

---

疲労亀裂群を考慮した構造信頼性解析法の研究

---

(研究課題番号 04302034)

平成5年度科学研究費補助金(総合(A))研究成果報告書

平成6年3月

研究代表者 板垣 浩

(横浜国立大学工学部・教授)

3478717

横浜国立大学

## はしがき

本研究は平成4年4月より平成6年3月に至る2年間にわたって、文部省科学研究費（総合(A)）の補助により行われたものである。研究課題は構造部材に発生する疲労亀裂群(multiple site cracks)の検査結果のベイジアン解析を含め、確率的破壊力学を適用した構造信頼性解析法の確立をめざしたものである。この問題には初期亀裂分布、亀裂発見率、疲労亀裂の確率的特性、最終破壊条件の確率的特性などが関連してくる。したがって、これらの確率特性の適切なモデル化が信頼性推定のための鍵となる。一般に、現象が複雑であるので、最も容易なアプローチとしてモンテカルロ法などのシミュレーションによるものが考えられるが、計算時間が大となるおそれがある。そのため、多少の簡略化を行っても、公式化を行うのが得策である。本研究ではベイズ的確率論を用いることにより、簡素化あるいは不足データ点を補い、安全評価のための公式化を試みた。

本研究の結果は疲労亀裂群を考慮した構造信頼性解析に非常に有効な方法を与えるものと言えよう。

3478717

横浜国立大学

## 研究組織

研究代表者： 板垣 浩（横浜国立大学工学部教授）

研究分担者： 飯田 國廣（芝浦工業大学機械工学科教授）  
 宮田 隆司（名古屋大学工学部教授）  
 清水 昭信（横浜国立大学工学部教授）  
 石川 浩（香川大学経済学部教授）  
 藤本由起夫（広島大学工学部教授）  
 朝田 洋雄（航空宇宙技術研究所主任研究員）  
 森下 信（横浜国立大学工学部助教授）  
 石塚 鐵夫（横浜国立大学工学部講師）

## 研究経費

平成4年度	8,200千円
平成5年度	3,800千円
計	12,000千円

## 研究発表

- (1) 板垣 浩、石塚鐵夫、宋 玉中、梅田和良；「ランダム荷重下の疲労亀裂伝播に及ぼす小荷重振幅の影響」、日本造船学会論文集、Vol.172,(1992),pp601-608
- (2) 板垣 浩、金 善振、石塚鐵夫、「材質の空間的変動の材料試験結果に及ぼす影響について」(その2 疲労き裂伝播に及ぼす板厚の影響)、日本造船学会論文集、Vol.173,(1993),pp327-336
- (3) 宮田隆司；「高張力鋼熔接熱影響部に生じる島状マルテンサイトと強度・靱性に及ぼす影響」、日本鉄鋼協会論文集「鉄と鋼」、Vol.79(1993),No.10,pp1176-1182
- (4) 宮田隆司；「高張力鋼熔接熱影響部の脆化に及ぼす島状マルテンサイトの影響の微視力学的検討」、日本鉄鋼協会論文集「鉄と鋼」、Vol.79(1993),No.10,pp1183-1189
- (5) 宮田隆司；"Influence of Martensitic Island on Cleavage Fracture Toughness of Weld heat-Affected Zone in Low Carbon Steels", Proceedings of International Symposium on Low Carbon Steels for the 90's, Edited by R.Asfahni and G.Tither , The Minerals , Metals & Materials Society,( 1993), pp.493-500
- (6) 藤本由起夫；「経年劣化構造物の検査計画立案に関する一考察」(不確実性に強い検査計画)、日本造船学会論文集、Vol.173,(1993),pp367-375
- (7) 石川 浩；" Reliability Assesment of Machines and Structures Based upon Probabilistic Fracture Mechanics", Probabilistic Engineering Mechanics,Vol.8,(1993),pp43-56

## 研究成果

総括 ( (研究代表者) 板垣 浩・横浜国立大学)

### 1. Weibull 分布と確率モデル

(清水昭信・横浜国立大学)

### 2. 疲労亀裂群の非破壊検査を考慮した信頼性解析

- 不確実性に強い検査計画の立案法 -

(藤本由起夫・広島大学)

### 3. 確率的疲労き裂進展モデルと保守点検への応用

(石川 浩・香川大学)

### 4. リベット孔列に発生する疲労亀裂群の検討

(板垣 浩・横浜国立大学)

(朝田洋雄・航空宇宙技術研究所)

(飯田國廣・芝浦工業大学)

(石塚鐵夫・横浜国立大学)

### 5. 破壊特性の確率論的研究

(宮田隆司・名古屋大学)

### 6. Selection of the First Inspection Time based on Maximization of Amount of Information

(板垣 浩・横浜国立大学)

(森下 信・横浜国立大学)

(石塚鐵夫・横浜国立大学)



## 1. Weibull分布 と 確率モデル

### 1. 1. はじめに

信頼性の理論において、Weibull分布がしばしば用いられていることは良く知られている。著者の手元にある文献のなかにも、次のような記述を見つけることができる。

'Weibull himself argued in favor of using his distribution on the basis that it fits numerous experimental data well and has a simple analytic form.' 'Today the Weibull distribution is the most popular and widely used in reliability theory.' ( I.B.Gertsbakh (1989) [4])

Weibull分布は、このように実験データによく合うという理由から用いられてきたと思われるが、一方 いかなる状況のもとで、どのような極限定理としてこの分布があらわれるかということもかなり早くから研究されている。上記のGertsbakh によれば、この方面の最初の仕事は Gnedenko (1943) [5] であるという。著者のみる限りでは、この論文では、極値統計量についてのWeibull分布の吸引域 (le domaine d'attraction)が議論されている。

著者の関心は、どのような確率モデルの極限分布として、Weibull分布があらわれるかという点にある。この方向の研究はこれまで多々行なわれている可能性は否定できないが、著者はまだあまりよく知らない。このノートでは、まずGnedenkoの議論から出発しJ.Galambo(1978) [3] の内容を書き留めよう。

いくつかのランダムな量 (確率変数列) の極値統計量 (すなわち、最大値あるいは最小値) の分布は、ランダムに変化する量 (確率過程) の初通過時間の分布としてとらえられる。確率過程として、何をもちだすかは大いに議論を呼ぶところであろう。たとえば、W.Feller [2] のaccumulated damage を表す確率過程 (複合ポアソン過程) も関心をよぶところである。しかし、最も良く研究されているのは拡散過程 (diffusion process)であろうから、拡散過程の初通過時間を数値的統計的にもとめることを後半で書くことにしよう。拡散過程の軌跡 (path)がある定められたところに到達したときが life time であると考えるところである。拡散過程の初通過時間は、一般に陽に厳密に求めることは困難であるので、確率微分方程式の近似解を利用して数値的統計的アプローチを可能とする方向を示すつもりである。

### 1. 2. 独立同分布確率変数の最小値の分布

ここで、書くことは最も初等的なことである。  $n$  個の部品が直列に並んでいて、それらの寿命をそれぞれ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (独立同分布確率変数) とするとき

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

の分布を考え  $n$  を大きくした極限分布を求めよう。これは、いうまでもなく上の直列のシステムの  $n$  が非常に大きいときの寿命の分布である。

$$Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1. 2. 1)$$

の分布関数は

$$\begin{aligned} P[Z_n \leq x] &= 1 - P[Z_n > x] \\ &= 1 - P[X_i > x, i=1, 2, \dots, n] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P[X_i > x] \\ &= 1 - \{1 - F(x)\}^n \end{aligned}$$

となる。ここで、 $F(x)$  は  $X_1$  の分布関数である。

$F(x)$  について、次の仮定をおく。

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{for } x < 0 \\ F(x) &= cx^d(1 + o(1)), \quad x \downarrow 0 \end{aligned} \quad (1. 2. 2)$$

ここで、 $c, d$  は正の定数である。

このとき、

$n^{1/d} Z_n$  の極限分布を求めよう。

$$\begin{aligned} P[n^{1/d} Z_n \leq x] &= P[Z_n \leq n^{-1/d} x] = 1 - \{1 - F(n^{-1/d} x)\}^n \\ &= 1 - \{1 - cn^{-1} x^d(1 + o(1))\}^n \\ &\rightarrow 1 - \exp\{-cx^d\}, \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

即ち、 $n$  が十分大きいとき、 $n^{1/d} Z_n$  の分布関数は、Weibull分布の分布関数  $1 - \exp\{-cx^d\}$  に近いことがわかった。

### 1. 3. Weibull分布の吸引域

ここでは、本質的には Gnedenko によって得られた結果を述べる。

定義 独立同分布の確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の分布関数を  $F(x)$  とし、

(1. 2. 1) で定義される  $Z_n$  にたいし、

$$c_n Z_n + d_n$$

の  $n \rightarrow +\infty$  の極限分布が Weibull 分布

$$L_r(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-x^r\} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

となるような数列  $c_n > 0$ ,  $d_n$  が存在するとき, 分布  $F(x)$  は  $L_r(x)$  の吸引域に属するという。

定理 ([3], Theorem 2.4.4)

$$\inf\{x; F(x) > 0\} = 0 \quad (1.3.1)$$

とするとき,  $F(x)$  が  $L_r(x)$  の吸引域に属するための必要十分条件は

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{F(hx)}{F(h)} = x^r \quad (x > 0) \quad (1.3.2)$$

である。

注意  $F(x)$  が (1.2.2) をみたすとき, (1.3.2) は成り立つ。

$\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  についても, 同様の定理が成り立つがそれは省略する。

#### 1.4. 非独立同分布の場合の最小値分布

§2の議論を, 独立性を持たない確率変数列に対して拡張する。そのために,  $E_n$  列という概念を用意する。同分布確率変数列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の分布を  $F(x)$  とし, この  $F(x)$  は (1.3.1) を満たすとする。pair  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , が 例外集合  $E_n$  に属さない というのは,

$x_n \downarrow 0$  のとき,

$$P[X_i < x_n, X_j < x_n] \sim F(x_n)^2$$

となることである。(  $X_i = X_j = 0$  のちかくで この2つの確率変数は漸近的に独立)

集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  から任意に  $k$  個の要素を取り出した

組  $i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  にたいして

$$F_{i(k)}^*(x) = P[X_{i_1} < x, X_{i_2} < x, \dots, X_{i_k} < x]$$

とおく。

次の3つの仮定を満たす確率変数列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を  $E_n$  列という。

仮定1  $i(k)$  に属する任意の2数の pair が  $E_n$  に属さないとき,

$x_n \downarrow 0$  のとき

$$F_{i(k)}^*(x_n) \sim F(x_n)^k$$

仮定2  $i(k)$  の要素の pair のなかに,  $E_n$  に属する唯一つの pair  $(i_s, i_m)$  が存在するとき, ある定数  $\eta(k)$  があって,  

$$F_{i(k)}^*(x) \leq \eta(k) P[X_{i_s} < x, X_{i_m} < x] F(x)^{k-2}$$
 が成り立つ。

仮定3  $E_n$  の pair の総数を  $N(n)$  とすると,  

$$N(n) = o(n^2)$$

定理  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を  $E_n$  列とし,  

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n F(x_n) = a, \quad 0 < a < +\infty,$$

が成り立つように数列  $\{x_n\}$  が選べるとし, かつこの数列に対して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(i, j) \in E_n} P[X_i < x_n, X_j < x_n] = 0$$

を仮定する。このとき,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[\min(X_1, X_2, \dots, X_n) < x_n] = 1 - e^{-a}$$

が成り立つ。

この定理の応用として, Weibull 分布のあらわれるモデルをいくつか構成できる。  
 ([4], 188-196頁)

### 1. 5. 無限分解可能分布

分布  $\mu$  が無限分解可能であるとは, 任意の正の整数  $n$  に対して分布  $\mu_n$  が存在して  $\mu$  は  $n$  個の  $\mu_n$  のたたみこみ

$$\mu = \mu_n * \dots * \mu_n \quad (n \text{ 個})$$

となることである。正規分布やポアソン分布は無限分解可能分布である。

無限分解可能分布については詳しい研究が行なわれているので, Weibull 分布が無限分解可能分布かどうか関心が持たれる。

佐藤 ([9], 47頁) によれば,  $\gamma \leq 1$  のとき  $L_\gamma(x)$  は無限分解可能分布であることが知られている。 $\gamma > 1$  のときは分かっていないようである。

### 1. 6. 初通過時間と極値統計量

確率変数列 (確率過程)  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  に対して

$$T(x) = \min\{n; X_n > x\}$$

とおく。これは, 確率過程  $\{X_n\}$  が はじめて点  $x$  を通過する時刻を表す。

また,

$$T'(x) = \min \{ n ; X_n < x \}$$

とする。このとき,

$$P [ \max\{ X_1, X_2, \dots, X_n \} < x ] = P [ T(x) > n ]$$

$$P [ \min\{ X_1, X_2, \dots, X_n \} > x ] = P [ T'(x) > n ]$$

である。

### 1. 7. 一次元拡散過程の初通過時間

一次元ブラウン運動の一点への初通過時間の分布は指数1/2の片側安定分布となることは良く知られている ([9]) ので, ここではそれは省略する。

$R^1$ 全体を状態空間とし, 生成作用素が

$$\frac{d}{dm} \frac{d}{dx}$$

で与えられる拡散過程  $\{ X(t) \}$  が正再帰的としよう。点  $x$  への初通過時間を  $T(x)$  とするとき, ある定数  $m'$  ( $m$ 測度のtotal mass) が存在して,  $x \rightarrow +\infty$  のとき,  $T(x) / (m' x)$  の分布の極限は指数分布になる。

(山里真, 未発表の結果)

### 1. 8. カオス力学系と指数分布

区間  $[0, 1)$  から  $[0, 1)$  への写像

$$X(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & , 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

を考える。これはパイコね変換と呼ばれる。

初期値  $x$  は 区間  $[0, 1)$  上の一様分布に従ってランダムに選び,

$$x = X^0(x), X(x) = X^1(x), X(X(x)) = X^2(x), \dots, X^n(x), \dots$$

という無限列を考える。  $1/2^k$  より小さくなる初めての時刻を  $T(k)$  とする。

$$\text{即ち, } T(k) = \min \{ n ; X^n(x) < 1/2^k \} .$$

このとき,

$T(k) / 2^{k+1}$  の分布の  $k \rightarrow +\infty$  の極限はパラメーター1の指数分布となる。

(赤松 [1])

この方向のもっと一般的数学的研究として, 平田 [6] がある。

この節と前節のことから, 初通過時間の分布の極限が指数分布となる確率モデルは他にも沢山あるのではないかと想像される。

### 1. 9. 確率微分方程式

ここでは多次元拡散過程を考えたい。簡単のために、2次元で議論する。

$w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  を独立な一次元ブラウン運動 (Wiener process) とし、 $X(t)$ ,  $Y(t)$  を未知の確率過程とする次の方程式を考える。

$$\begin{aligned} X(t) &= x + \int_0^t a_{11}(X(t), Y(t)) dw_1(t) \\ &\quad + \int_0^t a_{12}(X(t), Y(t)) dw_2(t) \\ Y(t) &= y + \int_0^t a_{21}(X(t), Y(t)) dw_1(t) \\ &\quad + \int_0^t a_{22}(X(t), Y(t)) dw_2(t) \end{aligned}$$

ここに表れる積分は確率積分と呼ばれるものであり、この方程式は確率微分方程式と呼ばれている。詳しくは、渡辺 [11], Ikeda-Watanabe [7], Karatzas-Shreve [8] 等を参照されたい。ここでは、簡単のために、drift項は省略した。上の確率微分方程式は係数にいくらかの条件をつければ、解の存在と一意性はなりたつ。解  $\{X(t), Y(t)\}$  は

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Y(t)] = 0 \\ E[X(t)^2] &= x^2 + \int_0^t a_{11}^2 dt + \int_0^t a_{12}^2 dt \\ E[Y(t)^2] &= y^2 + \int_0^t a_{21}^2 dt + \int_0^t a_{22}^2 dt \\ E[X(t)Y(t)] &= xy + \int_0^t a_{11}a_{21} dt + \int_0^t a_{12}a_{22} dt \end{aligned}$$

を満たす。この右辺の積分は通常の積分である。

$\{X(t), Y(t)\}$  は2次元拡散過程であり、そのコルモゴロフの後退方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} p = (1/2) \sum_{i,j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 a_{ik} a_{jk} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p$$

となる。

$$(x_1 = x, x_2 = y)$$

この2次元拡散過程のなんらかの集合への初通過時間を統計的数値的に求めるために乱数を用いて上の確率微分方程式の解の軌跡が近似的に求められればよい。そこで最後に確率微分方程式の近似解の求め方を書くことにする。

$h$ は(小さな)正数とし

$$t_n = nh \quad (n=1, 2, \dots)$$

とおく。  $0 \leq t \leq h$  のとき

$$X'(t) = x + \sum_{k=1}^2 a_{1k}(x, y) \{w_k(t) - w_k(0)\}$$

$$Y'(t) = y + \sum_{k=1}^2 a_{2k}(x, y) \{w_k(t) - w_k(0)\}$$

により近似解  $\{X'(t), Y'(t)\}$ を定義し、  $0 \leq t \leq nh$  のとき  $\{X'(t), Y'(t)\}$ が定義されれば、  $nh \leq t \leq (n+1)h$  に対しては

$$X'(t) = x + \sum_{k=1}^2 a_{1k}(X'(nh), Y'(nh)) \{w_k(t) - w_k(nh)\}$$

$$Y'(t) = y + \sum_{k=1}^2 a_{2k}(X'(nh), Y'(nh)) \{w_k(t) - w_k(nh)\}$$

とおく。 こうして定義された近似解は  $h$ を0に近づけたとき(係数が若干の条件をみたすとき)真の解に収束することは分かっている。 特定の集合に対する近似解の初通過時間が真の解の初通過時間に収束するかどうか問題であるがこれについては清水 [10] において論じている。

注意 シミュレーションをするときは、  $\{X(nh), Y(nh); n=1, 2, \dots\}$  を求めることになる。  $w_k((n+1)h) - w_k(nh)$ ,  $k=1, 2; n=1, 2, \dots$ , は 独立な確率変数列ですべて平均0, 分散  $h$  の正規分布に従うので、二つの独立な正規乱数を用いて確率微分方程式の近似解である軌跡を大量に作り初通過時間の分布を近似的に求めることが可能となる。

## 文献

- [1] 赤松達也 確率過程の信頼性理論への応用. 横浜国立大学工学部生産工学科卒業論文, (1992).
- [2] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its applications*, Vol.1, Third Edition, John Wiley & Sons (1968).
- [3] Galambos, J., *The asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley & Sons (1978).
- [4] Gertsbakh, I. B., *Statistical Reliability Theory*. Probability: Pure and Applied 4, Marcel Dekker (1989).
- [5] Gnedenko, B. V., Sur la distribution limite de term maximum d'une série aléatoire. *Ann. of Math.*, 44, (1943) 423-453.
- [6] Hirata, M., Poisson Law for Axiom A Diffeomorphism. To appear in 'Ergodic Theory and Dynamical Systems'.
- [7] Ikeda, N. and Watanabe, S., *Stochastic differential equations and Diffusion processes*, North-Holland/Kodansha (1988).
- [8] Kratzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian motion and stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag (1988).
- [9] 佐藤健一, 加法過程. 紀伊国屋数学叢書33 (1990) .
- [10] 清水昭信, 確率微分方程式の近似解に対する初通過時間の収束. 数理解析研究所講究録850, 「確率数値解析における諸問題」 (1993) 59-71,
- [11] 渡辺信三, 確率微分方程式. 産業図書, 数理解析とその周辺9 (1975).

追記 このノートを書いた後に, 次の論説の存在に気付いた.' 高橋倫也, 極値統計量の漸近理論について, 数学, 第46巻第1号 (1994) 39-50.' ここでは, 1. 3節で議論したことの多次元への拡張が論じられている。



## 2. 疲労亀裂群の非破壊検査を考慮した信頼性解析

### －不確実性に強い検査計画の立案法－

#### 2. 1 はじめに

構造物の使用中の検査計画立案には、年間あるいは検査間隔内の部材信頼度があるレベルに維持することを目標とする、1)信頼性基準の立案法<sup>1)・2)</sup>と、検査・補修費など信頼性維持にかかる実質的費用と破壊リスクの総和最小化をめざす、2)生涯コスト最小化基準の立案法<sup>3)・4)</sup>とがある。また、検査計画立案時に存在するモデル化誤差やパラメータの不確実性を考慮すると、生涯コスト最小化基準の解析で得られる信頼度よりも一段安全側の目標信頼度を設定し、この信頼度レベルを維持しつつコスト最小化を計る、3)信頼性制約付きコスト最小化基準の立案法も考えられる。本章では、疲労劣化を生じる構造物モデルを対象にこれら3基準の検査計画立案を行う。そして信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画が、モデル化誤差やパラメータの不確実性に強く、かつコスト的にも優れた方法であることを示す。

#### 2. 2 検査計画の最適化と不確実性要因への対応

構造物の検査計画立案は、検査・補修費用、稼働停止損失などの実質的費用と、それにより期待できる破壊に伴う経費の減少効果を考慮して、生涯コスト最小化基準で立案するのが理想的である。

しかし、種々関与してくる確率やコストの多くは不確実性を含んでおり、コスト最小化基準の定式化を行ったとしても果たして最適な方策が得られるか疑問がある。そこで従来 of 検査計画立案では、経験的判断が重要視されてきた。

ところが最近、構造物の高信頼度化への要求、環境汚染に対するリスクの見直し、あるいは寿命に近づいた構造物の増加傾向などから、検査計画を経験や主観のみに頼って決定することがむづかしくなってきた。すなわち、より合理的なメンテナンスを追求すると、使用中の構造信頼度や検査・補修の適切さを客観的に評価する手法が必要になる。この問題は、検査による稼働停止損失や破壊に伴う経費大きい構造物で今後益々切実な課題になると思われる。

望ましい信頼度レベルを客観的に評価し、それに合わせた検査・補修を行うには、検査の効果を組み込んだ信頼性解析や検査計画の最適化の骨格を明らかにす

る必要がある。また一方で、検査能力の定量化や部材の経年劣化特性の把握など不確実性を減少させる努力が必要である (Fig.2.2.1 参照)。このような観点から著者らは、生涯コスト最小化基準の近似解析法である逐次コストミニマム法<sup>3)</sup>を提案し、疲労劣化構造部材群を対象にした解析でその有効性を示した<sup>5)</sup>。

ところで、最適化問題を実構造物に適用する場合、不確実性に対するシステムの安定性が問題となる。すなわち、現実に適用しうる検査計画であるためには、モデル化誤差やパラメータの推定誤差によって最適性が大幅に損なわれるものであってはならない。

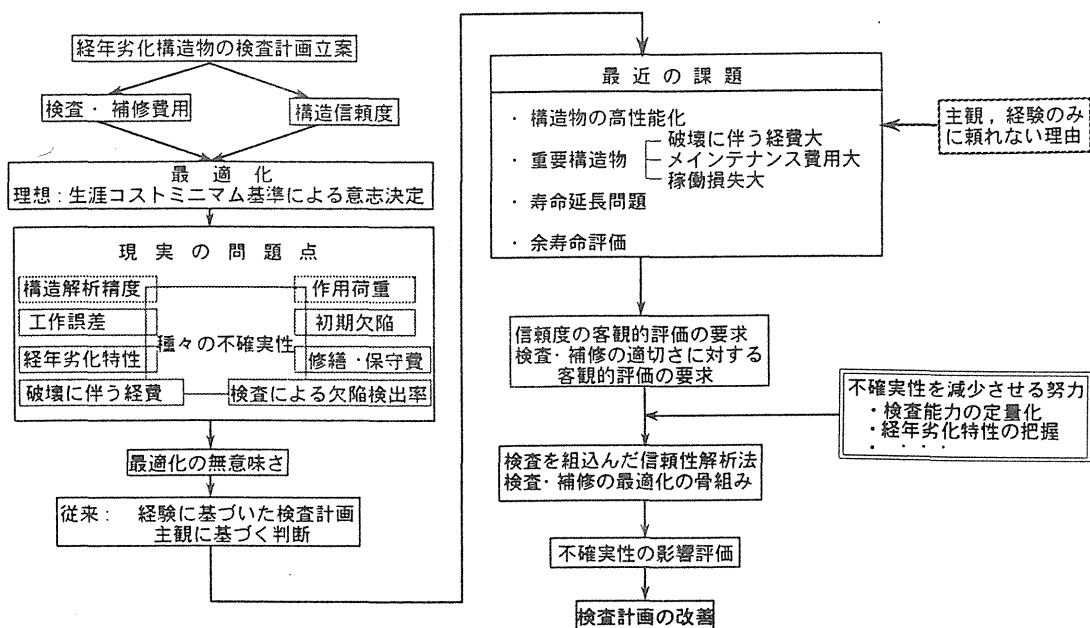


Fig. 2.2.1 経年劣化構造物の検査計画立案

モデル化誤差やパラメータの推定誤差に対して安定性を保つ方法として、コスト最小化基準で望まれる信頼度より一段安全側に目標信頼度を設定し、それを制約条件としてコスト最小化を計る方法が考えられる。これにより、万一疲労寿命や破損リスクを危険側に予測していた場合にもリスクの増大を抑制することができる。この方法を信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画と呼ぶことにする。目標信頼度の設定レベルはFig.2.2.2 に示すように行う。まず、ある目標信頼度を与えて検査計画を立案する。この検査計画に対して不確実性の範囲でパラメー

タを種々変化させてコスト解析を行う。そして生涯期待コストの値とその安定性を調べ、問題があれば許容可能なところまで目標信頼度を修正する。

信頼性基準の検査計画では、従来、信頼性レベルを専門家の総合判断や他の構造物との比較<sup>6)</sup>などから決定することが検討されている。これに対して信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画では、制約条件となる目標信頼度をコスト解析を通じて決定し、かつ、構造物の使用方法やメンテナンス方法の差異など、構造物固有の事情に合ったコスト最小化を計ることになる。

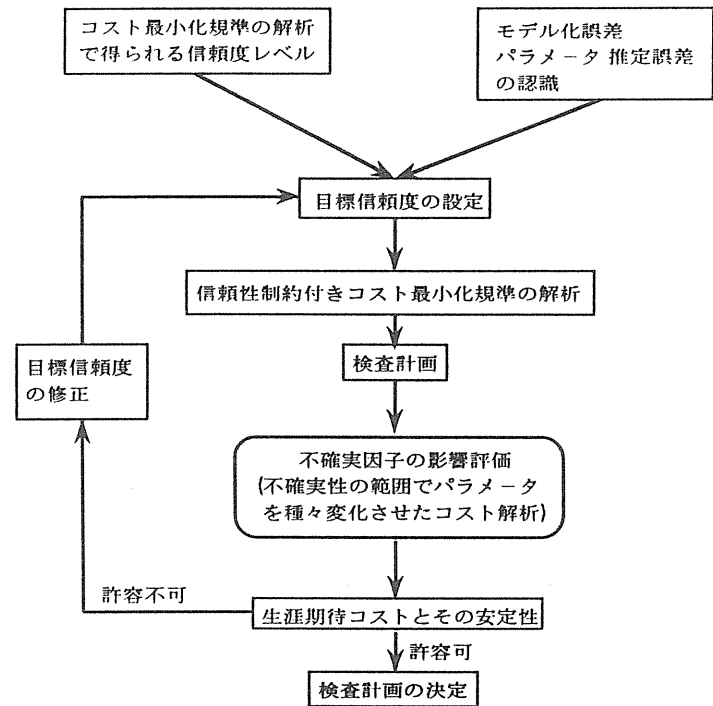


Fig. 2.2.2 目標信頼度の決定手順

## 2. 3 解析方法

### 2.3.1 コスト最小化基準の検査計画

コスト最小化基準の検査計画立案には、近似最適化法である逐次コストミニマム法<sup>3)・5)</sup>を用いる。この方法では、現時点から次の検査時までの検査計画の最適化を計り、これを各検査時に繰返すことにより実用上生涯最適と見なせる検査計画を立案する。

ある構造物において、現検査時  $t$  から次の検査時  $t+1$  までにかかるコスト  $CT(t, t+1)$  は次式で表せる。

$$CT(t, t+1) = \sum_{j=\text{set}l}^{\text{set}L} C_j(t, t+1) + C_{\text{sWS}} \quad (2.3.1)$$

