって、X-方向の有効複素コンプライアンスは次式で表される。

$$\begin{aligned} C_X^{H*} &= \overline{C_{1111}^{H*}} \\ &= C_{1111}^{H*} \cos^4 \theta + (C_{1122}^{H*} + C_{2211}^{H*}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + C_{1212}^{H*} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{2222}^{H*} \sin^4 \theta \\ &= C_X^{H'} + i C_X^{H''} \end{aligned} \quad (4.42)$$

上式の有効複素コンプライアンスの実部と虚部の比としてL-方向の有効損失正接を次式で定義できる。

$$\tan \delta_X^H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_X^{H''}}{C_X^{H'}} \quad (4.43)$$

図4.4より、 20° 、 45° 、 70° での均質化法の計算結果(黒丸)は上に示す座標変換則を用いて計算された有効損失正接(実線)と非常によく一致しているのが分かる。したがって、 0° の基本単位セルを用いた計算結果から座標変換則により任意の傾斜角度の有効損失正接を予測できる。しかも、均質化法による計算結果と実験結果はよく一致しており、本提案手法の妥当性を確認できる。一方、複合則による結果は 50° 以上の傾斜角度において実験値より若干低めの値となっている。

CHAPTER 4.

次に、同じ積層タイプのゴム複合体を用いて、硬ゴムの体積含有率を変化させたときの有効損失正接の変化を調べる。均質化法による解析結果と実験結果を図4.5に示す。図の横軸は硬ゴムの体積含有率を表わし、縦軸は硬ゴムの損失正接で正規化した有効損失正接を表わす。軸方向の有効損失正接($\tan \delta_L$)は上に凸の曲線を示し、横方向の有効損失正接($\tan \delta_T$)は下に凸の曲線を示すことがわかる。硬ゴムの体積含有率が小さい範囲で横方向の有効損失正接に変曲点がみられる。

4.4.2 円柱状補強材埋め込みタイプ

次に、円柱状の補強材が埋め込まれた埋め込みタイプについて検討する。埋め込みタイプとは、図4.6に示すように補強材に相当する直径1.5mmの硬いゴム(硬ゴム)を、マトリックスに相当する軟らかいゴム(軟ゴム)の中に埋め込んだ一方向強化のゴム複合体を指す。試験片の作成にあたっては専用モールドを作成した。作成にあたっては、あらかじめ補強材となる硬ゴムとマトリックスとなる軟ゴムをそれぞれ所定の形状となるようにプレキュア(予備加硫)した後、円柱状の硬ゴムの2枚の軟ゴムでサンドイッチするように重ね合わせたシート状サンプル(75mm×85mm×2mm)を加硫し作成した。動的粘弾性特性を測定する試験片はシート状サンプルから所定の傾斜角度(配向角)をつけて切り出した。サンプルの寸法は、幅10mm、長さ40mm、厚さ2mmであり、硬ゴムの体積含有率は30%(実測値)である。硬ゴムの粘弾性特性の測定値を表4.3に示す。なお、測定は前節に準じて行った。

傾斜角度が 0° の場合の単位セルの有限要素モデルを図4.7に示す。解析は三次元問題として取扱い、780個の選択低減積分による8節点連続体要素でモデル化している。傾斜角度をパラメータにしたときの計算結果および実験結果を図4.8に示す。測定結果を白丸で、均質化法による計算結果を黒丸で示し、実線は前節に示す座標変換則で得られた有効損失正接を表す。また、破線は前節と同様に複合則と阿部らにより提案された手法を用いて得られた各傾斜角度での結果を表す。図より、均質化法による計算結果と実験結果はよく一致しており、前節で示した積層タイプの場合と同様に提案手法の有効性が確認できた。一方、複合則では 90° の結果がかなり低めの値となっているため、それを用いて得られる計算値は傾斜角度が高くなるに従い実験値からはずれていく。し

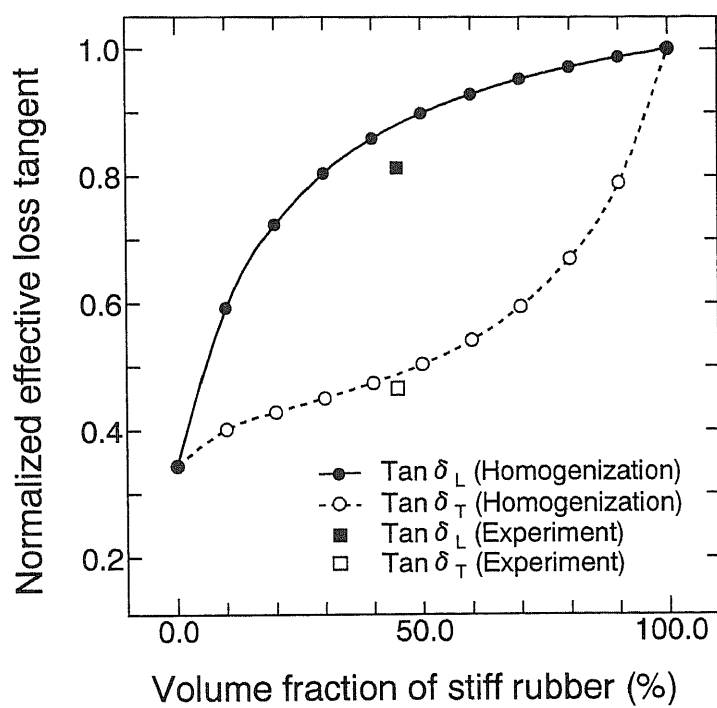


図 4.5: 硬ゴムの体積含有率と有効損失正接(積層タイプ)

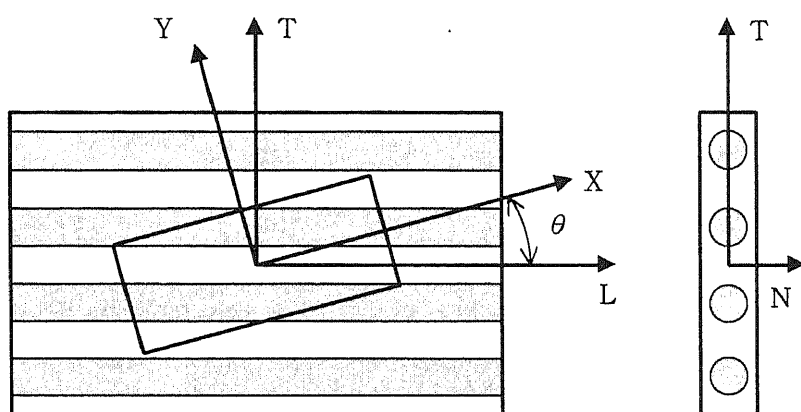


図 4.6: 円柱状補強材埋め込みタイプのゴム複合体

表 4.3: 硬ゴムと軟ゴムの動的粘弾性特性(周波数: 20Hz, 温度: 20°C)

	$\tan \delta$	E' (MPa)
soft rubber	0.026	1.93
stiff rubber	0.237	11.7

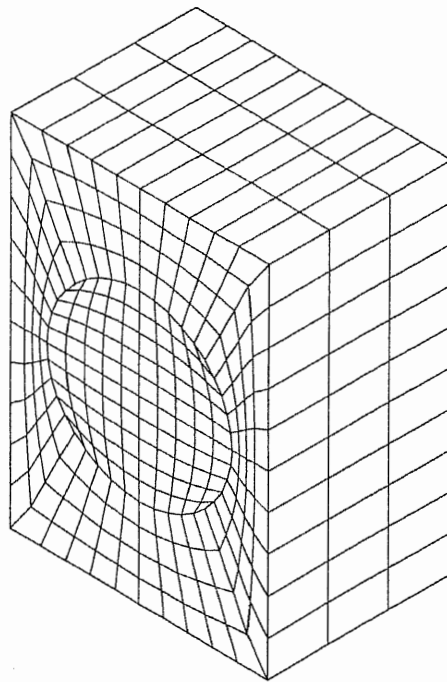


図 4.7: 円柱状補強材埋め込みタイプの単位セルの有限要素モデル

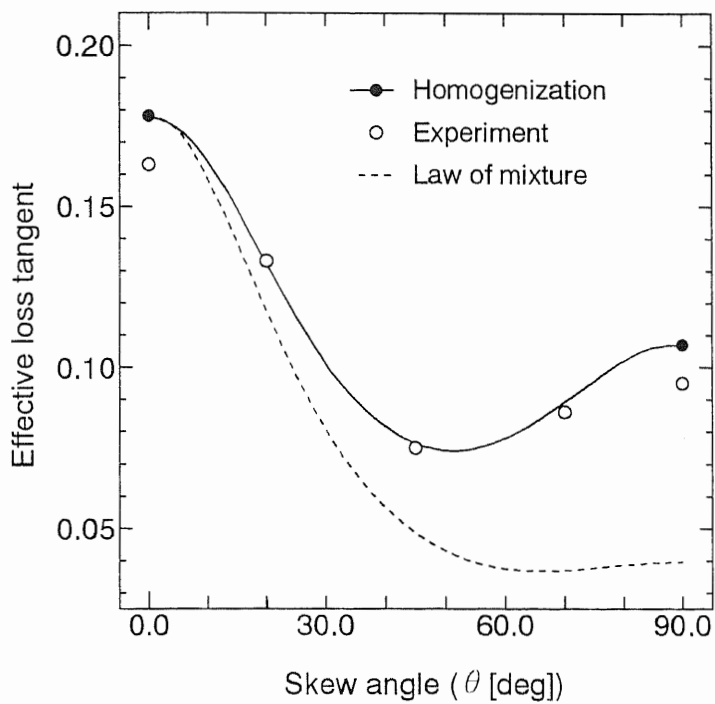


図 4.8: 均質化法で得られた有効損失正接と実験値との比較

CHAPTER 4.

たがって、均質化法による本提案手法は、補強形態に依らず複合材の有効損失正接を精度よく予測できる有効な手法であることが結論づけられる。

4.5 数値解析例

4.5.1 繊維強化ゴム(FRR)の有効損失正接

ここでは、図4.9に示す一方向強化FRRを考える。図に示す有限要素モデルは20節点の三次元連続体要素でモデル化している。特に、乗用車用ラジアルタイヤのカーカス材としても利用されているポリエステル強化ゴムを想定し、その有効損失正接についてパラメトリックスタディーを行う。ポリエステルコードは多数のフィラメントを撚り合わせた構造であるが、ここでは簡単化のためにポリエステルコードを一本の太いモノフィラメントと見なして解析する。ポリエステルコードとゴムの代表的な動的粘弾性特性を表4.4に示す。

ポリエステルの体積含有率とともに、ポリエステルコード、すなわち補強材の弾性率が変化したときの有効損失正接もあわせて評価する。なお、ゴムの材料特性および補強コードの損失正接は一定とする。補強材の弾性率(E_f)とゴムの弾性率(E_r)の比(E_f/E_r)を、10, 100, 1000と変化させたときの有効損失正接を図4.10に示す。図の横軸は補強材の体積含有率を表わし、縦軸はゴムの損失正接で正規化した値を表わす。補強材の体積含有率が10%のところでは軸方向の有効損失正接は急激に低下し、横方向の有効損失弾性率は補強材の体積含有率が50%以上のところで急激に低下することがわかる。補強材とゴムの弾性率比を大きくするにしたがってこの傾向は顕著となり、ポリエステルコードの弾性率では、50%以下の体積含有率の範囲において、軸方向の有効損失正接は補強材の損失正接で近似でき、横方向の有効損失正接はゴムの損失正接で近似できることがわかる。

4.5.2 熱可塑性エラストマーの有効損失正接

ここでは、図4.11, 4.12に示す簡単化したゴム/樹脂複合体を考える。これは、第2章で取り上げら熱可塑性エラストマーと同じモデルである。ただし、動的粘弾性解析では弾性解析に比べ有限要素法の未知数が2倍になるため、計算時間と記憶容量を軽減するため要素数を少なくしている。単位セルの領域を4096要素($16 \times 16 \times 16$)に分割し、球状介在物に相当する部分領域(要素)の材料特性を変更する方法で単位セルの有限要素モデルを作成している。第2章の有効弾性

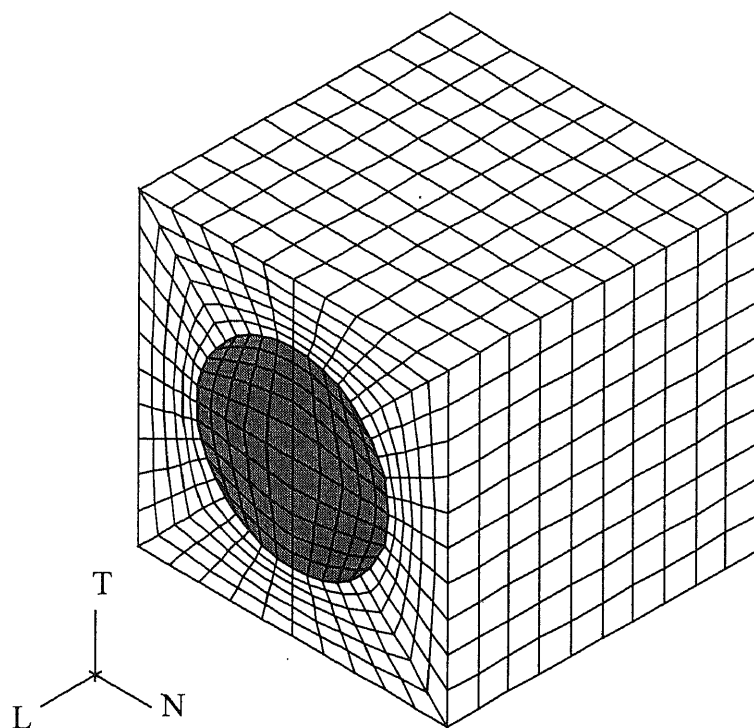


図 4.9: ポリエステル強化FRRの単位セルの有限要素モデル

表 4.4: ゴムとポリエステル動的粘弾性特性

	$\tan \delta$	E' (MPa)
rubber	0.1	10.0
polyester cord	0.05	5000.0

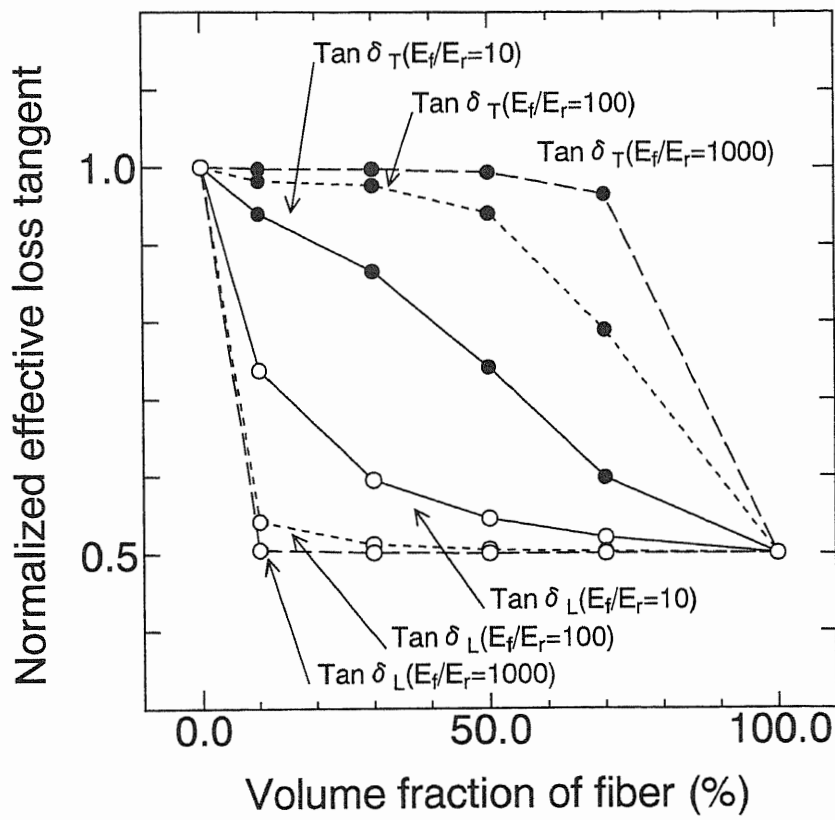


図 4.10: 一方向強化FRRの有効損失正接

CHAPTER 4.

係数の解析と同様に、通常の見島構造とともに逆見島構造の場合も含め、介在物の体積含有率が変化したときの有効損失正接を検討する。介在物の体積含有率が約50%を上回った場合、隣り合った単位セルの介在物どうしが連結し、マトリックスと介在物の各相が孤立することのない連続相(パーコレイティッド・ドメイン)をなす。

ポリエステルとゴムとの熱可塑性エラストマーを想定し、以下の動的粘弾性特性を用いる。

	$\tan \delta$	E' (MPa)
Polyester	0.05	2000.0
Rubber	0.1	10.0

見島構造、逆見島構造それぞれの場合について、ゴムの含有率を変化させたときの等価弾性係数の変化を図4.13に示す。これらのグラフはゴムの体積含有率をパラメータにしているため、ポリエステルがマトリックスである見島構造では、ゴムの体積含有率が50%以上の領域でパーコレイティッド・ドメインを形成し、ゴムがマトリックスである逆見島構造では、逆に、ゴムの体積含有率が、50%以下の領域でパーコレイティッド・ドメインを形成している点に注意を要する。図より、見島構造ではゴムの含有率が80%以下ではほとんど変化せずほぼ樹脂の損失正接に一致しているのがわかる。一方、逆見島構造では、逆見島構造とパーコレイティッド・ドメインの遷移領域で急激に変化するのがわかる。

これらの結果より、見島構造、逆見島構造の有効損失正接はマトリックスの損失正接にほぼ等しいことがわかる。このことは、ポリエステル強化ゴムの繊維に垂直な方向の有効損失正接がマトリックスの損失正接にほぼ等しいという結果と一致している。一方、パーコレイティッド・ドメインになると樹脂の損失正接にほぼ等しいことがわかる。

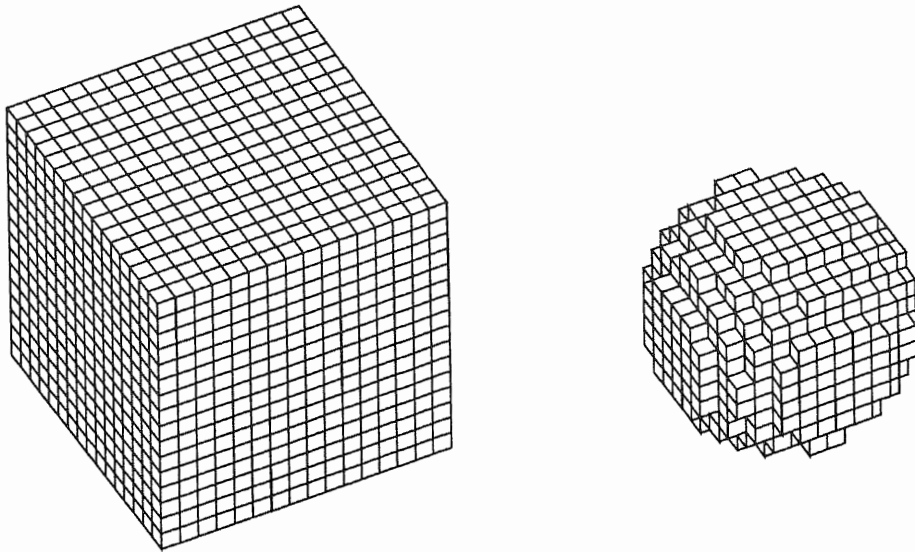


図 4.11: 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_I = 26.6\%$), 左図: マトリックス, 右図: 介在物

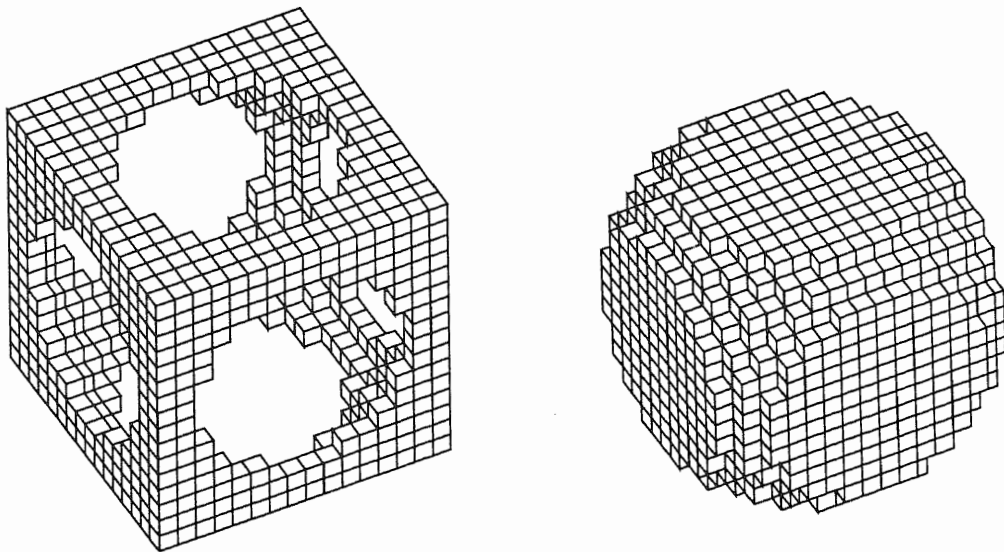


図 4.12: 熱可塑性エラストマーの単位セル($V_I = 79.7\%$), 左図: マトリックス, 右図: 介在物

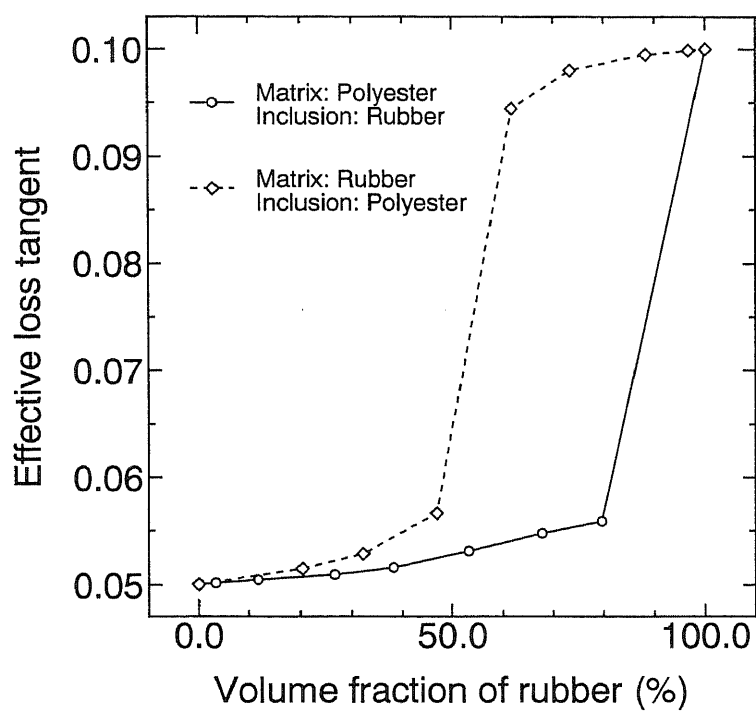


図 4.13: 熱可塑性エラストマーの有効損失正接

4.6 結 言

複合材料の有効損失正接を予測するために、周波数領域における粘弾性解析のための均質化法を新たに定式化し、ABAQUSをソルバーにした有効損失正接解析システムを開発した。

本解析システムで予測したゴム複合体の有効損失正接は、並行して行った実験結果と非常によく一致しており、本研究で提案する定式化ならびに解析システムの妥当性と有効性を示すことができた。

均質化法で得られた基本単位セルについての有効複素コンプライアンスを座標変換することにより、任意の傾斜角度 θ における有効損失正接を精度よく予測できることを示した。

ポリエステル強化FRRの有効損失正接に関する数値解析を行ったところ、ポリエステルが50%以下の体積含有率の範囲では、軸方向の有効損失正接はポリエステルの損失正接で近似でき、横方向の有効損失正接はゴムの損失正接で近似できることがわかった。

熱可塑性エラストマーの有効損失正接に関するパラメトリックスタディーを行ったところ、海島構造、逆海島構造の有効損失正接はマトリックスの損失正接にほぼ等しく、パーコレイティッド・ドメインになると樹脂の損失正接にほぼ等しくなることがわかった。

開発した動的粘弾性特性解析システムでは、各貯蔵弾性率と損失弾性率は温度と周波数の関数として定義可能である。ゴムの動的粘弾性特性は温度と周波数により大きく異なるため、周波数依存性の問題に関しても本解析システムは有効である。

参考文献

- (1) 田中(編集), 制振材料, (1992), 日本規格協会.
- (2) Francfort, G.A. and Suquet, P.M., Arch. Ratio. Mech. Anal., **96-3**, (1986), 265.
- (3) Suquet, P.M., Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics, In : *Homogenization Techniques for Composite Media*, Sanchez-Palencia, E. and Zaoui, A. (eds), (1987), Springer-Verlag, 191.

