実働荷重試験による海洋構造物の疲労信頼性保証に関する研究

（６０３０２０５１）

昭和61年度科学研究費補助金（総合研究Ａ）研究成果報告書

昭 和 62 年 3 月

研究代表者 板 垣 浩

（横浜国立大学工学部教授）

はしがき

本研究は昭和６０年４月より昭和６２年３月に至る２年間にわたって、文部省科学研究費（総合研究Ａ）の補助により行われたものである。研究課題はランダム疲労を受ける海洋構造物の信頼性解析に用いるに足るデータを実験的に、且つ、簡便なシステムで入手する方法を開発することである。この問題はマイクロコンピュータが材料試験に導入されてから、各所で検討されてきているが、充分な成果は得られていなかった。本研究の結果は実用性のある試験方法を確立したと言えよう。

研究組織

研究代表者	板垣　浩	（横浜国立大学工学部教授）
研究分担者	石塚　鉄夫	（横浜国立大学工学部助手）
研究分担者	飯田　国広	（東京大学工学部教授）
研究分担者	町田　進	（東京大学工学部教授）
研究分担者	吉成　仁志	（東京大学工学部助教授）
研究分担者	富田　康光	（大阪大学工学部助教授）
研究分担者	永井　欣一	（広島大学工学部教授）
研究分担者	岩田　光正	（広島大学工学部助教授）
研究分担者	石川　浩	（香川大学経済学部助教授）

研究経費

昭和６０年度	７６００千円
昭和６１年度	２３００千円
計	９９００千円

研究発表

（１）　板垣　浩・石塚　鉄夫・関根　登・持長　圭一郎
　　　ランダム荷重による疲労亀裂伝播
　　　（第一報、小規模ディジタルシステムによる試験）
　　　日本造船学会論文集、１５９号、昭和６１年５月

（２）　板垣　浩
　　　ランダム荷重下における疲労亀裂間の成長速度のばらつき
　　　昭和６２年９月、材料学会にて発表予定

（３）　板垣　浩
　　　アルミニゥム合金のランダム疲労亀裂伝播
　　　第４回アルミニュウムの溶接部に関する国際会議（INALCO'88）、
　　　昭和６３年発表予定

研究成果

海洋構造物の受ける負荷のシミュレーションについて

1．　はじめに

航空機，船舶，橋架，ビル建造物，海洋構造物，宇宙構造物等々，一般に機械・構造物に作用する実働荷重は多くの場合がその上下限が複雑に変動した不規則荷重であり，一方構成材料の材料特性もまた同一作用条件下においてすら画一的な値をとることはなく，本質的にばらつきを有したものであり，いずれも確率統計論的な取扱いがなされなければならない。材料特性に関してはこれまでその統計的性質を明らかにすべく，多数の研究がなされているが，不規則荷重についてはそれが時間的な変動特性を有するものであるが故に，取扱いは複雑で，それほど十分な研究が積み上げられてきたとは言い難いであろう。にもかかわらず，不規則荷重の統計的取扱いの問題は解決されるべき大変重要なものといえる。本稿ではこのような不規則荷重のシミュレーションに関して，研究した成果を報告する。

さて，不規則荷重は一般に確率過程として記述することができるが，それが定常であるか，非定常であるか，によって以後の解析に伴う困難の度合が大きくことなる。不幸にして，海洋構造物の受ける荷重は，通常はそれが定常であるということは稀で，ある程度の非定常性をもつのが普通である。(6) ところが，不規則荷重を非定常のままで扱ったのでは，その取り扱いが困難となるので，種々の仮定を設けて解析を簡単化しているのが現状である。例えば，よく用いられる定常性およびエルゴード性の仮定がそれである。確率過程において，その統計的特性が時間とともに変化しないとする定常性の仮定においても，通常は，高次のモーメントまでが時間とともに変化しないとする，いわゆる強定常の条件までは要求せず，１次と２次のモーメントのみが時間とともに変化しないとする弱定常を完全定常とみなして解析を行っている。これらの仮定を設けることによって，多くの問題が効率よく取り扱われてきたのもまた事実であ

る。

しかしながら，対象とする不規則荷重の中には，非定常性が強く，こうした定常性の仮定の下に扱ったのでは，その問題の本質を正しく議論できない場合が多々ある。海洋構造物の受ける荷重が正にそうであり，さらにロケット発車時等に人工衛星に負荷される振動荷重，ロケット飛翔中における突風荷重，あるいはまた建物に作用する地震荷重および風荷重等はその典型である。人工衛星等の宇宙飛翔体の場合にはその性質上，軽量極限設計が要求されており，また，海洋構造物，ビル建築物等は強風波浪，潮流および地震等の自然環境に対して十分強度をもち安全でなければならず，いずれも作用荷重の定量的評価が強く望まれている。したがって，これらの機械・構造物の非定常不規則荷重に対する信頼性評価のために，その解析手法を確立することが非常に重要な課題となることは論をまたない。