ここで、"j"は構造物が L 種類の部材群から成り立つことを表す。 $C_j(t, t+1)$ は部材群jにかかる次期検査までの期待コストであり、時刻  $t$  で採用した検査手法毎に次のように表すことができる。

$$\cdot \text{検査無し (NO)}: C_j(t, t+1 | \text{NO}) = m \cdot P_{\text{SV}} \cdot P_{\text{F1}} \cdot C_{\text{F}} \quad (2.3.2)$$

$$\cdot \text{目視検査 (VI)}: C_j(t, t+1 | \text{VI}) = m \cdot \{P_{SV} \cdot C_{VI} + P_{DV} \cdot C_{RD} + P_{F2} \cdot C_F\} \quad (2.3.3)$$

$$\cdot \text{詳細検査 (MI)}: C_j(t, t+1 | \text{MI}) = m \cdot \{P_{SV} \cdot C_{MI} + P_{DM} \cdot C_{RD} + P_{F3} \cdot C_F\} \quad (2.3.4)$$

ここで,

$$C_F = (1 - P_{FC}) \cdot (C_{SWA} + C_{RF}) + P_{FC} \cdot C_{CF} \quad (2.3.5)$$

である。記号の意味は次の通りである。

$m$ : 部材群の部材数,

$P_{F1}, P_{F2}, P_{F3}$ : 今回の検査がそれぞれNO, VI, MIであったとして次期検査までに部材破壊を起こす確率,

$P_{DV}, P_{DM}$ : 目視および詳細検査でき裂を発見できる確率,

$P_{FC}$ : 部材破壊が大規模破壊に拡大する確率,

$P_{SV}$ : 現在まで部材破壊を生じていない確率,

$C_{VI}, C_{MI}$ : 一部材あたりの目視および詳細検査費用,

$C_{RD}$ : 検査で発見されたき裂の補修費用 (1部材当たり),

$C_{RF}$ : 破壊部材の補修費用 (1部材当たり),

$C_{CF}$ : 大規模破壊を生じたときの損失,

$C_{SWS}$ : 検査で計画的に稼働停止したときの損失,

$C_{SWA}$ : 部材破壊を生じて不意に稼働停止したときの損失。

なお $P_{FC}$ 以外の確率は、付録に述べるマルコフ連鎖モデル<sup>7)</sup>で計算する(注:(2.3.2)から(2.3.4)式中の確率の定義は一部文献<sup>3)</sup>と異なっている。確率計算は文献<sup>8)</sup>の付録に従うものとする)。

最適化は(2.3.1)式の最小化を計るように検査間隔と検査手法を選択することで行う。検査手法は、検査を行わない(NO)、目視検査を行う(VI)、詳細検査を行う(MI)の3つから各部材群毎に最適な手法を選択する。検査間隔は、適用可能な選択枝から構造物に最適なものを選んで適用する。たとえば選択枝が1年と2年の場合を考えると、1年を選んだ場合の次の2年間の期待コストは(2.2.6)式で、また間隔2年を選んだ場合の期待コストは(2.2.7)式で計算できる。

$$CT(t, t+2) = \sum_{j=\text{set1}}^{\text{setL}} C_j(t, t+1) + \sum_{j=\text{set1}}^{\text{setL}} C_j(t+1, t+2) + 2C_{SWS} \quad (2.2.6)$$

$$CT(t, t+2) = \sum_{j=\text{set1}}^{\text{setL}} C_j(t, t+2) + C_{SWS} \quad (2.2.7)$$

(2.3.6)式の値が(2.3.7)式の値より小さければ間隔1年を選び、そうでなければ2年を選ぶ。選択枝が3種類の場合も同様である。上述の方法で検査間隔と検査手法の同時最適化を行い、これを各検査時毎に逐次繰り返す。

### 2.3.2 信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画

信頼性制約として本研究では、1検査間隔内の部材破壊確率を与えることにする。すなわち、部材毎に設定した目標破壊確率を越えないように検査計画を立案する。

$$P_{F1}, P_{F2}, P_{F3} \leq \text{目標破壊確率} \quad (\text{制約条件}) \quad (2.3.8)$$

逐次コストミニマム法では、立案可能な検査計画（適用可能な検査手法および検査間隔）全てについてコストを計算し、それをコストの小さい順に列べ最小コストの検査手法を選択する。これに対して信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画では、コスト比較の際に検査間隔内の破壊確率が目標破壊確率を越えた場合、その検査計画を選択枝から除く。目標破壊確率以下に維持されている検査計画のうちから最小コストのものを選ぶ。この操作を各検査時毎に繰り返す。

なお、目標破壊確率は2.2で述べたように、不確実性の範囲内でパラメータを種々変化させて生涯期待コストの安定性を調べ、トライアンドエラーで幾度か修正を行い決定する。

### 2.3.3 信頼性基準の検査計画

信頼性基準の検査計画では、検査手法を予め決定しておき、1、2または4年の検査間隔にはとらわれずに、目標破壊確率に達した時点で検査を行う。多種類の部材群から成る構造物の場合には、Fig.2.3.1に示すように、各部材毎に目標破壊確率を設定しておき、最初に設定値を越える部材が生じた時点で全部材に対して検査を行うことにする。検査方法は全部材に目視検査を行う場合と、詳細検査を行う場合の2通りを2.4節では計算している。なお、破壊確率の計算と検査プロセスは付録に示すマルコフ連鎖モデル<sup>7)</sup>で計算した。

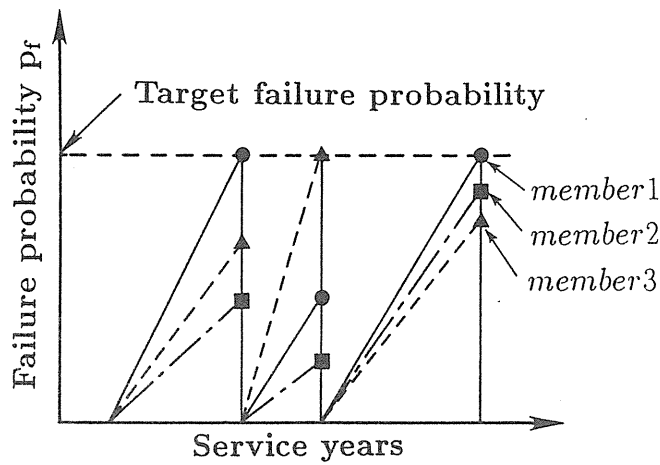


Fig. 2.3.1 信頼性基準の検査計画における検査時期の決定

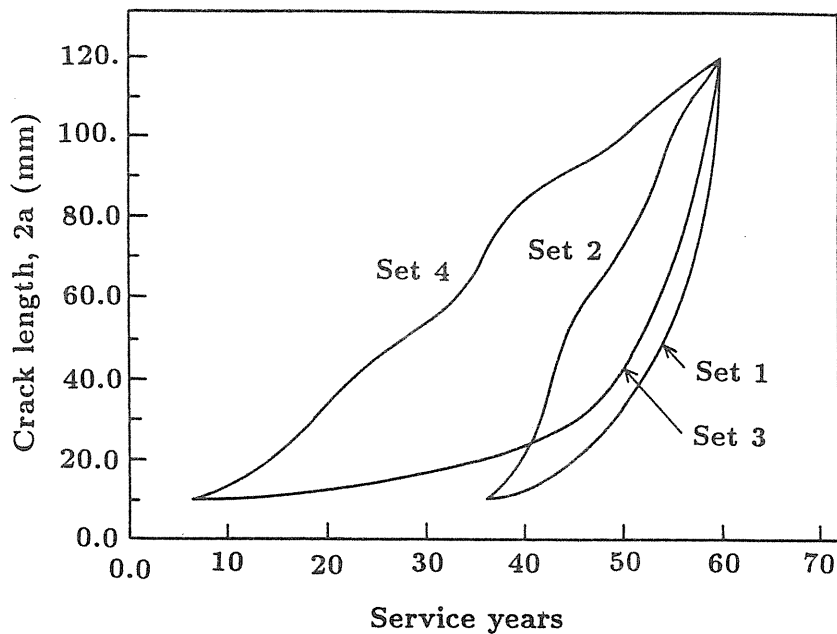


Fig. 2.4.1 仮想構造物の部材群の平均的疲労特性

## 2. 4 数値解析

### 2.4.1 対象とした構造モデル

Fig. 2.4.1 は対象とした構造物モデルの平均的き裂発生およびき裂成長特性を示す。構造物は4つの部材群から構成され、き裂発生、伝播寿命の分布はともに Table 2.4.1の2母数ワイブル分布で近似できると仮定する。Fig.2.4.2 はマルコフ連鎖モデルで発生した疲労過程のサンプル関数の例である。き裂発生長さ、破断時のき裂長さは4部材群とも10mmと120mm に揃えてあるが、平均的き裂進展曲

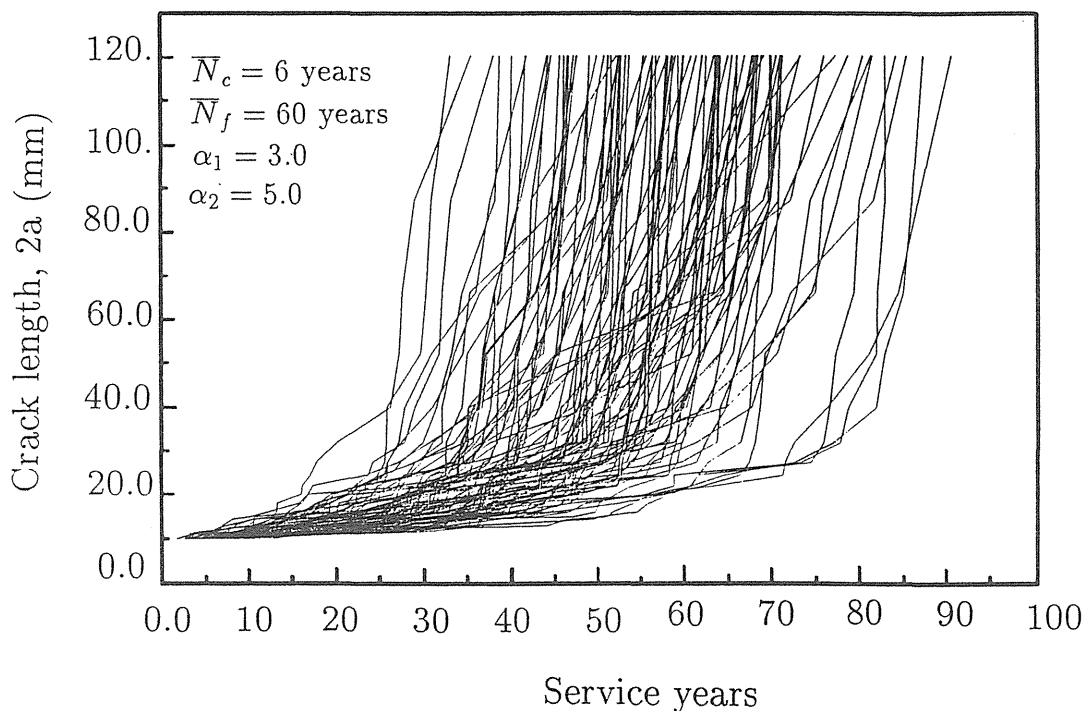


Fig. 2.4.2 マルコフ連鎖モデルによる疲労過程のサンプル関数（部材集合 3）

線の形状と、（き裂発生寿命／き裂伝播寿命）の比率は異なっている。

Table 2.4.2 は解析条件を一括して示す。部材群の部材数はいずれも 100で、部材破壊が大規模破壊に拡大する確率 $P_{Fc}$ 以外は全ての部材群で同じにしてある。検査費用は、検査による稼働停止時間の延長効果を考慮して多少大き目に設定した。なお、表中の目標破壊確率は、検査間隔内の 1 部材当たりの破壊確率をこれ以下に維持しようという制約レベルであり、信頼性基準、および信頼性制約付きコストミ最小化基準の解析で使用する。これらの確率は修正を行って、許容可となった後の値である。Set 4 については  $P_{Fc}$ が大きいので、目標破壊確率は他の部材集合よりも一桁小さく設定している。Table 2.4.3 は部材の初期欠陥分布と補修後の欠陥分布を示す。補修は部品交換モデルを想定している。

#### 2.4.2 解析結果

コスト最小化基準で立案した検査計画を Table 2.4.4に示す。検査間隔は 1 年、2 年および 4 年から、また検査手法は、検査無し、目視検査、あるいは詳細検査、から選択するようにした。同表より検査間隔はすべて 4 年が選択されている。部材集合毎に見られる検査開始時期と検査手法の差異は、部材疲労特性と $P_{Fc}$ の差

Table 2.4.1 各部材群の疲労特性

Member set	$\bar{N}_c$ years	$\bar{N}_p$ years	Weibull shape parameter	
			$N_c$	$N_p$
Set 1	36	24	4	5
Set 2	36	24	4	5
Set 3	6	54	3	5
Set 4	6	54	3	5

$a_0 = 10.0\text{mm}$ ,  $a_{\max} = 120\text{mm}$

Table 2.4.2 解析条件

Condition of analysis	Member set			
	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4
No. of Members	100	100	100	100
$C_{VI}$ (US \$/member)	50	50	50	50
$C_{MI}$ (US \$/member)	200	200	200	200
$C_{RD}$ (US \$/damage)	1000	1000	1000	1000
$C_{RF}$ (US \$/failure)	$10^5$	$10^5$	$10^5$	$10^5$
$C_{CF}$ (US \$)	$10^8$	$10^8$	$10^8$	$10^8$
PFC	0.001	0.01	0.01	0.1
$C_{SWS}$ (US \$)	$2 \times 10^4$			
$C_{SWA}$ (US \$)	$5 \times 10^5$			
Target failure probability	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
POD curve				
VI: $\text{POD} = 1.0 - \exp\{-0.025 \times (2a - 10.0)\}$				
MI: $\text{POD} = 1.0 - \exp\{-0.10 \times (2a - 10.0)\}$				

Table 2.4.3 初期欠陥と補修後の欠陥分布

Member set	Crack condition	0.00	10.0	20.0
		(mm)	(mm)	(mm)
Set 1	Initial state	80 %	10 %	10 %
Set 2	After repair (Replacement model)	80 %	10 %	10 %
Set 3				
Set 4				



Table 2.4.4 コスト最小化基準の検査計画立案結果

Member set	Inspection years and qualities						
	4	8	12	16	20	24	28
Set 1	M	M	M	M	V	M	V
Set 2	—	M	V	V	V	V	V
Set 3	V	M	M	V	V	M	V
Set 4	—	—	—	V	V	V	V

異に起因している。Fig. 2.4.3 はこの検査計画に従い検査した場合の部材破壊確率 $P_{F1}$ ,  $P_{F2}$ ,  $P_{F3}$ を示す。破壊確率は $10^{-6}$ から $2 \times 10^{-4}$ 程度になっている。なお, Fig. 2.4.3 は目標信頼度の初期設定の際に参考にした。

信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画の結果をTable 2.4.5に示す。検査間隔はTable 2.4.4 に比べて小さくなり、検査手法も詳細検査が多くなっていることがわかる。Fig. 2.4.4 は破壊確率の推移を示す。Set 1, 2および3では目標破壊確率 $10^{-5}$ 以下に、また、Set 4では $10^{-6}$ 以下に破壊確率が制御されていることがわかる。

信頼性基準の検査計画では、4つの部材集合のうちどれか一つが目標破壊確率に達すると、全ての部材群に対して検査を行うことにした。検査手法は全て目視の場合と、全て詳細検査の

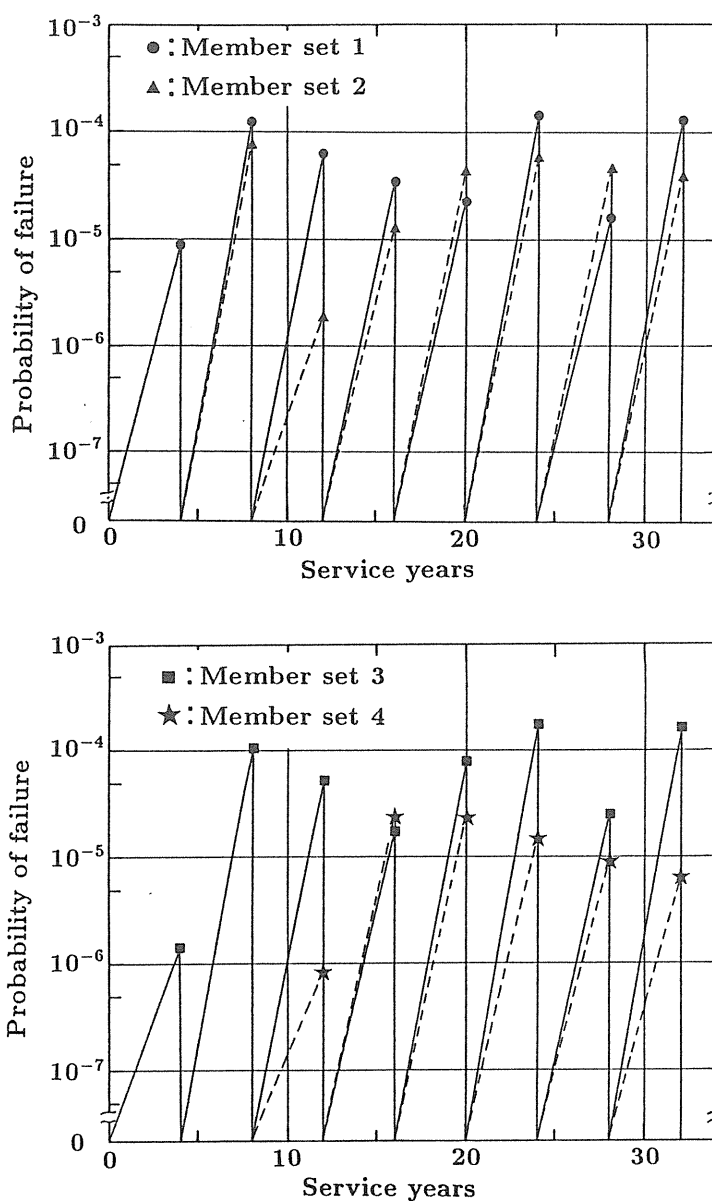


Fig. 2.4.3 各検査間隔内の破壊確率の推移  
(コスト最小化基準の場合)

Table 2.4.5 信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画立案結果

Member set	Inspection years and qualities											
	4	6	8	9	10	12	14	16	20	24	25	29
Set 1	M	M	—	V	M	V	M	M	M	—	M	V
Set 2	—	V	V	—	V	V	V	V	M	—	V	—
Set 3	M	V	V	V	V	M	—	M	M	V	M	V
Set 4	—	—	—	—	—	V	V	V	V	—	M	—

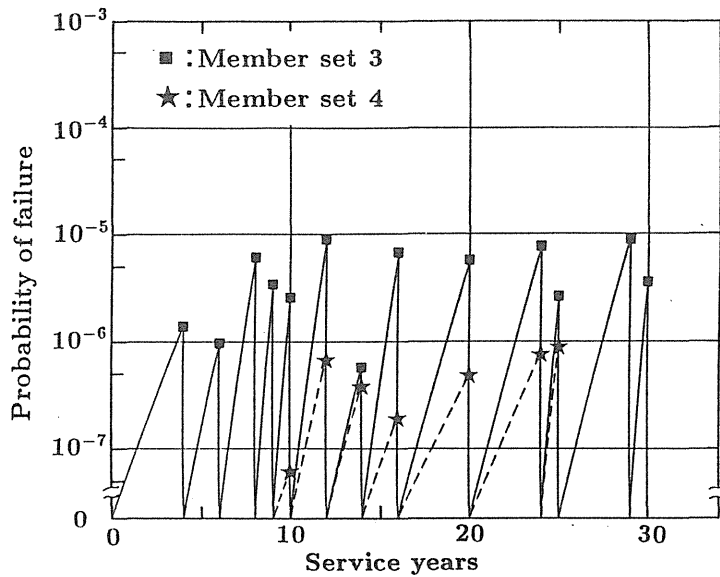
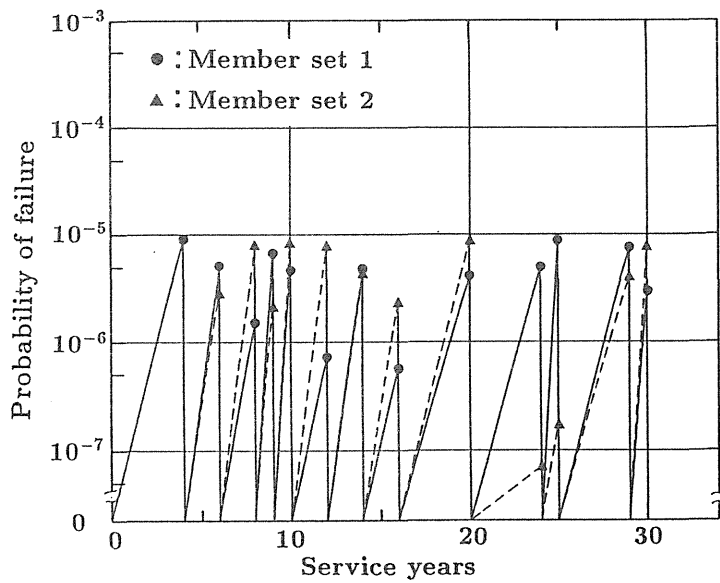


Fig. 2.4.4 各検査間隔内の破壊確率の推移  
(信頼性制約付きコスト最小化基準の場合)

2通りを計算した。Table 2.4.6に得られた検査計画を示す。目視検査では、30年の構造物使用に対して20回の検査が行われている。Fig.2.4.5 は検査手法として詳細検査を選んだ場合について、破壊確率と使用年数の関係を示す。目標破壊確率が問題となるのはSet 1とSet 3のみで、他の2つの部材群の破壊確率はそれより十分小さい値となっていた。

Fig. 2.4.6 は次式で定義される累積使用コスト  $C_{OP}$  と使用年数の関係を、上述の3規準で立案した検査計画に対して比較したものである。

$$C_{OP} = \sum_{t=0}^{\text{Lifetime}} CT(t, t+i) \quad (2.4.1)$$

$i=1 \text{ or } 2 \text{ or } 4$

当然ながらコスト最小化基準の検査計画が最小のコストを与えている。以上から、想定した疲労特性やコスト項目が正しければコスト最小化基準の検査計画が最適なことがわかる。

Table 2.4.6 信頼性基準の検査計画立案結果

No. of inspections	Inspection years	
	VI for all the member set	MI for all the member set
1	4.2	4.2
2	5.0	6.5
3	5.8	9.5
4	6.7	13.0
5	7.7	16.7
6	8.7	20.5
7	9.8	24.8
8	11.0	28.7
9	12.3	—
10	13.7	—
11	15.0	—
12	16.3	—
13	17.7	—
14	19.2	—
15	20.7	—
16	22.2	—
17	23.8	—
18	25.5	—
19	27.3	—
20	29.0	—

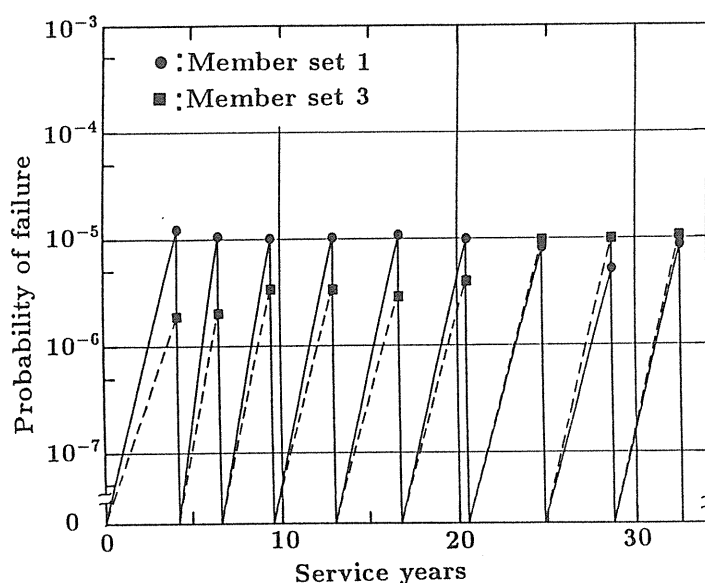


Fig. 2.4.5 各検査間隔内の破壊確率の推移 (信頼性基準の場合)

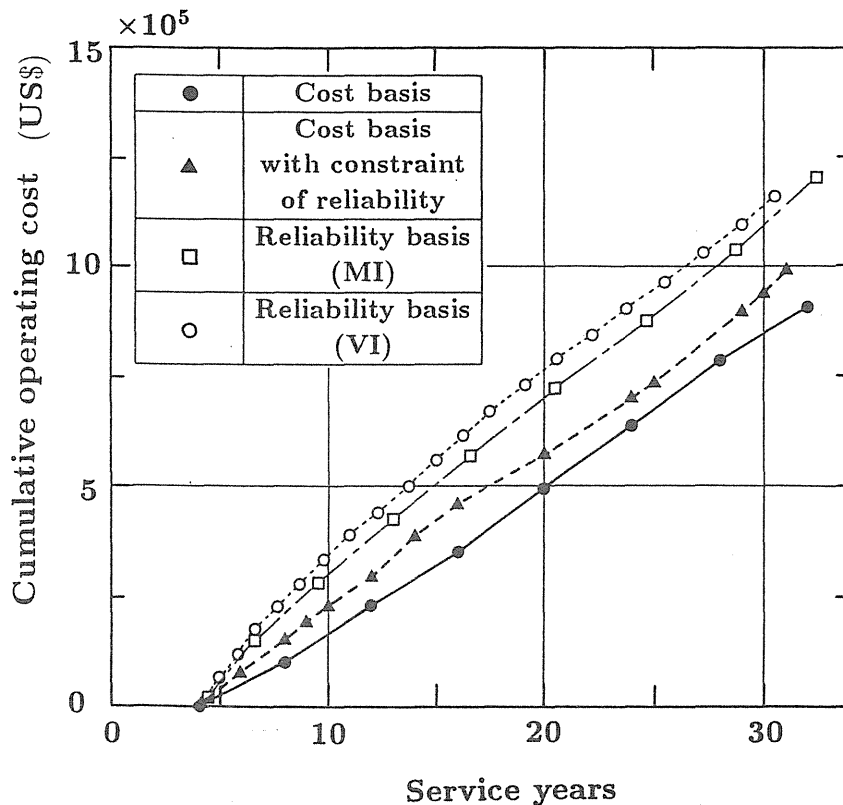


Fig. 2.4.6 3基準で立案した検査計画における累積使用コストの比較

## 2.5 不確実性に強い検査計画

現実に適用可能な検査計画は、モデル化誤差やパラメータの不確実性に強いことが要求される。コスト最小化基準の検査計画は、これらの不確実性によって最適性が崩れる恐れがある。そこで、部材疲労寿命あるいは大規模破壊への推移確率  $P_{FC}$  に推定誤差がある場合について、上述の3基準の検査計画の優位性がどう変化するかを検討する。

まず、検査計画はTable 2.4.4, 2.4.5および2.4.6 とし、真の疲労寿命が45年、あるいは75年にある場合(推定誤差 $\pm 15$ 年)について解析した。Fig. 2.5.1(a)はコスト最小化基準と信頼性制約付きコスト最小化基準について、累積使用コスト  $C_{OP}$  の推移を比較したものである。寿命 ( $\bar{N}_c, \bar{N}_p$ ) の内訳は同図中の表に示している。コスト最小化規準では疲労寿命の推定誤差により  $C_{OP}$  は大きく変化する。これに対して信頼性制約を設けた場合のコストは比較的安定している。Fig. 2.5.1(b)は使用年数30年の時点で累積使用コストを3基準で比較している。信頼性基準の検査計画も疲労寿命推定誤差に対して使用コストの変動は小さい。

Curve	$(\bar{N}_c, \bar{N}_p)$ years			
	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4
a	(27.0, 18.0)	(27.0, 18.0)	(4.5, 40.5)	(4.5, 40.5)
b	(45.0, 30.0)	(45.0, 30.0)	(7.5, 67.5)	(7.5, 67.5)