CHAPTER 4.

- (4) Malvern,L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall.
- (5) 渋谷, 機講論, 940-26,III(1994), 33.
- (6) 渋谷, 機講論, 95-2, A(1995), 179.
- (7) ABAQUS User's Manual,Hibbitt Karlsson & Sorensen,Inc.,(1994).
- (8) Williams,J.G., 高分子固体の応力解析とその応用, (1978), 培風館.
- (9) 阿部, 森兼, 清水, 小石, 海藤, 加部, 機構論, 96-10,(1996),269.

Chapter 5

確率均質化法

5.1 緒 言

単一材料では得られない特性を引き出せるため、複合材料はさまざまな分野で用いられている。それにともない複合材料に関する数値解析も広く行われているが、複合材料は他の均質材料と異なり製造過程で変動する要因が多いため、目標設計値に対する確定的な解析だけでは不十分な場合が少なくない。

ばらつき(ゆらぎ)が大きいと、構造物の健全性に悪影響を及ぼすことから、構造諸元のばらつきを考慮した確率有限要素法(Stochastic Finite Element Method (SFEM))が提案されてきた⁽¹⁾。Shinozuka⁽²⁾らによるモンテカルロ法は確率的な構造諸元を乱数で与え、多数の諸元サンプルに対する応答サンプルを有限要素法で求め、これから応答の確率的性質を評価する方法である。この方法では、応答の確率密度関数を評価できるものの、有限要素解析の計算回数が膨大になる。一方、中桐ら⁽³⁾により提案された摂動法による確率有限要素法は一度の解析とそれに付随した変動率解析を行えばよいため、モンテカルロ法に比較すると計算時間が非常に短くてすむ利点がある。この方法では応答の確率密度関数を得ることはできないものの、期待値と分散を評価できるためそれらから変動係数や信頼性指標等が算出できる。また、Ichikawa⁽⁴⁾の手法により、破損確率の上界を求めることもできる。

繊維強化複合材料の確率有限要素解析に関しても、谷らによる積層板各層の繊維配向角が二次元確率過程として変動する場合の熱変形、熱応力に関する研究⁽⁵⁾や、積層板の積層角と層厚が各層ごとに変動する場合の応力解析に関する研究⁽⁶⁾等が行われた。

複合材料の有限要素解析においては全体構造物を構成する複合材料の微細構造まで忠実にモデル化することは非常に困難なため、等価な物理特性を実験やマイクロメカニクス等の各手法で評価した後に、全体構造物を等価な均質材料からなるマクロ構造モデルに置き換えて解析される。谷らの一連の研究は積層板の各変動要因を古典積層理論の枠内で取り扱ったものであるため、粒子強化タイプやハニカム構造といったさまざまな補強構造を有する複合材料や、ポーラスメディア等の微細構造を有する一般的な材料に対しては、効率的で適用範囲の広い新たな解析手法の開発が必要である。

このような背景をもとに、本研究の目的は、複合材料の微細構造のゆらぎが等価な材料特性や微視的な構造応答に与える確率論的な影響を効率的に解

CHAPTER 5.

析するための手法を開発する。すなわち，微細構造の構造パラメータ(補強形態や材料特性等)の変動を等価な物理特性の変動として評価した後に，均質化されたマクロ構造に関する構造応答の期待値と分散を評価し，さらに微細構造レベルでの詳細な構造応答の期待値および分散を効率よく評価できる確率均質化法(Stochastic Homogenization Method(SHM))を提案する。確率均質化法では，確率有限要素法と同様に変動率の計算が必要となるためABAQUSを利用することができない。そこで，確率均質化法に関しては有限要素法も含めた解析プログラムを新たに開発し，数値解析例により手法および開発プログラムの妥当性と有効性を示す。

5.2 確率有限要素法の概要

一次摂動法に基づく確率有限要素法(以下, 単に確率有限要素法と呼ぶ.) について解説する. N 個の確率量 X_1, X_2, \dots, X_n に依存する応答 Z の期待値と分散は, 式(5.1)による確率変数 α_n を導入すると, 一次近似二次モーメント法により, 式(5.2),(5.3)で評価される(7),(3).

$$X_n = \bar{X}_n(1 + \alpha_n) \quad (5.1)$$

$$E[Z] = \bar{Z} \quad (5.2)$$

$$\text{Var}[Z] = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial Z}{\partial \alpha_n} \frac{\partial Z}{\partial \alpha_m} E[\alpha_n \alpha_m] \quad (5.3)$$

ここで, $E[\cdot]$, $\text{Var}[\cdot]$ はそれぞれ期待値および分散を表し, $\partial Z / \partial \alpha_n$ は応答の変動率を表す. また, $E[\alpha_n \alpha_m]$ は確率変数 α_n, α_m に関する期待値まわりの二次モーメントを表し, 共分散と呼ばれる. 一次近似二次モーメント法では, 構造諸元の変動に対する応答の統計的性質を確率密度関数をもとに評価するのではなく, 諸元変動の分散から式(5.3)を用いて構造応答の分散を評価する手法である.

式(5.3)に現れる応答の変動率は以下のように求められる. 静的弾性問題における有限要素剛性方程式は次式で表される.

$$K\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

ここで, $K, \mathbf{u}, \mathbf{F}$ はそれぞれ剛性マトリックス, 変位ベクトル, 荷重ベクトルを表す. 確率有限要素法では, 諸元変動に関する確定項近傍での剛性マトリックスの変動を次式のように α_n についての Taylor 展開により表す.

$$K = \bar{K} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{\partial K}{\partial \alpha_n} \quad (5.5)$$

また, 諸元変動に対する変位ベクトルと荷重ベクトルの変動も α_n に関する確定項近傍での Taylor 展開で次式のように表されると仮定する. ただし, ここでは 2次以降の項は考慮しない.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_n} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_n} \quad (5.7)$$

CHAPTER 5.

式(5.5),(5.6),(5.7)を式(5.4)に代入し,摂動法を適用すると以下の2式が得られる.

$$\overline{K} \overline{u} = \overline{F} \quad (5.8)$$

$$\overline{K} \frac{\partial u}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_n} \overline{u} \quad (5.9)$$

以上の2式を解くことにより構造応答の期待値と変動率を得ることができ,さらに一次近似二次モーメント法により応答の分散を評価できる.

なお,二次近似法の適用も可能ではあるが,3次以上のモーメントに関する情報がないことと,分散計算が複雑になるため本研究においては一次近似法のみを取り扱う.

5.3 均質化法の概要

確率均質化法の定式化の準備のため、均質化法について再度簡単に解説する。なお、ここでは初期応力の存在しない線形弾性問題を対象とし、指標表示においては総和規約を用いる。

マクロ構造(全体構造物)を記述する座標系を \boldsymbol{x} 、また、微細構造を記述する座標系を \boldsymbol{y} とすると、微細構造の実際の大きさを表すパラメータ ε を介して次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (5.10)$$

周期性を持つ微細構造(微細構造の基本周期を単位セルと呼ぶ)からなる構造物の変位を、次式のように漸近展開できると仮定する。

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varepsilon \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \cdots, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \quad (5.11)$$

上式を仮想仕事の原理に代入し、極限操作や周期性の境界条件等を考慮することにより、以下に示す微細構造と均質化されたマクロ構造に関する二つの境界値問題の弱形式を導くことができる。

$$\int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY$$

$$\forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{V}_Y = \{\boldsymbol{v}^1(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{v}^1 \in (H^1(Y))^3, \boldsymbol{v}^1 \text{ is } Y\text{-Periodic}\} \quad (5.12)$$

$$\int_\Omega D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) v_i^0 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma$$

$$\forall \boldsymbol{v}^0 \in \mathbf{V}_\Omega = \{\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{v}^0 \in (H^1(\Omega))^3, \boldsymbol{v}^0 = 0 \text{ on } \Gamma_g\} \quad (5.13)$$

ここで、式(5.13)に現れる等価な弾性テンソル D^H は、式(5.12)の境界値問題を解くことで得られる特性変位 χ を用いて次式で表される。

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad (5.14)$$

ここで、 $|Y|$ は単位セルの体積を表し、 δ_{mk} をKroneckerのデルタとすると I_{mnkl} は次式に示す4階の単位テンソルを表す。

$$I_{mnkl} = \frac{1}{2} (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}) \quad (5.15)$$

さらに、微細構造における変位と応力は、二つの境界値問題の解(χ および \boldsymbol{u}^0)を用いて次式で評価できる。

$$u_i^\varepsilon = u_i^0 - \varepsilon \chi_i^{kl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (5.16)$$

CHAPTER 5.

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = D_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (5.17)$$

以上の均質化法の手順をまとめると以下のようなになる。

1. 微細構造に関する境界値問題

- 式(5.12)を解き, 特性変位を求める.
- 得られた特性変位より, 式(5.14)をもとに等価な弾性定数を求める.

2. マクロ構造に関する境界値問題

- 式(5.13)を解き, 均質化されたマクロ構造の変位を求める.

3. 微細構造の応力評価

- 式(5.17)より, 微視的な応力分布を求める.

すなわち, 式(5.12), (5.13)それぞれを有限要素法等の数値解析手法を用いて解きさえすれば, 式(5.8)から効率よく各注目点での微視的な応力分布が得られる.

5.4 確率均質化法

本節の目的はその共通性を利用して、確率論的な取り扱いが可能なマルチレベルの解析手法を新たに定式化することにある。ここでは、前節において解説した均質化法の流れに沿って確率均質化法を順次定式化する。

5.4.1 微細構造に関する定式化

まず、微細構造に関する境界値問題(式(5.12))をアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法により定式化する。

微細構造における特性変位 χ と座標 y はそれぞれ次式により補間近似できるものとする。

$$\begin{cases} \chi_i^{mn} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) \chi_{ai}^{mn} \\ y_i = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta, \zeta) y_{ai} \end{cases} \quad (5.18)$$

ここで、 $N_a(\xi, \eta, \zeta)$ は自然座標系($\xi \in \square, \square = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)$)における形状関数を、また n_{en} は要素を構成する節点数を表す。

上式の関係を用いると、変位(特性変位)勾配は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial \chi_i^{mn}}{\partial y_j} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{\partial N_a}{\partial y_j} \chi_{ai}^{mn} = B_y \chi_e \quad (5.19)$$

上式に現れる B_y 、 χ_e は微細構造を記述する座標における離散化された微分演算子マトリックスと要素節点における特性変位マトリックスをそれぞれ表し、各マトリックスの成分を以下に示す。

$$B_y = [B_y^1 \ B_y^2 \ \dots \ B_y^{n_{en}}] \quad (5.20)$$

$$B_y^i = \begin{bmatrix} N_{i,y_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y_2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y_3} \\ N_{i,y_2} & N_{i,y_1} & 0 \\ N_{i,y_3} & 0 & N_{i,y_1} \\ 0 & N_{i,y_3} & N_{i,y_2} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \sim n_{en} \quad (5.21)$$

$$\chi_e = \begin{bmatrix} \chi_1^{11} & \chi_1^{22} & \chi_1^{33} & \chi_1^{12} & \chi_1^{13} & \chi_1^{23} \\ \chi_2^{11} & \chi_2^{22} & \chi_2^{33} & \chi_2^{12} & \chi_2^{13} & \chi_2^{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n_{\text{edf}}}^{11} & \chi_{n_{\text{edf}}}^{22} & \chi_{n_{\text{edf}}}^{33} & \chi_{n_{\text{edf}}}^{12} & \chi_{n_{\text{edf}}}^{13} & \chi_{n_{\text{edf}}}^{23} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

ここで, N_{i,y_1} は $\partial N_i / \partial y_1$ を表し, $n_{\text{edf}} (= n_{\text{en}} \times 3)$ は要素の自由度数を表す.

以上の手順に従って, 式(5.12)の境界値問題を以下の有限要素剛性方程式に書き換えることができる.

$$K_y \chi = F_y \quad (5.23)$$

ここで,

$$K_y = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{Y^e} B_y^T D B_y dY = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\square} B_y^T D B_y J_y d\Omega \quad (5.24)$$

$$F_y = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{Y^e} B_y^T D dY = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\square} B_y^T D J_y d\Omega \quad (5.25)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1^{11} & \chi_1^{22} & \chi_1^{33} & \chi_1^{12} & \chi_1^{13} & \chi_1^{23} \\ \chi_2^{11} & \chi_2^{22} & \chi_2^{33} & \chi_2^{12} & \chi_2^{13} & \chi_2^{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n_{\text{df}}}^{11} & \chi_{n_{\text{df}}}^{22} & \chi_{n_{\text{df}}}^{33} & \chi_{n_{\text{df}}}^{12} & \chi_{n_{\text{df}}}^{13} & \chi_{n_{\text{df}}}^{23} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

を表し, n_{df} は全自由度数, 肩付きの T は転置, J_y は次式に示すヤコビアンの変数行列の行列式をそれぞれ表す.

$$J_y = \det \begin{bmatrix} y_{1,\xi} & y_{1,\eta} & y_{1,\zeta} \\ y_{2,\xi} & y_{2,\eta} & y_{2,\zeta} \\ y_{3,\xi} & y_{3,\eta} & y_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

また, 式(5.5)の等価な弾性マトリックスは有限要素近似により次式に書き換えることができる.

$$D^H = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\square} D (I - B_y \chi_e) J_y d\Omega \quad (5.28)$$

ここで, I は単位マトリックスを表す.

以上に示す各式をもとに微細構造(単位セル)に関する境界値問題の確率有限要素解析の定式化を行う.

まず、微細構造における構造パラメータ ϕ の変動を次式の形で与える.

$$\phi_i(\mathbf{y}) = \overline{\phi_i(\mathbf{y})}(1 + \alpha_i(\mathbf{y})), \quad i = 1 \sim m \quad (5.29)$$

ここで、上付きのバーは期待値を、 $\alpha_i(\mathbf{y})$ は期待値0の確率変数を表す.

式(5.23)に一次摂動法を適用すると、微細構造の特性変位の確定項 $\bar{\chi}$ および一次変動率 $\partial\chi/\partial\alpha_i$ を導くことができる.

$$\bar{K}_y \bar{\chi} = \bar{F}_y \quad (5.30)$$

$$\bar{K}_y \frac{\partial\chi}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial F_y}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial K_y}{\partial\alpha_i} \bar{\chi} \quad (5.31)$$

ここで、剛性マトリックスおよび荷重ベクトルの一次変動率は次式によりそれぞれ評価できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_y}{\partial\alpha_i} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\square} & \left[\frac{\partial B_y^T}{\partial\alpha_i} \overline{DB}_y \bar{J}_y + \overline{B}_y^T \frac{\partial D}{\partial\alpha_i} \overline{B}_y \bar{J}_y \right. \\ & \left. + \overline{B}_y^T \overline{D} \frac{\partial B_y}{\partial\alpha_i} \bar{J}_y + \overline{B}_y^T \overline{DB}_y \frac{\partial J_y}{\partial\alpha_i} \right] d\square \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial\alpha_i} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\square} \left[\frac{\partial B_y^T}{\partial\alpha_i} \overline{D} \bar{J}_y + \overline{B}_y^T \frac{\partial D}{\partial\alpha_i} \bar{J}_y + \overline{B}_y^T \overline{D} \frac{\partial J_y}{\partial\alpha_i} \right] d\square \quad (5.33)$$

同様に一次摂動法を用いると、等価弾性マトリックスに関する次式の近似式を得ることができる.

$$D^H = \bar{D}^H + \sum_{i=1}^m \frac{\partial D^H}{\partial\alpha_i} \alpha_i \quad (5.34)$$

ここで、 $|Y|$ が変動しないとすると、等価な弾性マトリックスの一次変動率は次式で評価できる。 $|Y|$ は単位セル内の空隙部も含んだ体積を表しているため、例えば多孔質材料の円孔の半径が不確かな場合にも適用可能である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^H}{\partial\alpha_i} = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^{nel} \int_{\square} & \left[\frac{\partial D}{\partial\alpha_i} (I - \overline{B}_y \bar{\chi}_e) \bar{J}_y \right. \\ & \left. - \overline{D} \left(\frac{\partial B_y}{\partial\alpha_i} \bar{\chi}_e + \overline{B}_y \frac{\partial \chi_e}{\partial\alpha_i} \right) \bar{J}_y + \overline{D} (I - \overline{B}_y \bar{\chi}_e) \frac{\partial J_y}{\partial\alpha_i} \right] d\square \end{aligned} \quad (5.35)$$

また、単位セルの体積(セルサイズ)が不確かな場合の寄与は次のように考慮することができる. 単位セルの領域は式(2.2)に示す直方体で定義しているため、直方体の各辺の長さをそれぞれ y_1, y_2, y_3 とすると、単位セル体積は次式で表される.

$$|Y| = \int_Y dY = y_1 y_2 y_3 \quad (5.36)$$

ゆえに、単位セルの各辺の長さを確率変数にとることにより、単位セル体積のインバースの変動率は次式で評価できる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{|Y|} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{y_1 y_2 y_3} \right) \quad (5.37)$$

一次近似二次モーメント法⁽¹⁾により等価な弾性マトリックスの期待値と分散はそれぞれ次式で評価できる。

$$E[D^H] = \bar{D}^H \quad (5.38)$$

$$\text{Var}[D^H] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial D^H}{\partial \alpha_k} \frac{\partial D^H}{\partial \alpha_l} E[\alpha_k \alpha_l] \quad (5.39)$$

ここで、 $E[\cdot]$ 、 $\text{Var}[\cdot]$ はそれぞれ期待値および分散を表す。また、 $E[\alpha_k \alpha_l]$ は確率変数 α_k 、 α_l に関する期待値まわりの二次モーメントを表し、共分散と呼ばれる。

5.4.2 マクロ構造に関する定式化

マクロ構造における構造パラメータの変動を次式の形で与える。ただし、外力等の境界条件は確定的であるとする。

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \overline{\psi_i(\mathbf{x})}(1 + \beta_i(\mathbf{x})), \quad i = 1 \sim n \quad (5.40)$$

材料特性に関する変動はすでに考慮しているため、ここで別途考慮する変動要因は材料の主軸方向とマクロ構造物の幾何形状である。

上式は式(5.29)を考慮することにより、次式に書き換えることができる。

$$\psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{\psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(1 + \delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad i = 1 \sim M \quad (5.41)$$

ここで、

$$\delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \alpha_i(\mathbf{y}), & 1 \leq i \leq m \\ \beta_i(\mathbf{x}), & m < i \leq M (= m + n) \end{cases} \quad (5.42)$$

である。

一次摂動法に基づく確率有限要素解析の手順によると、マクロ構造における変位の確定項 $\bar{\mathbf{u}}^0$ および一次変動率 $\partial \mathbf{u}^0 / \partial \delta_i$ は次式を解くことでそれぞれ評価できる。

$$\bar{\mathbf{K}}_x^H \bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{F}}_x^H \quad (5.43)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_x^H \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \delta_i} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_x^H}{\partial \delta_i} \bar{\mathbf{u}}^0 \quad (5.44)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{K}}^H$ 、 $\partial \mathbf{K}^H / \partial \delta_i$ は次式に示す均質化されたマクロ構造の全体剛性マトリックスの確定項とその一次変動率をそれぞれ表す。

$$\bar{\mathbf{K}}_x^H = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\square} \bar{\mathbf{B}}_x^T \bar{\mathbf{D}}^H \bar{\mathbf{B}}_x \bar{J}_x d\square \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_x^H}{\partial \delta_i} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\square} & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_x^T}{\partial \delta_i} \bar{\mathbf{D}}^H \bar{\mathbf{B}}_x \bar{J}_x + \bar{\mathbf{B}}_x^T \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}^H}{\partial \delta_i} \bar{\mathbf{B}}_x \bar{J}_x \right. \\ & \left. + \bar{\mathbf{B}}_x^T \bar{\mathbf{D}}^H \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_x}{\partial \delta_i} \bar{J}_x + \bar{\mathbf{B}}_x^T \bar{\mathbf{D}}^H \bar{\mathbf{B}}_x \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial \delta_i} \right] d\square \end{aligned} \quad (5.46)$$

ここで、 N_{el} は総要素数、 \mathbf{B}_x は離散化された微分演算子マトリックス、 \mathbf{D}^H は等価な弾性マトリックス、 J_x はヤコビアンの変換行列のデターミナントをそれぞれ表す。なお、添字 x はマクロ構造を記述する座標系 x に関するという意味で用いる。

よって、マクロ構造の節点変位の変動は次式で表すことができる。

$$\mathbf{u}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0 + \sum_{i=1}^M \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \delta_i} \delta_i \quad (5.47)$$

さらに、マクロ構造の応力変動も次式で評価できる。

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \sum_{i=1}^M \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \delta_i} \delta_i \quad (5.48)$$

上式の応力変動の一次近似式をもとに、応力の期待値及び分散は一次近似二次モーメント法により次式で評価できる。

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\sigma}^0] = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 \quad (5.49)$$

$$\text{Var}[\boldsymbol{\sigma}^0] = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \delta_k} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial \delta_l} \mathbb{E}[\delta_k \delta_l] \quad (5.50)$$

5.4.3 微細構造における構造応答の評価

均質化法で得られる微細構造における応力評価式(式(5.17))に一次摂動法を適用することで、次式に示す微細構造における応力変動の一次近似式を得ることができる。

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon + \sum_{i=1}^M \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon}{\partial \delta_i} \delta_i \quad (5.51)$$

CHAPTER 5.