さて，この種の非定常確率過程の解析は，その問題の重要さにもかかわらず，至極簡単な局所定常等の場合を除いて，最近まで本格的には行われなかった。この理由は，非定常過程を明確に記述できるスペクトルの定義が存在しなかったことに大きな一因がある。非定常スペクトルに対しては現在もなお種々の定義が提案されており，これらの特性を相互に十分に比較検討することによって初めて，問題の本質が明らかとされ，解決への糸口が見出されるものと考えられる。

叙上の諸点を踏まえて，以下では，初めに非定常確率過程解析の基礎となる定常確率過程に関する理論的背景について簡単に縦覧し，次で非定常確率過程のスペクトル解析手法の発展を歴史的に顧みながら，非定常確率過程解析の問題点を明確とし，その解析の方策を探ることによって，近年ますます重要となってきている非定常不規則荷重のシミュレーション技術の開発ならびにそのコンピュータ・プログラムについて述べることにする。

2.　定常エルゴード過程の理論

2．1　自己相関関数とスペクトル密度

初めに，確率過程の一般的概念について A.Papoulis の説明を採用して考えてみよう。[16],[55] まず，一つの実験Eを考える。この実験によって生じる結果 ξ は標本空間 S を構成し，S の部分空間は事象とよばれる。事象のあらゆる集まりを考え，それらの各々に対して確率が与えられているものとする。

このとき，あらゆる結果 ξ に対して，それぞれ１つの時間関数 $x(t,\xi)$ をある規則に従って指定し，時間関数族 $X(t,\xi)$ を作るものとすれば，この $X(t,\xi)$ が確率過程とよばれるものである。このように，確率過程 $X(t,\xi)$ は２変数 t, ξ の関数と見ることができるが，一般には ξ を省略して，単に $X(t)$ と表す。したがって，$X(t)$ については，t と ξ の与えられ方に対応して，

（Ⅰ） t と ξ が変数のときは，１つの時間関数族（確率過程）

（Ⅱ） ξ が固定され，t が変数のときは，１つの時間のみの関数（標本関数） （Ⅲ） t が固定され，ξ が変数のときは，１つの確率変数，および

（Ⅳ） t も ξ も固定されたときには，１個の単なる数値

の４つの場合が考えられる。

さて，一般にわれわれが興味の対象とする現象を観察する場合，観察結果は毎回異なり，不規則に変動した時間関数 $x^k(t)$ の形で与えられることが多い。そこでこのような時間関数 $x^k(t)$ の集合を説明の便宜上概念的に考え，

$$X(t) = \{x^1(t),\ x^2(t),\ \cdots,\ x^n(t)\} \tag{2.1}$$

とするとき，この $X(t)$ を確率過程とよぶ。もちろん，ある回の試行で $x^k(t)$ のいずれが実現するかはランダムであり，その実現の度合は $X(t)$ の有する確率特性によって規定されるものとする。

確率過程の統計的性質を考える場合には，第 k 番目の標本関数 $x^k(t)(k=1, 2,\cdots, n)$ を時間的に考察するか，あるいはまた，時間を $t=t_1$ に固定したときに得られる n 個の観測値 $x^1(t_1)$, $x^2(t_1),\cdots$, $x^n(t_1)$ を集合的に考察するか，の２通りの側面があり，非常に複雑であるが，本節で考える確率過程は定常でエルゴード的なものと考えることにする。ここに，定常過程とは統計的性質が時間に依存しない過程であり，またエルゴード性とは時間的な確率特性と集合的な確率特性とが一致する過程を意味する。したがってこのような過程では，任意の標本関数を時間的に考察するか，あるいは任意の一時点における観測値の集合を集合的に考察するかによって確率過程の特性を明らかにすることができる。そこで以後に於ては標本関数を簡単に $x(t)$ と表すことにする。

定常エルゴード確率過程 $X(t)$ の平均値を μ_x，分散を $\sigma_x{}^2$ とすれば，これらの値はともに時間 t には依存せず，

$$\begin{aligned}\mu_X = E[X(t)] = E[X(t+\tau)] &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\sigma_X^2 = E[\{X(t) - \mu_X\}^2] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\{x(t) - \mu_X\}^2 dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 p(x)dx \tag{2.3}$$

として求めることができる。ここに，p(x) は X(t) の１次元確率密度関数を表し，E[･] は期待値の演算子である。

X(t) の自己相関関数を $R_{XX}(\tau)$ とすれば，

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1,\ x_2)dx_1 dx_2 \tag{2.4}$$

ここに，τ は２つの時点の時間差を表し，$p(x_1, x_2)$ は X(t) と X(t+τ) の結合確率密度関数である。式(2.4) において，τ=0 とすれば，

$$R_{XX}(0) = E[X^2(t)] \tag{2.5}$$

すなわち，$R_{XX}(0)$ は過程 X(t) の自乗平均値(mean square値)を与える。式(2.3)と(2.5) から，

$$\sigma_X^2 = R_{XX}(0) - \mu_X^2 \tag{2.6}$$

さらに，他の任意の定常エルゴード確率過程を Y(t) とするとき，X(t) と Y(t) の相互相関関数は

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)dt \tag{2.7}$$

で与えられ，共分散関数は

$$C_{XY}(\tau) = E[\{X(t) - \mu_X\}\{Y(t+\tau) - \mu_Y\}]$$
$$= R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y \tag{2.8}$$