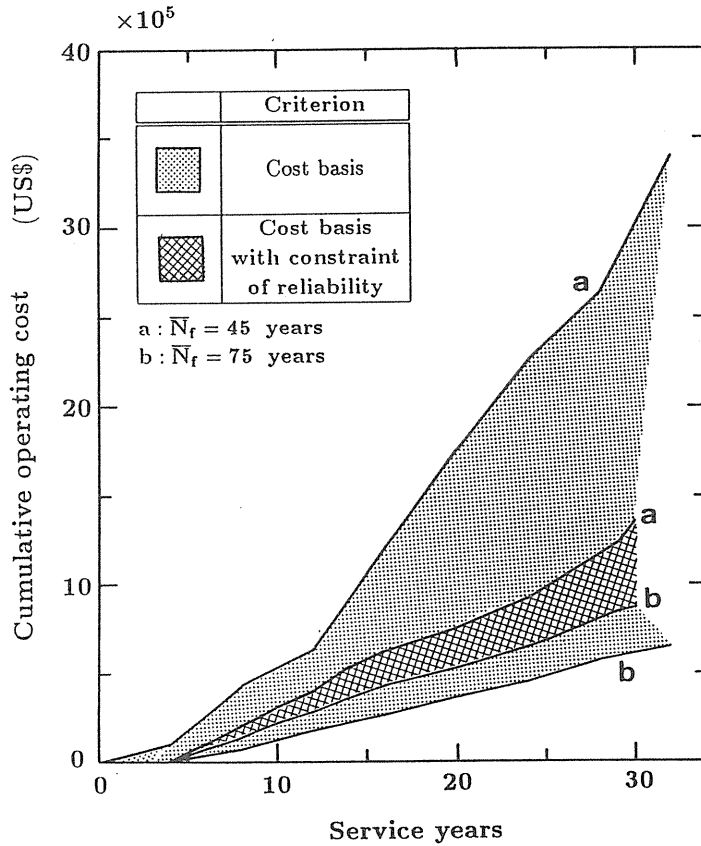


Fig. 2.5.1 (a) 疲労寿命に推定誤差がある場合の累積使用コストへの影響

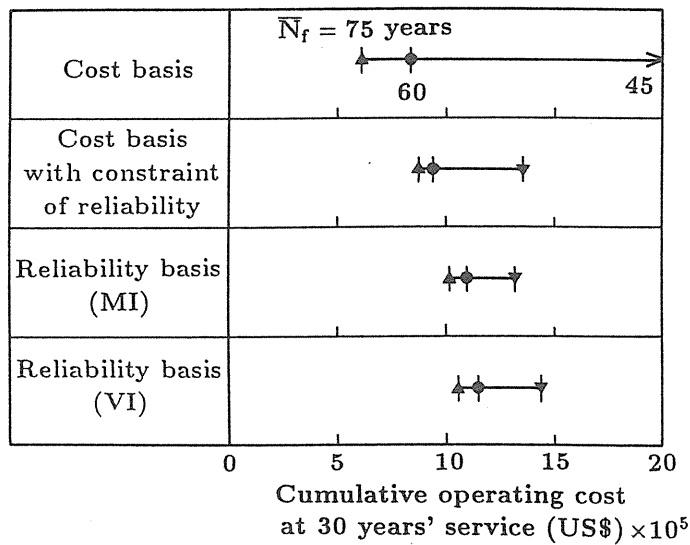


Fig. 2.5.1 (b) 使用年数30年の時点での累積使用コストの比較

Curve	$P_{FC}$			
	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4
a	0.005	0.05	0.05	0.5
b	0.0002	0.002	0.002	0.02

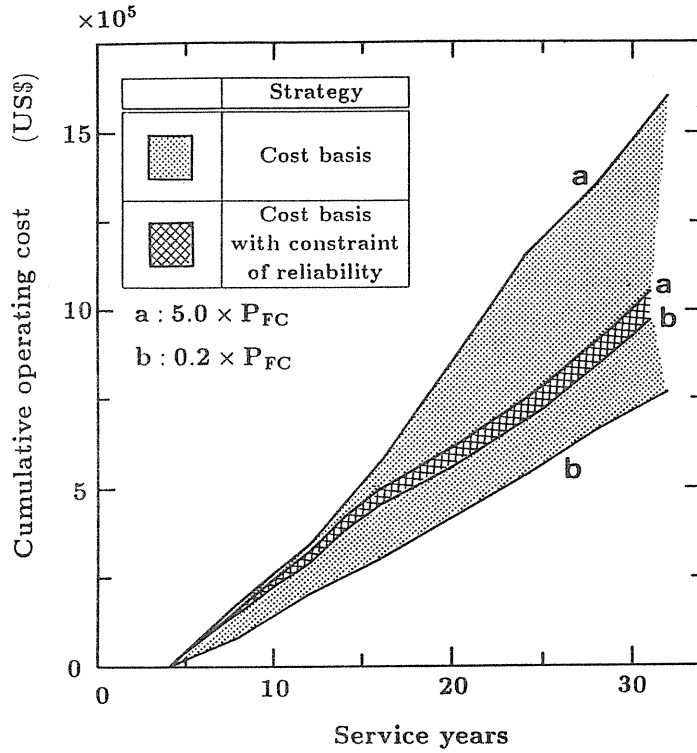


Fig. 2.5.2 (a)  $P_{FC}$ に推定誤差がある場合の累積使用コストへの影響

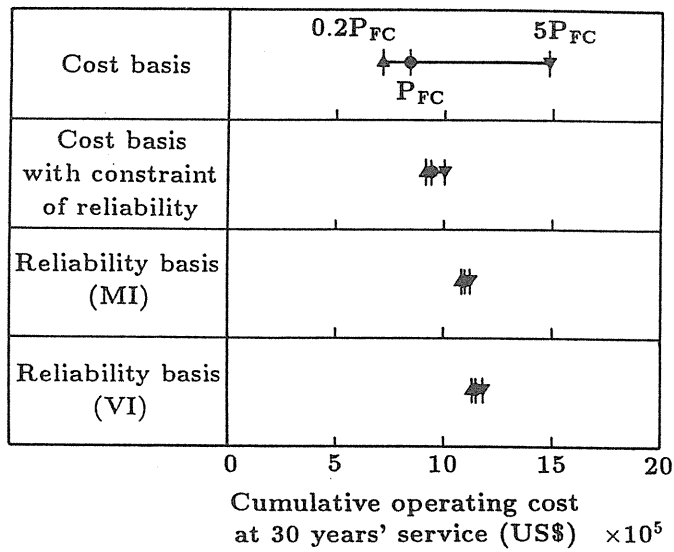


Fig. 2.5.2 (b) 使用年数30年の時点での累積使用コストの比較

次に、検査計画はTable 2.4.4, 2.4.5および2.4.6とし、 $P_{FC}$ のみをそれぞれ5倍あるいは(1/5)に変えて累積使用コストを計算した。その結果をFig.2.5.2(a), (b)に示す。(a)ではコスト最小化基準と、信頼性制約付きコスト最小化基準の累積コストが比較してある。図より、信頼性制約を設けた方がコストのばらつきがかなり小さく、 $P_{FC}$ の推定誤差に対して強いことがわかる。(b)は使用年数30年の時点で3基準の累積コストを比較している。信頼性基準の検査計画も使用コストの変動は小さいが、信頼性制約付きコスト最小化基準の方が多少有利になっている。

なお、信頼性基準と信頼性制約付きコスト最小化基準でコストの差異が小さいのは、目標破壊確率が適切に決定されているためで、これもコスト解析の成果である。また、検査費用や稼働停止損失がこの例より大きくなると、信頼性制約付きコスト最小化基準のメリットはさらに増すことになる。

Table 2.4.5に示した信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画では、検査時に検査を行う部材群と行わない部材群とが生じている。検査で稼働停止した場合には必ず検査を行うとして、信頼性制約付きのコスト最小化基準の検査計画を計算するとTable 2.5.1のようになる。この場合30年間の累積使用コストは $9.5 \times 10^5$ で、Table 2.4.5の $9.4 \times 10^5$ に比べてわずかに大きくなった。

Table 2.5.1 検査時に目視あるいは詳細検査のどちらかは必ず行う場合の検査計画立案結果（信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画）

Member set	Inspection years and qualities									
	4	6	8	10	12	16	18	22	26	28
Set 1	M	M	V	M	M	M	M	M	V	M
Set 2	V	V	V	V	M	V	V	V	V	V
Set 3	M	V	M	V	M	V	M	M	M	V
Set 4	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

## 2.6 まとめ

構造物の検査計画立案は、解析モデルや使用するパラメータの推定が正しい場合には、生涯コスト最小化基準で立案するのが理想的である。しかし、疲労寿命や破壊に伴う経費などに推定誤差や不確実性がある場合、コスト最小化基準の検査計画の最適性は大きく崩れる恐れがある。このような不確実性に対して安定性

を保つ方法として、本章では信頼性制約付きコスト最小化基準の検査計画立案法を提案した。数値解析を行ってその有効性を検討した結果、次のことが確認された。

- (1) 信頼性制約付きのコスト最小化基準の検査計画は、不確実性を考慮して目標破壊確率を低く抑えるため、解析に含まれるモデル化誤差やパラメータの不確実性に対して安定している。
- (2) 不確実性がある場合も、検査計画の最適性は生涯期待コスト（累積使用コスト）を用いて測ることができる。

#### 参考文献

- 1) 板垣、山本：船体構造部材の検査に関するベイジアン信頼性解析, 日本造船学会論文集, Vol.158, p.565, (1985).
- 2) Fujimoto, Y., Itagaki, H., Itoh, S. and Asada, M.: Bayesian Reliability Analysis of Structures with Multiple Components, Int. Conf. on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR' 89), Vol. 3, p. 2143, (1989).
- 3) Fujimoto, Y., Swilem, A. M., Iwata, M. and Nagai, K.: Inspection Planning for Deteriorating Structures Based on Sequential Cost Minimization Method, 日本造船学会論文集, Vol. 170, p. 175, (1991).
- 4) Madsen, H. O. and Solensen, J. D.: Probability Based Optimization of Fatigue Design, Inspection and Maintenance, Proc. 4th International Symposium on Integrity of Offshore Structures, Elsevier Applied Science, p. 421, (1990).
- 5) 藤本：経年劣化構造物の検査計画立案と不確実性因子の影響, 日本造船学会論文集, Vol. 172, p. 649, (1992).
- 6) Christensen, P. T. and Baker, M. J.: Structural Reliability Theory and Its Application, Springer-Verlag, (1982).
- 7) 藤本、出口、岩田：マルコフ連鎖モデルによる劣化型損傷部材の信頼性評価, 日本造船学会論文集, Vol. 166, p. 303, (1989).
- 8) 藤本：経年劣化構造物の検査計画立案に関する一考察, 日本造船学会論文集, Vol. 173, p. 303, (1989).



### 3 確率的疲労き裂進展モデルと保守点検への応用

#### 3.1 はじめに

材料の強度は大かれ少なかればらつきを持っており<sup>(3.1)</sup>、これらのばらつきは結晶粒等のような材質の不均質性に起因するのみならず、製作時に混入した欠陥にも原因があることは周知のとおりである<sup>(3.2)</sup>。しかしながら、これらの不均質性や欠陥を完全に制御統制することは現実には不可能である。加えて、構造物の安全性・信頼性に大きく影響するもう一方の要因である外部荷重もまた空間的並びに時間的に不規則に変動するのが普通である<sup>(3.3),(3.4)</sup>。特に、繰返し荷重下で構造物の安全性・信頼性を確保するには、部材内に損傷が累積して行き、ある繰返し数の後に突然破壊する現象、いわゆる疲労破壊現象を考慮に入れることが極めて重要となる<sup>(3.5)~(3.10)</sup>。

構造部材の損傷は、通常、初期欠陥から出発したき裂の進展という形で累積して行くが、言うまでもなくこの過程もまた多くの不確定要因や不規則要因を有することが知られている。すなわち、内的要因としては、初期欠陥の個数、大きさの不確定性および材料の不均質性に起因するき裂進展抵抗の不規則性が、また外的要因としては部材に負荷される荷重の不規則変動による応力振幅の不規則性が、その主なものであろう<sup>(3.4),(3.11)~(3.13)</sup>。このような状況下で、構造物の安全性や信頼性を正しく評価するには、確率論的基盤に立ってき裂進展過程をモデル化する必要がある。

航空機や橋梁構造物などの重要構造物は、周知のように供用中に点検が実施され、き裂が発見されたならば何らかの補修を行って信頼度の維持が図られるのが普通であるが、このような場合には、これら点検・補修を考慮に入れて部材の余寿命を評価する必要がある。補修に際しては、損傷の発見された部材を新品部材と交換する機会が多いであろうが、一方では、例えば合成 I 桁橋における主桁と横桁の取合部のように、き裂が発見されてもその部材を容易に交換し得ない場合もあり、その場合には、補助材等によって、再び同じ部材中のき裂が進展することのないような補修方法がとられることもある。そこで、このような部材交換モデルおよび完全補修モデルに対する信頼度評価が不可欠となる。

さらに、実際的な問題を扱おうとする場合には、部材中に進展性のき裂が存在しない場合や、複数個存在する場合をも考慮に入れ、部材中の溶接線長さに関連して、平均初期欠陥個数の影響を理論に反映させるべきであろう。このような観点から、本研究では、部材中に唯一個のき裂が存在するとの仮定の下に信頼度評価法の一貫した定式化を行うと共に、理論の枠組を複数の初期欠陥が存在する場合に拡張する。

次に問題となるのが、初期き裂長分布およびき裂発見能力曲線の与え方である。初期欠陥に関するデータも徐々に集められつつあり、き裂発見能力曲線に関しても、より信頼し得るデータが発表されていることに鑑み、本研究ではこれらをどのように与えるべきかについても考察を加える。

#### 3.2 疲労損傷過程の確率的モデル化

き裂に関する力学は近年著しい進展を見せ、いわゆる破壊力学の名称の下に体系化されており<sup>(3.14)</sup>、き裂進展の問題にも適用されて成功を収めている。従って、疲労損傷過程の確率的モデル化は破壊力学に基礎を置いたものであることが望ましい。1978年、Bogdanoff<sup>(3.15)</sup>がこの方面の研究を創始して以来、非常に多くの研究結果が発表され、議論されてきているが、その主な研究の流れを概観すれば以下のように分類することができよう。

### (1) 確率変数モデル

これは、き裂進展法則中に現れるパラメータを単に確率変数とみなそうとするものであって、多くの研究がある<sup>(3.16)~(3.19)</sup>。しかしながら、このモデルは材質の不均質性およびプロセスとしての外力の揺らぎの効果を考慮したのではなく、試験片間の相違、外力に関する知識の欠如等に関連するものであって、必ずしも実験結果を再現しないという欠点がある。

### (2) マルコフ連鎖モデル

Bogdanoff<sup>(3.15)</sup> および Kozin & Bogdanoff<sup>(3.20)~(3.23)</sup> によって提案された、状態と時間を共に離散化して取り扱うモデルであって、応用面の研究も多い<sup>(3.24),(3.25)</sup>。しかしながら、これは数学的モデルであって、その物理的・工学的意味が不明確であるばかりでなく、未知パラメータが多く、利用に便利とは言い難い。加えて、不規則外力の場合への拡張が困難である。

### (3) 確率微分方程式モデル

き裂進展法則中に現れるパラメータに時間的揺らぎを入れ、それを確率微分方程式として扱おうとするものである<sup>(3.26)~(3.29)</sup>。しかし、周知のように、き裂進展法則は有限時間の後にき裂長が無限大に達するような特異性を持っており、これに起因する数学的困難が解消されておらず、また理論の中に相関距離、相関時間等が自然な形で入ってこない。

### (4) 局所平均モデル

相関距離一定の条件を実現するために、局所的に平均寿命を計算し、それを加えることによって全寿命の統計的特性を議論しようとするもの<sup>(3.30)~(3.33)</sup>であって、取り扱いがやや複雑である。また、不規則外力の場合への拡張やき裂長分布の導出に無理がある。

### (5) 出生過程モデル

これは stochastic point process を応用したもので、状態の推移を非斉次 Poisson process 等で表現しようとしたものである<sup>(3.34)~(3.38)</sup>。モデルがやや数学的であり、このモデルでも相関距離および相関時間を自然に考慮に入れることは難しい。

### (6) 死点を考慮したマルコフ近似モデル (Tsurui-Ishikawa モデル)

Tsurui & Ishikawa によって創始された手法<sup>(3.11)~(3.13)</sup>であって、しばしば Tsurui-Ishikawa モデルと呼称されているが、これは確率微分方程式モデルの1つである。き裂進展過程はマルコフ過程ではなく、外部荷重、進展抵抗等は相関を有する確率過程であると見なされるが、通常われわれの興味のあるのは相関時間に比べて十分長い時間間隔における分布の変化であることに注目し、マルコフ近似手法を用いてき裂長分布形の変化および寿命分布等を議論しようとするものである<sup>(3.11),(3.39),(3.40)</sup>。マルコフ近似に際しては、死点を導入し、他の確率微分方程式モデルでは克服されていない数学的困難を見事に克服しているのが大きな特徴である。このモデルの利点およびそれを応用した研究成果を列挙すれば以下の如くである。

1. 状態および時間が共に連続量であって、現実的で使い易く、また自然である。
2. 破壊力学に基礎を置いたものであって、その物理的・工学的意味が明確である。
3. 応力振幅が不規則である場合<sup>(3.11),(3.41)</sup>、進展抵抗が不規則である場合<sup>(3.12),(3.42)</sup>および双方共が不規則である場合<sup>(3.43),(3.44)</sup>のいずれの場合の考察も容易である。
4. 未知パラメータが比較的少なく、使い易い<sup>(3.11),(3.45)</sup>。
5. Lin and Yang<sup>(3.26)</sup> および Sobczyk<sup>(3.27)</sup> の手法に現れるある種の数学的不完全さを見事に解消している<sup>(3.39)</sup>。
6. 相関時間、相関距離のような確率過程独特の特性量が理論の中に自然な形で入ってきている<sup>(3.43),(3.44)</sup>。
7. 板幅等、サイズ効果を考慮し易い<sup>(3.40),(3.46)</sup>。

8. 半楕円き裂進展問題<sup>(3.47)~(3.49)</sup>の解析に必要な多変量過程への拡張が容易である。
9. き裂長分布が陽な形で求まっているため、点検効果<sup>(3.50)~(3.53)</sup>、遅延効果<sup>(3.54)</sup>、瞬時破損モードの効果<sup>(3.55)</sup>などを考慮した信頼性解析に便利である。
10. 残存寿命分布も陽な形で求められているが、これによる利点は極めて多大である。例えば、破壊確率を所与の値に保ちつつ、必要な諸量を精度よく計算できること<sup>(3.43),(3.44)</sup>、パラメータの決定が容易であること、初期き裂長分布<sup>(3.13),(3.56)</sup>、パラメータの不確定性等を考慮し易いこと<sup>(3.57)</sup>、等が挙げられる。

とりわけ、数学的不完全さが解消され、き裂長分布、残存寿命分布が陽な形で求められている点は特筆に値する。このため、実用的に幅広い応用可能性を有するモデルあるいは手法となっているものと考えられる。そこで、本研究における疲労損傷累積過程の確率的モデル化に際しては、この Tsurui-Ishikawa モデルを採用することとし、以下にそのモデルの要点を簡潔に概観する。

### 3.3 Tsurui-Ishikawa モデルに基づくき裂長分布

#### 3.3.1 確率的き裂進展モデル

上述のように、死点を考慮した Markov 近似モデルとしての Tsurui-Ishikawa モデルは数々の利点を有し、しかも利用し易い。そこで、以下ではこのモデルを簡単にレビューし、後の補修モデルに対する信頼度評価に用いることとする。すでに述べたように、これは確率微分方程式モデルの1つであって、外部荷重、き裂進展抵抗等は相関を有する局所定常確率過程とみなされるが、通常われわれが興味のあるのは、相関時間に比べて十分長い時間間隔におけるき裂長分布の変化であることに着目し、Markov 近似手法によってき裂長分布、寿命分布等を議論しようとするものである。近似に際しては、いわゆる「死点（状態が一度そこに到達すると以後そこに留まり続けるような点）」を導入し、他の確率微分方程式モデルでは克服されていないある種の数学的困難を見事に克服しているのが特色である。

簡単のため繰返し応力振幅がそれほど大きくない場合を想定して、線形破壊力学モデルが採用でき、従ってき裂先端の応力状態は応力拡大係数の変動幅  $\Delta K$  のみで記述されるものとする。この場合には、周知のように貫通疲労き裂進展は Paris-Erdogan による進展則

$$\frac{da}{dn} = C(\Delta K)^m \quad (3.1)$$

によって表される<sup>(3.58)</sup>。ここに、 $a$  はき裂長、 $n$  は応力繰返し数であり、 $C$ 、 $m$  は実験定数である。ここでは、これを無次元化して

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m \quad (3.2)$$

の形で、利用することとする。ここに、 $X = a/a_0$  は適当な長さ  $a_0$  で測った  $n$  サイクル後の無次元き裂長、 $\Delta K_0$  は応力拡大係数の次元の定数、 $\varepsilon$  はき裂進展抵抗の大小に関連した無次元量を意味する。

一般に、き裂に対しては、 $\Delta K$  は

$$\Delta K = \lambda S \sqrt{\pi a} F_I(a) \quad (3.3)$$

のように表すことができる。ここに、 $S$  は応力振幅、 $\lambda$  はき裂の幾何学的状態に依存した定数、また  $F_I(a)$  はき裂進展方向の板幅が有限であることに起因する補正項であって、例えば、長さ  $2a$  の中央貫通き裂に対しては、 $2b$  を板幅として、しばしば

$$F_I(a) = \left\{ 1 - 0.025 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 0.06 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right\} \sqrt{\sec \left( \frac{\pi a}{2b} \right)} \quad (3.4)$$

が利用される<sup>(3.59)</sup>。この表式は  $a < b$  のみで成立し、 $a \rightarrow b$  の極限においては、 $F_I(a)$  が発散するという特徴を持つ。ところで  $a \ll b$  であれば、 $F_I(a)$  はほぼ 1 に等しく、板幅に比べて十分小さいき裂では  $F_I(a) = 1$  と置いて差し支えない。

式 (3.3) を式 (3.2) に代入すれば

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon Z_n^m g(X) \quad (3.5)$$

ただし、

$$g(X) = \left\{ \sqrt{X} F_I(a_0 X) \right\}^m \quad (3.6)$$

が得られる。ここで、 $Z_n$  は無次元化された  $n$  サイクル目の応力振幅を表し、一般には不規則過程である。また、 $m$  は一般に 2 以上の実数と考えてよい。さらに、材質の不規則性に起因する進展抵抗の不規則な揺らぎを表現するために、便宜上、 $\varepsilon$  を  $\varepsilon C_n$  と改めて書き、以後われわれは

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon C_n Z_n^m g(X) \quad (3.7)$$

を解析の対象とする。式 (3.7) は  $0 < X < B (= b/a_0)$  のみで成立し、しかも  $X \rightarrow B$  で  $dX/dn$  が発散するという特異性を有することに注意すべきである。

### 3.3.2 Markov 近似

ここでは式 (3.7) を解析して、き裂長分布が従うべき方程式を誘導する手順<sup>(3.39)</sup>の概略を述べることにする。確率過程  $X(n)$  は、 $C_n, Z_n$  が記憶を持ち定常でさえないために、一般には Markov 過程とはならないが、 $C_n, Z_n^m$  の相関時間は、われわれの興味の対象でもある平均き裂進展寿命のオーダーに比べて十分小さいと考えられるので、 $X \rightarrow B$  での特異性に留意しつつ  $X(n)$  を Markov 過程で近似することにする。

さて、死点  $\{X = B\}$  は吸収点であると同時に特異点でもあるから、この吸収は必然的に起こるものであって、吸収のない方程式を立てることは不可能である。このため、死点にないサンプルに対してのみその密度の変化を記述する方程式を導く必要があり、従って  $X(n)$  の確率特性を調べるに際しては、死点に到達したサンプルは取り除かねばならない。そのため修正項を考慮した摂動計算を行って、式 (3.7) から、き裂長が初期に  $x_0$  であったという条件の下での時刻  $n$  におけるき裂長密度  $w(x, n | x_0)$  の満足する偏微分方程式、いわゆる拡張された Fokker-Planck 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} = & -\beta(n) \frac{\partial}{\partial x} \{g(x)w\} - \frac{1}{2} \gamma(n) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{dg(x)}{dx} g(x)w \right\} \\ & + \frac{1}{2} \gamma(n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{g^2(x)w\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

を得ることができる<sup>(3.39)</sup>。ここで、 $\beta(n), \gamma(n)$  は、 $E[\cdot], K[\cdot, \cdot]$  をそれぞれ期待値、共分散をとる演算子として、

$$\beta(n) = \varepsilon E[C_n Z_n^m] \quad (3.9)$$

$$\gamma(n) = 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K[C_n Z_n^m, C_{n+n'} Z_{n+n'}^m] dn' \quad (3.10)$$

で与えられる。

### 3.3.3 Fokker-Planck 方程式の解とき裂長分布

Fokker-Planck 方程式(3.8)を解くために,  $w, x$  を

$$v(y, n) = g(x)w(x, n), \quad y = \int_B \frac{dx'}{g(x')} - \int_0^n \beta(n')dn' \quad (3.11)$$

によってそれぞれ  $v, y$  に変換すると, 式(3.8)はいわゆる拡散方程式

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2} \gamma(n) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

に帰着される。従って, 初期条件

$$\lim_{n \rightarrow 0} w(x, n | x_0) = \delta(x - x_0) \quad (3.13)$$

を満足する式(3.8)の解は

$$w(x, n | x_0) = \frac{1}{g(x) \sqrt{2\pi \int_0^n \gamma(n')dn'}} \times \exp \left[ - \frac{\left\{ \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')} - \int_0^n \beta(n')dn' \right\}^2}{2 \int_0^n \gamma(n')dn'} \right] \quad (3.14)$$

で与えられることを知る<sup>(3.39)</sup>。  $0 < x < B$  におけるき裂長分布  $W(x, n | x_0)$  はこれを積分して

$$W(x, n | x_0) = \Phi \left[ \frac{\int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')} - \int_0^n \beta(n')dn'}{\sqrt{\int_0^n \gamma(n')dn'}} \right] \quad (3.15)$$

で与えられる。ただし  $\Phi[\cdot]$  は標準正規分布関数を表す。これが自動的に吸収条件を満足していること, および  $W(B, n | x_0)$  はサンプルが時刻  $n$  に死点  $\{X = B\}$  に達していない確率を与えることに注意されたい。

### 3.4 点検・補修政策

一般に高信頼度が要求される構造物では, 供用中に点検を実施し, もしもき裂が発見されれば, その部材を交換あるいは補修することによって信頼度の低下を防ごうとすることが多い<sup>(3.60),(3.61)</sup>。しかしながら, 点検の実施は大きな経済的負担を余儀なくすると共に, 点検中は運用を中断する必要がある場合も多く, 点検回数はそれ程大きくし得ないのが普通である。また, たとえ点検を実施しても, ある一定の大きさ以上のき裂が完全に発見可能であるわけではなく, 発見能力は一般にき裂の大きさと共に増大すると考えるのが自然であろう<sup>(3.62)</sup>。ここでは, き裂発見能力がき裂長の関数として与えられている場合を想定し, 初期き裂長およびき裂進展過程の不確定要因を考慮に入れて, 部材信頼度低下に及ぼす点検の効果を論議する。<sup>(3.50)~(3.54)</sup>

さて, 点検には種々の政策が考えられる。まず, 定期的な点検と不定期な点検とが考えられ, 不定期な点検はさらに, あらかじめ定められた点検計画に従って点検を行う場合と, 点検結果に依存して次の点検時期を決める方法とが考えられる。き裂進展問題の場合には, 運用初期にはき裂は発見可能な状態にまで成長していないのが普通であるので, 必ずしも定期点検は有効ではないと考えられ, 事実, あるモデルでは点検間隔の選び方は信頼度の維持に大きな影響を与えることが示されている。総点検回数に制約がある限り, どのような政策の下に点検を実施す

べきかを議論しておくことは重要であろう。しかしながら、そのためには、もしき裂が発見された場合に、どう対処するのかを定めておかなければ、点検効果を評価することができない。

き裂発見時の対処の仕方にも種々の方策があり得る。例えば、発見時に部材を交換してしまったり、点検間隔を短縮してしばらく様子を見たり、部分的に溶接等を実施したり、補助材を用いることによってそれ以後絶対にき裂の成長が起こらないようにする等の方式が考えられる。ここでは、部材を新品と交換する方式（部材交換モデル）および補助材を用いてき裂の成長を完全に防ぐ方式（完全補修モデル）の両者について検討を加えることとする。なお、き裂発見能力をどう定めるかも重要な問題であるが、当然点検の手段（超音波を用いるか、目視によるか等）によっても著しく異なってくる。これに関しては後述する。