ここで、確定項および一次変動率をマトリックス表示するとそれぞれ次式で表される。

$$\bar{\sigma}^\varepsilon = \bar{D} (I - \bar{B}_y \bar{\chi}_e) \bar{B}_x \bar{u}^0 \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial \delta_i} &= \frac{\partial D}{\partial \delta_i} (I - \bar{B}_y \bar{\chi}_e) \bar{B}_x \bar{u}^0 \\ &- \bar{D} \left(\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \delta_i} \bar{\chi}_e + \bar{B}_y \frac{\partial \bar{\chi}_e}{\partial \delta_i} \right) \bar{B}_x \bar{u}^0 \\ &+ \bar{D} (I - \bar{B}_y \bar{\chi}_e) \left(\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \delta_i} \bar{u}^0 + \bar{B}_x \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \delta_i} \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

さらに、微細構造における微視的な応力の期待値及び分散を一次近似二次モーメント法により評価できる。

$$E[\sigma^\varepsilon] = \bar{\sigma}^\varepsilon \quad (5.54)$$

$$\text{Var}[\sigma^\varepsilon] = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial \delta_k} \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial \delta_l} E[\delta_k \delta_l] \quad (5.55)$$

5.5 数値解析例

5.5.1 母材の弾性定数が変動する粒子分散複合材料

ここでは提案手法(SHM)の妥当性を示すために、従来の確率有限要素法(SFEM)でも十分解析可能な問題を取り上げる。具体的には、粒子分散複合材料を解析対象とし、微視的な応力の期待値と分散についてSHMとSFEMによる計算結果を比較検討する。

解析対象の全体構造(粒子分型複合材料から成る平板)と微細構造の基本周期(単位セル)を図5.1に示し、各材料特性(母材に関しては期待値)を表5.1に示す。全体構造および単位セルは各座標系における単位長さの正方形板とし、SFEMによる解析を簡単化するために全体構造の境界条件として二軸均等引っ張り($\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0.05$)に相当する強制変位を各辺に与える。この境界条件下では全体構造の解析と、一つの単位セルのみに注目した解析が等価となるので、SHMでは全体構造を考慮した解析を行うが、SFEMは一つの単位セルのみに等価な境界条件を与えて解析する。また、介在物の形状は半径0.3の円とし、単位セルは一辺1.0の正方形とする。

考慮する不確定因子は母材の弾性定数(ヤング率およびポアソン比)であり、ばらつきの入力値としては、ヤング率、ポアソン比の各期待値に対して標準偏差をそれぞれ10%および5%に設定する。また、各不確定因子は相互に無相関で変動するものと仮定する。

母材の各弾性定数を期待値が零の確率変数 α_i を用いて次式で表されるものとする。

$$\begin{aligned} E_m &= \overline{E_m}(1 + \alpha_1) \\ \nu_m &= \overline{\nu_m}(1 + \alpha_2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

ここで、 E_m, ν_m は母材のヤング率とポアソン比をそれぞれ表す。

このとき母材の弾性マトリックスの変動率は平面応力状態においてそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{D}_m}{\partial \alpha_1} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_m & 0 \\ \nu_m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_m}{2} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

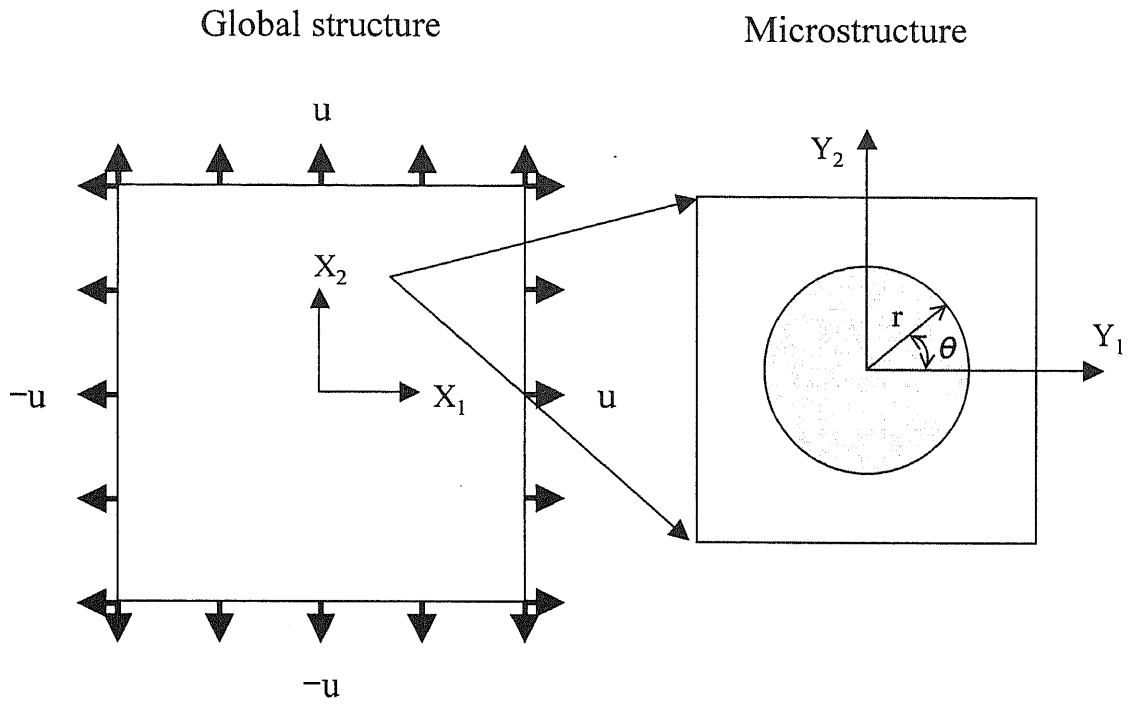


図 5.1: 粒子分散複合材料の単位セルと全体構造

表 5.1: 粒子分散複合材料の材料特性

	Inclusion	Matrix
Young's modulus (MPa)	100.0	1.0
Poisson's ratio	0.3	0.4

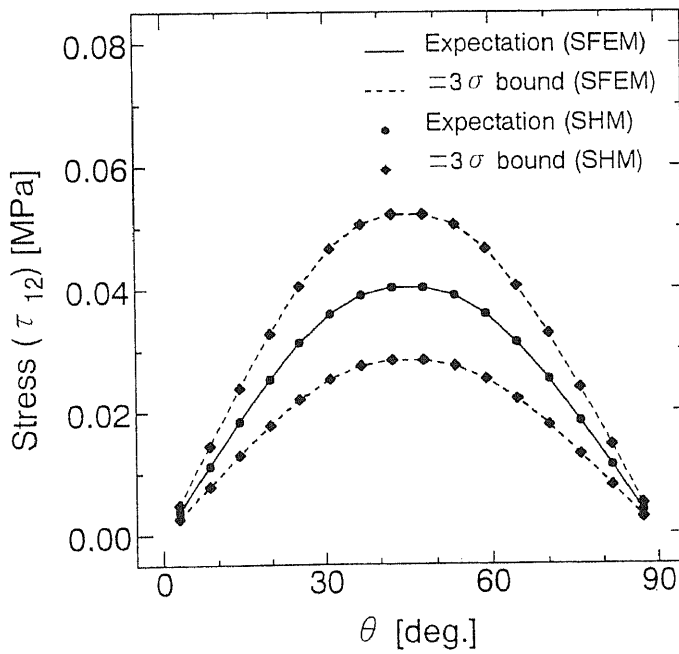
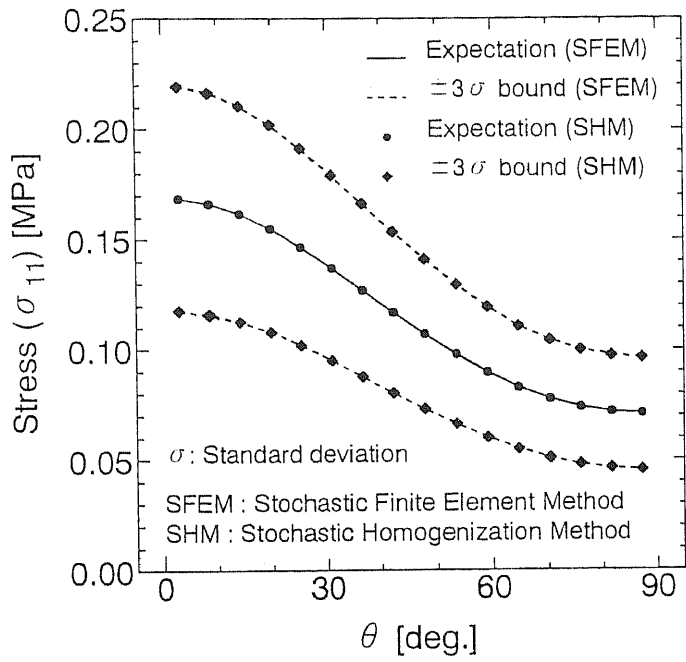


図 5.2: 微視的応力の期待値および 3σ バンド

$$\frac{\partial D_m}{\partial \alpha_2} = \frac{E_m \nu_m}{(1 - \nu_m^2)^2} \begin{bmatrix} 2\nu_m & 1 + \nu_m^2 & 0 \\ 1 + \nu_m^2 & 2\nu_m & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1 - \nu_m)^2}{2} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

以上の変動率をもとに、SHMおよびSFEMで計算した微細構造での応力の期待値およびその 3σ (σ ;標準偏差)バンドの分布を図2に示す。図5.2は単位セルの1/4領域において、介在物に隣接した母材要素の図心位置での y_1 方向応力(σ_{11})およびせん断応力(τ_{12})を、図5.1に示す角度 θ をパラメータにしてグラフ化したものである。図より、両手法による応力の期待値と 3σ バンドは計算方法が異なるにも関わらず非常によい一致をみており、本提案手法の妥当性を確認できる。

5.5.2 円孔の半径が二次元空間確率過程として変動する多孔質平板

次に、従来の直接有限要素法をもとにしたSFEMでは有限要素モデルが大きくなりすぎて解析が困難な例として、円孔の半径が二次元空間確率過程として変動する多孔質平板の微視的応力変動を解析する。

全体構造および単位セルを図5.3に示す。全体構造の図は模式的なものであり、計算上は無数の円孔が存在する平板を取り扱う。全体構造および単位セルは各座標系における単位長さの正方形板とし、境界条件として各辺の法線方向にトラクション($T=1.0$)を与える。ヤング率およびポアソン比はそれぞれ206.8GPa, 0.3とし、円孔半径の期待値と単位セル一辺の長さをそれぞれ0.25, 1.0とする。全体構造および単位セルそれぞれの要素分割図を図5.4に示す。図に示すように全体構造である多孔質平板は、均質化法により孔の無い均質な平板として取り扱い、要素分割は 70×70 である。全体構造の一つの要素に一つの単位セルが対応するのではなく、要素一つあたりに複数の単位セルが含まれており、全体構造の各要素内では円孔の半径が一様に変動するものとする。

各単位セルにおける円孔の半径 r_i の変動を次式で与える。

$$r_i = \bar{r}_i(1 + \alpha_i), \quad i = 1 \sim N_{el} \quad (5.59)$$

ここで、 N_{el} は全体構造の要素数を表す。

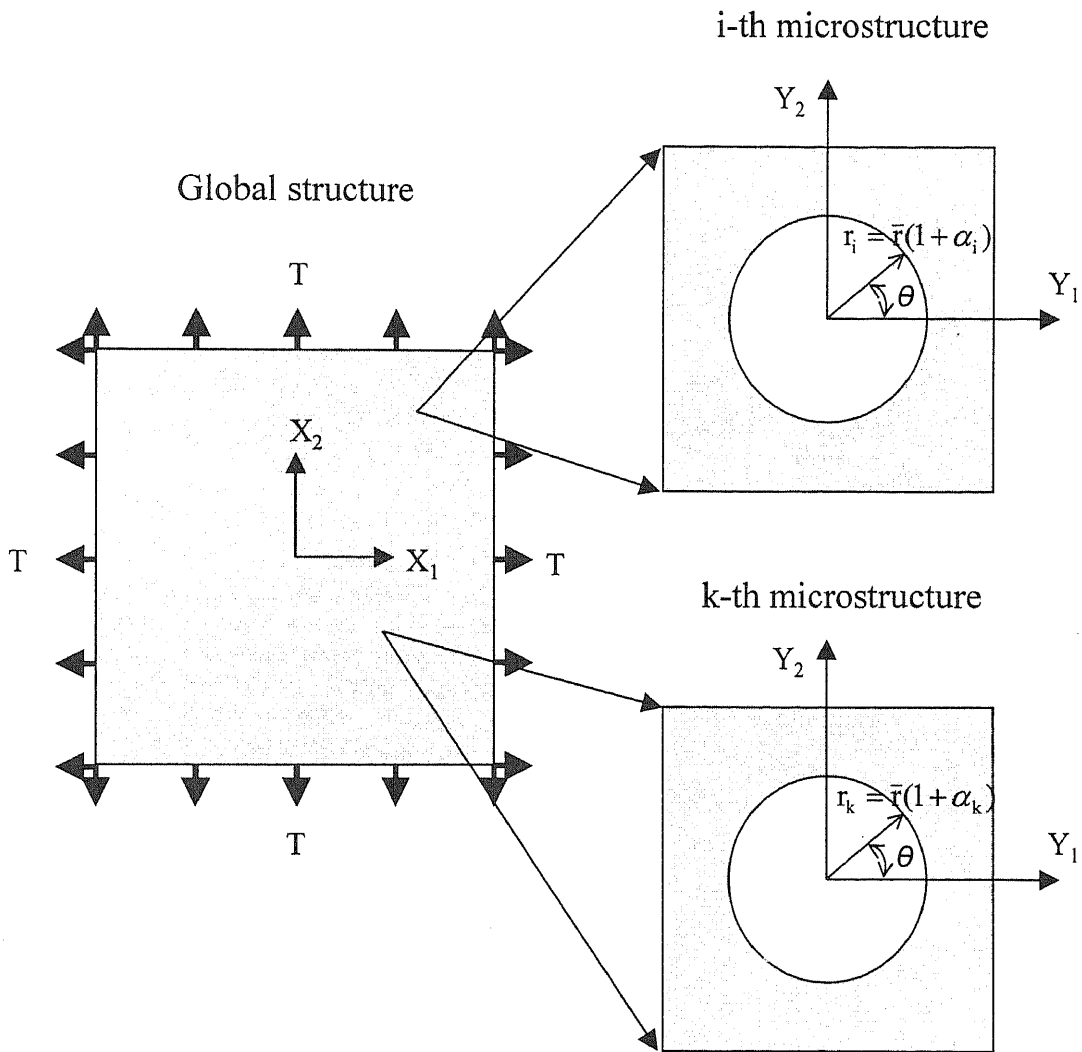


図 5.3: 多孔質平板の単位セルと全体構造

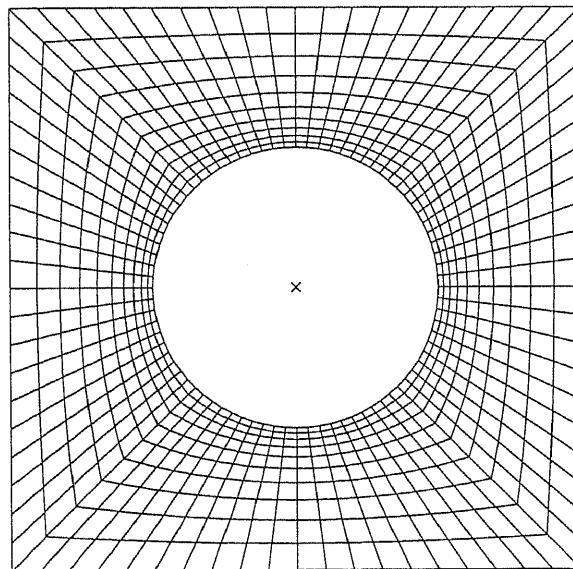
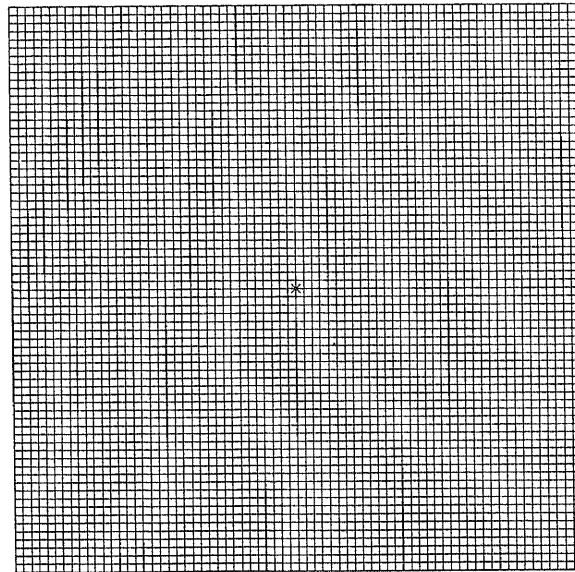


図 5.4: 全体構造の有限要素モデル(上図)と単位セルの有限要素モデル(下図)

上式では便宜的に全体構造の全要素に対して表示したが、円孔の期待値は全体構造物の各所で一定とすると、SHMにおいては等価弾性マトリックスの一次変動率を一つの単位セルについて評価すればよいことになる。この特徴を生かし、ここでは簡便的に次式に示す中心差分近似で等価弾性マトリックスの一次変動率を求める。

$$\frac{\partial D^H}{\partial \alpha} \approx \frac{\Delta D^H}{\Delta \alpha} = \left. \frac{D^H(+\Delta\alpha) - D^H(-\Delta\alpha)}{2\Delta\alpha} \right|_{\Delta\alpha=0.05} \quad (5.60)$$

また、式(5.53)において微視的な応力変動率を計算する際に必要となる特性関数と離散化された微分演算子マトリックスそれぞれの変動率、 $\partial \chi / \partial \alpha_i$ および $\partial B_y / \partial \alpha_i$ についても同様に中心差分近似で求める。

以上の中心差分近似を用いた各変動率を式(5.53)に代入して計算した微視的応力の一次変動率(S_{ij} (SHM))と、確定的な有限要素解析で得られる微視的応力を差分近似して求めた一次変動率(S_{ij} (FEM))を比較する。ただし、ここでは比較計算を容易にするため円孔の半径は全体構造内で一様に変動するものとしている。図5.5に、円孔に隣接した要素の図心位置での応力の一次変動率を示す。なお、図の横軸は図5.3に示す角度 θ である。図より、両者は非常によく一致しており、中心差分近似で求めた特性変位と離散化微分演算子マトリックスを用いて計算した微視的応力の一次変動率の妥当性を確認できる。

次に、円孔の半径が二次元空間確率過程として変動する場合を考える。ここでは、半径の空間的な確率変動に関して図5.6に示す周期性が存在するものと仮定し、以下の入力自己相関関数⁽²⁾を用いる。

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = C^2 \cos \frac{2\pi\lambda_1}{L_1} \cos \frac{2\pi\lambda_2}{L_2} \quad (5.61)$$

ここで、 $C = 1/2(\text{Var}[\alpha])^{0.5}$ 、 L_1 、 L_2 はそれぞれ x_1 、 x_2 方向に円孔の半径が変動する周期の波長を表し、 $C = 0.05$ 、 $1/L_1 = 1/L_2 = 5.0$ の場合について解析する。また、 λ_1 、 λ_2 は要素中心間距離の x_1 、 x_2 方向成分を表す。

平板中心に位置する要素(平板の要素分割が偶数であるため平板中心の隣に位置する要素)におけるマクロな応力の期待値と 3σ バンド、およびその位置における単位セルの円孔周りの微視的応力の期待値と 3σ バンドを図5.7に示す。図は x_1 および y_1 方向の応力(σ_{11})とせん断応力(τ_{12})それぞれについて示している。図中、 σ^0 、 τ^0 は均質化されたマクロ構造の応力を、 σ^ε 、 τ^ε は単位セルでの微視的な応力を表しているが、円孔周りの応力集中部において 3σ バンドの幅が広

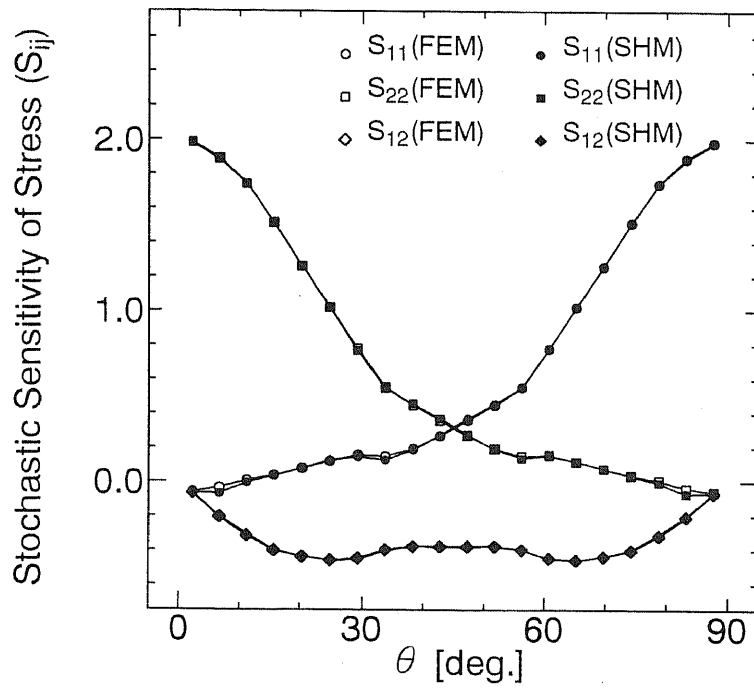


図 5.5: 微視的応力の一次変動率

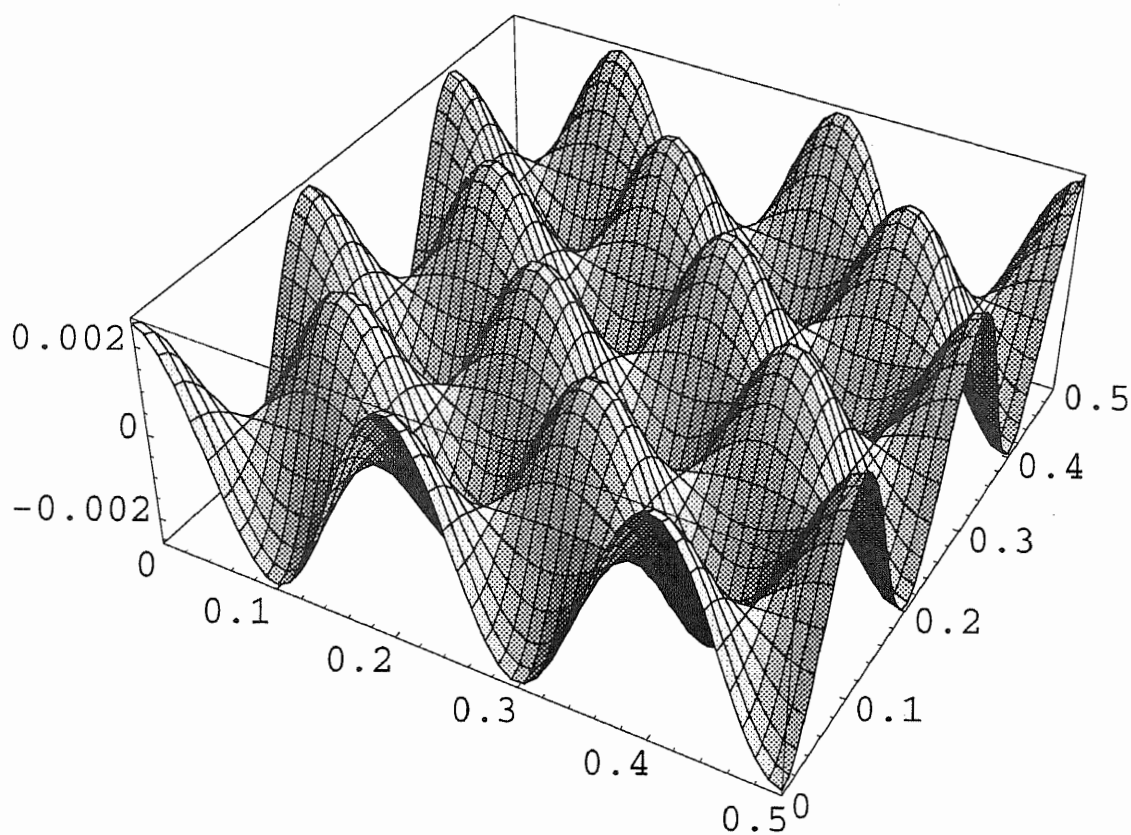


図 5.6: 平板の1/4領域における自己相関関数

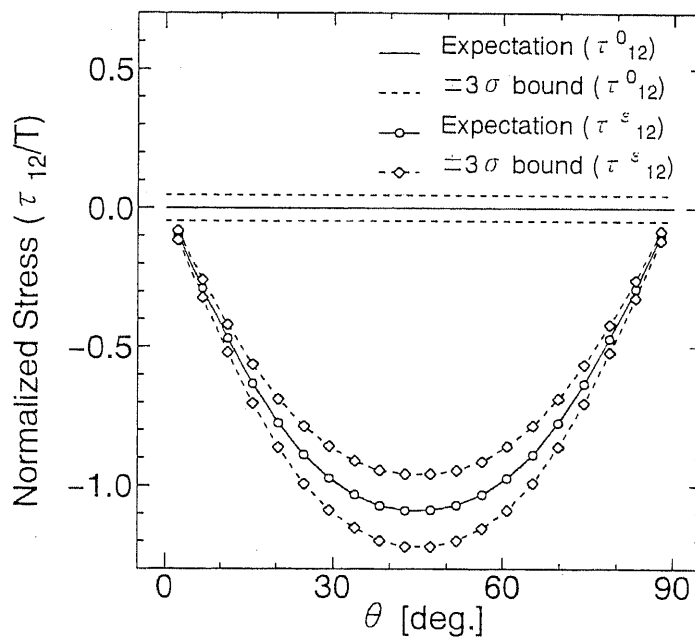
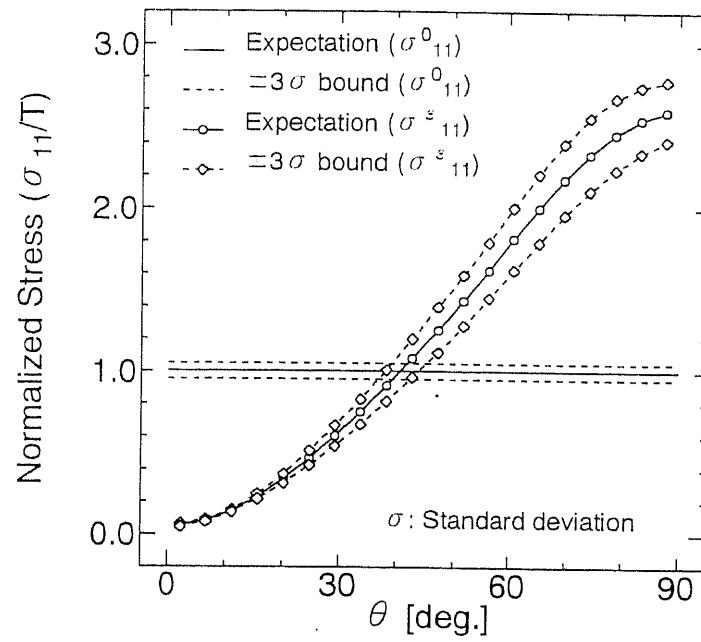


図 5.7: 微視的応力の期待値と3 σ バンド

CHAPTER 5.

がっているのが認められる。このような微細構造における空間確率過程の変動要因を取り扱う際、従来の直接有限要素法をベースにしたSFEMでは計算すべき有限要素モデルが大きくなるが、計算精度を落とさずにマクロ構造と微細構造の境界値問題を分離できる均質化法の利点を利用したSHMは、計算に要する有限要素モデルを簡略化できるため実用的な問題に対しても非常に有効である。

しかしながら、ここで提案する確率均質化法は一次近似に基づいているため、一次近似が成り立たない問題にはそのまま適用できない。

5.6 結 言

複合材料における微細構造の不確定性を考慮したマルチレベル解析手法として一次近似法に基づく確率均質化法を提案した。

数値解析例として母材の弾性定数が変動する粒子分散型複合材料と、微細構造の円孔の半径が二次元空間確率過程として変動する多孔質平板の解析を行い、本手法の妥当性と有効性を示した。しかしながら、一次近似法に基づいているため問題ごとに適用可能かどうか確認することが重要である。

本論文においては特に微視的な応力分布の変動に注目しているが、本文中の定式化で示したように本手法は複合材料の等価な物理特性の変動も評価できるため、微細構造の変動を考慮した材料設計にも利用可能である。

多孔質平板の数値解析例において示したような空間確率過程としての不確かさを取り扱う場合は、周期性を満たした不確かな微細構造が有限要素法で離散化したマクロ構造の各材料評価点(あるいは要素)ごとに分布しているものとして近似的に評価できる。しかしながら、空間的な不確かさにより周期性が乱れたときの隣接する単位セル同士の相互作用を厳密に取り扱うことはできない。その場合は、単位セルの集合体であるメゾスコピックな領域をモデル化してある程度対処可能であると考えられるが、その有効性などに関しては今後の課題である。

参考文献

- (1) 中桐, 応用数理, 2-2, (1992), 131.
- (2) Shinozuka, M., *Stochastic Mechanics*, Vol. I, Dept. of Civil Engineering and Operational Research, Princeton University, (1987).
- (3) 中桐, 久田, 確率有限要素法入門, (1985), 培風館.
- (4) Ichikawa, M., *Reliability Eng.*, 5, (1983), 173.
- (5) 谷, 中桐, 鈴木, 東野, 機論, 53-491, A(1987), 1197.
- (6) 谷, 高畑, 中桐, 久田, 機論, 51-465, A(1985), 1504.
- (7) 岡村, 板垣, 強度の統計的取り扱い(構造強度信頼性工学), (1979), 培風館.

Chapter 6

均質化法による撚りコード/ゴム複合 体の解析

6.1 緒 言

本章では、開発した均質化法解析システムを利用して、乗用車用ラジアルタイヤのベルト層に利用されているスチール撚りコードの解析を行う。スチール撚りコードはゴムで被覆され利用されるため、撚りコードをゴムで被覆した複合材料を考える。なお、ここではゴムで被覆したスチール撚りコードを撚りコード/ゴム複合体と呼ぶ。

撚りコード/ゴム複合体は補強材であるスチール素線とマトリックスであるゴムとの弾性率比が10,000以上となるため、特に有効損失正接を実験で正確に評価することが困難である。また今日では、タイヤの一層な軽量化が望まれ、タイヤの強度メンバーである撚りコードへの負担が大きくなるため、撚りコード/ゴム複合体の効率的なシミュレーション手法の開発が必要である。

撚りコード単体の等価剛性に関して、Akasakaら⁽¹⁾はエネルギー法に基づいた撚りコードの曲げ剛性評価に関する研究を行った。Pidaparti⁽²⁾はコードをbeam要素で、マトリックスをsolid要素でモデル化した有限要素解析を利用して、撚りコード/ゴム複合体の引張り、曲げ、ねじり剛性を評価した。また、ShieldとCostello^{(3),(4)}は撚りコード/ゴム複合体の弾性特性をエネルギー法で評価した。しかしながら、これら従来の研究では、簡単化のために撚りコードとゴムとの相互作用が十分考慮されていない。

そこで本章では、均質化法を利用してコードとゴムとの相互作用を考慮した撚りコード/ゴム複合体の等価材料特性の評価ならびに応力解析を行う。応力解析においては、撚りコードの配向角が二次元空間確率過程として不確かな平板の確率均質化法による解析も行う。

6.2 撚りコード/ゴム複合体

乗用車用ラジアルタイヤの構造を図6.1に示す。図に示すようにタイヤはゴム単体の部材と補強材の部材(Fiber Reinforced Rubber)を組み合わせた積層構造をしている。タイヤに要求されるさまざまな特性を満足させるために補強材には高強度、低伸張性と屈曲性が要求され、タイヤのタガとなるベルトと呼ばれる補強材には通常スチール撚りコードが用いられている。トラック・バス用タイヤではベルト、カーカスともにスチール撚りコードが用いられている。

スチール撚りコードは屈曲疲労性を良くするために細く延伸した素線を多数撚り合わせた構造になっている。また、スチール素線の材料は高炭素鋼を用いゴムとの接着性を良くするために真鍮メッキされている。撚り合わせる素線の本数はタイヤの種類によって異なり、トラック・バス用の大型タイヤでは高強度が要求されるため20本以上撚り合わせたものも用いられている。撚り合わせたコードはタイヤの製造工程においてゴムで被覆されFRR、すなわち撚りコード/ゴム複合体に加工される。素線同士のフレッシングや、タイヤ内に進入した水分による耐久性低下を防ぐために、撚り構造には撚りコード内へのゴム浸透を良くするための工夫が凝らされている。

乗用車用ラジアルタイヤのベルトコードとして利用される素線($d_1=0.25\text{mm}$)を5本撚り合わせた $1\times 5(0.25)$ タイプの撚りコードを図6.2に示す。また、撚りコードの断面図を図6.3に示し、スチール素線とゴムそれぞれの材料特性(弾性率、ポアソン比、損失正接、線膨張係数、熱伝導率)を表6.1に示す。なお、撚りピッチ長さは以下特にことわらない限り 10mm とする。

図6.2に示す撚りコードにゴムを被覆した撚りコード/ゴム複合体の単位セルの有限要素モデルを図6.4に示す。この図は、撚りコードの1ピッチ長さを一周期と見なした場合の単位セルである。構造を見やすくするために図の上段に全体図を、下段に撚りコードだけを取り出して示している。周期境界条件を満たすため、単位セルの相対する面は同じメッシュ分割としている。単位セルの有限要素モデルは11400個の10節点四面体要素からなり、節点数は16441である。なお、モデル化に際しては、各素線はお互いに接触しておらず、完全にゴムが浸透し、素線とゴムは完全に接着している状態を仮定している。

[†] 1×5 タイプの撚りコードは現在利用されていないが、数年前まで広く利用されていたため解析対象としてこのタイプを取り上げる。

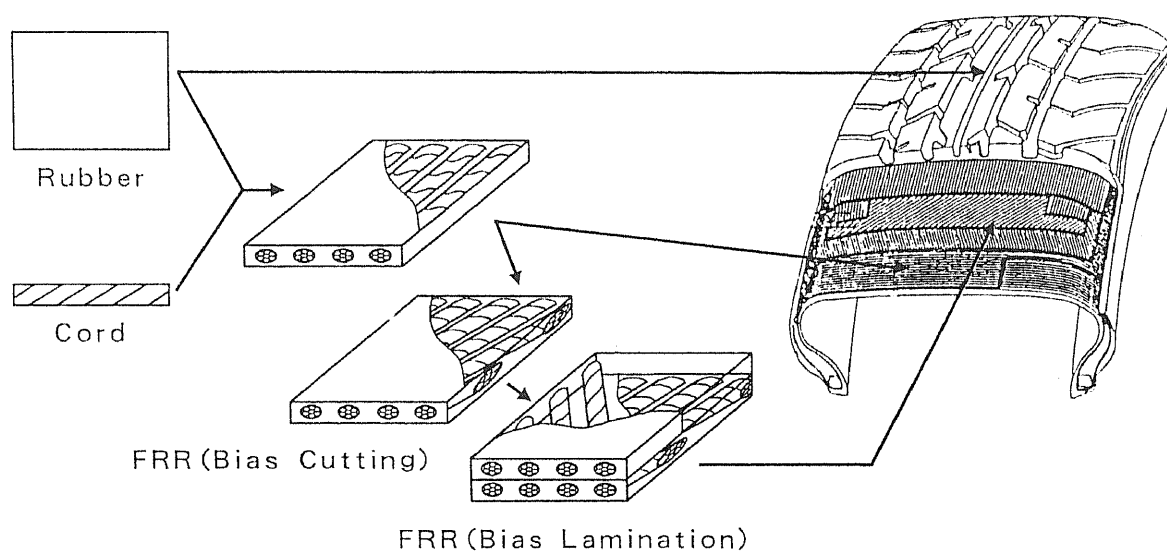


図 6.1: 乗用車用ラジアルタイヤの構造

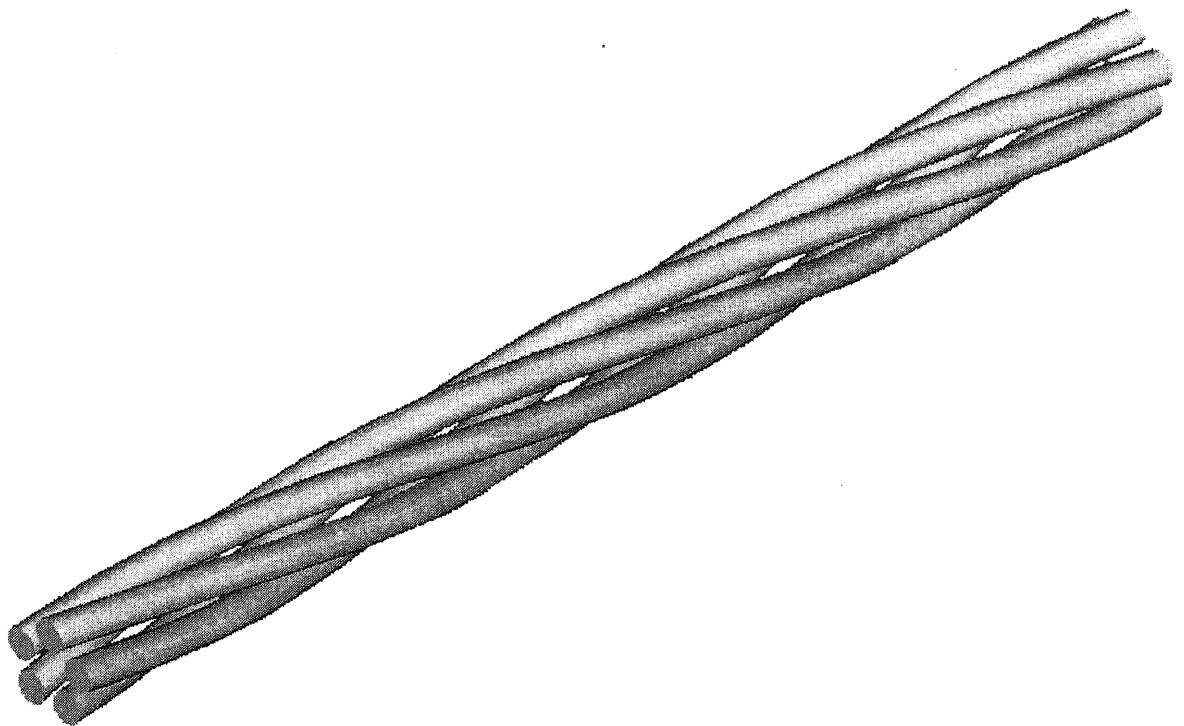


図 6.2: 1×5タイプの撚りコード

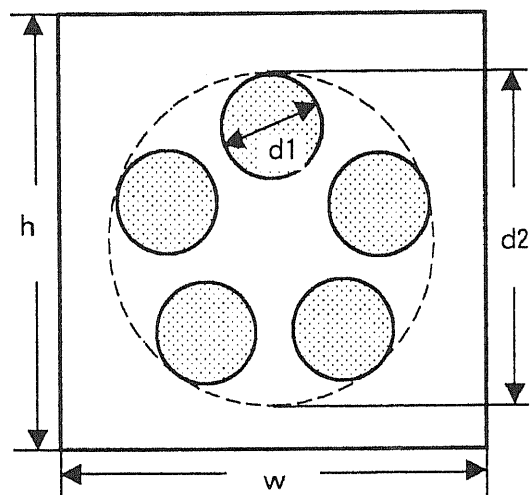


図 6.3: 1×5タイプの撚りコード/ゴム複合体の断面図

表 6.1: スチール素線およびゴムの材料定数

	$E(\text{GPa})$	ν	$\tan\delta$	α ($^{\circ}\text{C}$)	κ ($\text{W/m/}^{\circ}\text{C}$)
Steel	180.0	0.33	0.0	1.2×10^{-5}	45.0
Rubber	1.0×10^{-2}	0.49	0.1	2.2×10^{-4}	0.25

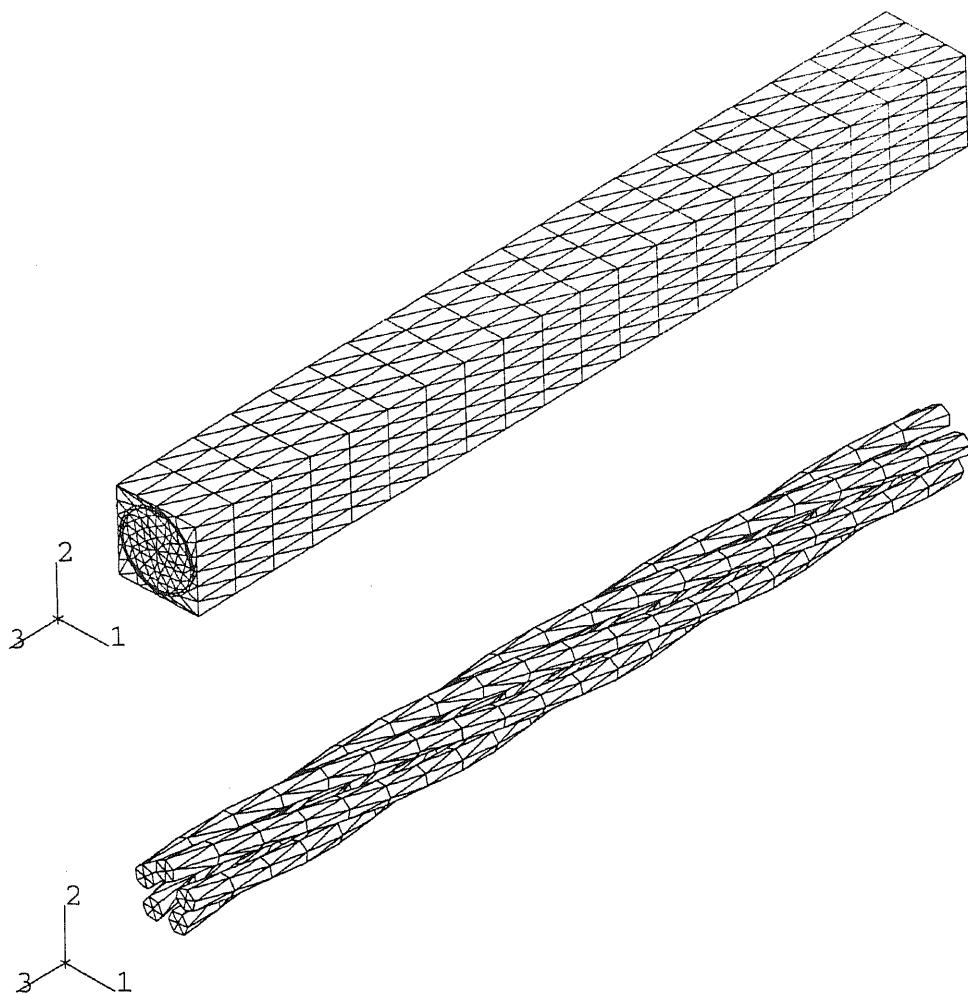


図 6.4: 撚りコード/ゴム複合体の1ピッチ長さを単位セルとした有限要素モデル

6.3 軸方向の周期対称性

図6.4に示す撚りコード/ゴム複合体の単位セル有限要素モデルは自由度数が多いため、計算時間と必要な記憶装置の容量が膨大になりパラメトリックな解析が困難となる。そこで、単位セルモデルを小さくし計算コストを軽減するため、撚りコード/ゴム複合体の軸方向の周期対称性について検討する。

撚りコード/ゴム複合体の軸方向の周期性を検討するために、図6.5に示す1/(撚り本数)ピッチ長さの単位セルを考える。撚りコードの軸方向の周期性を考えた場合、1ピッチモデルでは各素線が連続して接続されるのに比べ、1/(撚り本数)ピッチモデルでは各素線が隣の素線に接続されることになる。この場合撚り本数は5本であるため、1/5ピッチモデルとなる。1/5ピッチ長さの単位セルモデルは、2280要素の10節点四面体要素からなり、節点数は3609である。

1ピッチモデル、1/5ピッチモデルそれぞれについて等価弾性係数を計算した結果を表6.2に示す。表より、それぞれのモデルの各弾性定数は非常によく一致しているのがわかる。また、1ピッチモデル、1/5ピッチモデルそれぞれの特性変位のモード図を図6.6、6.7に示す。なお、比較しやすいように1ピッチモデルの方は1/5ピッチ領域だけを表示している。これらの図より、それぞれのモデルの特性変位が一致しているのが確認できる。したがって、特性変位をもとに算出される微視的な応力分布も両者の結果は一致することがわかる。

次に、1ピッチモデルと1/5ピッチモデルの計算コストを、微細構造における境界値問題の計算時間(CPU時間)と一時的に外部記憶装置に書き出されるワークファイルの量から比較する。表6.3に示すように、1ピッチモデルのCPU時間は2902.9秒を要し、計算過程で必要なワークファイルは615.6メガバイトである。一方、1/5ピッチモデルでは、193.7秒のCPU時間を要し、87.6メガバイトのワークファイルが必要である。これらを比較すると、1/5モデルでは計算時間を1/15に短縮でき、必要な外部記憶装置の容量も1/7に軽減できることがわかる。この差はパラメトリックな解析を行う際には非常に大きな差となって表れる。なお、これらの計算に際しては、IBMのワークステーションRS6000 Model 591(1ギガバイトのメモリー搭載)を利用し、ABAQUS(5.6)のSparse Solverを用いた。Sparse Solver(Multifrontal Solver)はABAQUSのバージョン5.6から追加された高速で、なおかつ記憶容量が少なくすむ直接法のソルバーであるが、ABAQUSをもとに開発した均質化法解析システムではこれらのABAQUSに追加された新機能を