### 3.5 繰返し点検政策下の部材交換モデルに対する信頼度評価法

Tsurui-Ishikawa モデルを利用して、繰返し点検下での信頼度評価法について考える。ただし、もし点検（非破壊検査等）によってき裂が発見された場合には、直ちに新部材に取り替えて運用を続行するものとする。また、点検は等間隔でなくてもよいが、点検のプログラムはあらかじめ与えられていて、点検の結果によってそのプログラムは変更されないものとする。

さて、 $(j-1)$  回目と  $j$  回目の点検の間隔（適当にスケールされた時間）を  $t_j$  と表すことにする。各点検時に生起する可能性のある事象を次のように分類する。いま、 $j$  回目の点検時に着目し、それまでに部材が破損してしまっている事象を  $F_j$ 、 $j$  回目の点検時まで破損していない事象を  $S_j$  と表す。 $S_j$  が起こった時は、 $j$  回目の点検が実行される。点検の結果、部材にき裂が発見される事象を  $D_j$ 、き裂が発見されない事象を  $U_j$  とすれば、 $S_j$  はさらに  $S_j \cap D_j$  と  $S_j \cap U_j$  とに分けられる。従って、 $j$  回目の点検時直後の状態は  $F_j$ 、 $S_j \cap D_j$ 、 $S_j \cap U_j$  のいずれかに分別されるから、各々の事象の生起確率をそれぞれ  $P_F^{(j)}$ 、 $P_D^{(j)}$ 、 $P_U^{(j)}$  とすると、

$$P_F^{(j)} + P_D^{(j)} + P_U^{(j)} = 1 \quad (3.16)$$

が成立することになる。 $P_F^{(j)}$  は  $j$  回目の点検時までに部材が破損してしまっている確率である。点検はもちろん非破壊部材のみを対象として行われるのであるが、われわれは仮想的に破壊部材に対しても時間の経過を考慮し、破壊部材はそれ以後破壊状態に留まると考えていることになる。

ところで、これらの確率は長さ  $x$  のき裂を点検によって発見する能力  $D(x)$  と、点検前および点検後のき裂長密度関数  $\tilde{u}_j(x)$ 、 $u_j(x)$  を用いて計算することができる。き裂長密度関数は、本来、破損していない部材について考えられたものであるが、ここでは破損部材も含めて 1 に規格化されているものとする。すなわち、 $\tilde{u}_j(x)$ 、 $u_j(x)$  として

$$\int_0^{x_c} \tilde{u}_j(x) dx = \int_0^{x_c} u_j(x) dx = 1 - P_F^{(j)} \quad (3.17)$$

を満たすものを考えると便利である。ここで、 $x_c$  はき裂がそれ以上の長さに達すれば破損と見なされる、いわゆる限界き裂長である。

さて、 $j$  回目の点検終了時のき裂長密度関数  $\tilde{u}_j(x)$  は

$$\tilde{u}_j(x) = P_D^{(j)} \tilde{u}_j(x|S_j \cap D_j) + P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x|S_j \cap U_j) \quad (3.18)$$

と表すことができる。ここで、 $\tilde{u}_j(x|S_j \cap D_j)$  および  $\tilde{u}_j(x|S_j \cap U_j)$  は、それぞれ、 $j$  回目の点検後に部材の状態が  $S_j \cap D_j$  あるいは  $S_j \cap U_j$  にあるという条件下でのき裂長密度である。き裂が発見された部材を新部材に交換するという補修とは、補修前のき裂長密度関数  $\tilde{u}_j(x|S_j \cap D_j)$  を初期き裂長密度関数  $g(x)$  で置き換えることに他ならない。その結果、このモデルでは、 $j$  回目の点検前後において、

$$u_j(x) = \begin{cases} g(x) & (j = 0 \text{ の場合}) \\ P_D^{(j)} g(x) + P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x|S_j \cap U_j) & (j > 0 \text{ の場合}) \end{cases} \quad (3.19)$$

なる関係が成立することになる。ここで得られた補修後のき裂長密度関数  $u_j(x)$  は、正確に言えば、 $j$  回目の点検時に部材中に実在するき裂長の分布と言うよりも、それまでに破損したものも含めて、考えられるすべての補修履歴を網羅したような仮想的な密度関数と考えられる。この表式中の  $P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x|S_j \cap U_j)$  なる項は、Bayes の定理によって、き裂発見能力  $D(x)$  を用いて、

$$P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x|S_j \cap U_j) = \{1 - D(x)\} \tilde{u}_j(x) \quad (3.20)$$

と表すことができる。また、 $P_D^{(j)}$  は

$$P_D^{(j)} = \int_0^{x_c} D(x) \tilde{u}_j(x) dx \quad (3.21)$$

であったから、結局式 (3.19) によって、 $\tilde{u}_j(x)$  から  $u_j(x)$  を計算することができることになる。

一方、 $(j-1)$  回目から  $j$  回目の点検時までには、その時のき裂進展モデルに従って、き裂長密度関数は

$$\tilde{u}_j(x) = \int_0^{x_c} w(x, t_j|x_0) u_{j-1}(x_0) dx_0 \quad (j > 0) \quad (3.22)$$

の如く推移するから、これらをまとめて、次のようにして帰納的に各点検時のき裂長密度関数を計算し得ることになる。

(1) 初期条件式

$$u_0(x) = g(x) \quad (3.23)$$

(2) き裂進展式 ( $j > 0$ )

$$\tilde{u}_j(x) = \int_0^{x_c} w(x, t_j|x_0) u_{j-1}(x_0) dx_0 \quad (3.24)$$

(3) 点検・補修式 ( $j > 0$ )

$$\left. \begin{aligned} u_j(x) &= P_D^{(j)} g(x) + \{1 - D(x)\} \tilde{u}_j(x) \\ P_D^{(j)} &= \int_0^{x_c} D(x) \tilde{u}_j(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

次に、これらの関数を用いて、時刻  $t$  までに部材が破損する確率  $H(t)$  を計算しよう。部材の運用開始から  $k$  回目の点検時までの時間

$$S_k = \sum_{j=1}^k t_j \quad (S_0 = 0) \quad (3.26)$$

を導入すれば、 $S_k < t \leq S_{k+1}$  を満たす時刻  $t$  における  $H(t)$  の値と  $P_F^{(k)}$  との差は  $S_k$  から  $t$  までの間の破壊確率に他ならないから、

$$H(t) = P_F^{(k)} + \int_0^{x_c} \{1 - W(x_c, t - S_k|x_0)\} u_k(x_0) dx_0 \quad (3.27)$$

が成立する。特に、 $t = S_{k+1}$  と置けば、 $(k+1)$  回目の点検時までの破壊確率  $P_F^{(k+1)}$  を知ることができる。

$$P_F^{(k+1)} = P_F^{(k)} + \int_0^{x_c} \{1 - W(x_c, t_{k+1}|x_0)\} u_k(x_0) dx_0 \quad (3.28)$$

$H(t)$ 、 $P_F^{(k)}$  の計算に際して、値が 1.0 に近い時は

$$P_F^{(k+1)} = 1 - \int_0^{x_c} \tilde{u}_{k+1}(x_0) dx_0 \quad (3.29)$$

を用い、値が 0 に近い時は式 (3.28) を用いた方が高精度が期待できることに注意されたい。

### 3.6 繰返し点検政策下の完全補修モデルに対する信頼度評価法

ここでは、あらかじめ定められたプログラムに従って点検を行い、一度き裂が発見されれば、補助材等によって二度とき裂の発生、進展が起こることのないように完全な補修が実施されることを想定したモデルに対する部材信頼度の評価法について議論する。このモデルは、実際の構造物において破損部材の取り替え等が困難な場合にはしばしば採用されている補修方法である。

#### 3.6.1 単一き裂に対する破損確率

さて、この場合は補修方法を除いては部材交換モデルと同一であるから、事象  $D_j, U_j$  の意味を、それぞれ、 $j$ 回目の点検時までにき裂が発見され、その部材は完全補修された状態、および、 $j$ 回目の点検終了時まで補修を受けることなく、破損にも至っていない状態、と定義し直すことによって、同様に取り扱い得ることがわかる。このような定義の下では、 $F_j, D_j, U_j$  は互いに排反で、かつ全体を尽くしているから、それぞれの事象の生起確率をそれぞれ  $P_F^{(j)}, P_D^{(j)}, P_U^{(j)}$  とすれば明らかに

$$P_F^{(j)} + P_D^{(j)} + P_U^{(j)} = 1 \quad (3.30)$$

が成立する。ここでは破損部材、完全に補修された部材に対しても時間の経過が考えられていることに注意されたい<sup>(3.63)</sup>。

$j$ 回目の点検前後のき裂長密度をそれぞれ  $\tilde{u}_j(x), u_j(x)$  としよう。本来、き裂長密度は非破損かつ非完全補修部材に対してのみ考えればよいのであるが、ここでは便宜上、破損部材や完全補修部材を含めて 1 に規格化しておくので、次式が成立する。

$$\int_0^{x_c} \tilde{u}_j(x) dx = 1 - P_F^{(j)} - P_D^{(j-1)} \quad (3.31)$$

$$\int_0^{x_c} u_j(x) dx = 1 - P_F^{(j)} - P_D^{(j)} \quad (3.32)$$

ただし、 $x_c$  は限界き裂長であって、それ以上の長さは破損状態に対応する。

$j$ 回目の点検直後に完全補修される事象を  $M_j$  とし、その確率を  $P_M^{(j)}$  と表そう。 $j$ 回目の点検を実施した結果は  $U_j$  か  $M_j$  のいずれかが起こるから、点検直前のき裂長密度は  $\tilde{u}_j(x)$  は

$$\tilde{u}_j(x) = P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x | U_j) + P_M^{(j)} \tilde{u}_j(x | M_j) \quad (3.33)$$

と表される。ここで  $\tilde{u}_j(x | A_j)$  は  $j$ 回目の点検によって  $A_j$  が起こったという条件下でのき裂長密度である。完全補修とは  $M_j$  が起こったなら、き裂の状態をそれを表現する空間から消し去ってしまうことに他ならないから、 $j$ 回目の点検後のき裂長密度  $u_j(x)$  は式 (3.33) で右辺第 2 項を取り去ったものに等しく

$$u_j(x) = P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x | U_j) \quad (3.34)$$

となることを知る。式 (3.34) の右辺は Bayes の定理によって

$$P_U^{(j)} \tilde{u}_j(x | U_j) = \{1 - D(x)\} \tilde{u}_j(x) \quad (3.35)$$

と表されるので、結局

$$u_j(x) = \{1 - D(x)\} \tilde{u}_j(x) \quad (3.36)$$



が成立することがわかる。ただし、 $D(x)$  は、すでに述べたとおり、長さ  $x$  のき裂長の発見能力である。ここで  $P_M^{(j)}$  は  $j$  回目の点検でき裂が発見される確率に等しく、

$$P_M^{(j)} = P_D^{(j)} - P_D^{(j-1)} = \int_0^{x_c} D(x) \tilde{u}_j(x) dx \quad (3.37)$$

が成立することを注意しておこう。

他方、 $(j-1)$  回目と  $j$  回目の点検間隔（適当にスケールされた時間）を  $t_j$ 、運用開始から  $j$  回目の点検時までの時間を  $S_j (S_0 = 0)$  と表せば、 $(j-1)$  回目から  $j$  回目の点検時までは、き裂は式 (3.14) に従って成長し、

$$\tilde{u}_j(x) = \int_0^{x_c} w(x, t_j | x_0) u_{j-1}(x_0) dx_0 \quad (j > 0) \quad (3.38)$$

のごとく推移する。従って、初期き裂長密度  $u_0(x)$  を与えれば、式 (3.36)、式 (3.38) によって関数列  $u_j(x) (j = 0, 1, 2, \dots)$  は再帰的に計算し得る。

以上より、部材交換モデルに対する式 (3.23)~(3.25) に対応して、完全補修モデルに対しては、

(1) 初期条件式

$$u_0(x) = g(x) \quad (3.39)$$

(2) き裂進展式 ( $j > 0$ )

$$\tilde{u}_j(x) = \int_0^{x_c} w(x, t_j | x_0) u_{j-1}(x_0) dx_0 \quad (3.40)$$

(3) 点検・補修式 ( $j > 0$ )

$$u_j(x) = \{1 - D(x)\} \tilde{u}_j(x) \quad (3.41)$$

が成立することがわかる。

次に、これらの関数を用いて時刻  $t$  までに部材が破損する確率、すなわち、繰返し点検下における時刻  $t$  までの寿命分布  $H(t)$  を計算しよう。

$S_k < t \leq S_{k+1}$  なる時刻  $t$  における  $H(t)$  と  $P_F^{(k)}$  との差は  $S_k$  から  $t$  までの間に破損する確率に他ならないから、

$$H(t) = P_F^{(k)} + \int_0^{x_c} \{1 - W(x_c, t - S_k | x_0)\} u_k(x_0) dx_0 \quad (3.42)$$

が成立する。特に  $t = S_{k+1}$  とおけば  $(k+1)$  回目の点検時までの破損確率  $P_F^{(k+1)}$  を知ることができ、次式で与えられる。

$$P_F^{(k+1)} = P_F^{(k)} + \int_0^{x_c} \{1 - W(x_c, t_{k+1} | x_0)\} u_k(x_0) dx_0 \quad (3.43)$$

$k$  が大きくなるとき、 $P_U^{(k)} \rightarrow 0$  となるから  $P_D^{(k)} + P_F^{(k)} \rightarrow 1$  が成立する。しかるに  $P_D^{(k)}$ 、 $P_F^{(k)}$  は共に  $k$  に対して単調増加であるから、 $k \rightarrow \infty$  の時、 $P_D^{(k)}$  および  $P_F^{(k)}$  は共に一定値に近づくことがわかる。

### 3.6.2 複数個の初期欠陥を考慮した破損確率

式 (3.42) は部材中に進展性の欠陥が唯一個存在するという条件下における、繰返し点検政策の下での部材の寿命分布と考えられる。ところで、一般には、部材中に進展性き裂のないこともあり、2 個以上の進展性き裂の存在する場合もあるであろう。そこで、ここでは進展性き裂個数の不規則性を考慮に入れて、繰返し点検政策下での信頼度を評価する手法について考察を加える。

進展性き裂がちょうど  $j$  個あったという条件下での時刻  $t$  までの破損確率  $H^{(j)}(t)$  は、それぞれのき裂が相互干渉なく進展すると仮定すれば

$$H^{(j)}(t) = \begin{cases} 1 - \{1 - H(t)\}^j & (t < \infty) \\ 1 & (t = \infty) \end{cases} \quad (3.44)$$

で与えられる。なぜならば、部材の寿命は  $j$  個のき裂のうち、最短の寿命のものが支配するからである。ところで、部材中の進展性欠陥個数を表す確率変数を  $J$  とすれば、よく知られているように  $J$  は Poisson 分布

$$P[J = j] = \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} \quad (3.45)$$

に従うとしてよい。ここに、 $\mu$  は部材中に存在するき裂の平均個数であって、通常、溶接部の体積  $V$  と単位体積中に含まれる進展性欠陥の個数の平均値  $p_V^*$  の積で与えられる。すなわち、

$$\mu = E[J] = V \cdot p_V^* \quad (3.46)$$

が成立し、 $p_V^*$  は適切なデータベースを参照して、値が設定される。

以上の考察から、 $J = j$  でかつ寿命  $T$  が  $t$  を超える結合事象の確率が容易に求まり、

$$\begin{aligned} P[J = j] \cdot P[T \leq t | J = j] &= P[J = j] \cdot H^{(j)}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} [1 - \{1 - H(t)\}^j] & (t < \infty) \\ \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} & (t = \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。いま、無作為に選ばれた部材の寿命分布を  $Q(t)$  と表せば、周辺分布を計算することによって  $Q(t)$  は容易に求められる。すなわち、 $t < \infty$  に対しては

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} [1 - \{1 - H(t)\}^j] \\ &= 1 - \exp[-\mu H(t)] \end{aligned}$$

となり、 $t = \infty$  に対しては、明らかに、 $Q(\infty) = 1$  が成立する。

以上をまとめて、結局、

$$Q(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-\mu H(t)] & (t < \infty) \\ 1 & (t = \infty) \end{cases} \quad (3.48)$$

が得られる。

### 3.7 初期欠陥分布並びにき裂発見能力曲線に関する考察

ここでは、初めに大型溶接構造物中の初期欠陥分布としてどのような分布形が適切かについて簡単に議論し、引き続いて最近のデータに基づき、き裂発見能力曲線の与え方に関する考察を加える。しかし、これらに関するデータには、溶接方法、材料、構造の違い等の影響、溶接技術者の技能、調査方法等のヒューマン・ファクターを含む数多くの不確定因子が含まれており、古いデータは現在の溶接技術に直接対応しないこともあることに注意しなければならない。

まず、溶接部の欠陥頻度に関しては、式(3.45)でもすでに述べたように、部材中の進展性欠陥の個数が Poisson 分布し、他の分布に従うと考える根拠もない。また欠陥寸法の分布に関し

ては、対数正規分布またはワイブル分布<sup>(3.64)</sup>、指数分布<sup>(3.65)</sup>、ガンマ分布<sup>(3.66)</sup>等が提案されている。

比較的新しく大型構造物に関するものとしては、佐藤ら<sup>(3.67)</sup>による建築鉄筋溶接部のデータ、浦部<sup>(3.68)</sup>による球型ガスタンクのデータ等があり、

$$g(x) = \lambda m x^{m-1} \exp[-\lambda x^m] \quad (3.49)$$

なる形の2母数ワイブル分布が推奨されている。

き裂発見能力曲線に関しても、ヒューマン・ファクターを含む不確定因子が多く、信頼性工学的に取り扱うべきだとの考えも古くからあり、実験的にも研究が進められているが、国内外のデータは少い。検査方法では超音波探傷に関するものが多い。中辻ら<sup>(3.69)</sup>は建築構造物鉄筋溶接の超音波探傷試験をまとめて、き裂発見能力曲線として

$$D(x) = \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^r \quad (x \geq x_0) \quad (3.50)$$

を提案しており、 $r = 1, x_0 = 5mm$  または  $r = 1.5, x_0 = 10mm$  なる値を得ている。市川<sup>(3.70)</sup>はある仮定の下に

$$D(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\kappa} \quad (\kappa > 0, \quad x \geq x_0) \quad (3.51)$$

を導き、0.5in を越える大きなき裂について、実際にこの式の形がよくあてはまることを示している。Packman<sup>(3.71)</sup>は各種非破壊検査方法による疲労き裂のき裂検出率を比較し、浦辺ら<sup>(3.68)</sup>は球型ガスタンクのデータから、 $x$  を  $mm$  で測ったき裂全長として

$$D(x) = 1 - \exp[-0.8x - 0.5] \quad (3.52)$$

を得ている。また、Berens と Hovey<sup>(3.72)</sup>は、 $x(mm)$  を見逃す最長き裂の長さとするとき、log-logistic 曲線

$$D(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 \ln x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 \ln x)} \quad (3.53)$$

が最もよく適合することを主張しており、Koul ら<sup>(3.73)</sup>もこれを用いて多くのデータを解析している。

一般に、繰返し点検下における部材信頼度低下の様子は、小さなき裂の発見能力よりも、大きなき裂を見逃す確率の違いの影響が大きいことが予想され、検査方法によっても著しく異なるものと思われる。実際、橋梁等の供用中点検では詳細な点検は困難であることをも考え合わせると、現在のところどのようなき裂発見能力曲線を仮定すべきかはそれほど明らかでないが、大きなき裂でよくあてはまることから、とりあえず式(3.51)あるいは式(3.53)を仮定して議論を進めるのも一案であろう。

### 3.8 おわりに

本研究では確率論的疲労き裂進展モデルの研究現状を概観した後、Tsurui & Ishikawa によって提唱されている死点を考慮したマルコフ近似モデルの理論的厳密さと利点を挙げて、構造物材の疲労損傷過程の信頼性解析に際しても、このモデルの使用が極めて有用であることを示唆した。次に、疲労き裂進展に対する信頼性解析の理論的枠組みを示すことを目的として幾何学的形状補正項を有する確率的き裂進展問題を取り上げて、Tsurui-Ishikawa モデルの概略を述べ、き裂長分布、き裂進展寿命分布を陽表的に導出した。このように本モデルでは分布形が陽に求まっているため、種々の信頼性解析に利用できる。例えば、板幅が寿命分布等に及ぼす影

響の解明、荷重の不規則性および進展抵抗の不規則性の影響の解明と荷重の相関時間、進展抵抗の相関距離の概念の重要性の示唆、さらには初期き裂長並びに初期き裂個数の不確定性を考慮に入れた信頼性解析等が可能である。

このモデルの有用性を示す例として、高信頼性の維持には供用中の点検が不可欠であるとの認識に立って、繰返し点検政策下における構造部材の信頼度評価法について考察した。すなわち、点検によりき裂が発見されたならば、直ちにその部材を交換する部材交換モデル、および再びき裂の成長が起こらないように完全に補修する完全補修モデルの両者を想定して、それらの特性を調べ、点検政策の重要性にも言及した。特に、橋梁部材等では、点検によってき裂が発見された場合、部材交換をせずに補助材等によってき裂が再び進展することのないよう完全な補修法が取られる点を考慮し、この場合には部材中に進展性き裂が複数個存在する状況下での信頼度評価法についても定式化を行った。その結果、得られた表式中には部材中の平均き裂個数を表すパラメータが現れ、これによって、溶接部の体積の大小、溶接技術の巧拙等が結果に反映されるようになった。しかし、まだ数値的に詳しく検討するには至っておらず、今後の研究に待たねばならない点も多い。

次に、点検・補修効果の信頼性評価に際してぜひとも必要となる考察は、どのような初期欠陥分布およびどのようなき裂発見能力曲線を採用すべきかということである。そこで、橋梁等の大型構造物の溶接部を想定して、データをもとに初期欠陥個数、初期き裂長分布、き裂発見能力曲線に関する考察を加えた。初期欠陥個数分布については、Poisson 分布が適当であることは万人の認めるところであり、定式化においてもこれを用いてある。他のものに関しては、種々の形が提案されているけれども、定説と言えるものはなく、今後更に検討を重ねる必要があるが、例えば、初期欠陥分布としては2母数ワイブル分布、き裂発見能力曲線としてはlog-logistic 曲線を用いるのも一法である。今後は、理論の中に現れるパラメータを同定すると共に、数値的検討を行って、その特性を把握することが肝要である。

### 3.9 参考文献

- (3.1) 岡村弘之, 板垣 浩, 強度の統計学的取扱い, 培風館 (1976).
- (3.2) 小西一郎, Shinozuka, M., 「鋼橋—基礎編 II」, (1977), p.805, 丸善.
- (3.3) 石川 浩, 鶴井 明, 「不規則荷重の統計的性質」, 材料, 31(1982), p.736.
- (3.4) Ishikawa, H., Tsurui A. and Ishikawa, H., “Some Aspects of Structural Reliability Assurance for Random Excitation Processes”, JSME International Journal, Series I, Vol.32, (1989), p.463.
- (3.5) 河本実, 石川 浩ほか, 金属の疲れと設計, (1972), コロナ社.
- (3.6) 西島 敏, 材料, 26 巻 280 号 (1977), p.50.
- (3.7) 石川 浩, 「実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析 (I~VIII)」, 材料, 24 巻 259~266 号 (1975), p.344(259 号), p.477(260 号), p.563(261 号), p.693(262 号), p.783(263 号), p.914(264 号), p.993(265 号), p.1072(266 号).
- (3.8) 河本 実, 石川 浩, 芝原 隆, 「炭素鋼疲労寿命の信頼性解析ならびに設計安全寿命に関する研究」, 材料, 25 巻 276 号 (1976), p.915.
- (3.9) 谷本敏夫, 網島貞男, 石川 浩, 「各種 FRP の片持回転曲げ疲労寿命の信頼性と設計安全寿命の研究」, 材料, 28 巻 304 号 (1979), p.40.

- (3.10) 石川 浩,「構造物の信頼性設計に関する研究の現状」, JSSC, 18 卷 192 号 (1982), p.3.
- (3.11) 鶴井 明, 石川 浩,「定常不規則荷重に対する疲労き裂進展寿命分布の理論的考察」, 日本機械学会論文集, 51 卷 461 号 A 編 (1985), p.31.
- (3.12) 石川 浩, 鶴井 明,「進展抵抗の不規則性を考慮した疲労き裂進展過程の確率モデル」, 日本機械学会論文集, 50 卷 454 号 A 編 (1984), p.1309.
- (3.13) 鶴井 明, 石川 浩,「疲労き裂進展に伴う部材信頼度の低下について」, 日本機械学会論文集, 51 卷 461 号 A 編 (1985), p.31.
- (3.14) Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, (1986), Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster.
- (3.15) Bogdanoff, J. L., “A New Cumulative Damage Model (Part I)”, *J. Appl. Mech.*, ASME Trans., Vol.45(1978), p.241.
- (3.16) 酒井達雄, 田中道七,「金属材料の疲労き裂進展寿命の分布特性に関する統計的研究」, 材料, 28 卷 312 号, p.880.
- (3.17) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L., “A Critical Analysis of Some Probabilistic Models of Fatigue Crack Growth”, *Eng. Frac. Mech.*, Vol.14(1981), p.189.
- (3.18) Yang, J. N., Salivar, G. C. and Annis, Jr., C. G., “Statistical Modeling of Fatigue Crack Growth in a Nickel-Base Superalloy”, *Eng. Frac. Mech.*, Vol.18(1983), p.257.
- (3.19) 市川昌弘, 浜口光夫, 中村武夫,「疲労き裂伝ば法則  $da/dN = C(\Delta K)^m$  における  $m$  と  $C$  の確率特性」, 材料, 33 卷 (1984), p.8.
- (3.20) Bogdanoff, J. L. and Kozin, F., “A New Cumulative Damage Model (Part 4)”, *J. Appl. Mech.*, Vol.47(1980), p.40.
- (3.21) Bogdanoff, J. L. and Kozin, F., “On Nonstationary Cumulative Damage Models”, *J. Appl. Mech.*, ASME Trans., Vol.49(1982), p.37.
- (3.22) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L., “On Life Behaviour under Spectrum Loading”, *Eng. Frac. Mech.*, Vol.18(1983), p.271.
- (3.23) Bogdanoff, J. L. and Kozin, F., *Probabilistic Models of Cumulative Damage*, (1985), John Wiley & Sons, New York.
- (3.24) 島田佳弘, 中川隆夫, 徳納久暁,「マルコフ連鎖を用いた疲労き裂進展寿命の信頼性解析」, 材料, 33 卷 (1984), p.475.
- (3.25) Dolinski, K. and Schuëller, G. I., “Methods of Probabilistic Fracture Mechanics in the Analysis of NPP Components”, *Proc. of 8th SMiRT (Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Technol.)*, Brussels, (1985).
- (3.26) Lin, Y. K. and Yang, J. N., “On Statistical Moments of Fatigue Crack Propagation”, *Eng. Frac. Mech.*, Vol.18(1983), p.243.
- (3.27) Sobczyk, K., “Modeling of Random Fatigue Crack Growth”, *Eng. Frac. Mech.*, Vol.24(1986), p.609.