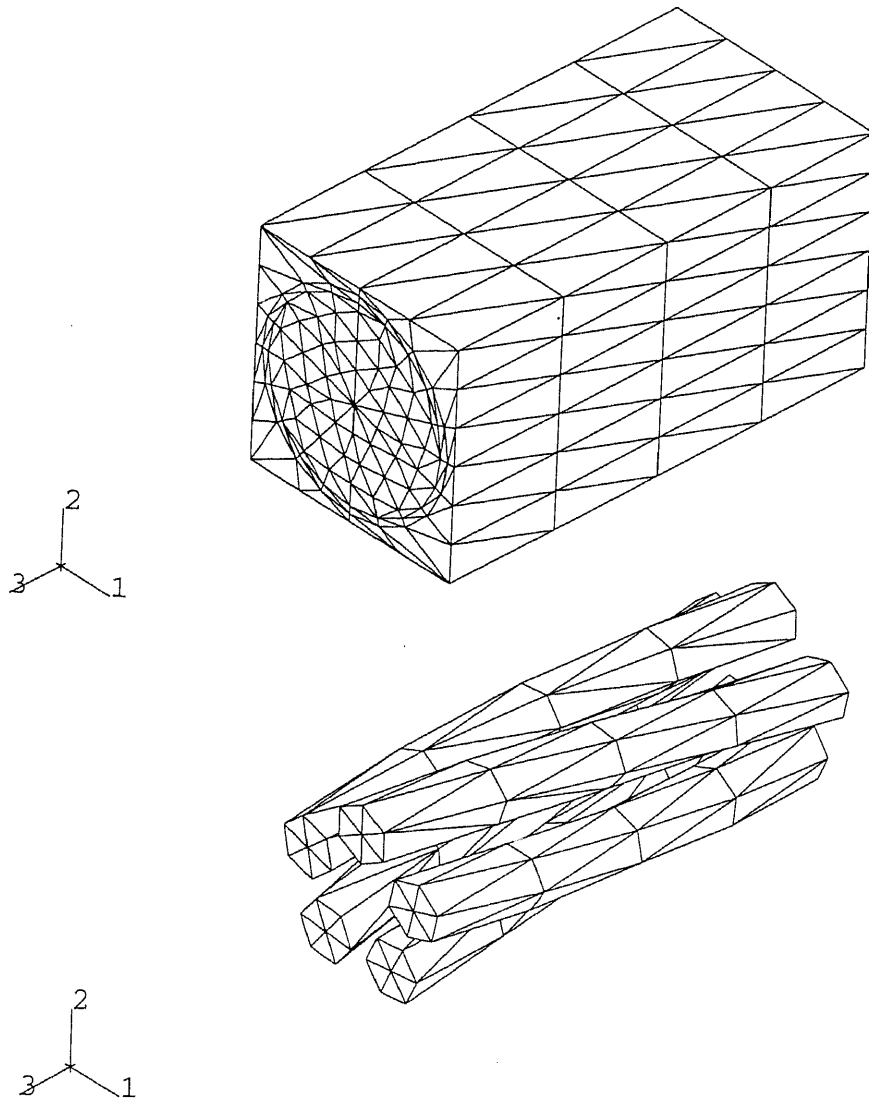


図 6.5: 撚りコード/ゴム複合体の1/5ピッチ長さを単位セルとした有限要素モデル

表 6.2: 1ピッチモデルと1/5ピッチモデルの等価弾性定数(MPa)

Elastic constants	1 pitch model	1/5 pitch model
E_1	28.115	28.109
E_2	28.119	28.113
E_3	28,369.0	28,369.0
ν_{12}	0.93176	0.93178
ν_{13}	0.0012208	0.0012225
ν_{23}	0.0013044	0.0013023
G_{12}	0.56049	0.56034
G_{13}	0.78630	0.78617
G_{23}	0.78678	0.78662

表 6.3: 1ピッチモデルと1/5ピッチモデルの計算コストの比較

	CPU time (sec)	Work file (MB)
1 pitch model	2902.9	615.6
1/5 pitch model	193.7	87.6

CHAPTER 6.

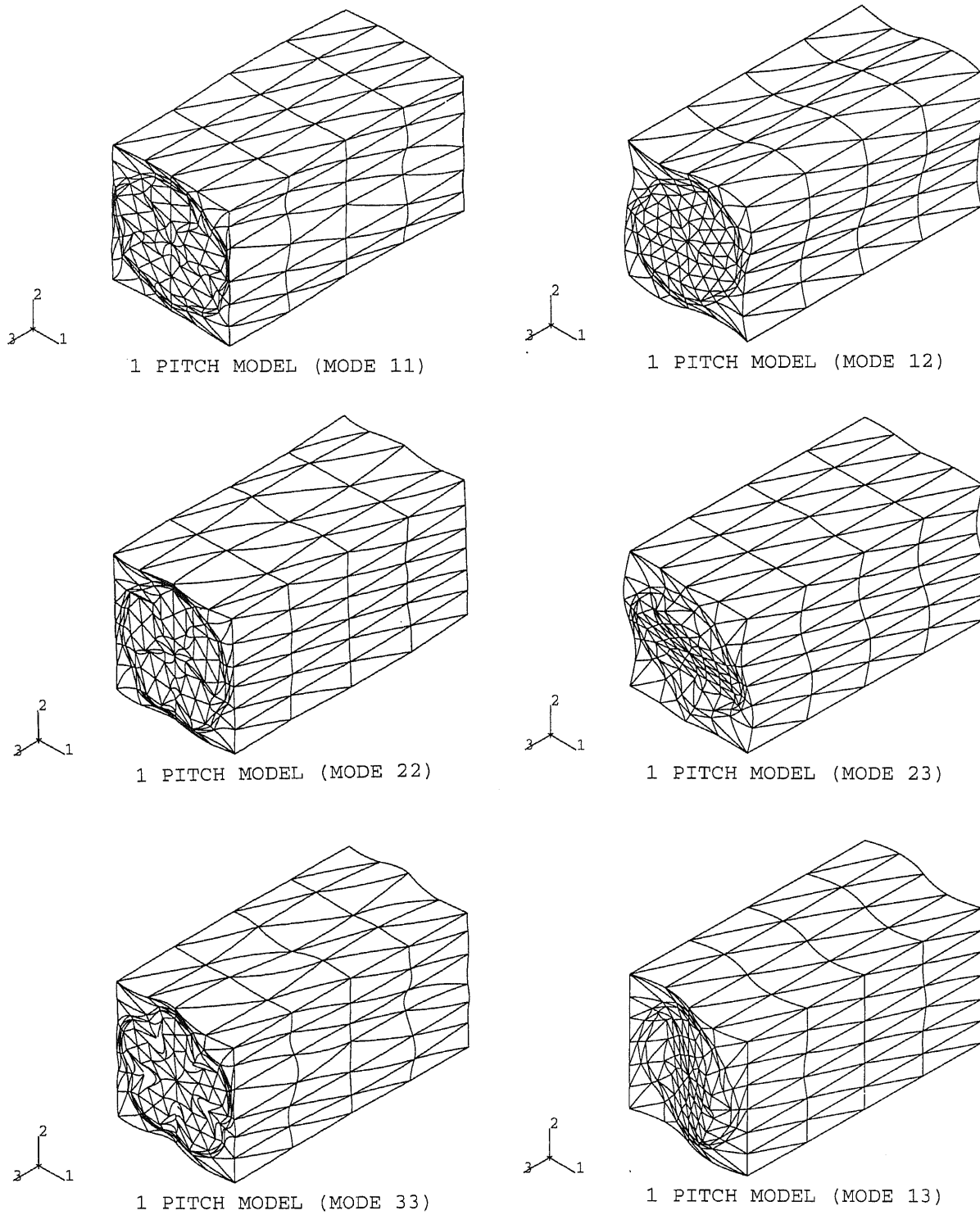


図 6.6: 1ピッチモデルの特性変位(1/5領域のみ表示)

CHAPTER 6.

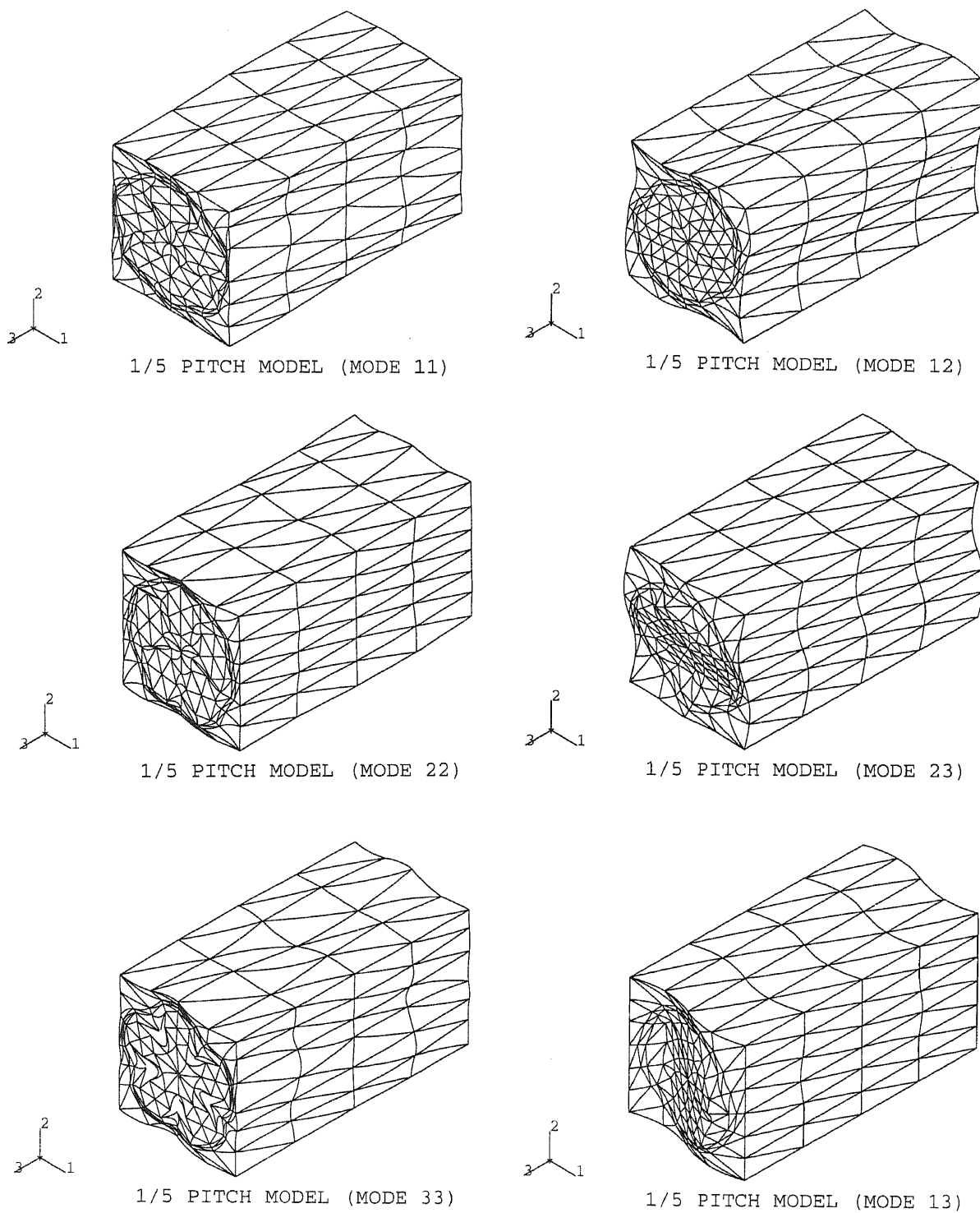


図 6.7: 1/5ピッチモデルの特性変位

CHAPTER 6.

そのまま利用できる特徴を有している。

今回解析対象とした撚りコードは5本の素線を撚り合わせたものなので、 $1/5$ ピッチ長さが軸方向の基本周期であるが、一般的には $1/(\text{撚り本数})$ が基本周期となることが今回の解析により確認できた。また、等価熱伝導率、等価線膨張係数についても同様に $1/5$ ピッチ長さが基本周期となることを確認している。以降の解析はすべて $1/5$ ピッチモデルを用いる。

6.4 等価材料特性の解析

6.4.1 実験で得られた等価剛性との比較

均質化法で得られた等価弾性係数の妥当性を評価するために、実験およびABAQUSによる有限要素解析で得られた等価剛性と比較する。

軸方向の等価剛性について検討する。実験では、加硫ゴムで被覆された撚りコード/ゴム複合体を得るため、実際のタイヤから試験サンプルを採取した。タイヤから採取した撚りコード/ゴム複合体をつかみ間隔100mm、つかみしろ50mmの試験片に加工したものをを用いて、JIS G5310(スチールタイヤコード試験方法)に準じた引っ張り試験を行い、荷重と伸びの関係を得た。また、有限要素法による数値解析では、均質化法で用いる1ピッチモデルの有限要素モデルの片側を拘束し、反対側の端部に強制変位を与え、その時の荷重と伸びの関係を得た。有限要素解析では、線形解析と合わせて、非線形解析も行った。非線形解析では、幾何学的な非線形とゴムの非線形弾性を考慮し、スチールコードは弾性体として計算した。非線形解析におけるゴムの材料特性は次式に示す1軸状態の応力(σ)-伸び(λ)関係式で与えられるneo-Hookeanを仮定した。

$$\sigma = 2C_{10}(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (6.1)$$

ここで、 C_{10} は材料定数を表し、弾性率 E との間に $C_{10} = E/6$ なる関係がある。

実験および数値実験で得られた荷重とひずみの関係を図6.8に示す。図の実験結果より、0.3%以下の低ひずみでは撚り戻りによる非線形性が現われ、その後ほぼ一定の傾きを保ち、約1.8%のひずみで軟化がはじまり、約2.2%のひずみで破断しているのがわかる。有限要素解析では、低ひずみにおける撚り戻りの効果が現れていない。これは、両端のねじりを拘束した境界条件によると考えられる。非線形解析では、線形解析の結果と比較するとゴムの非圧縮性の効果により傾きが若干大きくなっているが、定性的な傾向は線形解析と同じである。

以上の結果と均質化法による結果を比較するため、軸力はコードで伝達されているとみなし、荷重を撚りコードの断面積で除した撚りコードの等価応力からもとめられる等価剛性で比較する。実験値は図の直線部分の傾きから評価すると1387.0MPaとなる。また、非線形有限要素解析では1236.5MPa、線形

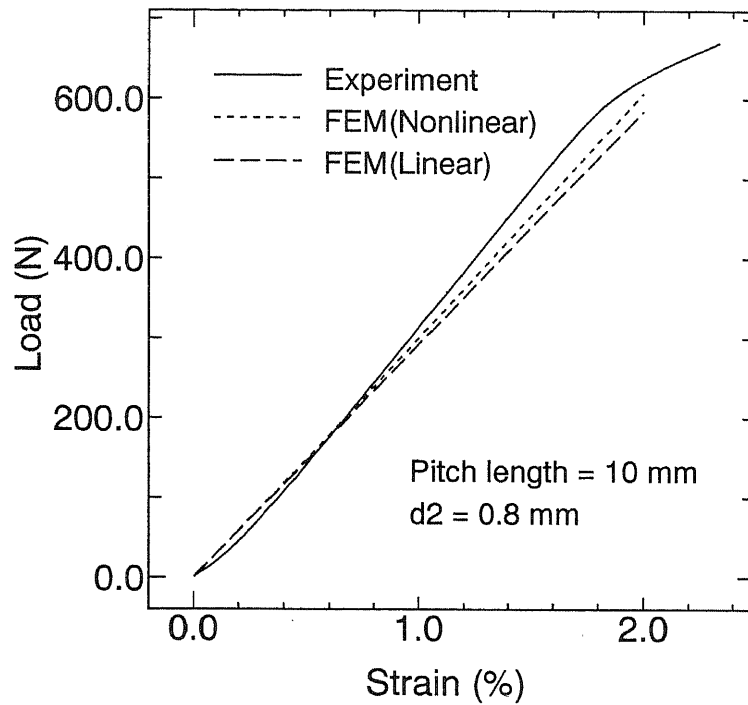


図 6.8: 撚りコード/ゴム複合体の荷重-ひずみ曲線

表 6.4: 均質化法, 実験, 有限要素法で得られた等価剛性

	Homogenization	Experiment	FEM
Tensile stiffness (GPa)	1.1571	1.387	1.2365
Bending stiffness (Nm ²)	2.36×10^{-4}	2.16×10^{-4}	2.50×10^{-4}

解析では1190.5MPaとなっている。一方、均質化法では表6.2をもとに1157.1MPaであることがわかる。均質化法と線形有限要素解析で得られた等価剛性はほぼ一致しており、実験値に比べると17%低めである。しかしながら、実験に用いた試験片は実際のタイヤから採取されたものなので、計算に用いた撚りコード/ゴム複合体とは撚りピッチやコード間のゴム浸透などが異なることが考えられる。このことを考慮すると、均質化法による結果と実験結果は良く一致しているとみなすことができる。

次に、等価曲げ剛性について検討する。均質化法で得られた軸方向の等価弾性率と、撚りコード/ゴム複合体を均質材とみなした場合の断面二次モーメントの積から得られる等価曲げ剛性は $2.36 \times 10^{-4} Nm^2$ となる。この等価曲げ剛性をKabeらの研究⁽⁵⁾で報告された同じ構造を有する撚りコード/ゴム複合体の実験結果および有限要素法による数値解析の結果と比較する。Kabeらの研究によると、3点曲げ試験で得られた撚りコード/ゴム複合体の等価曲げ剛性は $2.16 \times 10^{-4} Nm^2$ であり、有限要素法による数値解析で得られた等価曲げ剛性は $2.5 \times 10^{-4} Nm^2$ である。これらは均質化法により得られた等価曲げ剛性とよく一致しており、均質化法で得られた等価弾性率と、撚りコード/ゴム複合体を均質材と見なした場合の断面二次モーメントから得られる等価曲げ剛性の妥当性を示している。

均質化法、実験、有限要素法それぞれにより得られる等価剛性を表6.4にまとめて示す。表より、線形弾性問題の均質化法で得られる撚りコード/ゴム複合体の有効弾性特性は妥当な値であることが確認できた。

6.4.2 等価弾性係数のパラメトリックスタディー

ピッチ長さと撚り径(d_2)をパラメータとした撚りコード/ゴム複合体の有効弾性係数を図6.9, 6.10に示す。図6.9はピッチ長さを横軸にとったときの横(T)方向の有効損失正接を表している。図より、ピッチ長さが長くなるほど横方向の有効弾性係数は小さくなり、複合則で予測される下界の約2倍の値に収束することがわかる。撚り径に関しては、10mm以上のピッチ長さではその影響がほとんど見られない。図6.10はピッチ長さを横軸にとったときの軸(L)方向の有効

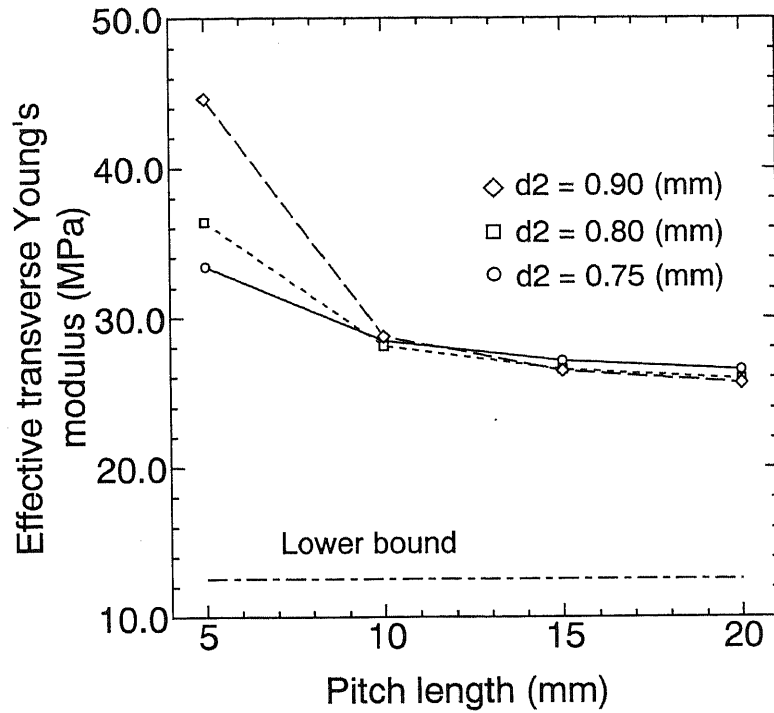


図 6.9: ピッチ長さがT方向の有効弾性係数に与える影響

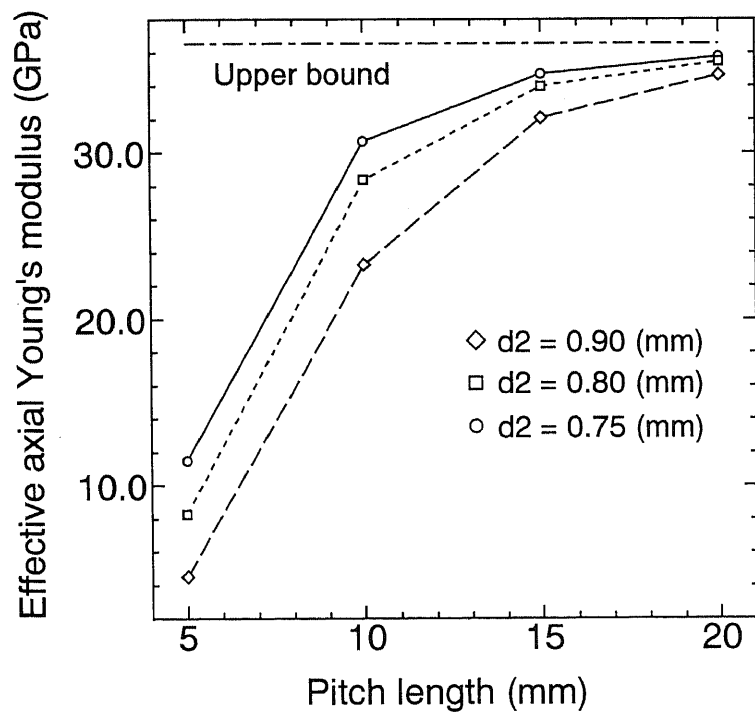


図 6.10: ピッチ長さがL方向の有効弾性係数に与える影響

弾性係数を表している。図より、ピッチ長さを長くするにしたがい軸方向の有効弾性係数は大きくなり複合則で予測される上界に漸近していくのがわかる。また、撚り径が小さいほど軸方向の有効弾性係数は大きくなる。

6.4.3 等価熱伝導率のパラメトリックスタディー

図6.11は、横軸に撚りピッチ長さ (5,10,15,20mm) をとり、コードの撚り径 ($d_2 = 0.75, 0.8, 0.9\text{mm}$) をパラメータにしたときのT方向の熱伝導率 (κ_T/κ_f) の計算結果を示す。また、撚りコードを1本のまっすぐなコードと見なした場合のHattaら⁽⁶⁾の方法およびHashinら⁽⁷⁾の方法による結果を併せて示す。図より、ピッチ長さが長くなるにしたがってHattaらによる結果に上から漸近しているのが分かる。これはまっすぐなコードはピッチ長さが無限大の場合に対応することによる。単位セル内で各素線の配置が均一でないためHattaらの解析解との間に若干ずれが見られる。また、撚り径 (d_2) を小さくするにしたがってT方向の熱伝導率は小さくなりHattaらの解析解に近づくことがわかる。これは、撚り径が小さくなることにより、ピッチ長さが一定であっても撚り線の撚り角度が小さくなるためであると考えられる。

図6.12は、横軸に撚りピッチ長さをとり、コードの撚り径 (d_2) をパラメータにしたときのL方向の熱伝導率 (κ_L/κ_f) の計算結果を示す。ピッチ長さが長くなるにしたがってHashinらの上界に下から漸近している。また、撚り径 (d_2) が小さいほどL方向の熱伝導率は大きくなるが、その影響はT方向の場合ほど大きくない。

6.4.4 等価線膨張係数のパラメトリックスタディー

図6.13は、横軸に撚りピッチ長さ (5,10,15,20mm) をとり、コードの撚り径 (d_2) をパラメータにしたときのT方向の線膨張係数の計算結果を示す。また、撚りコードを1本のまっすぐなコードと見なした場合のTakaoら⁽⁸⁾の方法およびSchaperyら⁽⁹⁾の方法による結果を併せて示す。図より、T方向の正規化線膨張係数 (α_T/α_m) は1.0より大きく、ピッチ長さが長くなるにしたがってTakaoらの方法による結果に漸近しているのが分かる。また、撚り径が大きくなるほどT方向の線膨張係数は高くなっている。

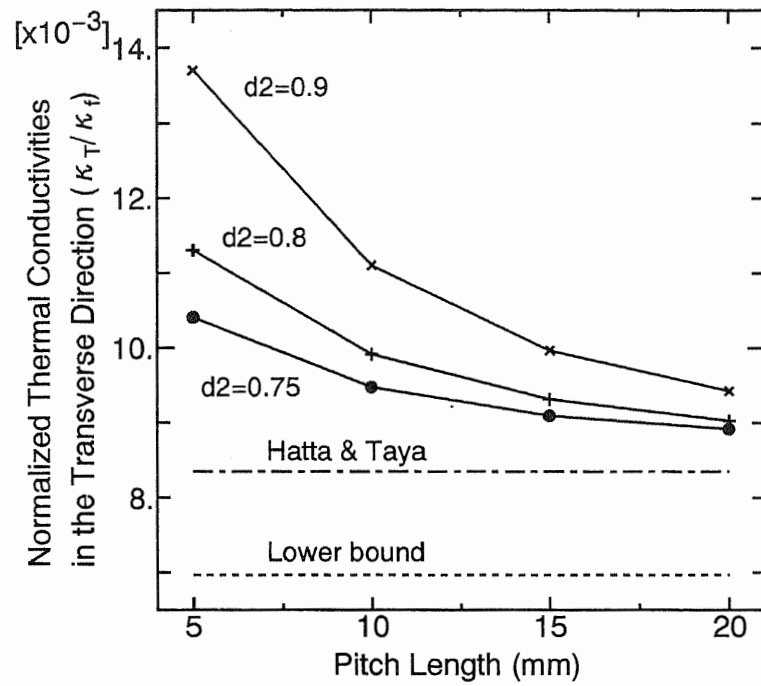


図 6.11: ピッチ長さがT方向の熱伝導率に与える影響

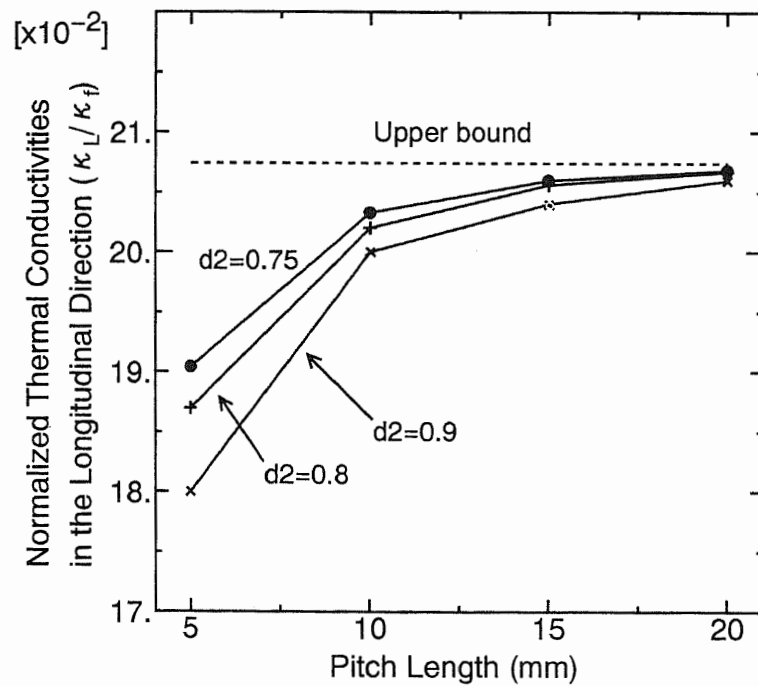


図 6.12: ピッチ長さがL方向の熱伝導率に与える影響

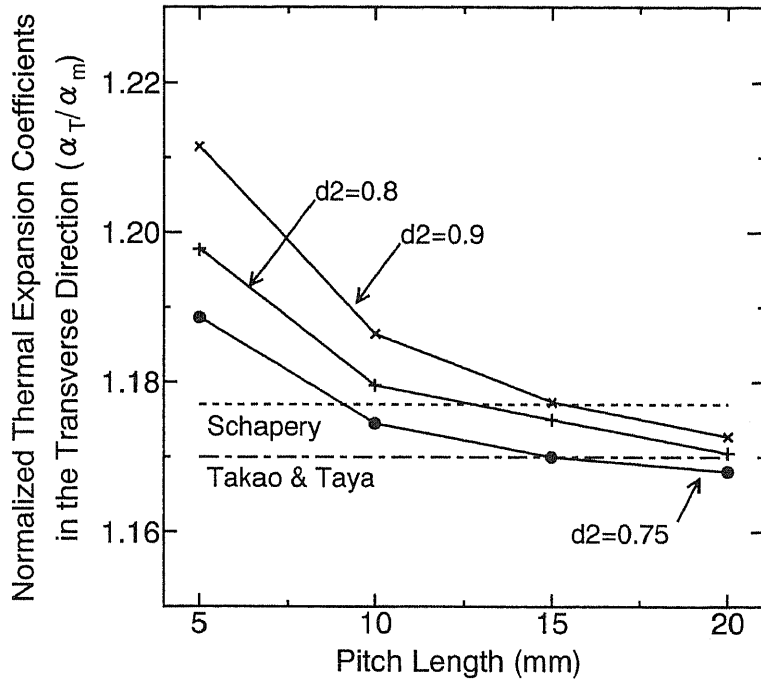


図 6.13: ピッチ長さがT方向の線膨張係数に与える影響

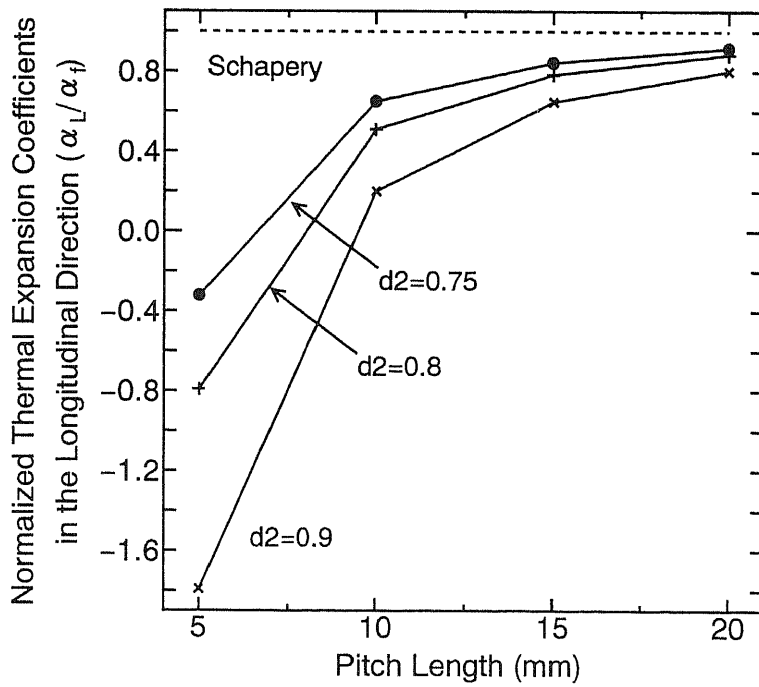


図 6.14: ピッチ長さがL方向の線膨張係数に与える影響

CHAPTER 6.

図6.14は、横軸に撚りピッチ長さを取り、コードの撚り径(d_2)をパラメータにしたときのL方向の線膨張係数(α_L/α_f)の計算結果を示す。ピッチ長さが5mmのとき各撚り径の線膨張率は負の値となっており、ピッチ長さが長くなるに従いSchaperyの下界に下から漸近しているのが分かる。これは、L方向の線膨張係数はコード、マトリックスそれぞれの線膨張係数より低く、ピッチ長さが短くなると負の値、すなわち温度を上昇させると収縮することを示している。撚り径が大きくなるに従いその傾向は顕著となる。ピッチ長さが短くなり、撚り径が大きくなると撚り角度が小さくなるため、スチール素線の影響で横方向の等価線膨張係数が大きくなる。これとゴムのポアソン比の効果により軸方向の等価線膨張係数が負になると考えられる。

6.4.5 有効損失正接のパラメトリックスタディー

ピッチ長さと撚り径(d_2)をパラメータとした撚りコード/ゴム複合体の有効損失正接を図6.15, 6.16に示す。図6.15はピッチ長さを横軸にとったときの横(T)方向の有効損失正接を表している。図より、ピッチ長さが長くなるほど横方向の有効損失正接はゴム単体の有効損失正接に漸近し、撚り径が小さいほどゴム単体の損失正接に近づくことがわかる。また、図6.16はピッチ長さを横軸にとったときの軸(L)方向の有効損失正接を表している。図より、ピッチ長さを長くするにしたがい軸方向の有効損失正接が小さくなり、撚り径が小さいほど有効損失正接が小さいことがわかる。ピッチ長さが20mmになると、撚り径によらず軸方向の有効損失正接がスチールコード素線の損失正接(0.0)に収束している。

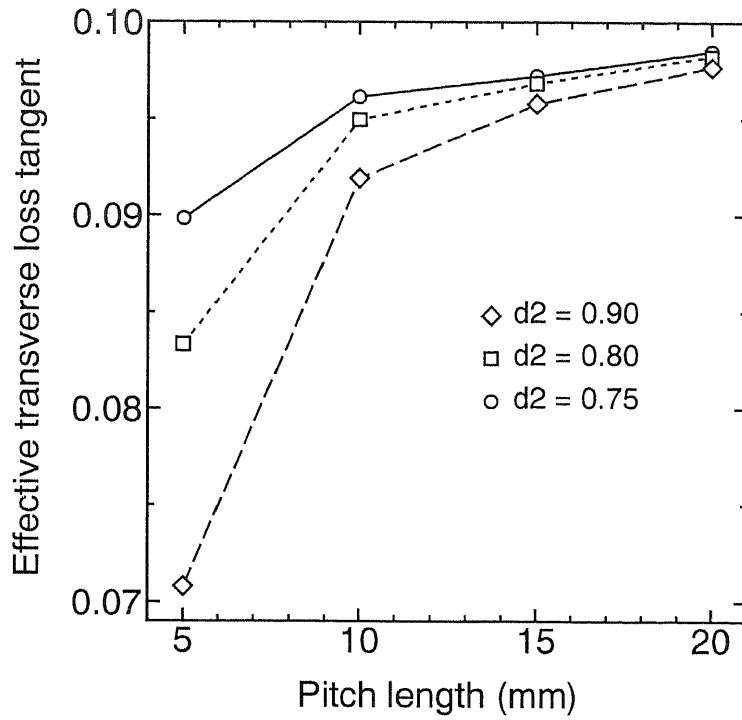


図 6.15: ピッチ長さがT方向の有効損失正接に与える影響

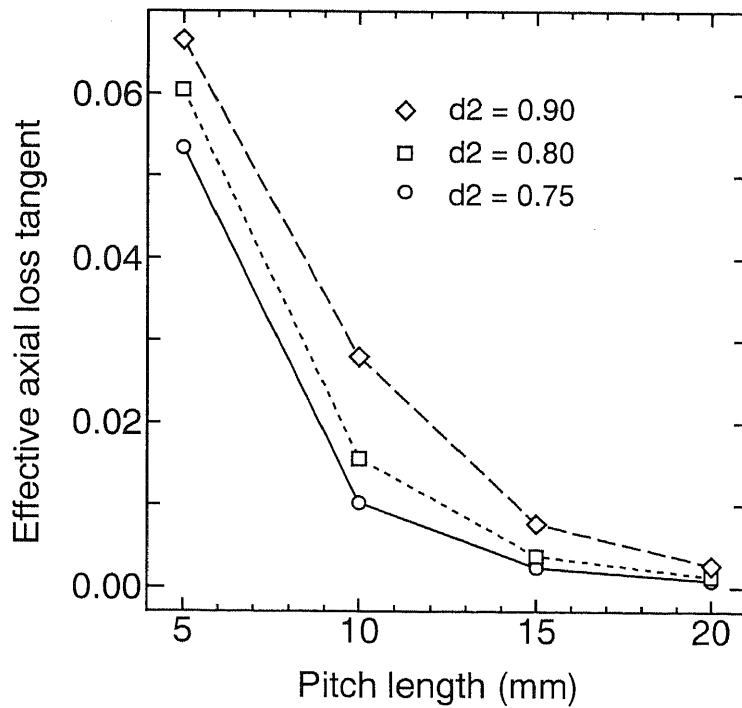


図 6.16: ピッチ長さがL方向の有効損失正接に与える影響

6.5 確率均質化法による撚りコード/ゴム複合体の解析

6.5.1 引張り変形時の応力解析

均質化法による撚りコード/ゴム複合体の微視的応力分布の妥当性を評価するため、図6.4に示す1ピッチ長さの基本モデルを軸方向に引張った際の応力分布を有限要素法で直接求めたものと比較する。撚りコードとゴムそれぞれの材料特性は表6.1に示したものを扱い、ピッチ長さは10mmとする。有限要素解析では撚りコード/ゴム複合体の一端を固定し、他方に1%のひずみに相当する強制変位を与える。一方、均質化法では、図6.5に示す1/5ピッチ長さの単位セルを用い、特性変位と1%の巨視的な軸方向ひずみをもとに応力分布を算出する。

有限要素法で得られた応力分布を図6.17,6.18に示す。図6.17は撚りコードの断面における相当応力分布を示し、図6.18はゴムマトリックスの断面における相当応力分布を示している。図6.17より、撚りコード内側に高い応力が生じているのがわかる。これは、撚りコードを軸方向に引張ることにより、曲げによるせん断応力とねじりによるせん断応力の向きが外側では反対になり、内側では一致するからである。これは、コイルバネとおなじメカニズムである。一方、図6.18より、ゴムマトリックスでは各素線間に高い応力が生じているのがわかる。これは、各素線が独立に変形することにより素線間のゴムがせん断変形することによると考えられる。

一方、均質化法で得られた応力分布を図6.19,6.20に示す。図6.19は撚りコードの断面における相当応力分布を示し、図6.20はゴムマトリックスの断面における相当応力分布を示している。これらの図より、撚りコード、ゴムマトリックスそれぞれの応力分布の特徴は有限要素法による結果と一致していることがわかる。有限要素法で得られた撚りコード内側の最大応力(各素線での平均値)が1752.4MPaであるのに対し、均質化法では1660.0MPaと良く一致しており、誤差は5.3%である。また、有限要素法で得られたゴムマトリックスの最大応力(5本の素線近傍での平均値)が5.042MPaであるのに対し、均質化法では5.302MPaと良く一致しており、誤差は5.2%である。

CHAPTER 6.

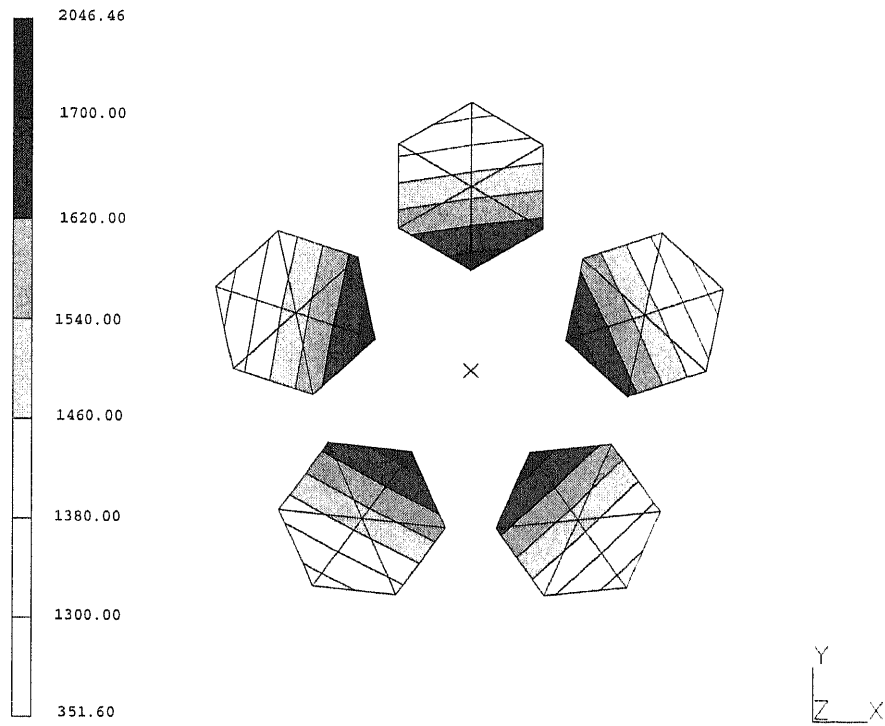


図 6.17: 有限要素法による撚りコードの応力分布(Mises stress)

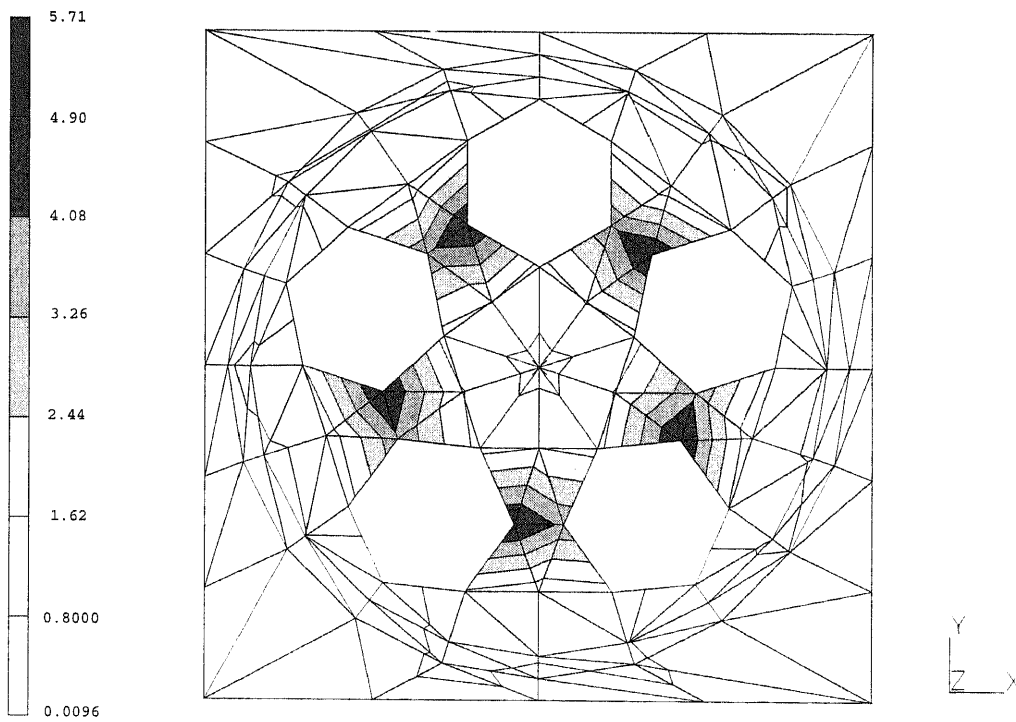


図 6.18: 有限要素法によるマトリックスの応力分布(Mises stress)

CHAPTER 6.