- (3.28) Solomos, G. P., "First-Passage Solution in Fatigue Crack Propagation", *Prob. Eng. Mech.*, Vol.4(1989), p.32.
- (3.29) Tang, J. and Spencer, Jr., B. F., "Reliability Solution for the Stochastic Fatigue Crack Growth Problem", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.34(1989), p.419.
- (3.30) 木村雄二, 山田邦博, 清水真佐男, 国尾武, 「疲労き裂の伝ば速度に現われる統計的変動とその微視的組織要因について」, *日本機械学会論文集*, 42 卷 353 号 (1976), p.1.
- (3.31) 市川昌弘, 中村武夫, 「疲労き裂伝ば法則  $da/dN = C(\Delta K)^m$  におけるパラメータの確率変数化の方法」, *材料*, 34 卷 (1985), p.321.
- (3.32) Ditlevsen, O., "Random Fatigue Crack Growth - A First Passage Problem", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.23(1986), p.467.
- (3.33) Ortiz, K. and Kiremidjian, A. S., "Stochastic Modeling of Fatigue Crack Growth", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.29(1988), p.317.
- (3.34) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L., "On the Probabilistic Modeling of Fatigue Crack Growth", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.18(1983), p.623.
- (3.35) Oswald, G. F. and Schuëller, G.I., "Reliability of Deteriorating Structures", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.20(1984), p.479.
- (3.36) Ghonem, H. and Dore, S., "Probabilistic Description of Fatigue Crack Growth in Polycrystalline Solids", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.21(1985), p.1151.
- (3.37) Wu, W-F., "On the Markov Approximation of Fatigue Crack Growth", *Prob. Eng. Mech.*, Vol.1(1986), p.224.
- (3.38) Al-Sugair, F. H. and Kiremidjian, A. S., "A Semi-Markovian Model for Low-Cycle Elastic-Plastic Fatigue Crack Growth", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.34(1989), p.1197.
- (3.39) Tsurui, A. and Ishikawa, H., "Application of the Fokker-Planck Equation to a Stochastic Fatigue Crack Growth Model", *Structural Safety*, Vol.4(1986), p.15, Elsevier.
- (3.40) Tsurui, A., Tanaka, H. and Tanaka, T., "Probabilistic Analysis of Fatigue Crack Propagation in Finite Size Specimens", *Prob. Eng. Mech.*, Vol.4(1989), p.120.
- (3.41) Tsurui, A., Ishikawa, H. and Utsumi, A., "Theoretical Study on the Distribution of Fatigue Crack Propagation Life under Stationary Random Loading", *Proc. 2nd Int. Conf. Fatigue and Fatigue Thresholds*, (1984), p.949.
- (3.42) Ishikawa, H., Tsurui, A. and Utsumi, A., "A Stochastic Model of Fatigue Crack Growth in Consideration of Random Propagation Resistance", *Proc. of Fatigue-84*, Vol.1(1984), p.511, The Chameleon Press.
- (3.43) 田中泰明, 鶴井 明, 石川 浩, 「疲労き裂進展過程における不確定要因の相乗効果」, *材料*, 35 卷 (1986), p.1385.
- (3.44) Tanaka, H. and Tsurui, A., "Reliability Degradation of Structural Components in the Process of Fatigue Crack Propagation under Stationary Random Loading", *Eng. Frac. Mech.*, Vol.27(1987), p.501~515.

- (3.45) Ishikawa, H., Tsurui, A. and Kimura, H., "Stochastic Fatigue Crack Growth Model and Its Wide Applicability in Reliability-Based Design", CJMR, Vol.2(1987), p.45, Elsevier.
- (3.46) 鶴井 明, 石川 浩, 内海明博, 佐古 彰, 「形状効果を勘案した疲労き裂進展過程の確率モデル」, 材料, 35 卷 (1986), p.578.
- (3.47) 鶴井 明, 田中泰明, 「半楕円型表面き裂進展の確率論的解析」, 材料, 37 卷 (1988), p.996.
- (3.48) Tanaka, H. and Tsurui, A., "Random Propagation of a Semi-Elliptical Surface Crack as a Bivariate Stochastic Process", Eng. Frac. Mech., Vol.33(1989), p.787.
- (3.49) Tanaka, H. and Tsurui, A., "Stochastic Propagation of Semi-Elliptical Surface Cracks", Proc. of ICOSSAR'89, Vol.2(1990), p.1507, ASCE.
- (3.50) 佐古 彰, 鶴井 明, 「疲労き裂進展に伴う信頼度低下に及ぼす定期点検の影響」, 構造物の安全性および信頼性 (Proc. of JCOSSAR'87), Vol.1(1987), p.153, 日本材料学会.
- (3.51) Tsurui, A. and Sako, A., "Reliability Analysis of Fatigue Crack Growth Processes under Stationary Random Loading", Recent Studies on Structural Safety and Reliability (CJMR), Vol.5(1989), p.153.
- (3.52) Tsurui, A., Sako, A., Isobe, T. and Tanaka, T., "The Effect of Repeated Inspections on the Reliability Degradation Due to Fatigue Crack Growth", Proc. of ICOSSAR'89, Vol.3(1989), p.2131, ASCE.
- (3.53) 鶴井 明, 佐古 彰, 田中武夫, 「構造信頼性低下に対する繰返し点検の効果について」, 材料, 39 卷 (1990).
- (3.54) 鶴井 明, 田中泰明, 磯部泰成, 「過大荷重による遅延現象を考慮した疲労き裂進展寿命分布」, 材料, 40 卷 (1991).
- (3.55) Tsurui, A., Nienstedt, J., Schuëller, G. I. and Tanaka, H., "Time Variant Structural Reliability Using Diffusive Crack Growth Models", Eng. Frac. Mech., Vol.34(1989), p.153.
- (3.56) Tsurui, A. and Ishikawa, H., "The Effect of Initial Flaws on the Reliability Degradation of Structural Components Based on a Stochastic Fatigue Crack Growth Model", Structural Safety and Reliability (Proc. of ICOSSAR'85),(1985), III-495, IASSAR.
- (3.57) Tsurui, A., Ishikawa, H., Utsumi, A. and Tanaka, H., "Sensitivity Study on a Stochastic Fatigue Crack Growth Model under Stationary Loading", Mechanical Behaviour of Materials V (Proc. of ICM-5), Vol.1(1987), p.691.
- (3.58) Paris, P. C. and Erdogan, F., "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws", Trans. ASME, Ser. D, Vol.85(1963), p.528.
- (3.59) Tada, H., "A Note on the Finite Width Corrections to the Stress Intensity Factor", Eng. Frac. Mech., Vol.3(1971), p.345.
- (3.60) Yang, J. N. and Trapp, W. J., "Reliability Analysis of Aircraft Structures under Random Loading and Periodic Inspection", AIAA Journal, Vol.12(1974), p.1623.

- (3.61) Shinozuka, M., “Development of Reliability-Based Aircraft Safety Criteria; An Impact Analysis”, Tech. Rep. AFFDL-TR-76-36, Vol.1(1976).
- (3.62) Harris, D. O. and Lim, E. Y., “Application of a Probabilistic Fracture Mechanics Model to the Influence of In-Service Inspection on Structural Reliability”, ASTM STP, Vol.798 (1983), p.19.
- (3.63) Tanaka, T., “Reliability Assurance for Fatigue Crack Growth by Repeated In-Service Inspections”, Master Thesis Submitted to Faculty of Engineering, Kyoto Univ. (1990).
- (3.64) Bruckner, A., et al., “Curve Fitting to Defect Size Distributions for the Calculation of Failure Probability”, Nuc. Eng. & Design, 74(1982), p.75.
- (3.65) Harris, D. O., et al., “Probability of Pipe Fracture in the Primary Coolant Loop of a PWR Plant; Probabilistic Fracture Mechanics Analysis”, NUREG/CR-2181, 5(1981), pp.20~62.
- (3.66) Nilson, F., “A Model for Fracture Mechanics Estimation of the Failure Probability of Reactor Pressure Vessel”, Proc. 3rd Conf. on Pressure Vessel Technology, Tokyo, 1977.
- (3.67) 佐藤ほか4名, 「非破壊検査の信頼性を考慮した検査後の溶接品質とその支配因」, 溶接学会誌, 第50巻(1981), pp.47~52.
- (3.68) 浦辺, 「磁粉探傷試験結果」, 62LE-PFM 分科会資料, PFM-49(1988).
- (3.69) 中辻ほか4名, 「建築鉄骨溶接部における超音波手動探傷試験の信頼性—その2. 欠陥検出率」, 非破壊検査, 第30巻(1981), p.257.
- (3.70) 市川, 「統計破壊力学の諸問題」, 日本機械学会論文集, 第50巻A編(1984), pp.1435~p.1442.
- (3.71) Packman, P. F., “Definition of Fatigue Crack through Nondestructive Testing”, Review of Progress in Nondestructive Evaluation (Eds. D. O. Thompson and D. E. Chimento), Vol.1(1992), pp.579~585.
- (3.72) Berens, A. P. and Hovey, P. W., “Characterization of NDE Reliability”, Review of Progress in Nondestructive Evaluation, (Eds. D. O. Thompson and D. E. Chimento).
- (3.73) Koul, A. K., Bellinger, N. C. and Falrr, A., “Damage-Tolerance-Based Life Prediction of Aeroengine Compressor Discs : I. A Deterministic Fracture Mechanics Approach”, Vol.12(1990), pp.379~387.



## 4. リベット孔列に発生する疲労き裂群の検討

### 4. 1 はじめに

経年機体の特に胴体外板では、リベット継手の孔列に発生する疲労き裂群が安全の見地から問題になっている。それを調べる予備的な試験として、多数リベット孔を有するアルミ合金板の疲労試験を行ってきた。この試験で解析することをまとめると次のようになる。

- (1) 疲労き裂の発生
- (2) 疲労き裂の進展と合体
- (3) 残留強度

この試験は現在続行中であり、まだ解析も不十分であるが、疲労き裂の発生と残留強度に関して解析を試みたので、その結果について簡単に紹介する。

### 4. 2 供試体

材料は板厚 0.056in(1.4mm)の2024-T3 clad(Ulti.strength=62.2ksi(429MPa),Yield stress(0.2% offset)=44.9ksi(309MPa),Elong.=16.5%)で、試験片形状はFig.4.2.1に示す。

### 4. 3 負荷条件

応力比 $R=0$ で荷重振幅 $\Delta \sigma_{\infty}$ を load case 1=16.3ksi(112MPa),load case 2=17.9ksi(123MPa),load case 3=19.5ksi(134MPa)の3とおりとし、繰返し速度は約3 Hzとした。

### 4. 4 試験結果

疲労き裂の発生と進展の計測は適宜な間隔で行った。発生したき裂はある計測で発見するが、それは前回の計測と今回の間で発生したと考える。計測には読み取り顕微鏡を用いているため、極く短い段階で発生したき裂を発見できる。また、計測する条件が良いため、き裂長さが0.5~1.0mmになれば、目視であっても殆ど発見できる。

疲労き裂の発生と進展の例を Fig.4.4.1 に、疲労き裂進展の例を Fig.4.4.2 に示す。

また、 $S \sim N_f$ 線図をFig.4.4.3 に、 $N_f$ の累積頻度分布を Fig.4.4.4 に示す。

破断繰返し数の対数値の平均値と標準偏差は以下のようなになる。

Load Case	Mean	STD
load case 1	Mean=4.99(96,900cycles)	STD= 0.049
load case 2	Mean=4.85(70,400cycles)	STD= 0.052
load case 3	Mean=4.78(59,700cycles)	STD= 0.032

有効断面の破断応力 ( $\sigma_{nf}$ ) の累積頻度分布をFig.4.4.5 に示す。

使用できる有効なデータが少ないため判断は難しいが、耐力はほぼ50%程度である。

#### 4.5 疲労き裂発生寿命分布の推定

##### 4.5.1 計算方法

リベット孔の両側に発生する疲労き裂の発生寿命に関して、その確率密度関数 PDF と母数、および両側に発生するき裂の間の相関係数を推定する。その方法には、これまで検討してきたBayesの方法<sup>1),2)</sup>を用い、事後確率の最頻値を推定値として採用する。

各リベット孔の両側に発生するき裂を、始めに発生した組（第1組）と次に発生した組（第2組）に分ける。第1組の確率変数を  $X$ 、第2組のそれを  $Y$ 、相関係数を  $\rho$  とすれば、 $X$ と $Y$ の結合確率密度関数 JPDF  $P(x, y : \rho)$ は次のようになる。

$$p(x, y : \rho) = p'(x, y : \rho) / \int_0^{\infty} \left\{ \int_x^{\infty} p'(x, y : \rho) dy \right\} dx$$

$$x \leq y \tag{4.5.1}$$

推定したい母数の事前確率  $P^{i-1}$  と事後確率  $P^i$  と置いた時、 $i$ 番目のデータである  $(x_1 \leq x_i \leq x_u, y_1 \leq y_i \leq y_u : x_i \leq y_i)$ を得た場合の Bayes の式は、

$$P^i(\{A_x\}, \{A_y\}, \rho) \propto L^i(x, y), P^{i-1}(\{A_x\}, \{A_y\}, \rho)$$

$$\{A_x\} = \{a_x, b_x, \dots\}, \{A_y\} = \{a_y, b_y, \dots\} \tag{4.5.2}$$

ここで、 $L^i$ は尤度であり、条件付きに置き換えた(4.5.1)式を用いて次式により与えられる。

$$L_{xy}^i(x, y) = P(x_1 \leq x_i \leq x_u, y_1 \leq y_i \leq y_u | \{A_x\}, \{A_y\}, \rho) \tag{4.5.3}$$

本来は、(4.5.2)式を用いて母数を推定する方法が最も良い。しかし、それでは一度に推定する母数が多くなり、計算が難しくなる。そこで、次ぎのような簡単化を行う。まず、 $x$ の母数、 $y$ の母数と $\rho$ を別々に推定するために、 $y$ に対する周辺分布と $x$ に対する周辺分布(4.5.3)式と同様に(4.5.1)式を用いて求める。

$$p_x(x | \{A_x\}) = \int_0^{\infty} p(x,y | \{A_x\}, \{A_y\}, \rho) dy \quad (4.5.4)$$

$$p_y(y | \{A_y\}) = \int_0^{\infty} p(x,y | \{A_x\}, \{A_y\}, \rho) dx \quad (4.5.5)$$

$x, y$ の各々について、推定したい母数の事前確率を $P_x^{i-1}, P_y^{i-1}$ , 事後確率を $P_x^i, P_y^i$ , とすれば

$$P_x^i(\{A_x\}) \propto L_x^i(x) P_x^{i-1}(\{A_x\}) \quad (4.5.6)$$

$$P_y^i(\{A_y\}) \propto L_y^i(y) P_y^{i-1}(\{A_y\}) \quad (4.5.7)$$

を得る。ここで、 $L_x^i(x)$ と $L_y^i(y)$ は(4.5.4)と(4.5.5)式より、

$$L_x^i(x) = P_x(x_1 \leq x_i \leq x_u | \{A_x\}) \quad (4.5.8)$$

$$L_y^i(y) = P_y(y_1 \leq y_i \leq y_u | \{A_y\}) \quad (4.5.9)$$

このようにして $x$ と $y$ の母数は推定するが、事後確率の最頻値を推定値とする。次ぎに $x$ と $y$ の相関係数を推定する。(4.5.1)式のJPDFが正規分布(対数正規分布)である場合、またはそれから導かれるRayleigh分布<sup>3)</sup>については、相関係数を有する式が与えられているが、JPDFがWeibull分布とか、Weibull/Log-normal分布の場合には、相関を有する式は与えられていない。筆者らはそのような場合、相関を有する正規乱数を直接変換し、試行錯誤を繰返しながら所定の相関を有するWeibull乱数を発生させることを試み、条件を満たすものを作ることに成功した<sup>4~6)</sup>。今回もそれと同じ方法を逆の立場から利用する。すなわち、(4.5.4)と(4.5.5)式が例えば何れもWeibull分布である場合、それを(4.5.10)式の標準正規分布へ $x$ と $y$ は各々 $\xi$ と $\eta$ で直接変換し、その相関係数によって相関の程度を評価する。ここでは、この相関係数を等価相関係数(Equivalent correlation coefficient)と称する。

$$p(\xi, \eta : \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}(\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2)\right\} / C \quad (4.5.10)$$

$$C = \left\{ \int_{\xi(x \leq y)} p(\xi, \eta : \rho) d\xi \right\} d\eta$$

$\xi(x \leq y)$ :  $x \leq y$ の条件を満たす  $x$  に対応する値

疲労亀裂発生寿命が正確に計測される場合には、第1組と第2組の等価相関係数は、次ぎの式から求めるものと同じになる。

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\left\{ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 \right) \right\}^{1/2}} \quad (4.5.11)$$

しかし、今回の試験のように亀裂発生を区間で計測する場合には、次ぎのように Bayesの方法を用いる。(4.5.6)と(4.5.7)式の推定に用いたデータと同じものを使うが、 $i$ 番目のデータについて、第1組と第2組の間には

1.  $x_1 \leq x_i \leq x_u$ : 破断以前に亀裂が発生しない場合には、 $x_u \geq N_f$   
 $x_1 \leq y_i \leq y_u$ : 破断以前に亀裂が発生しない場合には、 $y_u \geq N_f$
2.  $x_1 \leq x_i \leq x_u$ : 破断以前に亀裂が発生しない場合には、 $x_u \geq N_f$   
 $x_1 = y_1 \leq y_i \leq y_u = x_u$ : 破断以前に亀裂が発生しない場合には、 $y_u \geq N_f$

の何れかの関係があるので、各々に対応する尤度は(4.5.1)式と(4.5.10)式を用いて次式により与えられる。但し、 $x$ と $y$ の母数の推定値には前述したように、事後確率の最頻値を用いる。

$$\begin{aligned} 1. \quad L_{xy}^i(x, y) &= \int_{x_1}^{x_u} \left\{ \int_{y_1}^{y_u} p(x, y : \rho) dy \right\} dx \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_u} \left\{ \int_{\eta_1}^{\eta_u} p(\xi, \eta : \rho) d\xi / C \right\} d\eta \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad L_{xy}^i(x, y) &= \int_{x_1}^{x_u} \left\{ \int_{x_1}^{y_u} p(x, y : \rho) dy \right\} dx \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_u} \left\{ \int_{\xi(x \leq y)} p(\xi, \eta : \rho) d\xi / C \right\} d\eta \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

以上の式を用いれば、等価相関係数 $\rho$ の事前確率 $P^{i-1}(\rho_j)$ と事後確率 $P^i(\rho_j)$ の間には、次ぎの関係が求まる。

$$P^i(\rho_j) \propto L_{xy}^i(x,y) P^{i-1}(\rho_j) : j = 1,2,3,\dots,m \quad (4.5.14)$$

#### 4. 5. 2 推定結果とその検討

第1組の亀裂発生と第2組の亀裂発生のPDFとして、何れに対しても3母数Weibull分布と3母数Log-normal分布の2分布を考え、

$$p(x|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x-\alpha}{\beta} \right)^\alpha \right\} \quad (4.5.15)$$

$$p(z|\mu,\sigma,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} : z = \log(x-\varepsilon) \quad (4.5.16)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \sigma, \varepsilon$  及び標準正規分布に置き換えた時の等価相関係数 $\rho$ を推定する。

このように、異なる分布も同時に考慮して、すなわちPDFとその母数も同時に推定する場合には、各母数値に関する最初の事前確率 $P^0$ が等しくなるように置く。

$$\sum_j \sum_k \sum_l P^i(\alpha_j, \beta_k, \gamma_l) + \sum_{j'} \sum_{k'} \sum_{l'} P^i(\mu_{j'}, \sigma_{k'}, \varepsilon_{l'}) = 1 \quad (4.5.17)$$

$$\text{かつ、} P^0(\alpha_j, \beta_k, \gamma_l) = P^0(\mu_{j'}, \sigma_{k'}, \varepsilon_{l'}) \quad (4.5.18)$$

また、 $\rho$ についても最初の事前PDFはFlat priorに置く。

Table 4.5.1 は前記した3種類のLoad case について推定した結果である。表中の推定Case 1では亀裂の発生しないデータを除いたが、Case 2ではそのようなデータも推定に用い、双方の比較を試みた。

1. Case 1とCase 2を比較すれば、位置母数は相当に敏感に変化するが、形状母数、尺度母数と相関係数については顕著な差が見られない。すなわち、亀裂が発生しなかったデータを推定に用いても、位置母数以外に対しては影響が少ない。

2. Load case 1では第1組も第2組も3母数Weibull分布であると推定しているがLoad case 2と3では3母数Log-normal分布も可能性の高い分布であると推定している。

3.  $\alpha$ は大きくまた $\sigma$ は小さい。すなわち、バラツキは相当に小さい。

4. 第1組と第2組の亀裂発生の繰返し数は、平均値で見て何れのLoad case も5,000回程度の差である。

5. 等価相関係数 $\rho$ は0.83~0.91の間にあり、第1組と第2組の亀裂発生の方に強い相関のあることを示している。

#### 参考文献

- (1) 板垣、小川、山本、”疲労寿命の確率分布推定法について（ベイジアンアプローチ）”、日本造船学会論文集、No.141,6/1987, pp263-268
- (2) 篠塚、板垣、朝田、”ベイズの方法を用いた欠陥分布と欠陥発見率の推定方法”、第20回構造強度に関する講演会講演集、7/1988, pp.148-151
- (3) 南、板垣、小川、”鋼の低サイクルランダム疲労に関する研究（第2報）荷重系列の影響についての考察”、日本造船学会論文集、No.126,12/1969, pp.89-98
- (4) 板垣、伊藤、朝田、”相関を有する破壊じん性値の確率分布”、日本機械学会第20回シンポジウム、材料および構造物の破壊と強度評価講演論文集、No.810-7, pp.77-82
- (5) Grigoriu, M., "Crossing of Non-Gaussian Translation Processes", ASCE, J. Engrg. Mech., Vol.110, No.4, 4/1984, pp.610-620
- (6) Grigoriu, M., "Extremes of Correlated Non-Gaussian Series", ASCE, J. Struc. Engrg. , Vol.110, No.7, 7/1984, pp.1485-1494

Table 4.5.1 Results of Bayesian estimation

Estimate case	Load case	Group	Distribution	$\alpha/\sigma$	$\beta/\mu$	$r/\epsilon$	Mean	$\rho$
1	1	1	Weibull	9	85000	3400	83900	0.89
		2	Weibull	9	90000	3600	88900	
	2	1	Weibull	9	50000	14000	61400	0.83
		2	Log-normal	0.03	4.8	2500	65600	
	3	1	Weibull	14	55000	0	53000	0.88
		2	Weibull	11	45000	14400	57400	
2	1	1	Weibull	8.5	90000	3600	88500	0.91
		2	Weibull	8.5	90000	10800	95700	
	2	1	Log-normal	0.07	4.66	18300	64000	0.87
		2	Log-normal	0.05	4.72	15700	68200	
	3	1	Log-normal	0.05	4.72	2100	54600	0.90
		2	Weibull	13	55000	6600	59400	

Unit of  $\beta$ ,  $r$ ,  $\epsilon$  and mean : cycles

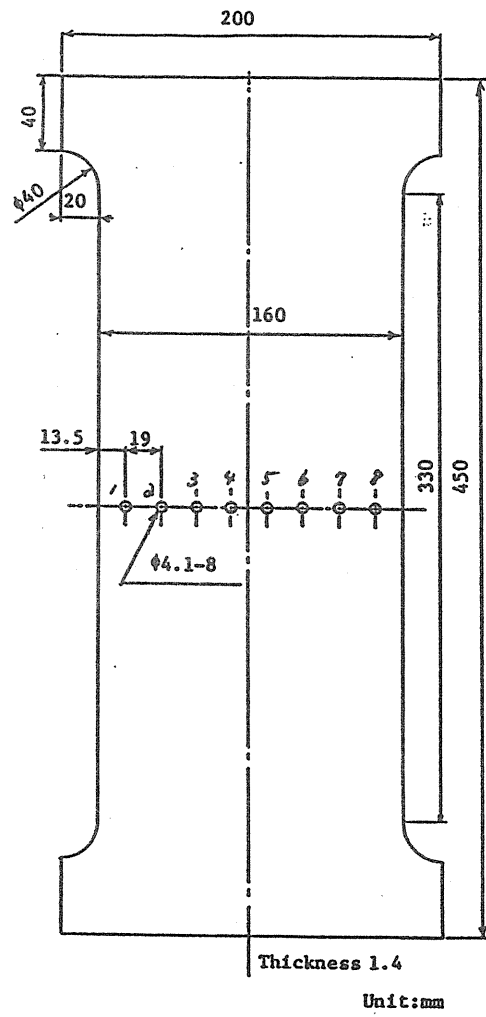


Fig.4.2.1 Test specimen



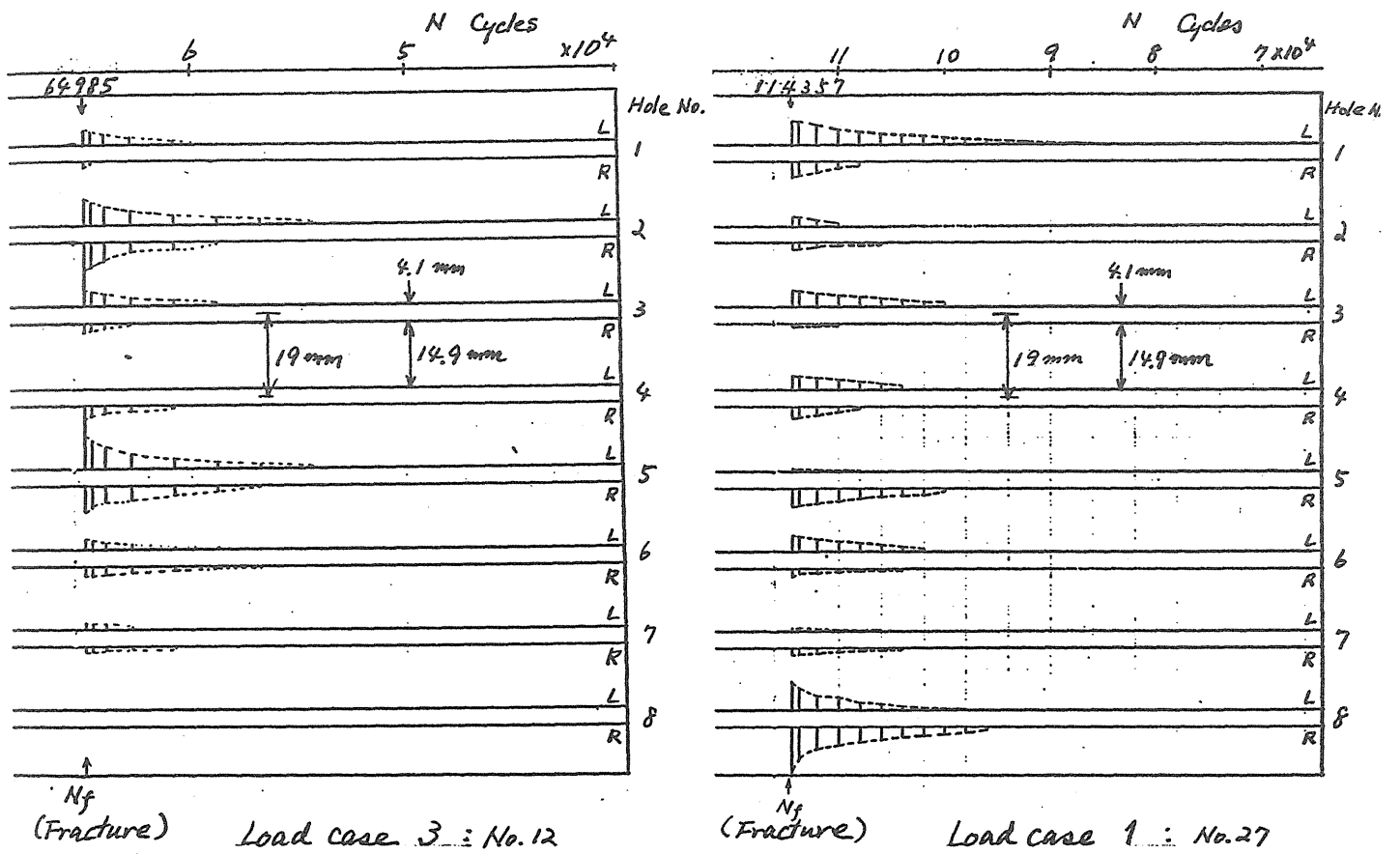


Fig. 4.4.1 Examples of fatigue crack initiation and propagation

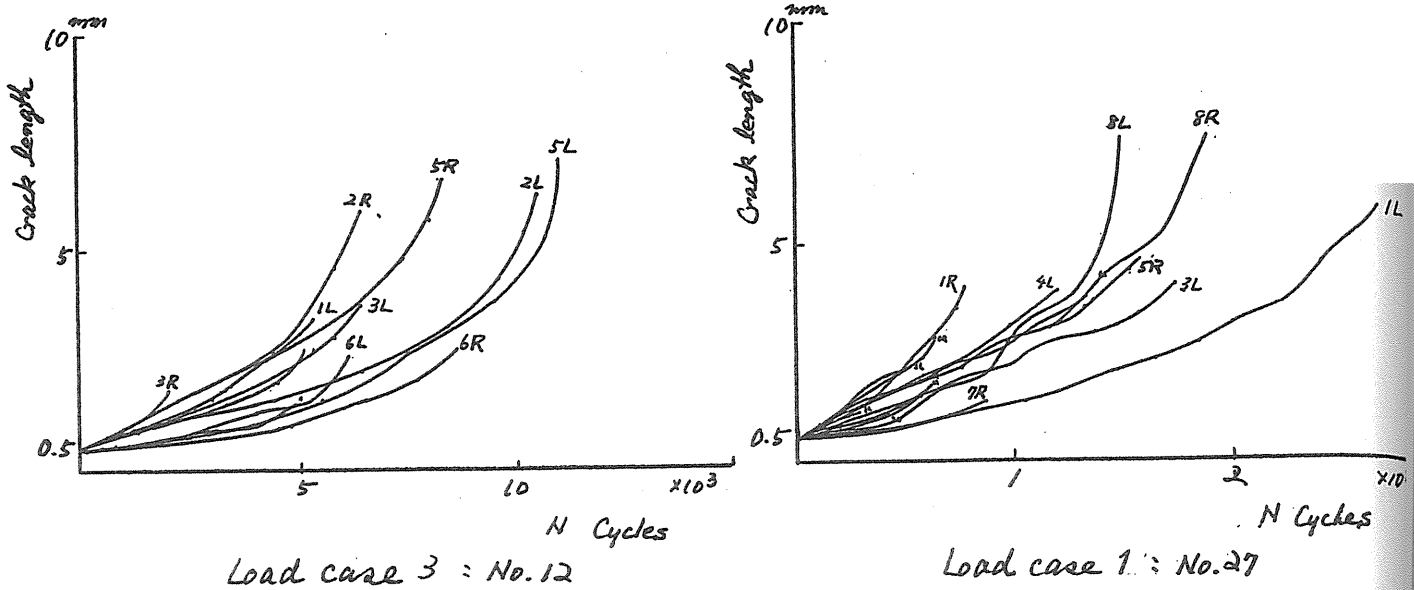


Fig.4.4.2 Examples of fatigue crack propagation

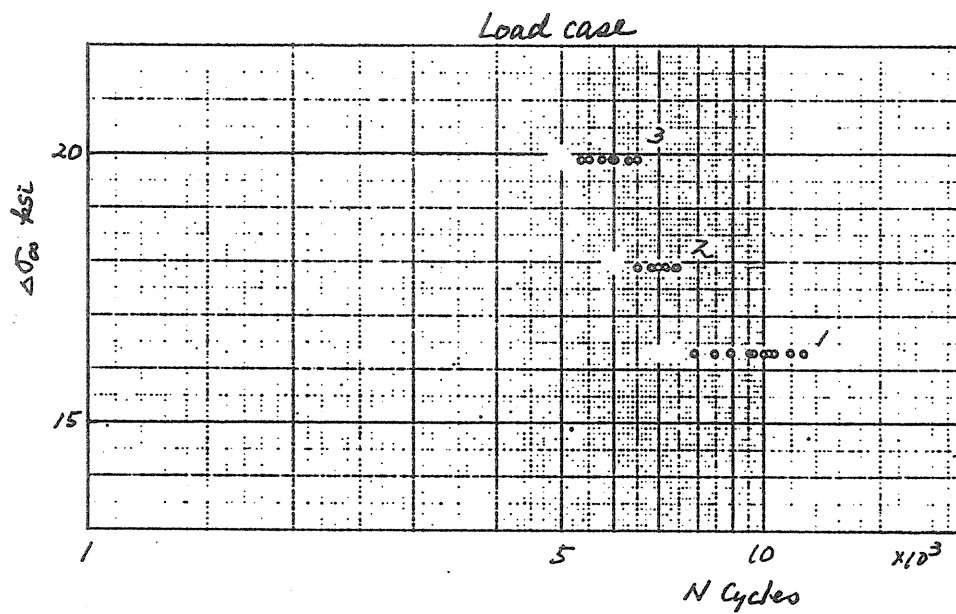


Fig.4.4.3 S -  $N_f$  relation

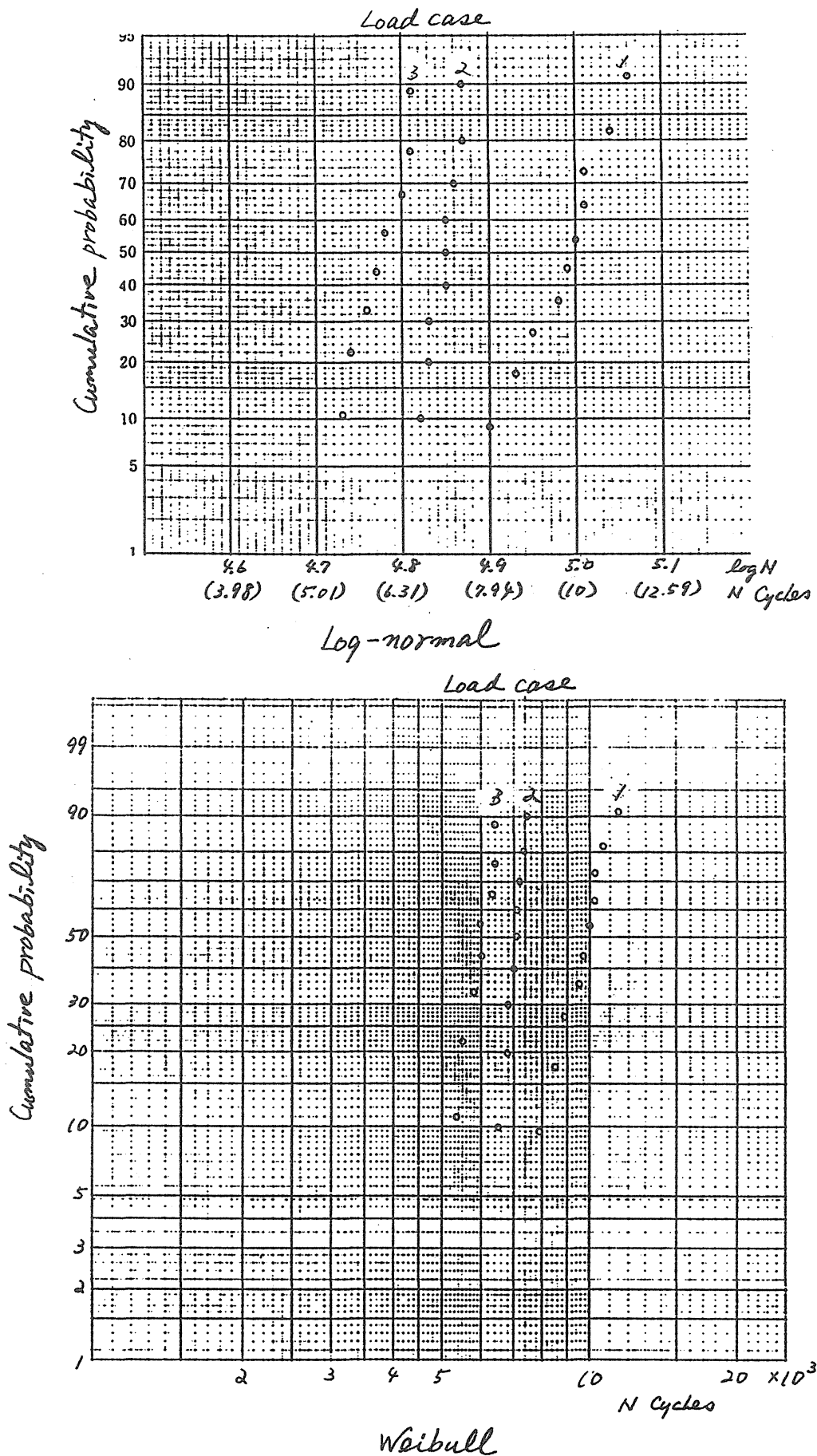


Fig. 4.4.4 Cumulative probability distribution of  $N_f$

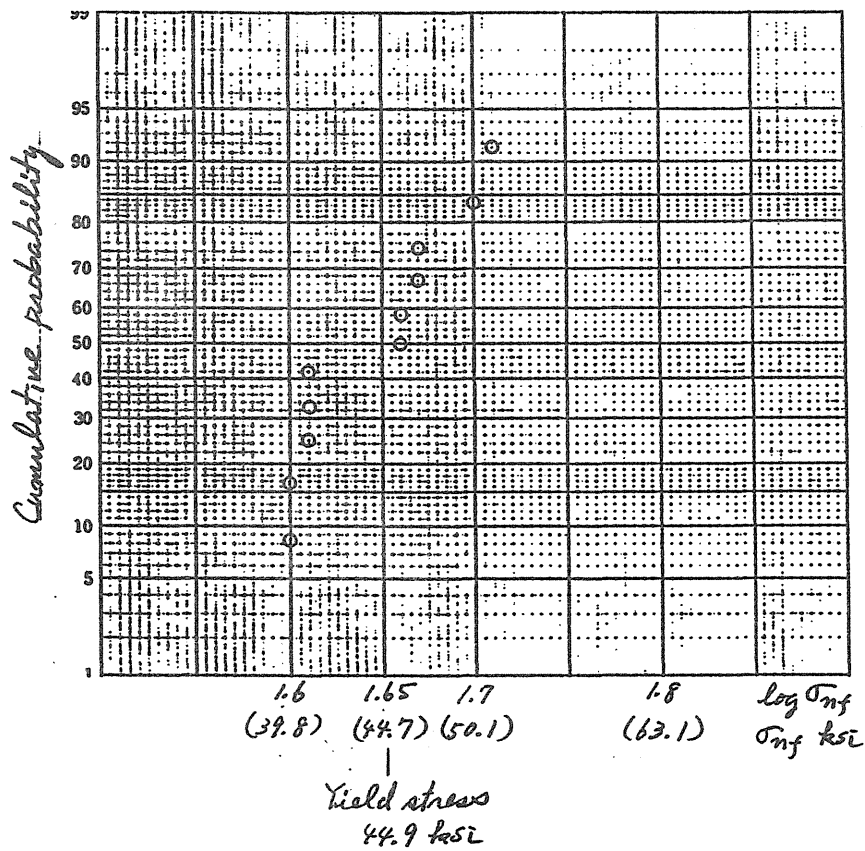


Fig.4.4.5 Cumulative probability distribution of  $\sigma_{nr}$

## 5. 破壊特性の確率論的研究

鋼構造物における最終的な損傷形態は、き裂群の成長の結果として起こる漏洩、断面欠損による塑性崩壊、脆性的な不安定破壊への移行など各種の形態がありうる。本章では、その内、構造物の大規模かつ最も致命的な損傷につながることの多い脆性破壊を取り上げ、それを決定する重要な要因である材料の破壊靱性に関する確率論的研究の結果について報告する。

### 5.1 はじめに

大型構造物に使用される鋼材の脆性破壊は、微視的形態としてはへき開形破壊をとる。鋼のへき開破壊は、古くから破壊応力論として知られているように応力支配形の破壊とされ、近年の冶金的的研究においても材料の組織形態に拘らず、基本的には生成された微視き裂の伝播過程が強度を律速し、その過程は引張り応力支配であるとされている<sup>1)</sup>。微視き裂の核生成はフェライト組織では粒界炭化物<sup>2)</sup>、ベイナイト、マルテンサイト組織においても微細な炭化物に生じるとする説<sup>3)</sup>が有力であるが、非金属介在物や島状マルテンサイトが核となっている場合もあるようである。いずれにせよそれらの過程は確率過程であり、微視き裂の巨視的伝播は通常、不安定伝播となるので鋼のへき開破壊はセラミックスなどと同様、最弱リンク概念に従った挙動を示すことが知られている<sup>4-7)</sup>。

破壊力学的に評価される破壊靱性は、き裂端近傍における応力場と微視き裂の核生成、その後の巨視的伝播過程を律速する力学的条件との相対的關係で決定され、その構成要因は材料の構成式と、微視き裂伝播過程の力学的条件すなわち確率論的に表現された応力条件ということになる。本研究では、最弱リンクモデルに基づいた破壊靱性構成要因の定式化を行い、それに基づいて破壊靱性に対する材料組織的因子の影響、板厚の影響、破壊靱性の確率分布などについて検討する。

### 5.2 破壊靱性構成要因の確率論的モデルによる定式化

鋼のへき開破壊が応力支配の破壊であるとし、Weibull型の最弱リンク概念に

従うとすると、統計的な単位体積を  $V_0$  として、ある体積  $V$  を有する材料が一様な応力  $\sigma$  の作用下で破壊する確率を次の Weibull 分布で与える<sup>5)</sup> (Fig. 5.2.1(a))。

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \quad (1)$$

ここで、 $m, \sigma_0$  はそれぞれ Weibull 形状係数、尺度係数である。き裂や切欠きの存在により応力勾配がある場合には、任意の位置での応力を  $\sigma_i$  として、次式で与えられる (Fig. 5.2.1(b))。

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\int_V \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] \quad (2)$$

$$= 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_0}\right)^m\right] \quad (3)$$

(3) 式中の  $\sigma_w$  が確率論的な寸法効果を考慮した一般性のあるへき開破壊応力ということになり、一般に Weibull stress と呼ばれている。

き裂の場合、応力分布は応力拡大係数や  $J$  積分などの破壊力学パラメータとある限定条件のもとでは次式のような一義的な関係がある。

$$\sigma_{ij} = g(r/J, \theta) \quad (4)$$

ここで、 $r, \theta$  はき裂先端を中心とした極座標値である。(2), (3) 式に(4)式を適用すれば、(3) 式中の  $\sigma_w$  を  $K$  あるいは  $J$  で表現することが可能である。(2) 式の積分範囲が応力で規定される領域 (ある数値を越えた領域) であるとし、板厚貫通き裂でき裂前縁に沿って応力状態は変化しないものと仮定する。(2) 式の応力分布として解析解 (例えば HRR 解) を用いると Weibull stress  $\sigma_w$  は次のようになる。

$$\sigma_w^m = B \left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^4 \sigma_{ys}^m f(m, n, V_0) \quad (5)$$

ここで、 $B$  は板厚、 $\sigma_{ys}$  は降伏応力、 $n$  はひずみ硬化指数、 $f(m, n, V_0)$  は  $m, n, V_0$  に依存する定数である。(5) 式を(3)式に適用すると、 $K$  に対する破壊確率が次式のように得られる。

$$F(K) = 1 - \exp \left[ -B \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^4 \left( \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_o} \right)^m f(m, n, V_o) \right] \quad (6)$$

(6)式は破壊靱性の確率分布はWeibull分布となり、その形状係数は破壊靱性をK値で評価した場合、材料にかかわらず4となることを意味している<sup>8,9)</sup>。

ある特定の破壊確率に対するKcの期待値は、

$$K_c = \frac{C(m, n, V_o)}{B^{1/4}} \sigma_{ys} \left( \frac{\sigma_o}{\sigma_{ys}} \right)^{m/4} \quad (7)$$

ここでC(m, n, V<sub>o</sub>)はm, n, V<sub>o</sub>に依存する定数である。(7)式は、へき開破壊応力が温度によらず一定とすると、破壊靱性の温度依存は主として材料の降伏応力σ<sub>ys</sub>の温度依存によって決まることを意味し、また切欠き丸棒試験と破壊靱性との関連を調べる上での理論的基礎を与えるものである。

### 5.3 確率論的破壊靱性モデルの検証

#### 5.3.1 供試材、試験片および実験方法

供試材はフェライト組織を持つ軟鋼SM41B、下部ベイナイト組織を有するNi-Cr-Mo-V鋼の細粒材(旧オーステナイト粒径40μm)、粗粒材(同800μm)および島状マルテンサイトを有する下部ベイナイト組織の実験室溶解鋼(Steel A)である。Steel Aは500MPa級高張力鋼の多層溶接熱影響部の粗粒域再熱脆化域<sup>10)</sup>をシミュレートした熱サイクル再現材で意図的に脆化させた材料である。これら供試材の化学成分、機械的性質をそれぞれTable 5.3.1, 5.3.2に示す。

実験はFig.5.3.2(a)に示す1mmR円周切欠き丸棒試験片を用い、15本(Steel A)から31本(SM41B)、-196℃(液体窒素中)で引張試験を行った。それにより得られたへき開破壊時の荷重を用い、各材料の構成式を用いたFEM解析により有効体積を考慮したへき開破壊応力(Weibull cleavage stress)を算定した。また、各供試材の降伏応力の温度依存性を求めるために、Fig.5.3.2(b)に示す砂時計型の丸棒引張試験片を用いて、室温から-196℃(液体窒素中)に至る6から7温度で引張試験を行った。降伏応力はFig.5.3.2(b)試験片の中央最小断面部に貼ったひずみゲージで測定した0.2%耐力を用いた。破壊靱性試験には板厚20mm(SM41B)および10mmの三点曲げ試験片(Steel A)と1T-CT試験片(Ni-Cr-Mo-V

鋼)を用いた。各温度での破壊靱性を求めた他、特定の温度で複数の靱性試験を行い、その確率分布を調べた。靱性値は不安定破壊開始点をJ積分で評価し、K値相当に換算した。なお、Ni-Cr-Mo-V鋼に関する実験は学術振興会第129委員会(委員長横堀武夫帝京大教授)における共同研究の一環として行われたものであり、他機関で行われた試験結果<sup>11)</sup>も一部引用させて頂いた。

### 5.3.2 有限要素法解析による Weibull stress 解析

(3)式に示したWeibull stress  $\sigma_w$ の形状係数 $m$ 、尺度係数 $\sigma_0$ は材料固有の定数と考えられるが、これを求めるには実験結果をFEMにより解析する半実験的手法を用いなくてはならない。き裂問題のように応力勾配が大きい場合にはFEM要素はかなり細かくする必要があるが、き裂のごく先端近傍では応力は要素寸法に依存し、また迂りによる鈍化(ストレッチゾーンの形成)を考慮に入れない場合にはFEM解は一般にかなり高い値を与える。一方、Weibull形状係数 $m$ は通常10より大きな値をとるので、応力勾配が大きい場合、(3)式の計算に際して応力解析の精度が大きく影響を及ぼしてくる。

本研究では先ず応力勾配が比較的小さく、FEM解析の精度上問題の少ない1mmR切欠き丸棒試験片について、へき開破壊応力の分布を求め、尺度係数 $\sigma_0$ 、形状係数 $m$ を各材料について求めた。次いで三点曲げ試験片について同様のFEM解析を行ったが、こちらでは主として破壊靱性とへき開破壊応力、降伏応力との関係を与える(7)式の妥当性を数値実験的に検討し、(7)式の係数 $C(m, n, V_0)$ に及ぼす各種因子の影響を調べた。

#### 円周切欠き付丸棒試験片

解析には8節点アイソパラメトリックリング要素を用いた弾塑性FEMを用いた。解析に際してはそれぞれの供試材に対して-196℃において実験的に求めた構成式を用いた。 $\sigma_w$ を求めるには(2)式中の体積積分を行う必要があるが、計算上は次式のように取り扱った。

$$\sigma_w = \left[ \sum \frac{V_i}{V_0} \sigma_{pi}^m \right]^{1/m} \quad (8)$$

ここで $V_i$ 、 $\sigma_{pi}$ は $i$ 番目の要素の体積と最大主応力、 $V_0$ は単位体積であり冶金的因



子により材料間で変化することが予想されるが、ここでは最小要素体積(0.094mm<sup>3</sup>)とした。(2)式の積分範囲、すなわち(8)式の有効体積の範囲は塑性域とした。塑性域すべてが破壊に参与するか否か(破壊が起こり得るか)については問題があるが、へき開破壊の微視モデルより考えるとへき開破壊の必要条件としては妥当であると思われる。(8)式による $\sigma_w$ はFEM増分計算の各段階について求められるが、-196℃における1mmR切欠き丸棒引張試験で各試験片が破壊した荷重を内挿して材料固有の $\sigma_w$ とした。この $\sigma_w$ の算出に際しては $\sigma_w$ に関するWeibull分布の形状係数 $m$ が必要となるため、(8)式の $m$ にある任意の初期値を与え、得られた $\sigma_w$ のWeibull形状係数が $m$ と一致するまで収束計算を行った。Weibull係数の算定にはすべて最小自乗法を用いた。

### 三点曲げ靱性試験

解析は8節点アイソパラメトリック4角形要素を用いた2次元FEMにより、平面ひずみ状態で行った。本解析では切欠き底半径8 $\mu$ mの切欠きをき裂と見なしている。また、解析においてはき裂前方の経路積分を行って $J$ 値を算定し、 $K$ 値相当に換算した。増分計算の各段階において、き裂前方の塑性域に(8)式を適用し、 $\sigma_w$ を算定した。その際、 $V_0$ は1mmR切欠き丸棒試験片の解析と同じ値を用いた。

### 5.3.3 解析および実験結果と考察

#### 切欠き丸棒試験法におけるへき開破壊応力の分布

FEM解析により求めた切欠き丸棒試験片の-196℃における $\sigma_w$ のWeibullプロットをFig.5.3.3に示す。材料によっては統計解析するには十分な試験数と言えないものもあるが、いずれの材料の $\sigma_w$ もほぼWeibull分布に従っていることがわかる。ばらつきを示すWeibull形状係数 $m$ は靱性の低いSteel AおよびNi-Cr-Mo-V鋼粗粒材で小さく、靱性の高いNi-Cr-Mo-V鋼細粒材で最も大きい。これは島状マルテンサイト、粗粒などの脆化要因が破壊応力のばらつきを増大させているためと思われる。溶接熱影響部粗粒域を再現したSteel Aの破壊応力は、ばらつきは大きいものの、値そのものは必ずしも低下していないことは注目される。これは(7)式から予想されるように靱性は破壊応力のほか降伏応力の関数ともなっているためである。

#### 破壊靱性とへき開破壊応力

はじめに(5)式の妥当性をFEM解析により検証し、(5)式あるいは(7)式の定数項が材料によってどの程度変動するか検討した結果を述べる。三点曲げ靱性試験片のFEM解析を各材料の-196℃での構成式を基に行い、Weibull stress  $\sigma_w$ を各荷重増分段階で算定し、 $K$ 値との関係を見たのがFig.5.3.4である。Weibull形状係数 $m$ は1mmR切欠き丸棒引張試験で得られた値を用いた。横軸は(5)式に従い、 $\sigma_{ys} (\sigma_w / \sigma_{ys})^{m/4}$ で示してある。本FEM解析においても $K$ 値の小さい領域を除いてほぼ(5)式の比例関係が成り立っており、(5)式がほぼ妥当なものであることを示している。

一方、(7)式はへき開破壊靱性を構成する要因を具体的に示したものと理解することができる。低炭素構造用鋼の破壊靱性はシャルピ衝撃試験の吸収エネルギーと同様、温度に強く依存する。へき開破壊応力の温度依存性は一般に小さいとされている<sup>12)</sup>ので、へき開破壊靱性の温度依存性を決めているのは、(7)式より降伏応力 $\sigma_{ys}$ と係数 $C(m, n, V_0)$ ということになる。 $C(m, n, V_0)$ は $m, V_0$ といった材料定数の他、材料の構成式(降伏応力 $\sigma_{ys}$ 、ひずみ硬化指数 $n$ )の関数であり、ここでは $C(m, n, V_0)$ がWeibull係数 $m$ の他、温度に対してどの程度変化するかFEM解析によって検討した。以下では破壊確率50%に対応する(7)式の係数 $C(m, n, V_0)$ で示す。実験に供した材料の各温度における応力-ひずみ関係を測定していないため、解析では十分なデータのある500MPa級高張力鋼の応力-ひずみ関係を用いて、温度すなわち構成式の変化の影響を数値実験的に調べた。 $V_0$ は前に述べた解析と同様で一定とした。Fig.5.3.5は $m$ を10, 15, 20と変化させた場合の $C(m, n, V_0)$ と降伏応力の関係を示したものである。係数 $C(m, n, V_0)$ は温度変化に伴う構成式の変化にほとんど依存せず、ほぼ $m$ のみの関数であることがわかる。従って、 $C(m, n, V_0)$ の温度依存性は小さいと考えられ、破壊靱性の温度依存性は降伏応力のみの温度依存性に支配されており、ほぼ降伏応力 $\sigma_{ys}$ のべき乗に反比例することになる。これはこれまでの破壊靱性の温度依存性に関する実験結果<sup>5,7,13)</sup>とも合致する。一方、 $m$ 値は破壊応力のばらつきを示す材料定数であり、本実験で用いた高靱性低合金鋼から溶接再現HAZにわたる供試材の破壊応力の $m$ 値は10~18程度(Fig.5.3.3)である。従って、Fig.5.3.5に示した $m$ 値による $C(m, n, V_0)$ の変動幅はかなり一般的なものと考えられるが、その変動幅は1オーダー程度であることがわかる。

(2)式あるいは(3)式の形で定義されるへき開破壊応力が材料定数であると考え  
ると、(7)式は破壊靱性と切欠き丸棒試験結果との相関を与えることになる。各  
材料の破壊靱性の温度依存性をFig.5.3.6に示す。これらの破壊靱性と降伏応力、  
丸棒引張試験片で得られたへき開破壊応力 (Weibull stress) の尺度係数  $\sigma_0$ 、お  
よびその Weibull 形状係数  $m$ との関係を(7)式に従い整理した結果をFig.5.3.7に  
示す。ただし、定数  $C(m, n, V_0)$ は各材料の  $-196^\circ\text{C}$ における構成式を用いた三点曲  
げ試験片のFEM解析結果によって得られた値を用いている。従って、その精度  
にはやや問題があり、Fig.5.3.7の結果によると丸棒引張試験による破壊靱性の  
予測値は実際の靱性値よりやや小さい値を与えるようである。しかし、少なくと  
も両者には解析的予測に一致する比例関係がみられ、Steel Aを除いてほぼ一義  
的な関係を示している。Steel Aが他の材料と異なった挙動を示しているのは、  
材料の統計的単位体積  $V_0$ を材料によらず一定としたことによるものと考えられ  
る。Steel Aのように島状マルテンサイトといったかなり粗大な破壊発生サイト  
を有する鋼材では、単位体積  $V_0$ はかなり異なっていることが予想される。従っ  
て、材料の冶金的因子に基づく係数  $C(m, n, V_0)$ の算定が今後の課題であるが、少  
なくとも材料ごとには解析的な予測、(7)式に沿った比例関係が見られ、Fig.5.3.  
5のFEM解析結果より示唆されるように係数  $C(m, n, V_0)$ の温度依存性は小さいよ  
うである。

#### 決定論的モデル (RKRモデル) との関係

へき開破壊応力の確率的取扱は現象を理解する上では重要であるが、切欠き丸  
棒試験による破壊靱性の推定という観点からは煩雑にすぎ、工学的にあまり意味  
を持たない。著者らはこれまで決定論的モデルに従い数本の切欠き丸棒試験片か  
ら得られるへき開破壊応力の平均値と破壊靱性  $K_c$ との関係を調べてきた。その  
結果、20種類を越える鋼材の靱性について、その温度依存性を含めて、実験的  
に次式が成立することを示した<sup>14)</sup>。

$$K_c = \frac{2.85 \times 10^{-3}}{B^{1/4}(\text{mm})} \sigma_c \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_{ys}} \right)^\alpha \quad (\text{MPam}^{1/2}) \quad (9)$$

ここで、 $\sigma_c$ は切欠き丸棒試験片を  $-196^\circ\text{C}$ で破壊させ、FEMで算定した破壊時の  
最大応力であり、 $\sigma_0$ のように確率的に定義されたへき開破壊応力とは意味が異

なる。指数  $\alpha$  は材料定数である。 $\sigma_{ys}$  は破壊靱性  $K_{Ic}$  の試験温度での降伏応力である。Fig.5.3.8は供試材について(9)式に従って破壊靱性と  $\sigma_c$  との相関をみたものである。ここで、 $\alpha$  の値は最小自乗法により、実験結果から算定した。今回の材料についても(9)式がほぼ成立していることがわかる。

ここでは(9)式が確率論的モデルによってほぼ説明し得ることをFEM解析の結果を用いて示す。Fig.5.3.9は1mmR切欠き丸棒試験より得られた(9)式の右辺に相当する " $\sigma_c(\sigma_c/\sigma_{ys})^\alpha$ " と確率論的へき開破壊パラメータ " $C(m,n,Vo)\sigma_{ys}(\sigma_o/\sigma_{ys})^{m/4}$ " との関係を示したものである。ここで  $C(m,n,Vo)$  は各供試材の三点曲げFEM解析 (-196℃の構成式を用い、破壊確率を50%とした) より得られた値を便宜的に用いた。両者には材料によらずよい対応が見られ、(9)式で与えられる実験結果が(1)式から(7)式に至る確率論的モデルによって説明し得ることを示している。