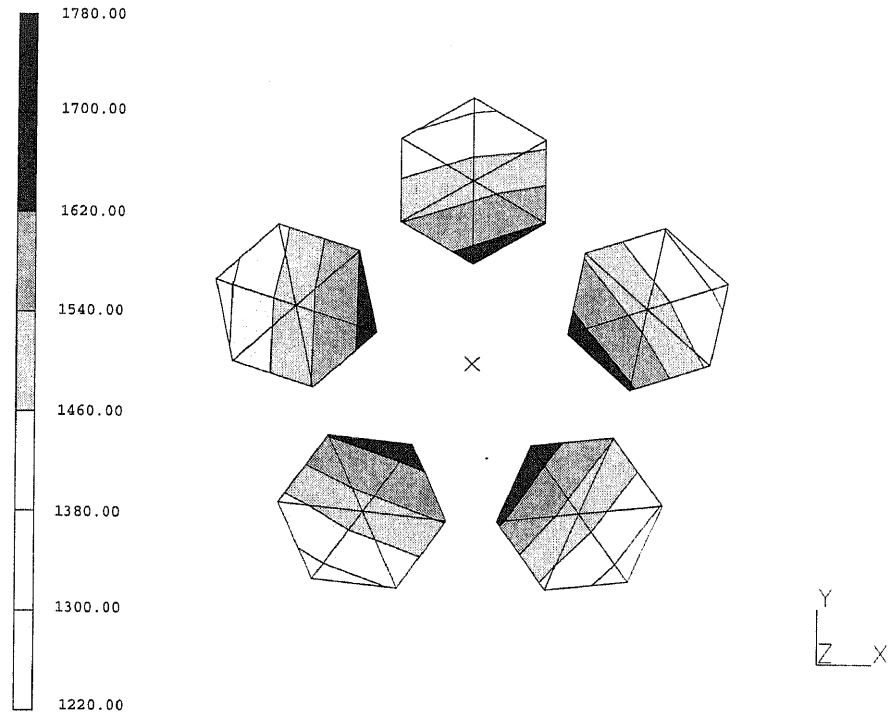


図 6.19: 均質化法による撚りコードの応力分布 (Mises stress)

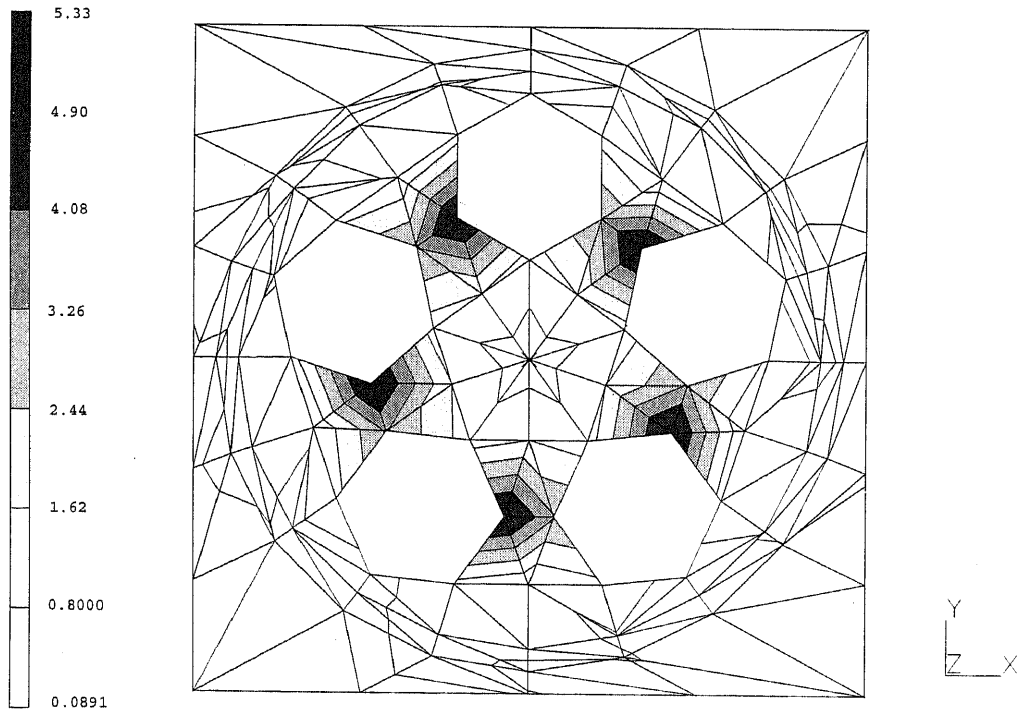


図 6.20: 均質化法によるマトリックスの応力分布 (Mises stress)

以上の結果から、均質化法を用いた撚りコード/ゴム複合体の応力解析が可能であることが確認できた。

6.5.2 確率均質化法による一方向強化平板の応力解析

ここではタイヤのベルト材を想定した簡単な数値解析例として、引張り荷重の作用するスチール撚りコードで補強された一方向強化平板を考え、繊維配向角が不確かな場合の確率論的応力解析を行う。マクロ構造(平板)とミクロ構造(撚りコード/ゴム複合体)を図6.21,6.22にそれぞれ示す。マクロ構造(平板)の有限要素モデルを図6.23に示す。正方形の平板を900要素(30×30)に分割し、X1方向の両端に10MPaの応力を作用させX1方向に引張られた場合の解析を行う。また、図中に応答を評価する中心位置の要素を示す。図6.24に繊維配向角が20°の場合の変形図を示す。引張る方向に対し繊維配向角が角度 θ 傾いているためせん断変形している様子がわかる。その時の微細構造における応力分布(Mises応力)を図6.25と図6.26に撚りコードとマトリックスそれぞれについて示す。巨視的なMises応力は10MPaであることから、撚りコードには巨視的応力の約20倍の最大応力が生じているのがわかる。

一方向強化材では、繊維配向角がもっとも重要な設計要因の一つである。また、同時に繊維配向角は製造過程においてばらつきが生じやすいため、本数値解析例ではマクロ構造における繊維配向角が二次元空間確率過程としてゆらぐ場合を想定する。なお、空間的な変動はマクロ構造の各有限要素内では一定と仮定する。平板の各有限要素における繊維配向角の変動を次式で与える。

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \alpha_i, \quad i = 1 \sim N_{el} \quad (6.2)$$

ここで、 N_{el} は平板の要素数900を表す。

平板中心部の要素の繊維配向角(θ)が変動したときの平板中心部の巨視的ひずみの変化を図6.27に示す。図の横軸は繊維配向角を表し、縦軸は期待値構造($\theta=20^\circ$)における値で正規化したLT座標におけるひずみを表す。角度を確定的に変化させたものと確率均質化法による一次摂動解を比較すると、各成分ともに $\pm 2^\circ$ の範囲でほぼ一致しているのが確認できる。さらに、確率均質化法で算出される微細構造における応力の変動率の精度を確認するために、確定的な均質化法で得られる応力分布をもとに中心差分近似を用いて算出した変動

CHAPTER 6.

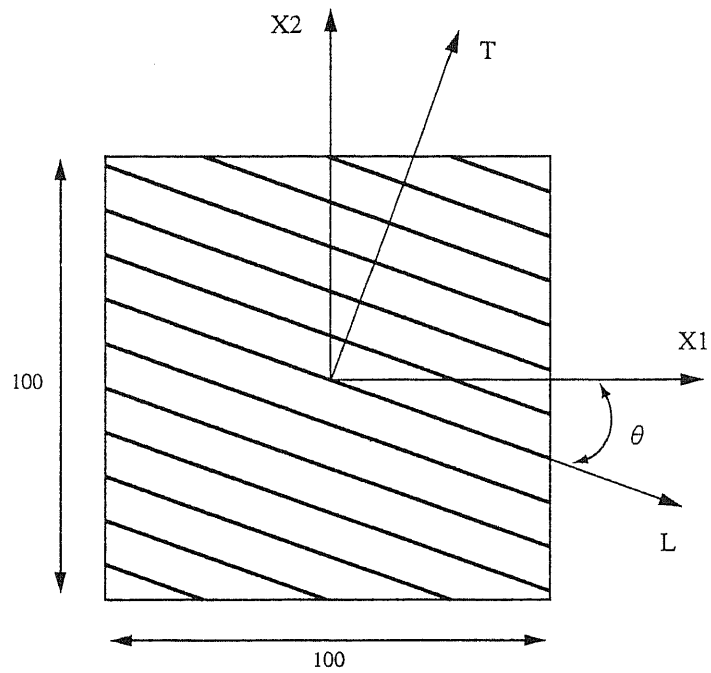


図 6.21: 撚りコードで補強された一方向強化平板

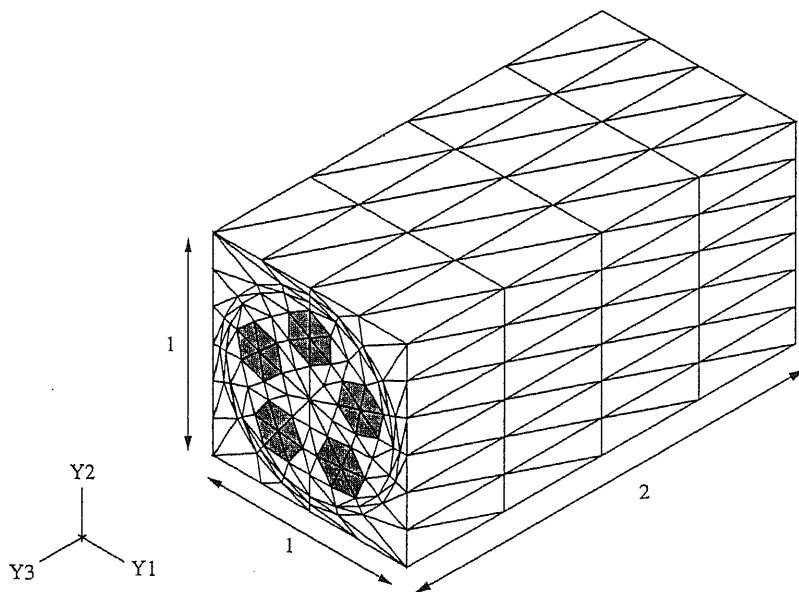


図 6.22: 一方向強化平板の微細構造(撚りコード/ゴム複合体)

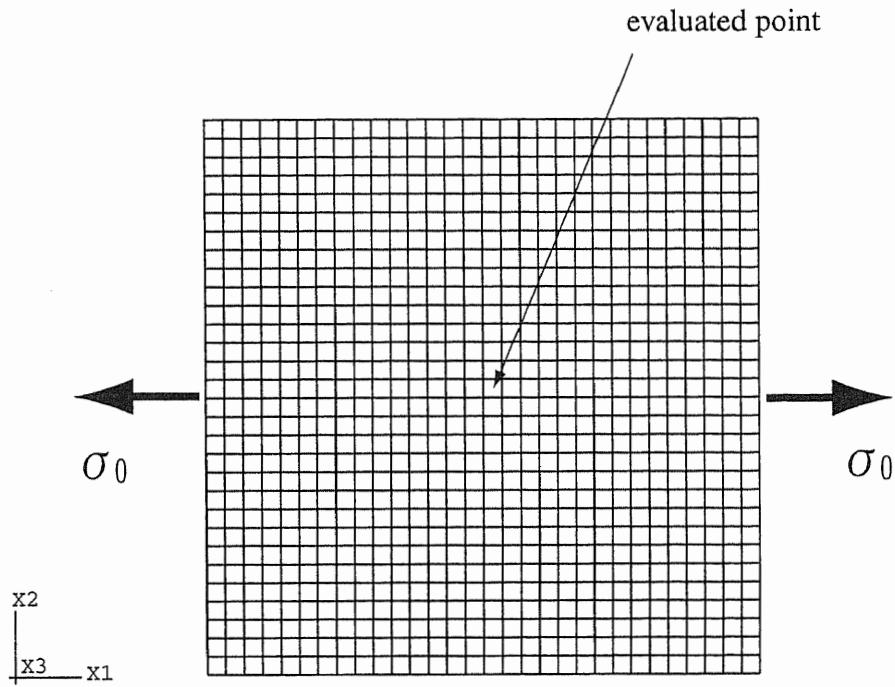


図 6.23: 一方向強化平板の有限要素モデル

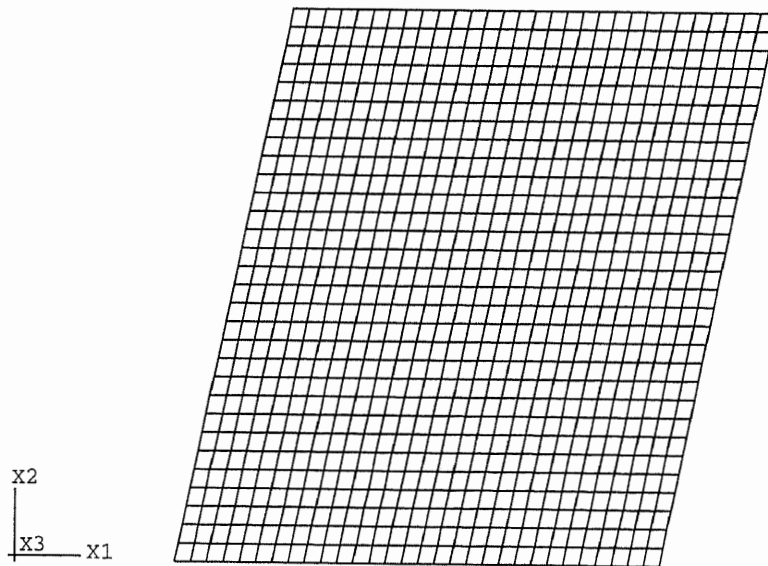


図 6.24: 繊維配向角が 20° の場合の平板の変形図

CHAPTER 6.

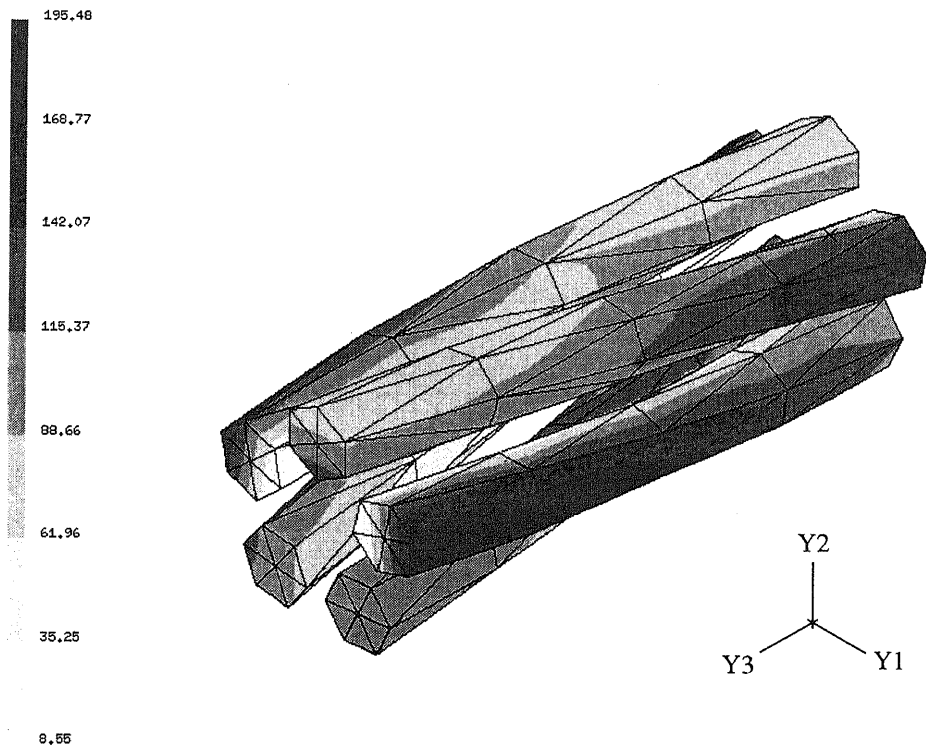


図 6.25: 微細構造におけるMises応力分布(撚りコード)

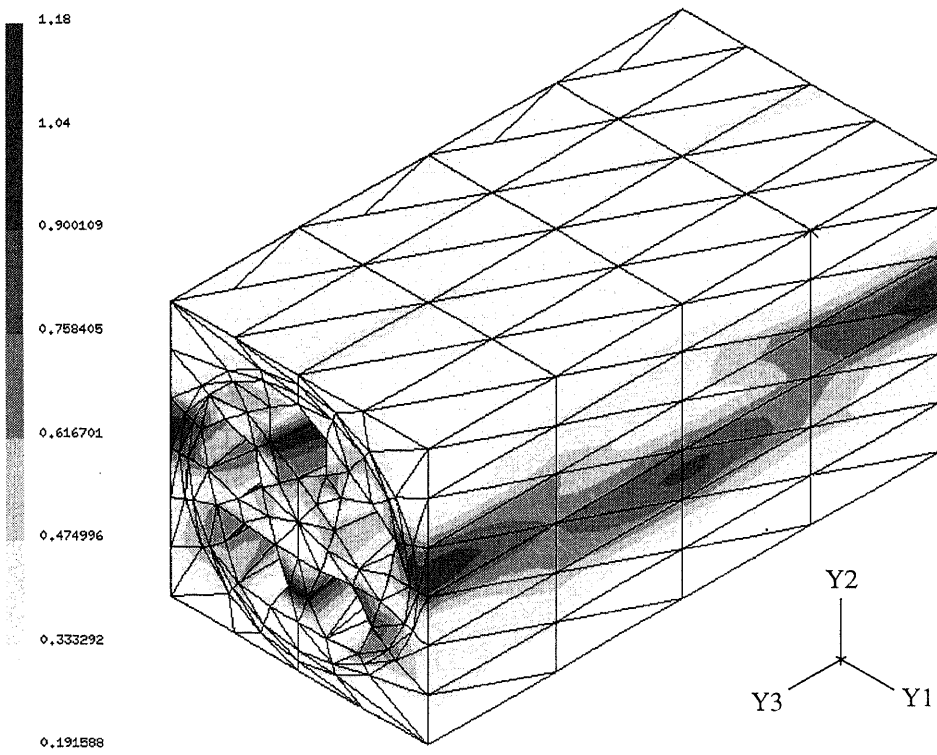


図 6.26: 微細構造におけるMises応力分布(マトリックス)

CHAPTER 6.

率と比較する. 図6.28に確率均質化法で得られた撚りコードにおけるMises応力の変動率分布を示す. また, 図6.29に確定的な均質化法による解をもとに差分近似を用いて算出された, 撚りコードにおけるMises応力の変動率分布を示す. これらの比較から, 確率均質化法で得られる微細構造の変動率が精度良く評価されていることが確認できる.

繊維配向角の変動に周期性があるものと仮定して, 次式に示す自己相関関数を用いる.

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = C^2 \cos \frac{2\pi\lambda_1}{L_1} \cos \frac{2\pi\lambda_2}{L_2} \quad (6.3)$$

ここで, $C = 1/2(\text{Var}[\alpha])^{0.5}$ を表し, $L_1, L_2, \lambda_1, \lambda_2$ はそれぞれ x_1, x_2 方向に変動する周期の波長と要素中心間距離の x_1, x_2 方向成分をそれぞれ表す. ここでは, 繊維配向角の標準偏差が 1.0° で, $1/L_1 = 1/L_2 = 10.0$ の場合について解析する. また, 乗用車用ラジアルタイヤのベルト材は約 $\pm 20^\circ$ の角度でパイアス積層したものが用いられるため, 繊維配向角の期待値は 20° とする.

式(6.3)の自己相関関数をもとに算出される平板中心部の要素における巨視的なMises応力と標準偏差は, それぞれ10MPaと0.218MPaである. 一方, 平板中心部の微細構造(撚りコード/ゴム複合体)における撚りコードとマトリックスそれぞれの応力の期待値に標準偏差を足し合わせたものを図6.31, 6.32に示す. これらの図より, マトリックスにおける応力変動は巨視的な応力変動より小さくなっているが, 撚りコードでは比較的大きな応力変動が予測されていることがわかる. 特に撚りコードの強度評価を行う際には繊維配向角のばらつきの影響を十分考慮する必要があることがわかった. このことは, 実際のタイヤの応力解析を行う際の注意点を与えるとともに, 確率均質化法による確率論的なマルチスケール解析の重要性を示唆している.

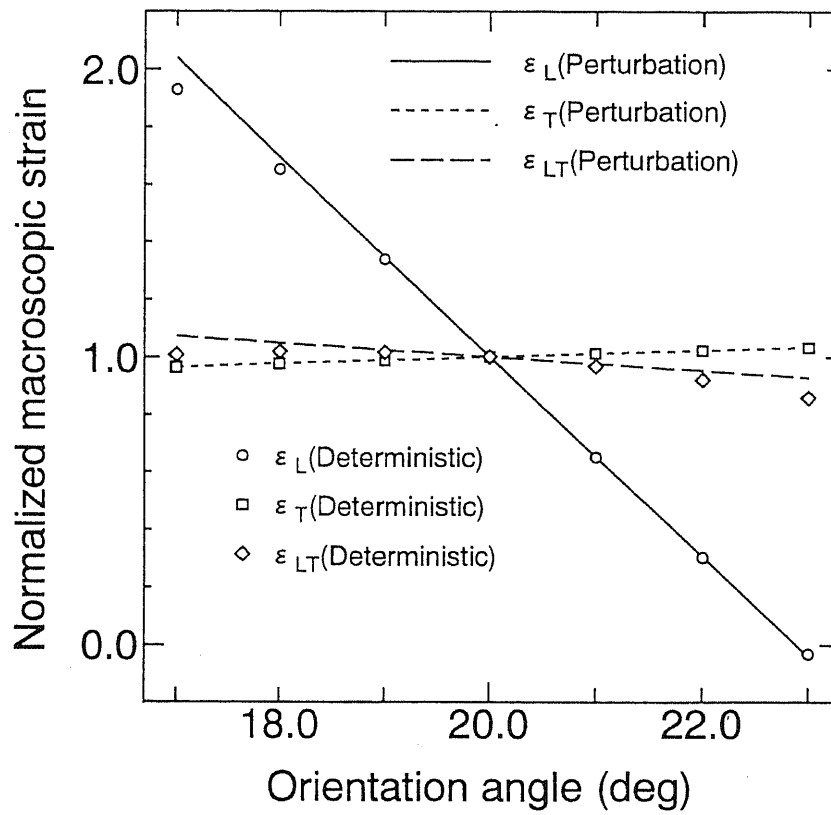


図 6.27: 平板中心部の繊維配向角による平板中心部のひずみの変化

CHAPTER 6.

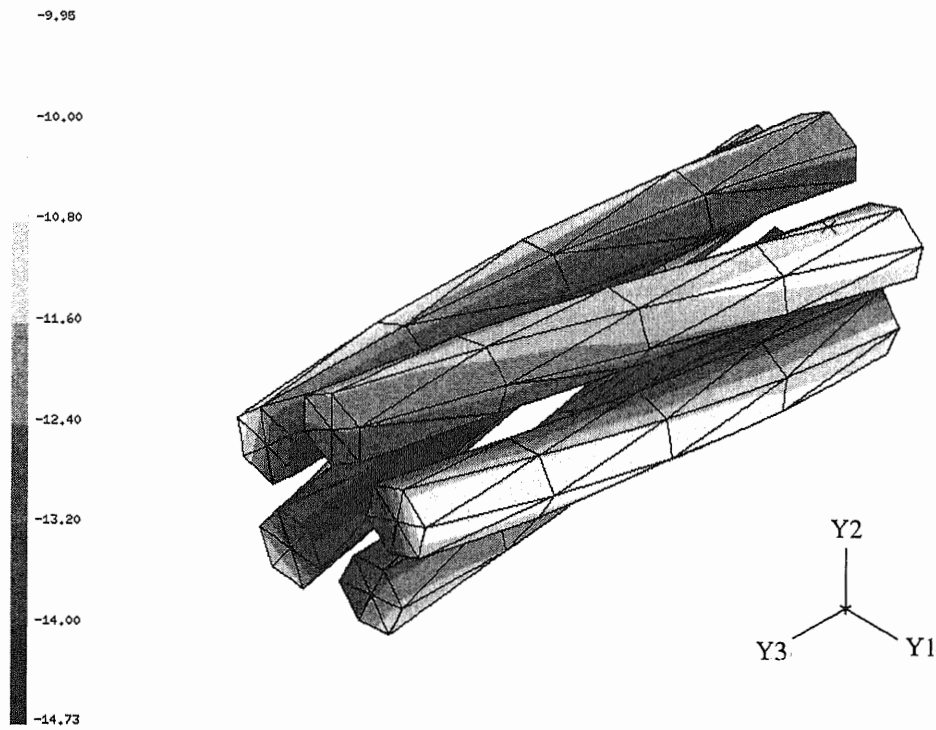


図 6.28: 平板中心部の繊維配向角による平板中心部の微細構造における Mises 応力の変動率(確率均質化法)

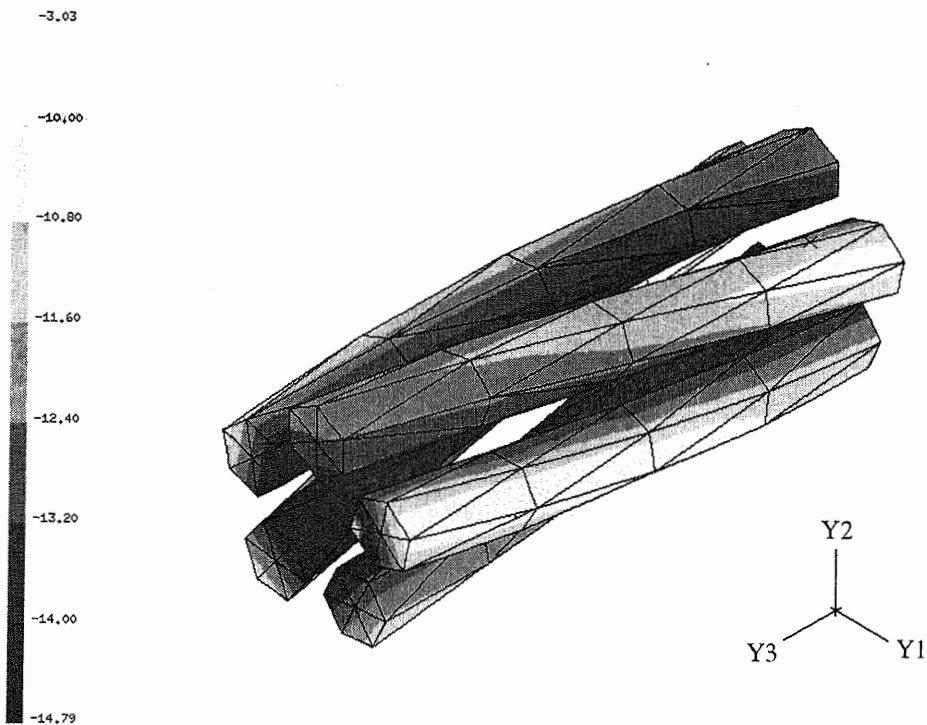


図 6.29: 平板中心部の繊維配向角による平板中心部の微細構造における Mises 応力の変動率(差分近似)

CHAPTER 6.

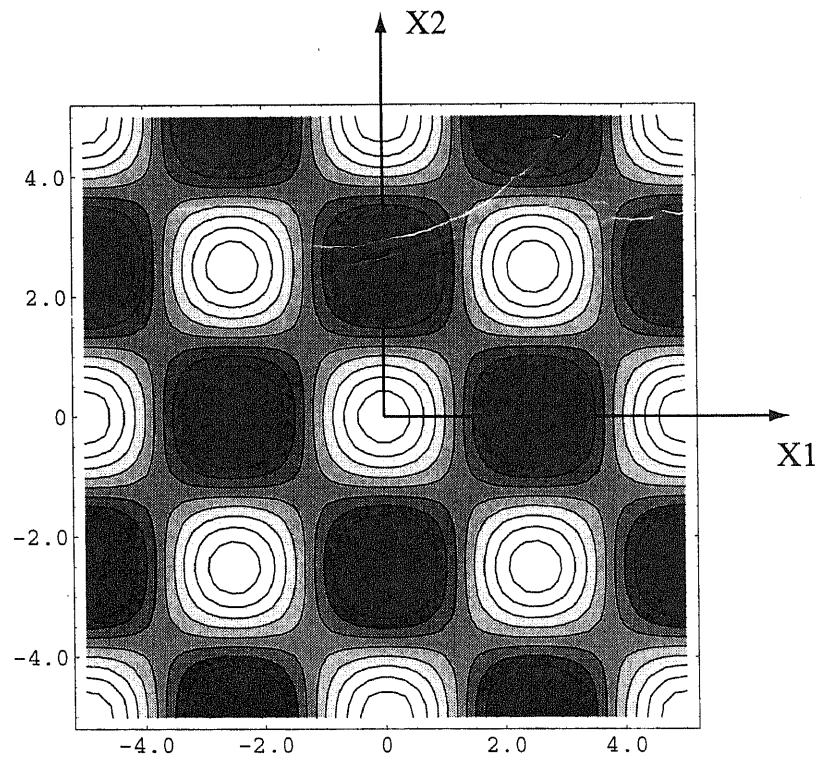
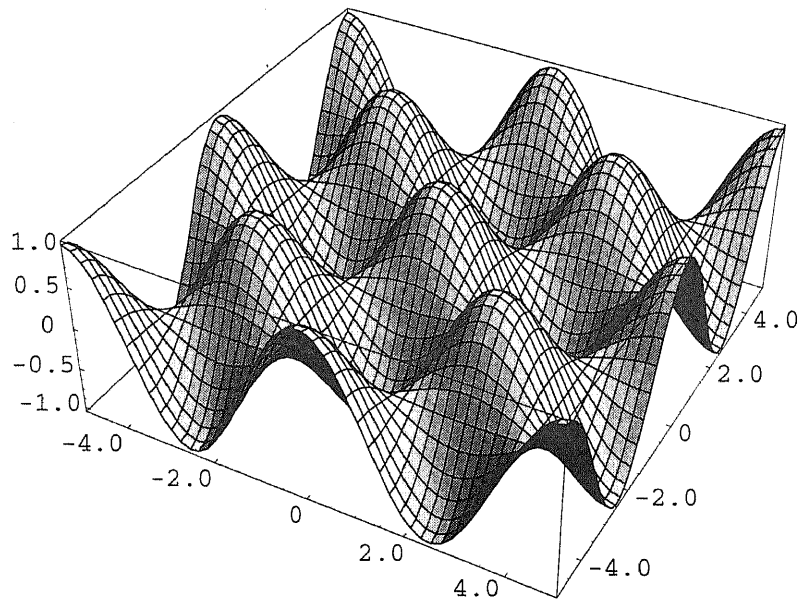


図 6.30: 二次元空間確率過程として不確かな繊維配向角の自己相関関数

CHAPTER 6.

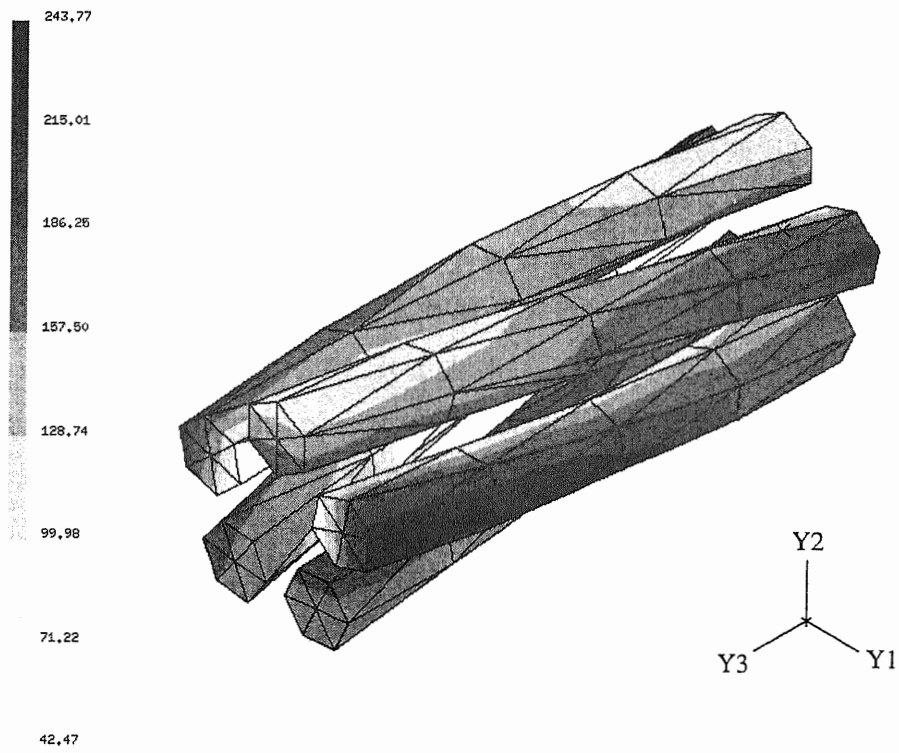


図 6.31: 撓りコードにおけるMises応力の期待値+標準偏差

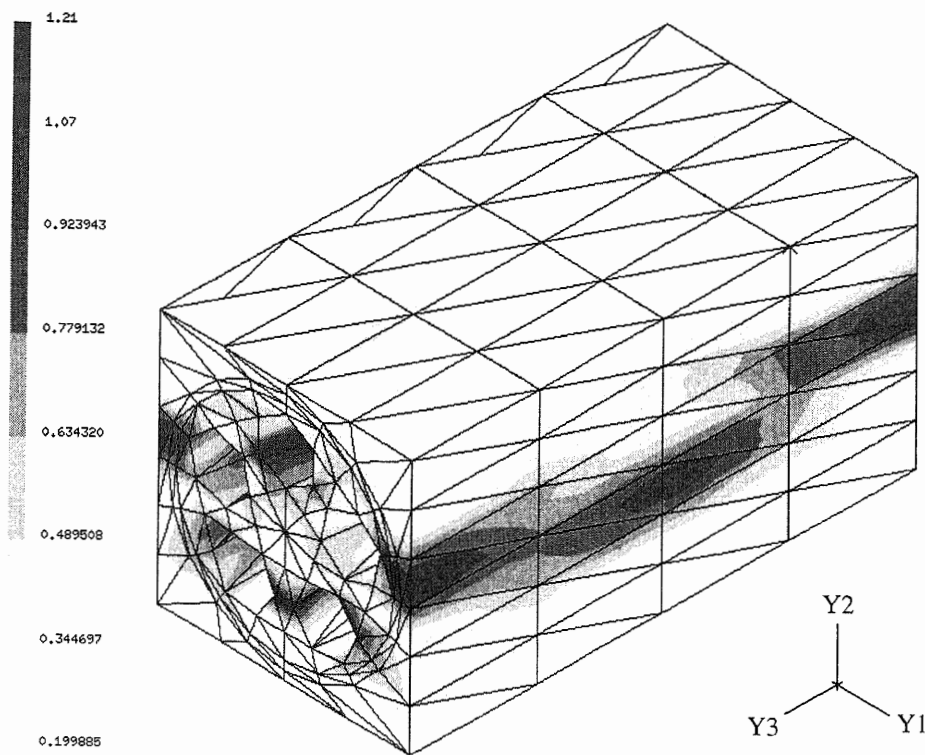


図 6.32: マトリックスにおけるMises応力の期待値+標準偏差

6.6 結 言

開発した均質化法解析システムで得られた撚りコード/ゴム複合体の等価剛性を実験結果と比較したところ良い一致をみた。さらに、均質化法で得られる引張り変形時の応力分布は有限要素解析結果とよく一致しており、均質化法の撚りコード/ゴム複合体への適用可能性を示すことができた。

撚りコード/ゴム複合体では、 $1/(\text{撚り本数})$ が軸方向の基本周期となることを数値解析により明らかにした。これにより、撚りコード/ゴム複合体の解析時間を、1ピッチ長さを単位セルとした場合に比べ $1/15$ に短縮することができる。

ピッチ長さや撚り径といった撚りコードの幾何学的パラメータが、等価弾性係数、等価熱伝導率、等価線膨張係数や有効損失正接に与える影響を明らかにした。特に、撚りコード/ゴム複合体の有効損失正接は実験的に評価することが困難なため、開発した解析システムは非常に有用である。

確率均質化法により、撚りコードで補強された一方向強化平板において繊維配向角が不確かな場合の確率論的な応力解析を行った。その結果、撚りコードの応力変動は巨視的な応力変動に比べると大きくなることがわかった。このことは、撚りコードの強度評価を行う際の注意点を与えるとともに、確率均質化法による確率論的なマルチスケール解析の重要性を示唆している。

参考文献

- (1) Akasaka, T., Kabe, K. and Sako, K., *Compos. Sci. Tech. J.*, **24**, (1985), 215.
- (2) Pidaparti, R.M.V., *Compos. Struct.*, **24**, (1993), 291.
- (3) Shield, C.K. and Costello, G.A., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **23**, (1993), 1.
- (4) Shield, C.K. and Costello, G.A., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **24**, (1993), 1.
- (5) Kabe, K., Koishi, M. and Akasaka, T., *Proc. Int. Rubber Conf. '94, Moscow*, **4**, (1994), 222.
- (6) Hashin, Z. and Shtrikman, S., *J. Mech. Phys. Solids*, **10**(1962), 343.
- (7) Hatta, H. and Taya, M., *Int. J. Engng. Sci.*, **24-7**(1986), 1159.
- (8) Schapery, R.A., *J. Composite Mater.*, **2**(1968), 380.
- (9) Takao, Y. and Taya, M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 806.

Chapter 7

結 論

結 論

本論文は、ゴム系複合材料の解析のために新たに提案した動的粘弾性問題のための均質化法と、マルチレベルでの確率論的構造解析を効率的に行うための確率均質化法に関するものである。さらに、汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに、弾性問題・熱伝導問題・熱弾性問題・動的粘弾性問題のための均質化法解析システムを開発し、確率均質化法に関しては独立したプログラムを開発した。それらの開発した各プログラムを利用し、撚りコード/ゴム複合体などのゴム系複合材料の解析を行った。

以下に本研究の結論を総括する。

- 動的粘弾性問題のための均質化法を新たに提案した。併せて行った実験結果との比較から、提案手法の妥当性が確認された。
- 確率論的なマルチレベル解析を効率的に行うための確率均質化法を新たに提案した。数値解析例により、提案した確率均質化法の妥当性と有効性が示された。ただし、提案した確率均質化法は一次近似に基づく近似解法であるため、適用に際しては注意が必要である。
- 汎用有限要素解析プログラムABAQUSをベースに、弾性・熱伝導・熱弾性・動的粘弾性問題のための均質化法解析システムを開発した。数値解析結果および実験結果との比較から、本解析システムの有効性が確認された。
- 本解析システムは汎用有限要素解析プログラムをベースにしているため、その豊富な解析機能を利用した解析システムの柔軟な拡張性を有する。さらに、ABAQUS以外のソルバーへの対応も比較的容易である。
- 開発した動的粘弾性特性解析システムでは、各貯蔵弾性率と損失弾性率は温度と周波数の関数として評価できるため、動的粘弾性特性が温度と周波数により大きく異なるゴム製品の材料設計ツールとして非常に有効となる。さらにその解析結果はタイヤの転動抵抗解析に利用することができ、低燃費タイヤ開発のために非常に有用である。
- 撚りコード/ゴム複合体のピッチ長さと同価弾性特性、同価熱伝導率、等

CHAPTER 7.

係線膨張係数，有効損失正接の関係を明らかにした．ここで得られた結果は，タイヤ等のゴム製品の性能評価のみならず，製造工程の解析においても必要不可欠なものである．

- 撚りコードで補強された一方向強化平板において繊維配向角が空間確率過程として不確かな場合の確率論的なマルチレベル応力解析に確率均質化法を適用した結果，確率論的マルチレベル解析の重要性が示唆された．この結果から，今後は繊維配向角等の不確かさを視野に入れた品質評価や，不確かさの影響を受け難いロバストな材料・構造設計が重要であることが再認識された．
- 本論文では主にゴム系複合材料への適用を考えてきたが，動的粘弾性問題のための均質化法は高分子系複合材料全般の材料設計や解析に適用可能であり，確率均質化法はさらに幅広い複合材料の確率論的解析に適用可能である．

本研究ではいずれも線形問題を取り扱ってきたので，今回開発した手法および解析システムは線形範囲に限り有効である．均質化法の非線形問題への拡張については多くの研究がなされているが，計算時間などに問題点が残されている．

均質化法は数学を背景として非常に洗練された手法であるが，実際問題へ適用する際にはモデリングに伴う解析誤差について注意する必要がある．すなわち，周期対称性と，マクロ構造とミクロ構造との比が十分小さいという二つの均質化法の前提条件と実際問題とのギャップによる誤差．もう一つは離散化に伴う数値誤差の影響である．特に，微細構造レベルの精度良い応答を評価する際には重み平均や境界層理論の適用が有効であることを示したが，一般的な誤差評価には付録Aにも示した二次近似による均質化法を含めさらなる研究が必要である．誤差の問題は繰り返し計算を伴う非線形問題においても問題となる．

今後の課題としては，材料設計および構造設計の開発現場での実際問題への適用や，非線形問題への対応が挙げられる．しかしながら開発現場では線形問題として取り扱える問題も少なくないため，本研究で開発した解析システムを今後活用していきたい．

付録 A 二次近似による均質化法

本研究では変位の漸近展開の一次項までを考慮した一次近似による均質化法を対象としているが，二次の項までを考慮した二次近似による均質化法についてその概要を以下に述べる．

変位を次式のように漸近展開できると仮定する．

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (\text{A1})$$

上式を仮想仕事の原理に代入すると， \mathbf{u}^1 ， \mathbf{u}^2 はそれぞれ次式で与えられる．

$$u_i^1 = -\chi_i^{mn} \frac{\partial u_m^0(\mathbf{x})}{\partial x_n} \quad (\text{A2})$$

$$u_i^2 = -\phi_i^{lmn} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_m^0(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A3})$$

ここで，上式の χ ， ϕ は次式に示す微細構造に関する2つの境界値問題の解を表している．

$$\int_Y D_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_y \quad (\text{A4})$$

$$\int_Y D_{ijpq} \frac{\partial \phi_p^{lmn}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \chi_k^{mn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_y \quad (\text{A5})$$

式(A5)が二次近似により付加された微細構造に関する境界値問題である．

微細構造レベルの応力分布は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^0 + \varepsilon \sigma_{ij}^1 \\ &= D_{ijmn} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} - D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \\ &\quad + \varepsilon \left(-D_{ijkl} \chi_k^{mn} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \right) + D_{ijpq} \frac{\partial \phi_p^{lmn}}{\partial y_q} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

本研究の第2章において，マクロ構造における応力勾配を簡便的に考慮するため，重み平均による微細構造レベルの応力評価について検討しその有効性を

示したが、二次近似による均質化法ではマクロなひずみ勾配の影響を考慮できることがわかる。しかしながら、二次近似による均質化法では有限要素法で式(A5)を解かなければならないため、微細構造レベルでの応力の計算精度と計算効率の得失については今後の検討が必要である。

さらに、Bourgat[†]によると、一次近似と二次近似による *a priori* な誤差ノルム (H^1 ノルム) 評価が次式で与えられている。

$$\left| \mathbf{u}^\varepsilon - (\mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1) \right|_{H^1(\Omega)} \leq c\varepsilon \quad (\text{A6})$$

$$\left| \mathbf{u}^\varepsilon - (\mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2) \right|_{H^1(\Omega)} \leq k\varepsilon^{3/2} \quad (\text{A7})$$

ここで、 c , k は任意の正定数を表す。

[†]Bourgar, J.F., Lecture Note in Mathematics, 704, (1977), pp.330, Springer

公表一覧

1. 学術論文

- 小石正隆, 加部和幸, 汎用FEMプログラムをベースにした均質化法解析システムの開発, 日本機械学会論文集(A編), 59巻, 561号(1992), 1395-1400.
- Masataka Koishi and Kazuyuki Kabe, *Development of Homogenization Analysis System Based on General Purpose FEM Code*, JSME International Journal, Series A, Vol.38, No.2, 1995, 171-176.
- 小石正隆, 加部和幸, 均質化法による撚りコード/ゴム複合体の熱的特性の解析, 日本機械学会論文集(A編), 61巻, 581号(1995), 1467-1472.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 三好俊郎, 宮野篤, 不確定な微細構造を有する複合材料のための確率均質化法, 日本機械学会論文集(A編), 62巻, 602号(1996), 2264-2269.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 三好俊郎, 加部和幸, 複合材料の動的粘弾性特性解析のための均質化法, 日本機械学会論文集(A編), 62巻, 602号(1996), 2270-2275.
- Masataka Koishi, Masaki Shiratori, Toshiro Miyoshi and Kazuyuki Kabe, *Homogenization Method for Dynamic Viscoelastic Analysis of Composite Materials*, JSME International Journal, Series A, Vol.40, No.3, 1997, 306-312.

2. 参考論文

- 加部和幸, 小石正隆, 赤坂隆, 撚りコードを有するFRR柱の引張り変形時の応力解析, 日本ゴム協会誌, 第67巻, 第3号(1994), 192-197.

- 小石正隆, 加部和幸, 白鳥正樹, 汎用FEMプログラムを利用した均質化法による複合材料の有効材料特性の解析, 材料システム, 第15巻, 1996, 57-63.

3. 講演会発表

- 小石正隆, 加部和幸, 汎用FEMプログラムをベースにした均質化法解析システムの開発, 日本機械学会第5回計算力学講演会論文集, 1992, 141-142.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 宮野篤, 微細構造のゆらぎを考慮した確率有限要素法の定式化, 日本機械学会第8回計算力学講演会論文集, 1995, 57-58.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 三好俊郎, 宮野篤, 不確定な微細構造を有する複合材料のための確率均質化法, 日本計算工学会講演論文集, Vol.1, No.2, 1996, 495-498.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 三好俊郎, 加部和幸, 均質化法によるゴム系複合材料の動的粘弾性特性の解析, 日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集(Vol.B), 1996, 255-256.
- 小石正隆, 白鳥正樹, 三好俊郎, 加部和幸, 境界層理論による複合材端部の応力解析, 日本機械学会第9回計算力学講演会講演論文集, 1996, 157-158.
- Masataka Koishi, Masaki Shiratori, Toshiro Miyoshi and Kazuyuki Kabe, *Analysis of Dynamic Viscoelastic Properties of Twisted Cord/Rubber Composite using Homogenization Method*, International Conference on Materials and Mechnics '97, 1997, 439-440.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、下記に紹介する方々をはじめとする多くの方のご指導、ご助言、ご援助を頂いたことに深く感謝致します。

社会人学生として横浜国立大学大学院工学研究科博士後期課程に入学以来3年間に亘り終始、研究に対して適切かつ温かいご指導を頂くと同時に研究以外についても多くを学ばせて頂いた白鳥正樹教授に心から感謝致します。また、于強助教授には、研究はもちろんそれ以外のことについても懇切丁寧なご指導を頂き感謝しています。小笠原永久助手、秘書の広田光さんには、面倒なお願いをいつも快く引き受けていただき感謝しています。

また、本論文の審査を通じて貴重なご意見とご指導を頂いた建設学科角洋一教授、建設学科椿龍哉教授、生産工学科川井謙一教授、生産工学科奥田洋司助教授に対して深く感謝致します。

勤務先である横浜ゴム(株)の奥本隆治前研究本部長、現研究本部長の前田行男専務取締役、構造力学研究室長の加部和幸博士には入学の機会を与えて頂いたとともに研究を続けるにあたり便宜をはかって頂き深く感謝致します。また、多くの横浜ゴム(株)の皆様には直接、あるいは間接的なご協力を頂き研究を進めることができました。

柏村孝義博士(日本発条(株))には白鳥研究室の社会人博士課程の先輩として、研究はもとより人生について深く学ばせて頂きました。また、榎本和夫君(現鹿島建設)、宮野篤君(現航空自衛隊)、後藤仁一郎博士(研究員)をはじめとする多くの白鳥・于研究室の仲間には様々な面で協力を頂きました。

博士過程在籍中に長男晴久の誕生が重なり、あわただしい中にも関わらず協力してくれた妻の郁子と娘の幸子に感謝します。また、様々な面で支えになってくれた両親、そして妻の両親の青石夫妻に感謝します。