## 5.4 破壊靱性のばらつきと板厚効果

### 5.4.1 破壊靱性のばらつき

確率論的応力論に基づいた(6),(7)式の妥当性は破壊靱性のばらつきに関する実験結果からも伺われる。各材料の破壊靱性値 ( $K_{Ic}(J)$ ) のWeibullプロットをFig.5.4.10に示す。靱性値には大きな差があるにもかかわらず、いずれの材料においても破壊靱性のばらつきは、(6)式の解析的予測、すなわちWeibull形状係数 (図中では  $\beta$  で示す) が一定値4に近い結果となっている。この傾向は他の材料についても既に報告されている<sup>7,9)</sup>。Fig.5.4.11は今回得られた同一条件 (温度、板厚、形状) で行われた破壊靱性試験片の数とそれから得られたWeibull係数との関係を示したものである。図中のNi-Cr-Mo-V鋼細粒材および粗粒材に関しては、他機関で行われた結果<sup>11)</sup> も示してある。図中の実線は母集団が(6)式に従うときのモンテカルロシミュレーションの結果で、大略実験結果をよく説明していることがわかる。(7)式によるとへき開破壊応力のばらつきは、破壊靱性のばらつきに影響を与えるものではなく、指数  $m$  を通してその絶対値に影響を与えることになる。

### 5.4.2 平面ひずみ破壊靱性 $K_{Ic}$ の予測

へき開破壊靱性における板厚効果、寸法効果が確率的な寸法効果に起因しているならば、基本的に最弱リンクモデルに基づいている本解析手法で記述可能である。すなわち、破壊靱性 $Kc$ 値に及ぼす板厚の影響は(6)式や(7)式に基づき、次式で示される。

$$Kc_1 B_1^{1/4} = Kc_2 B_2^{1/4} = \text{constant} \quad (10)$$

ここで、 $Kc_1, Kc_2$ はそれぞれ板厚が $B_1, B_2$ での破壊靱性である。(10)式によると、破壊靱性 $Kc$ は板厚 $B$ の $1/4$ 乗に反比例することことになる。この関係をNi-Cr-Mo-V鋼細粒材に適用し、実験結果とともに示したのが、Fig.5.4.12(a),(b)である。実線は板厚12.5mmでの破壊靱性試験結果を基準に算定を行ったものである。実験的に得られた破壊靱性の板厚依存性はおおむね(10)式に従う傾向を示しており、破壊靱性の板厚効果は確率論的な寸法効果に起因していることが示唆される。(10)式の関係に従うと、破壊靱性 $Kc$ は板厚の増加にともない、下限値を示すことなく減少することになり、(10)式のみでは平面ひずみ破壊靱性 $KIC$ は決定できない。しかし、ASTM E399やE813での板厚条件が破壊靱性の下限値を定義する意味を持っていると考え、(10)式の関係と平面ひずみ条件  $B \geq 2.5 (K/\sigma_{ys})^2$  を用いて平面ひずみ破壊靱性 $KIC$ を定義することができる。すなわち、

$$KIC = 0.8584 \sigma_{ys}^{1/3} Kc (B)^{2/3} B^{1/6} \quad (11)$$

Fig.5.4.12(a),(b)中の2つの曲線の交点が以上の手法により求められた平面ひずみ破壊靱性 $KIC$ である。予測された平面ひずみ破壊靱性 $KIC$ を図中の直線で示しているが、実験値ときわめてよく一致していることがわかる。(11)式の関係は(5)式に基づいているため、この手法は小規模降伏条件下のみで成立するわけではなく、き裂先端にHRR応力場が存在する限り有効な関係である。従って、鉄鋼材料に対しては実施困難な $KIC$ 試験に代わる $KIC$ 算定法として本手法は非常に有効であるものと考えられる。

## 5.5 結 言

(1) き裂材にWeibull型の最弱リンク概念を適用すると、破壊確率は $K$ の関数として与えられ、解析解による予測と一致することをFEM解析により検証した。

(2) 1mmR切欠き丸棒試験におけるへき開破壊応力、材料の降伏応力とへき開破壊靱性との間には確率論的モデルによる解析的予測に一致した相関が見られる。

(3) 従来、実験的に得られていた切欠き丸棒試験と破壊靱性との相関関係は確率論的モデルによって良く説明できる。

(4) 破壊靱性のばらつきは確率論的モデルによる予測と一致し、高靱性材料でも脆性材料でも差異は見られない。

(5) 本モデルから示唆されるへき開破壊靱性の板厚効果は、実験結果とよく一致しており、最弱リンク概念に基づく本モデルでへき開破壊の寸法効果が説明できる。また、予測される板厚効果を用いると、小型試験片の靱性試験結果から平面ひずみ破壊靱性 $K_{IC}$ の予測が可能である。

#### [参 考 文 献]

- 1) N. J. Petch, Acta Metall., 34, p.1387(1986).
- 2) E. Smith, Proc. Conf. Physical Basis of Yield and Fracture, Physical Soc. of Oxford, p.36(1966).
- 3) P. Bowen, S. G. Druce and J. F. Kott, Acta Metall., 34, p.1121(1986).
- 4) D. A. Curry, Metal Sci., 14, p.319(1980).
- 5) F. M. Beremin, Metall. Trans. A, 14A, p.2277(1983).
- 6) K. Wallin, T. Saario and K. Torronen, Metal Sci., 18, p.337(1984).
- 7) T. Miyata, A. Otsuka, T. Katayama and T. Otake, Defects Assessment in Components - Fundamentals and Applications, Mech. Eng. Publications Limited, p.501(1991).
- 8) A. Pineau, Advanced in Fracture Research, 5th I.C.F., D. Francois, Eds., 2, p.553(1981).
- 9) K. Wallin, Engn. Fract. Mech., 19, p.1085(1984).
- 10) S. Aihara and T. Haze, TMS Annual Meeting (1988).
- 11) 日本学術振興会第129委員会, 遷移温度領域における弾塑性破壊靱性試験法に関する共同研究, 第一回共通試験報告書(1985).
- 12) J. F. Knott, Proc. 4th ICF, 1, p.61(1977).
- 13) G. T. Hahn and A. R. Rosenfield, Metall. Trans. A, 6A, p.653(1975).
- 14) T. Miyata, T. Tagawa, A. Otsuka, K. Okamoto and S. Aihara, Proc. Mechanical Behaviour of Materials IV(1991).

**Table 5.3.1** Chemical compositions of steels tested.

Steel	C	Si	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	V
Ni-Cr-Mo-V	0.24	0.06	0.03	0.005	0.009	-	3.12	1.50	0.39	0.11
SM41B	0.13	0.15	0.95	0.018	0.004	-	-	-	-	-
Steel A	0.08	0.21	1.48	0.004	0.003	0.30	0.30	-	-	-

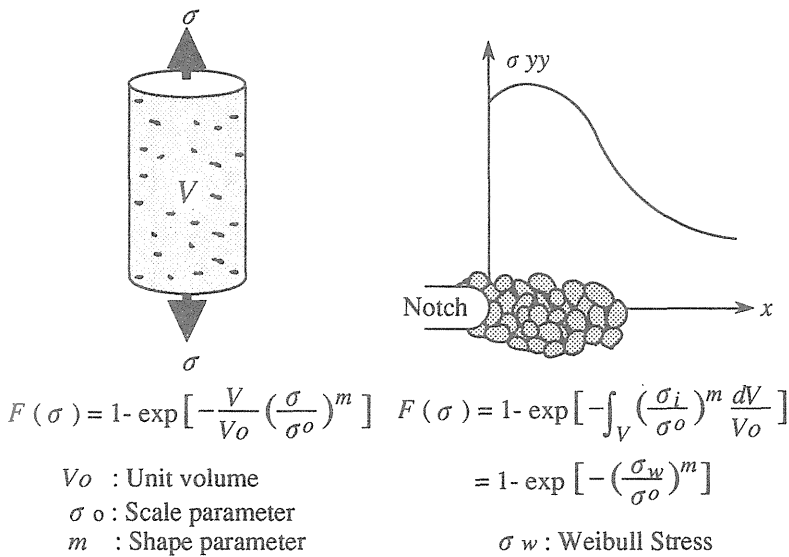
**Table 5.3.2** Mechanical properties of steels tested.

Steel	$\sigma_{ys}$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	R.A. (%)	$\sigma_o^*$ (MPa)	M.S. **
Ni-Cr-Mo-V (fine)	637	763	64	2259	BL
*** (coarse)	610	740	61	1992	BL
SM41B	248	441	-	1662	F
Steel A	451	590	78	2674	F

\*  $\sigma_o$  : Scale parameter of Weibull distribution for Weibull stress.

\*\* M.S. : Micro-structure, BL : Lower bainite, F : Ferrite

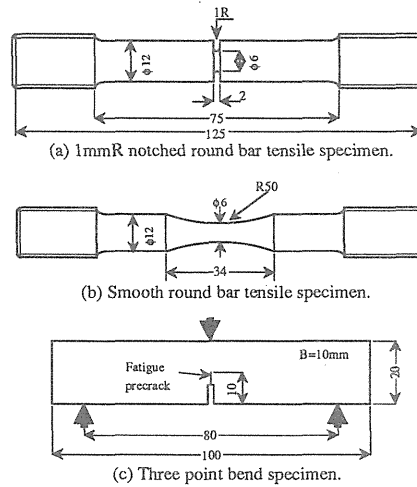
\*\*\* Prior-austenite grain size, fine : 40 $\mu$ m, coarse : 800 $\mu$ m



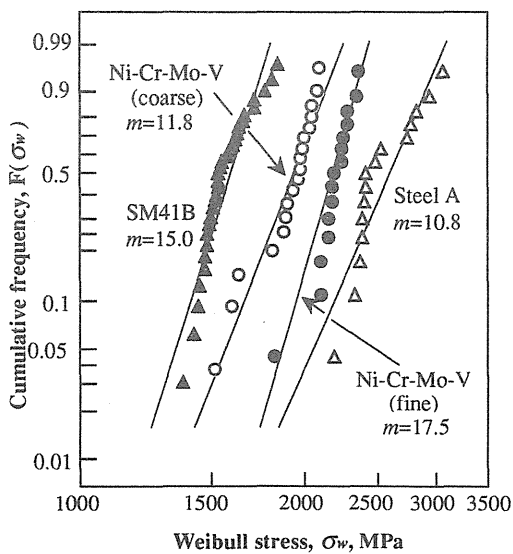
(a) Smooth specimen

(b) Notched specimen

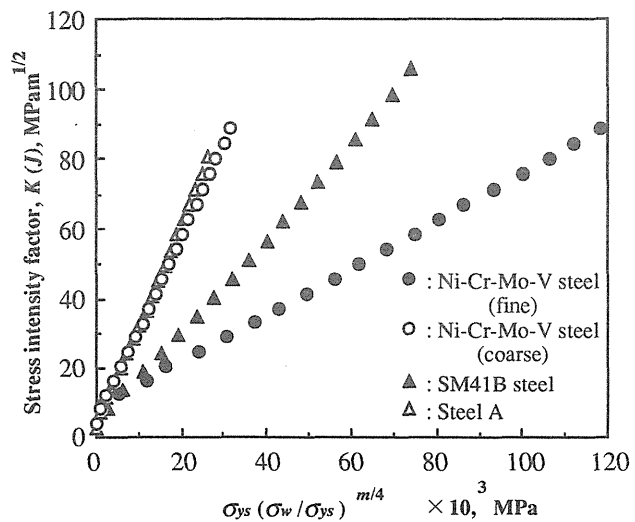
**Fig.5.2.1** Weakest link analogy



**Fig.5.3.2** Specimens , dimensions are in mm.



**Fig.5.3.3** Weibull distributions of Weibull stress for steels tested.



**Fig.5.3.4** Variation of cleavage fracture parameter with  $K$  value.

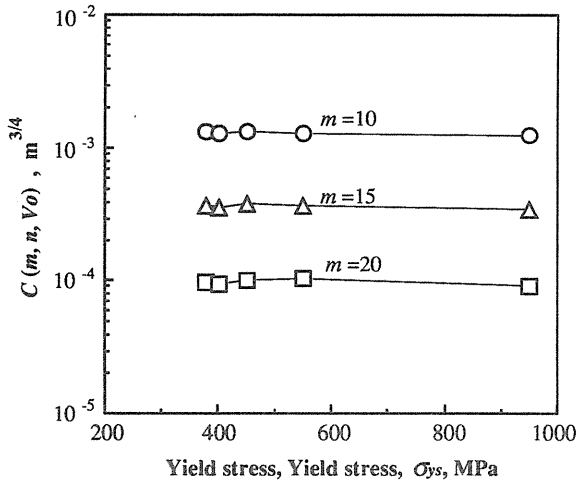


Fig.5.3.5 Dependence of coefficient  $C(m, n, V_o)$  on yield stress of materials.

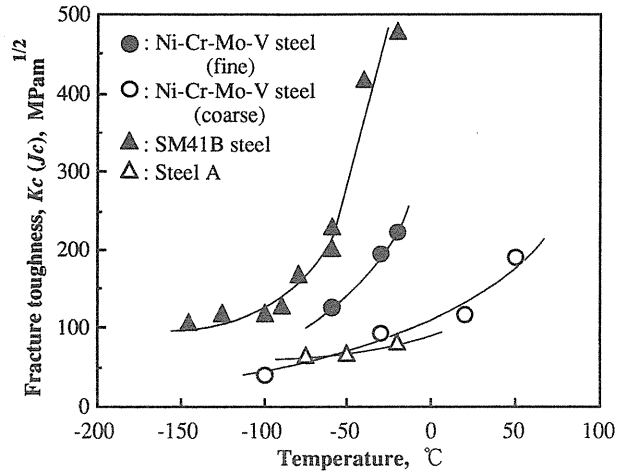


Fig.5.3.6 Temperature dependence of fracture toughness of steels tested.

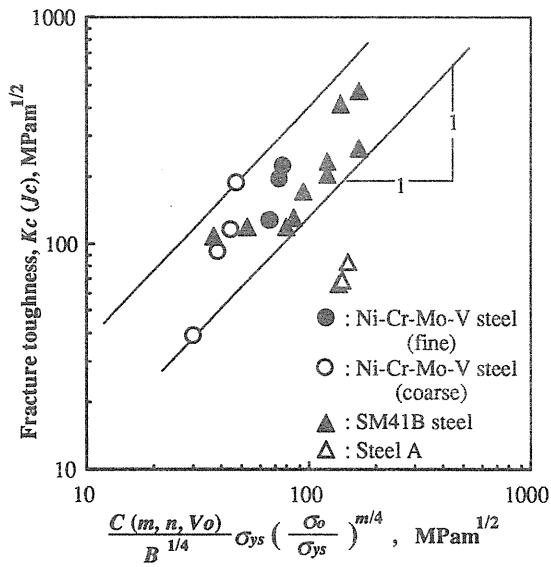


Fig.5.3.7 Correlation between fracture toughness and statistical cleavage fracture parameter.

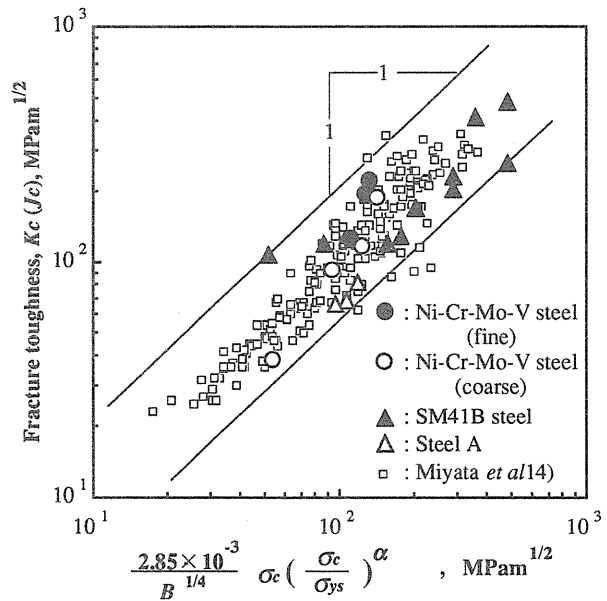


Fig.5.3.8 Correlation between fracture toughness and deterministic cleavage fracture parameter.

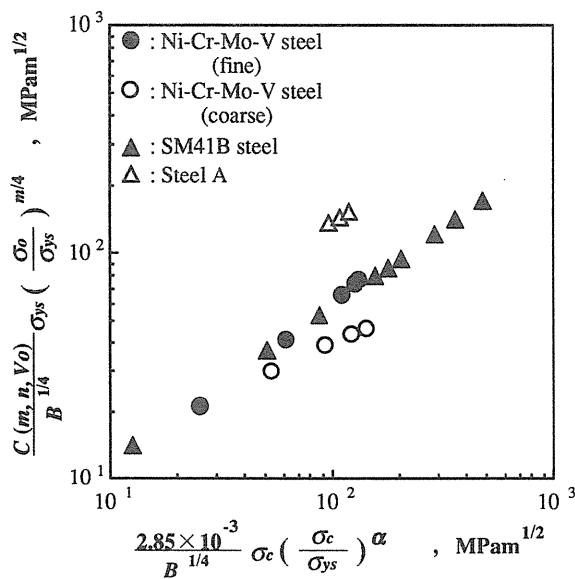


Fig.5.3.9 Correlation between statistical and deterministic cleavage fracture parameters.



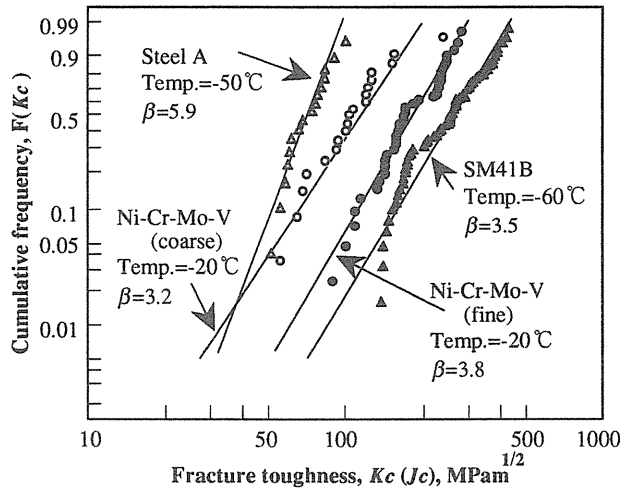


Fig.5.4.10 Weibull distribution of fracture toughness for steels tested.

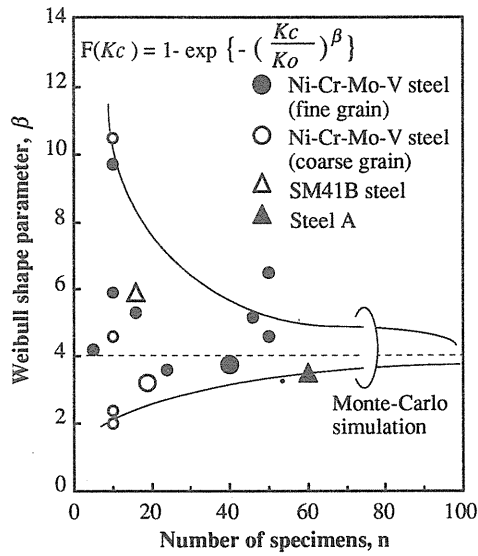


Fig.5.4.11 Weibull shape parameter in fracture toughness and number of specimens tested

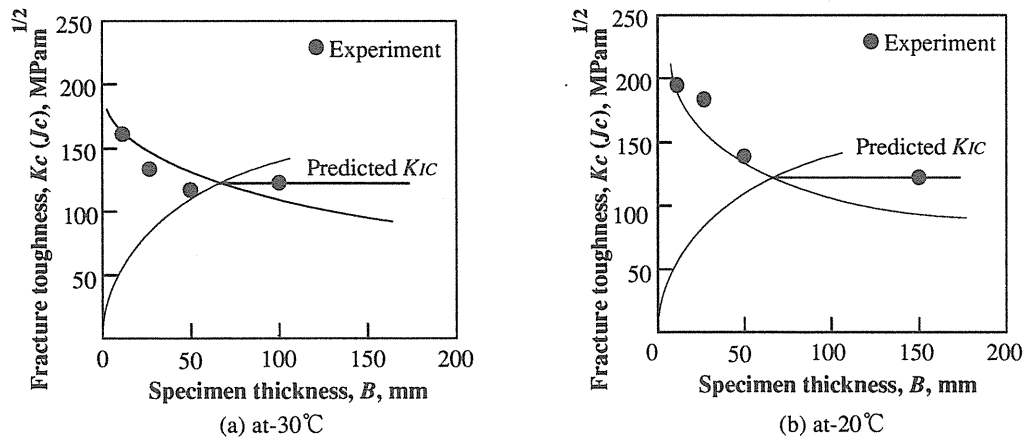


Fig.5.4.12 Dependency of fracture toughness on specimen thickness. (Ni-Cr-Mo-V steel (fine grain))

## 6. Selection of the First Inspection Time based on Maximization of Amount of Information

### Summary

The results of the first inspection contain information which laboratory experiments can hardly furnish, such as crack initiation parameters. Moreover, it is pure in a sense that it is not infected by noise coming from previous, imperfect, inspections. In other words, it is a rich source of information that can be analyzed by Bayesian methods. The first inspection time also heavily influences the overall structural reliability, and therefore the overall costs as was noticed from previous works. By optimizing an utility function, here simply regarded as mean Shannon information, a suitable criteria for selecting the first inspection time is proposed.

### 6.1 Introduction

For large structures under random loadings such as aircraft, ships, offshore installations and bridges, fatigue is often the governing limit state. Under repetitive loading, cracks initiate and grow in size reducing the strength of structures. If these cracks are detected during inspections, the defected part is repaired or substituted, improving the overall system reliability. Since damage accumulates and this operation is imperfect, the reliability always decreases with time.

Several papers dealing with the optimal selection of inspection intervals were presented in the literature. [13] studied the effect of periodic inspections using classic probabilistic methods. [8] realizing that the inspection results themselves furnish data that can be used to update the knowledge about some uncertain parameters, applied Bayesian analysis into the problem in order to select inspection intervals. [6] by searching minimal cost proposed the Sequential Cost Minimization Method which is in a sense stable with respect to uncertainties. In general, however, the methods for selecting the inspection times that use Bayesian analysis do not worry about the events associated with the first inspection and are set based on only initial estimates of the parameters, which are very poor. From the point of view of information content, the first inspection is rich since it does not contain noise coming from previous inspections, and provides data which laboratory tests can hardly furnish such as crack initiation times under in service loading. This information could be

used to update the knowledge about uncertain parameters of a single unit, improving reliability and costs estimates for the remaining life, or even updating uncertain parameters for future designs. In other words, the results of the first inspection can be viewed as a result of a full scale test, and in this sense, the more information is gathered the better, even if the optimal cost for a single unit is sacrificed.

The authors of this work try to set a special criteria to select the first inspection interval based on maximization of the Shannon information amount.

## 6.2 Fatigue life and element reliability

Fatigue life can be divided into 3 phases: Crack initiation, propagation and failure. After initiation, a crack of size  $a$  is assumed to propagate according to Paris law:

$$\left\langle \frac{da}{dn} \right\rangle = C (\Delta X)^m \left( \frac{\sqrt{\pi a}}{K_0} \right)^m \quad (1)$$

where  $m$ ,  $C$  as well as  $K_0$  are material constants. The stress process  $X(t)$  is supposed to be a narrow band Gaussian process with mean  $\bar{X}$  and variance  $\sigma_X^2$ . Resolving for the crack size  $a(t)$ :

$$a(t-t_c) = \left[ a_0^{\frac{2-m}{2}} + C \gamma(t-t_c) \frac{2-m}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{K_0} \right)^m \right]^{\frac{2}{2-m}} \quad (\text{if } m \neq 2) \quad (2)$$

$$a(t-t_c) = a_0 \exp \left[ C \gamma \left( \frac{\sqrt{\pi}}{K_0} \right)^m (t-t_c) \right] \quad (\text{if } m=2) \quad (3)$$

In the formulas above,  $a_0$  is the crack initiation size,  $t_c$  is the crack initiation time and

$$\gamma = E[N_+(0)] (2\sqrt{2})^m \sigma_X^m \Gamma \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \quad (4)$$

where  $E[N_+(0)]$  is the mean number of zero crossings from below of the process  $X(t) - \bar{X}$ .

In this work, two parameters are random, the crack initiation time  $T_c$  and the crack propagation coefficient  $C$  whose distribution functions are dependent on  $\beta$  and  $m_c$  as explained below. Crack initiation time  $T_c$  is assumed to follow a 2 parameter

Weibull distribution:

$$F_{Tc}(t|\beta) = 1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\beta/J}\right)^\alpha\right] \quad (5)$$

$$\text{where } J = \frac{E[N_+(0)](2\sqrt{2})^p \sigma_x^p \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{Q} \quad (6)$$

Q and p are the exponent and coefficient constants that appear on the S-N curve formula:

$$N(\Delta X)^p = Q \quad (7)$$

The crack propagation coefficient C is supposed to follow the lognormal distribution

$$f_c(c|m_c) = \frac{1}{c s_c \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(c/m_c))^2}{2 s_c^2}\right] \quad (8)$$

where  $m_c$  is the median and  $s_c$  is the standard deviation of  $\ln C$ .

A given element, which starts servicing at time  $T_1$  can fail before or after crack initiation with probabilities which can be evaluated using some approximate solutions to the first passage problem. Making the hypothesis that the mean  $\bar{X}$  and the element ultimate strength are well apart so that crossings that lead to failure can be considered independent, and denoting the element reliabilities before and after crack initiation by  $U(t-t_1)$  and  $V(t-t_c)$  respectively, it is possible to write:

$$U(t-t_1) = E[N_+(0)] \exp\left[-\frac{(\xi_0 - \bar{X})^2}{2 \sigma_x^2}\right] \quad (9)$$

$$V(t-t_c) = \exp\left[-\int_0^{t-t_c} E[N_+(0)] \exp\left[-\frac{(\xi(\tau) - \bar{X})^2}{2 \sigma_x^2}\right] d\tau\right] \quad (10)$$

The element strength degradation law  $\xi(t)$  can be estimated by some method such as proposed by Feddersen [4]. Here, for simplicity, if the failure mode is crack instability, for a given crack size  $a(t)$ , the ultimate stress is governed by (infinite plate solution):

$$\xi(a(t)) = \frac{K_c}{\sqrt{a(t)} \pi / 2} \quad (11)$$

where  $K_c$  is the critical stress intensity factor. If the failure mode is yielding, which is the case for cracks smaller than a critical size, the strength is considered to be constant equal to  $\xi_0$  (In this paper we consider only these 2 failure modes).

A crack is considered to be detected before element failure with probability given by:

$$D(a) = 1.0 - \exp[-d(a - a_{\min})] \quad (12)$$

where  $a_{\min}$  is the minimum detectable crack set equal to  $a_0$ , and  $d$  is a positive parameter.

### 6.3 Structural reliability

In order to evaluate the failure probabilities, it is necessary to model the inspection procedure and its possible outcomes. Inspections are performed at times  $T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_N$ . It is assumed that the last inspection was performed at time  $T_j$ , and when an element starts servicing at time  $T_j$ , it is considered new (no damage accumulated). The probability  $SURV(t^*, T_j, T_j)$  of survival till time  $t^* > T_j$  of an element which started servicing at  $T_j$ , and no crack was found at subsequent inspections at  $T_{j+1}, \dots, T_j$  is given by:

$$SURV(t^*, T_j, T_j) = P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad (13)$$

where  $A = \{ \text{element does not fail till } t^* \}$ ;

$B = \{ \text{no crack is found at } T_{j+1}, T_{j+2}, \dots, T_j \}$

$$P[A \cap B] = U(t^* - T_j) [1 - F_{Tc}(t^* - T_j)] + \int_{T_j}^{t^*} U(t - T_j) V(t^* - t) f_{Tc}(t - T_j) dt + \quad (14)$$

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} U(t - T_i) V(t^* - t) \prod_{k=i+1}^j [1 - D(a(T_k - t))] f_{Tc}(t - T_i) dt$$

$$P[B] = U(T_j - T_j) [1 - F_{Tc}(T_j - T_j)] +$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \left\{ \int_{T_i}^{T_{i+1}} U(t-T_1) V(T_j-t) \prod_{k=i+1}^j [1-D(a(T_k-t))] f_{T_c}(t-T_1) dt \right\}$$

Next, the detection of a crack of size  $a$  at inspection at  $T_j$ , and not before, is evaluated as

$$p[a; T_1, T_j] = U(t_c(a) - T_1) V(T_j - t_c(a)) \prod_{k=1}^{j-1} \{1 - He(T_k - t_c(a)) D(a(T_k - t_c(a)))\} D(a) f_a(a) \quad (15)$$

where  $He(\cdot)$  is the Heaviside function.

In this work, it is assumed that repair costs are dependent on crack size and divided into 3 levels. Using  $p[a; T_1, T_j]$ , the expected number of to-be-repaired elements is easily calculated. With this information, it is possible to compute the probability of no failure as:

$$R(t^*) = \prod_{i=0}^j \{SURV(t^*, T_1, T_j)\}^{L_1} \quad (16)$$

where  $L_1$  is the number of elements which started servicing at  $T_1$ , calculated using  $p[a; T_1, T_j]$ .

#### 6.4 Selection of number of inspections and their times (cost minimization approach)

For comparison purposes, inspection planing based on cost minimization approach is also described[10].

The number of inspections  $N$  and when they should be performed are obtained by optimizing a cost function which includes the costs due to failure, due to inspections and maintenance. The expected overall cost, conditional to a given value of mean crack propagation coefficient  $m_c$  and to a value of scale parameter  $\beta$  associated to crack initiation time, is a function of the number of inspections performed  $N$  and of the times when they are performed  $T_1, \dots, T_N$ . These variables are to be chosen properly in order to attain minimum cost  $CO$ . Concretely:

Minimize

$$\begin{aligned}
CO(N, T_1, T_2, \dots, T_N | m_c, \beta) = & C_e(h) + C_f (1 - R_{\text{tail}}) \prod_{n=0}^N R_M(T_n) \frac{1}{(1+r)^{T_{\text{max}}}} + \\
& \sum_{i=1}^N \left\{ \left( C_i + \sum_{k=1}^n C_{Rk} M(T_i, k) \right) \left( \prod_{n=0}^i R_M(T_n) \right) \frac{1}{(1+r)^{T_i}} \right\} + \\
& \sum_{i=1}^N \left\{ C_f (1 - R_M(T_i)) \prod_{n=0}^{i-1} R_M(T_n) \frac{1}{(1+r)^{T_i}} \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

Subject to  $0 < T_1 < T_2 < T_{N-1} < T_N < T_{\text{MAX}}$   
 $R_{\text{overall}} > R_{\text{min}}$

where  $h$  symbolizes the structural dimensions,  $C_e$  is the initial cost,  $C_f$  is the cost associated with failure,  $C_i$  corresponds to inspection costs,  $C_{Rk}$  is the cost of performing one repair of level  $k$  (to be defined later),  $M(T, k)$  stands for the number of cracked members of level  $k$  repaired at time  $T$ ,  $r$  is the real annual interest rate,  $R_M(T_i)$  is the structural reliability at time inspection  $T_i$  given that failure did not occur till then, and finally,  $R_{\text{tail}}$  is the reliability at time  $T_{\text{MAX}}$ .

## 6.5 Inspection results and the amount of information gathered

It is of concern the probability density distribution of two uncertain parameters:  $\beta$  and  $m_c$ . By the knowledge of inspection results, their distributions can be updated via Bayes methods.

The following events form the sample space for inspection results for a one element structure:

- a) A crack of size between  $a$  and  $a+da$  is found in the element.
- b) No cracks are found in the element.
- c) Element failed.

Although finding that the element failed before some specified time  $t$  can give some information, in this analysis, this event is forced to correspond to information content zero:

$$\text{Info}_1 (\text{system failed}) = 0.0 \quad (18)$$

Furthermore, the knowledge that the structure did not fail till some time  $t$  contains some information, but it will be neglected in this analysis. In other words, the hy-

pothesis that information is mainly contained in the discovery or not of cracks of specific sizes. The main reason for making such assumption is that the computations involve several time consuming multiple integral evaluations, and if some simplification are not made, the problem becomes numerically intractable.

The information sources can be divided into 2 groups or cases. The first one corresponds to the case when it is possible to measure cracks in all elements, that is, when the system does not fail. The other case is when the system fails. As was already put, the second case corresponds to null information. Now, for the first case:

The probability of finding a crack of size between  $a$  and  $a+da$  at time  $T_1$  is given by:

$$P_1(a, T_1 | \beta, m_c) = \int_{c_1}^{+\infty} \frac{D(a) f_{t_c}(t_c | \beta) f_c(c | m_c)}{\gamma c a} dc ; \quad (19)$$

$$\text{where } c_1 = \frac{\ln(a/a_0)}{\gamma T_1} \quad \text{and } t_c = T_1 - \frac{\ln(a/a_0)}{\gamma c}$$

and the probability of not finding any cracks at time  $T_1$  is given by

$$P_2(T_1 | \beta, m_c) = (1 - F_{t_c}(t_c - t_1 | \beta)) + \int_{0.0}^{T_1} \int_{0.0}^{+\infty} [1 - D(a(T_1 - t_c | c))] f_{t_c}(t_c | \beta) f_c(c | m_c) dc dt_c \quad (20)$$

Supposing that at the first inspection  $T_1$ ,  $n_1$  out of  $M$  elements are found to be cracked with crack sizes  $A = \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ , and  $M - n_1$  elements are found intact,  $n_1 + n_2 = M$  is the total number of elements. The likelihood given by:

$$\text{Like}(A, n_2, T_1 | \beta, m_c) = (P_2(T_1 | \beta, m_c))^{n_2} \prod_{i=1}^{n_1} P_1(a_i, T_1 | \beta, m_c) \quad (21)$$

Using Bayes' theorem, the posterior distribution for the parameters  $\beta$  and  $m_c$  is given by:

$$f^{(1)}(\beta, m_c) = \frac{\text{Like}(A, n_2, T_1 | \beta, m_c) f^{(0)}(\beta, m_c)}{\iint \text{Numerator } dm_c d\beta} \quad (22)$$

where, in this paper,



$$f^{(0)}(\beta, m_c) = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(m_{c1} - m_{c2})} \quad (23)$$

is the prior probability density function.

The information gained when the first inspection is performed at time  $T_1$ , when the system is up, is evaluated as:

$$\text{Info}_2(A, n_2, T_1) = \int_{m_{c1}}^{m_{c2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f^{(0)}(\beta, m_c) \ln(f^{(0)}(\beta, m_c)) - f^{(1)}(\beta, m_c) \ln(f^{(1)}(\beta, m_c)) d\beta dm_c \quad (24)$$

This is the information gained when the inspection result  $\text{Res} = \{A = \{a_1, \dots, a_{n_1}\}, M - n_1\}$  is obtained. In order to select the first inspection time, its result has to be simulated, and will be distributed according to an unknown pair  $H = \{\beta_{\text{true}}, m_{\text{cttrue}}\}$ :

$$\text{Info}_2(T_1 | H = \{\beta_{\text{true}}, m_{\text{cttrue}}\}) = \quad (25)$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} p(n_1 | H) \int \dots \int_0^{+\infty} \text{Info}(T_1, \{A\}, n_2) g_a(a_1 | H) g_a(a_2 | H) \dots g_a(a_{n_1} | H) da_1 \dots da_{n_1}$$

where  $p(n_1 | H = \{\beta_{\text{true}}, m_{\text{cttrue}}\})$  is the probability that  $n_1$  elements are found defective, and  $g_a(a | H)$  is the probability density distribution of the crack sizes given that the element is cracked. Now, the numerical evaluation of the above formula is very time consuming. Since the interest relies in when the first inspection should be performed to obtain maximum information, and not in the exact value of this information, the above formula will be consistently simplified by employing the means of  $n_1$  and of the crack sizes  $a$  at the time of first inspection  $T_1$ :

$$\text{Info}_2(T_1 | H = \{\beta_{\text{true}}, m_{\text{cttrue}}\}) \cong \text{Info}_2(\{\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a}\}, M - \bar{n}_1, T_1) \quad (26)$$

The mean information is computed simply as:

$$\text{Info}(T_1 | H) = \text{Info}_2(T_1 | H) R_M(T_1) + \text{Info}_1(\text{system failed}) (1 - R_M(T_1)) \quad (27)$$

## 6.6 Loss function used in the first inspection time criterion

The loss function is defined as the amount of information that is left unabsorbed, due to non-optimality in the choice for the first time inspection. Concretely,

if the true value of the parameters  $\beta$  and  $m_c$  where known, the information gathered is maximum for a optimum time  $T_1^*$  and equal to:

$$\text{Info}(T_1^* | H = \beta_{\text{true}}, m_{\text{ctrue}}) = \max_{T_1 > 0} [\text{Info}(T_1 | H = \beta_{\text{true}}, m_{\text{ctrue}})] \quad (28)$$

Also, for a given  $H = \{\beta_{\text{design}}, c_{\text{m design}}\}$  it is possible to find another time  $T_1^{**}$  for which the information gathered is optimized. The difference

$$L(\{\beta_{\text{true}}, m_{\text{ctrue}}\}, \{\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}\}) = \text{Info}(T_1^* | H = \beta_{\text{true}}, m_{\text{ctrue}}) - \text{Info}(T_1^{**} | H = \beta_{\text{true}}, m_{\text{ctrue}}) \quad (29)$$

is defined as the loss function. Now, since the true set parameter is unknown, averaging the loss function using their prior distribution, it becomes only function of the design parameters:

$$L(\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}) = \int_{m_{c1}}^{m_{c2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} L(\{\beta, m_c\}, \{\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}\}) f_{\beta}(\beta) f_{m_c}(m_c) d\beta dm_c \quad (30)$$

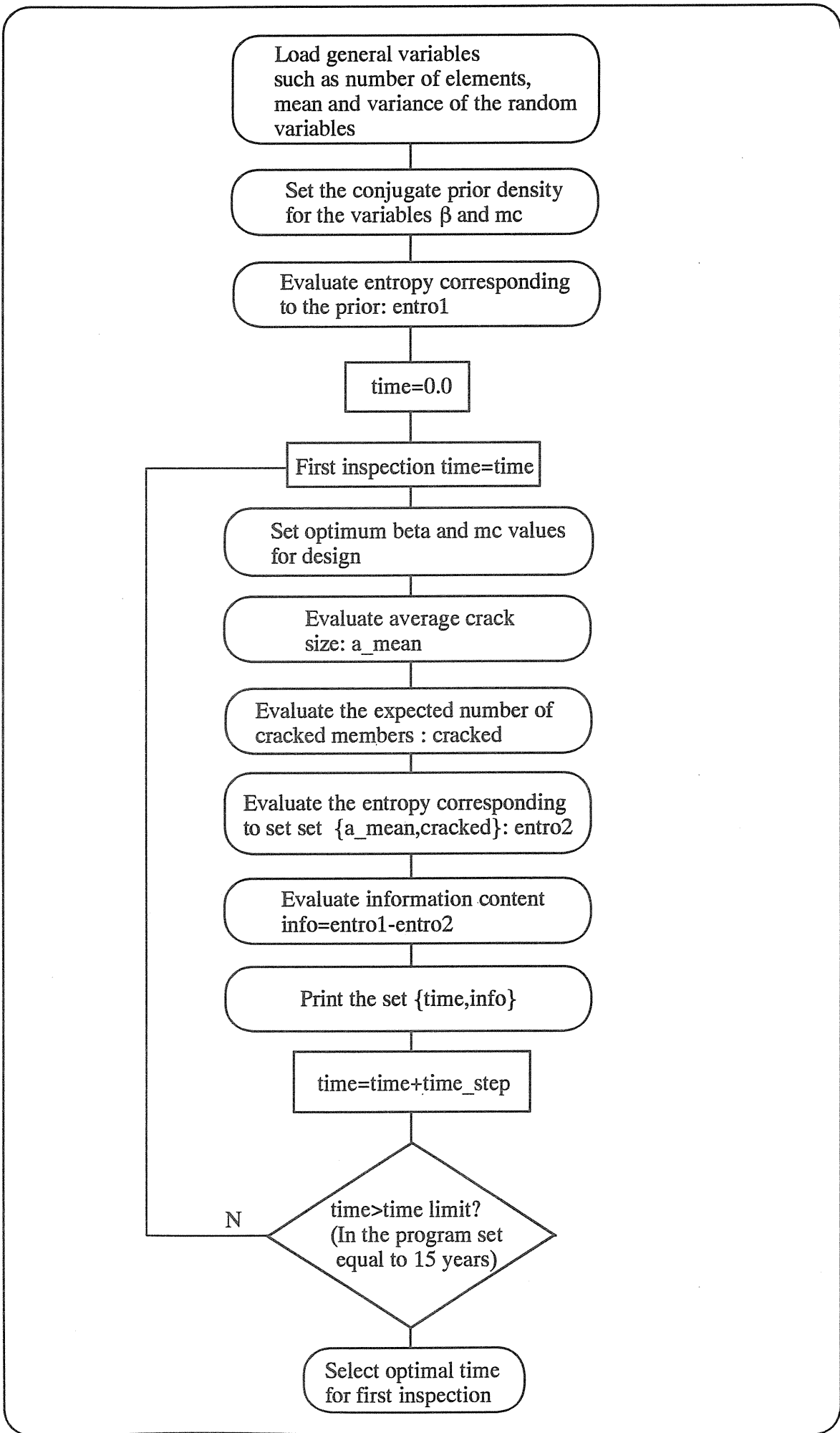
Minimizing the above function in the variables  $\beta_{\text{design}}$  and  $m_{\text{cdesign}}$ , it is possible to select the best design point  $H = \{\beta_{\text{design}}^*, m_{\text{cdesign}}^*\}$ . This set is then used to fix the first inspection time by using eq.(28). The general procedure is shown schematically in the rough flowcharts 6.6.1 and 6.6.2

## 6.7 Numerical results

An application of the proposed method is shown. Suppose a 10 element structure whose main properties are shown in table 6.7.1. By cost minimization, the best

Table 6.7.1 Numerical values ( units: SI otherwise stated )

Design Life	15 years	Minimum level of overall reliability	0.8
Number of structural elements	10	Mean rate of zero crossings $E[N+(0)]$	10
Initial crack length a	0.01	Minimum detectable crack length	0.15
Parameter d in prob. of crack detection	9.5	Element initial strength $\xi_0$	$3.7 \times 10^8$
Critical stress intensity factor	$10^8$	Parameter Q in S-N curve	3.0
Parameter p in S-N curve	$0.9 \times 10^{12}$	Parameter m in Paris law	2.0
Parameter $K_0$ in Paris law	$32.6 \times 10^6$	Mean of the stress process X	0.0
Variance of the stress process X	$3.0 \times 10^{15}$	Parameter $\alpha$ in time for crack initiation	2.0
Parameter $\beta$ in time of crack initiation	0.9	Annual interest rate	0.01
Cost of failure $C_f$	$3.0 \times 10^6$	Inspection cost $C_i$	$5.0 \times 10^4$
Repair cost level 1	10	Repair cost level 2	$4.0 \times 10^4$
Repair cost level 3	$8.0 \times 10^4$	Level 1 range	0.15-0.5
Level 2 range	0.5-3.0	Level 3 range	3.0 ~



Flowchart 6.6.1

### A closer view to the block

Evaluate the entropy corresponding to set set {a\_mean,cracked}: entro2

Evaluate entropy entro2 is performed by the function:

```
REAL entropy_post_first(a_mean,cracked)
Begin
  Integrate the product  $\ln(\text{fdp\_beta\_mc}) \cdot \text{fdp\_beta\_mc}$ 
  with respect to beta and mc;
  auxiliar:=Integration result;
  return auxiliar;
End;
```

The function fdp\_beta\_mc is calculated by using the following algorithm:

```
REAL fdp_beta_mc(a_mean,cracked)
Begin
  auxiliar:=(P1^cracked)* (P2^not_cracked);
  (P1 is given by formula 19)
  (P2 is given by formula 20)
  (not_cracked are the number of elements not found to contain cracks)
  auxiliar:=auxiliar/alpha;
  (alpha is a parameter used to normalize the prob. density function)
  return auxiliar;
End;
```

### A closer view to the block

Set optimum beta and mc values for design

The best values to be used in design are obtained by minimizing the following function with respect to beta\_design and mc\_design:

```
REAL info_loss_design(beta_design,mc_design,fdp_beta_mc_true)
Begin
  Integrate the product  $\text{info\_loss}(\text{beta},\text{mc},\text{beta\_design},\text{mc\_design}) \cdot$ 
   $\text{fdp\_beta\_mc}(\text{beta},\text{mc})$  with respect to beta and mc;
  auxiliar:=Integration result;
  (fdp_beta_mc gives the densit distr. for the true values of bea and mc)
  return auxiliar;
End;
```

The function info\_loss is given by:

```
REAL info_loss(beta,mc,beta_design,mc_design)
Begin
  For the set {beta,mc} find the optimal amount of information (search for
  all first inspection times T1);
  Name the maximum information INFO1 and the optimal time TIME1;
  For the set {beta_design,mc_design} find the optimal amount of information;
  Name the optimal time TIME2;
  Evaluate the ammount of information gathered at time TIME2 when the true
  set is given by {beta,mc};
  Name the result INFO3;
  auxiliar:=INFO1-INFO3;
  return auxiliar;
End;
```

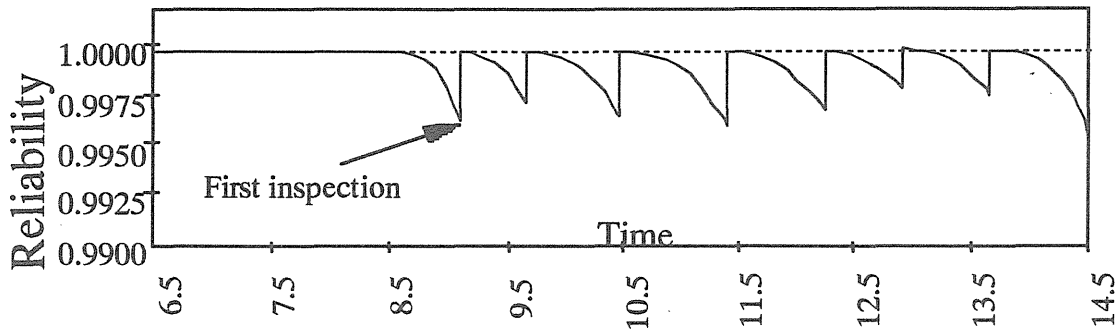


Fig.6.7.1 Reliability as a function of time

Table 6.7.2. Inspection results

Inspection	Time	N. of repairs	Reliab.	Insp.	Time	N. of repairs	Reliab.
1	9.10	level 1 7.52 level 2 0.00	0.996	5	12.26	level 1 0.39 level 2 0.00	0.997
2	9.67	level 1 0.43 level 2 0.00	0.997	6	12.92	level 1 0.59 level 2 0.00	0.998
3	10.49	level 1 0.15 level 2 0.00	0.997	7	13.66	level 1 0.73 level 2 0.00	0.998
4	11.43	level 1 0.20 level 2 0.00	0.996	Reliability 0.96374		COST 3213881	

number of inspections and their times are set using the true values  $c_{\text{true}} = 8.0 \times 10^{-8}$  and  $\beta_{\text{true}} = 0.9$ , which are unknown. The results are shown in figure 6.7.1 and table 6.7.2. Note that the first inspection occurs very late in the structural life, leaving room for setting other criteria. This tendency for late first inspections is general as can be observed also in refs [2][5][6][8][10][11].

Changing the time when it is performed, the amount of information collected in the first inspection, by knowing the size of the cracks, or their absence, also changes as shown in figure 6.7.2.

If the inspection occurs too early, no cracks are found. On the other hand, if it happens too late, or the structure fails, or the number of combinations of the unknown

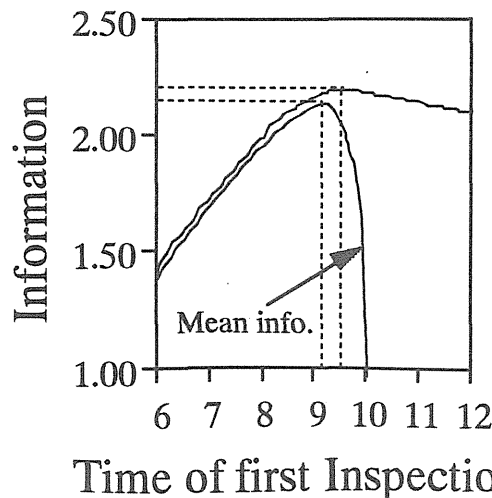


Fig.6.7.2 Obtainable information x time

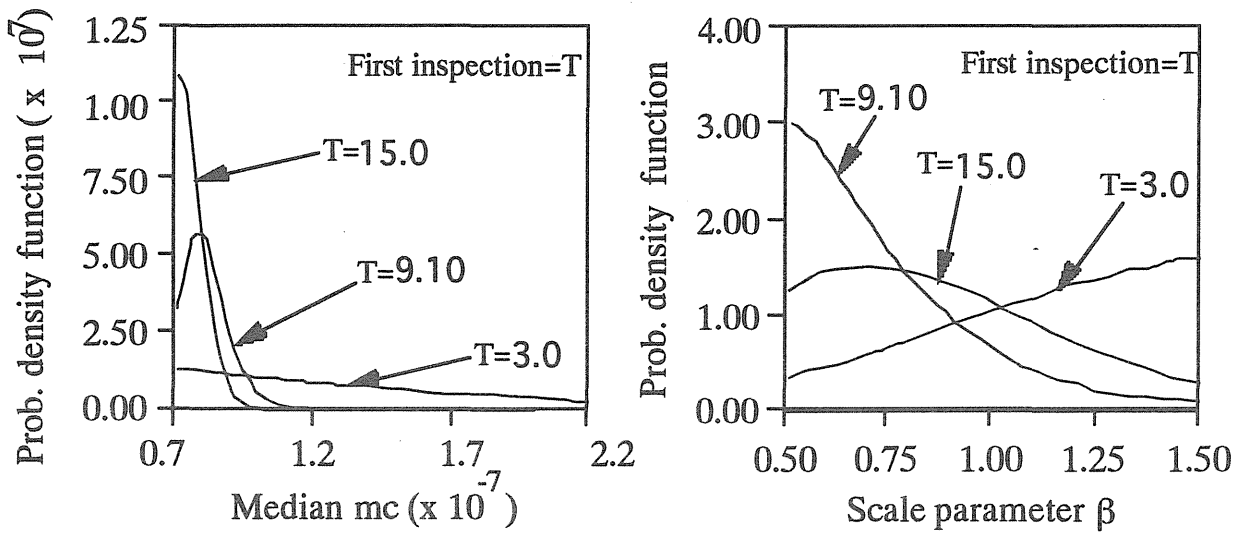
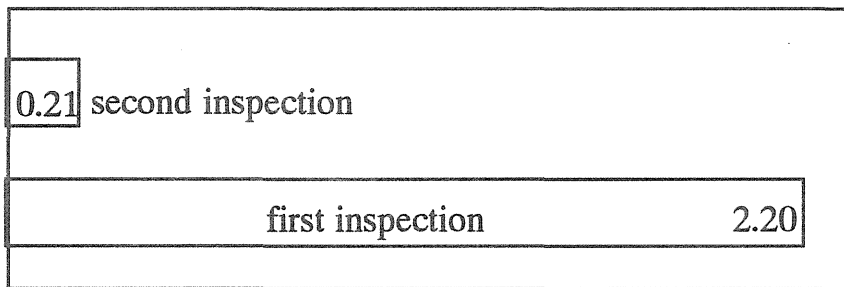


Fig.6.7.3 Marginal prob. density functions

parameters to give a crack of large size is great. For both cases the amount of information gathered is not high. Figure 6.7.3 shows the marginal posterior distributions of the parameters  $\beta$  and  $m_c$  corresponding to different times.



### Amount of information

Fig. 6.7.4 Comparison between the obtained amount of information

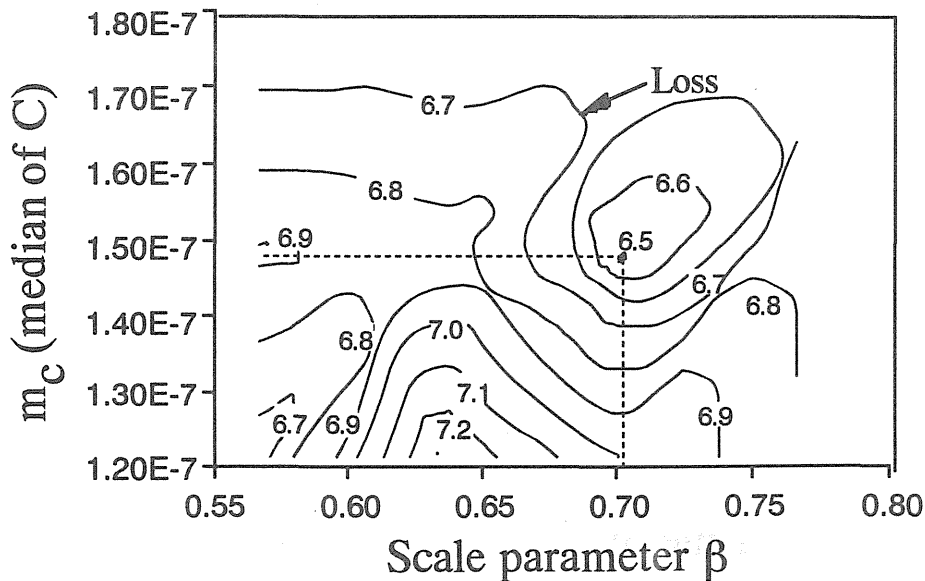


Fig. 6.7.5 Expected loss

The amount of information contained in the second inspection  $T_2=9.63$  that was not contained in the first  $T_1=9.10$  is shown in figure 6.7.4, and it becomes clear that the first inspection can furnish almost all information about the parameters, and therefore deserves special attention.

Figure 6.7.5 shows the expected loss. For this case, it is noted that the set  $H=\{\beta_{\text{design}}=0.7, m_{\text{cdesign}}=1.5 \times 10^{-7}\}$  corresponds to the minimum expected loss. Now, fig. 6.7.6 shows how the amount of information collected changes with time if this set is used back in formula (26). Readily it is observed that the best first time inspection is  $T_1=5.0$ .

## 6.8 Conclusions

If chosen by a criterion such as minimum cost, the first time inspection is set relatively late. In this interval, other criteria can be used. In this paper, a criterion based on maximum information search was proposed. Also, it became clear that the first inspection can furnish almost all the information about uncertain parameters. Numerical simulations indicate it is valid and can improve reliability and cost estimates of structures.

## 6.9 References

- [1] Dalane J.I., Skjong R., Lotsberg I.: Optimal Fatigue Design of Offshore Structures. Proceedings OMAE' 1990, V.2 pp.412-421. Houston, TX, 1990.
- [2] Deodatis G., Fujimoto Y., Ito S., Spencer J., Itagaki H.: Non-Periodic Inspection by Bayesian Method I. Probabilistic Engineering Mechanics V.7 pp.191-204, 1992.
- [3] Engelund S., Bouyssy V., Rackwitz R.: On Optimal Bayesian Designs for Crack initiation Tests. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993.
- [4] Feddersen, C. E.: Evaluation and Prediction of Center Cracked Tension Panels. Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM STP 486, American Society for Testing and Materials, 1971, pp. 50-78.
- [5] Fujimoto Y., Swilen, A.M., Iwata M., Nagai K: Inspection Planing for Deteriorating Structures Based on Sequential Cost Minimization Method, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, pp 755-768, V.170, Nov.1991,

- [6] Fujimoto Y: A Study on the Inspection Planing for Deteriorating Structures, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, pp 367-375, V173 June 1993.
- [7] Hughes O. F.: Ship Structural Design. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [8] Itagaki H., Yamamoto N.: Bayesian Analysis of Inspection on Ship Structural Members. Proceedings of ICOSSAR' 85 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, pp.(III-533)-(III-542).
- [9] Itagaki H., Ishizuka T., Yan H. P.: Experimental Estimation of the Probability distribution of Fatigue Crack Growth Lives. Probabilistic Engineering Mechanics, V.8, pp.25-34, 1993.
- [10] Itagaki H., Ishizuka T.,Kawano A.: An Aplication of Bayesian Reliability Method for Selecting Optimal Structural Design Dimensions and Optimal Inspection Intervals. 12th Material and Structural Reliability Symposium, Takamatsu-Japan, December 1993, pp 153-157.
- [11] Sorensen J. D.: Reliability-Based Inspection Planning for Structural Systems. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993.
- [12] Thomas J. M.: A Generalized Concept for Cost-Effective Structural Design. AIAA/ASME/SAE 16th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA paper No. 75-765, 1975
- [13] Yang J.N. Trapp W.J.: Reliability Analysis of Aircraft Structures under Random Loading and Periodic Inspection. AIAA Journal V.12, N.12, 1974.