で与えられる。ただし，μ_Y は Y(t) の平均値である。なお，自己共分散関数は例えば

$$C_{XX}(\tau) = E[\{X(t) - \mu_X\}\{X(t+\tau) - \mu_X\}]$$
$$= R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \tag{2.9}$$

と表される。X(t) と Y(t) の相関係数は

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_{XX}(0)C_{YY}(0)}} = \frac{R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{2.10}$$

で定義され，

$$|\rho_{XY}(\tau)| \leqq 1 \tag{2.11}$$

を満足する。

X(t) および Y(t) の両側パワー・スペクトル密度は，Wiener-Khintchine の関係式によって，それぞれ $R_{XX}(\tau)$ および $R_{YY}(\tau)$ に関連づけられ，

$$\left.\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ S_{YY}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

で与えられる。したがってまた $R_{XX}(\tau)$ および $R_{YY}(\tau)$ はそれぞれ $S_{XX}(\omega)$ および $S_{YY}(\omega)$ のフーリエ逆変換として次式で表すことができる。

$$\left.\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \\ R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

一方，相互スペクトル密度に関しては

$$\left.\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ R_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

なるフーリエ変換対の形で表すことができ，次の不等式を満足する。

$$|S_{XY}(\omega)|^2 \leqq S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega) \tag{2.15}$$

なお，工学的目的においては両側スペクトル密度 S(ω) に代えて，周波数領域 $\omega \geqq 0$ で定義された片側スペクトル密度 G(ω) を用いることが多く，G(ω) と S(ω) の関係は次式で与えられる。

$$G(\omega) = 2S(\omega) \quad (\omega \geqq 0) \tag{2.16}$$

また G(ω) は確率過程 X(t), Y(t) の有限フーリエ変換を用いて次式で定義されることもある。

$$
\left.\begin{aligned}
G_{XY}(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi T}E[F_X^*(\omega,\ T)F_Y(\omega,\ T)] \\
G_{XX}(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi T}E[|F_X(\omega,\ T)|^2] \\
G_{YY}(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi T}E[|F_Y(\omega,\ T)|^2]
\end{aligned}\right\} \qquad (2.17)
$$

ここに,

$$
\left.\begin{aligned}
F_X(\omega,\ T) &= \int_0^T X(t)e^{-i\omega t}dt \\
F_Y(\omega,\ T) &= \int_0^T Y(t)e^{-i\omega t}dt
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)
$$

はそれぞれ X(t), Y(t) の有限フーリエ変換であり, また $F_X^*(\omega,T)$ は $F_X(\omega,T)$ の共役複素関数を表す。

なお, 式(2.5),(2.13),(2.16) から

$$
E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega)d\omega \qquad (2.19)
$$

すなわちパワー・スペクトル密度の全積分値は過程の自乗平均値を与えることがわかる。

2．2　入出力関係と関連度関数

次に線形システムの入出力関係と関連度関数（コーヒレンス関数）について考えよう。図1に示すように, 単位衝撃応答関数（荷重関数） h(τ), 周波数

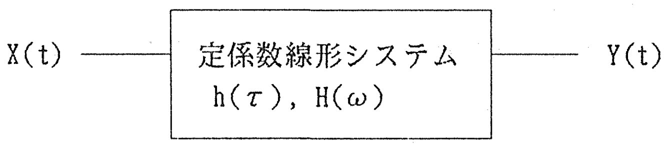


図1　1入力線形システム

応答関数 H(ω) をもった定係数線形システムに定常確率過程の入力 X(t) が作用するとき, 出力 Y(t) もまた定常確率過程となり, しかも Y(t) は h(τ) を用いて,

$$Y(t) = \int_0^\infty h(\tau)X(t-\tau)d\tau \tag{2.20}$$

の形のたたみ込み積分で表すことができる。ここに物理系を扱う関係上，$\tau<0$ で $h(\tau)=0$ と考えられるから，積分の下限値は 0 としてある。式(2.20)を用いて，$Y(t)$ の自己相関関数ならびに $X(t)$ と $Y(t)$ の相互相関関数は

$$\left.\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi)h(\eta)R_{XX}(\tau+\xi-\eta)d\xi d\eta \\ R_{XY}(\tau) &= \int_0^\infty h(\xi)R_{XX}(\tau-\xi)d\xi \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

と表され，したがって対応するパワー ・スペクトル密度は

$$\left.\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \\ S_{XY}(\omega) &= H(\omega)S_{XX}(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

で与えられる。ここに $h(\tau)$ と $H(\omega)$ との間の周知の関係

$$H(\omega) = \int_0^\infty h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{2.23}$$

を用いた。片側スペクトル密度の場合には

$$\left.\begin{aligned} G_{YY}(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_{XX}(\omega) \\ G_{XY}(\omega) &= H(\omega)G_{XX}(\omega) \\ |G_{XY}(\omega)| &= |H(\omega)|\, G_{XX}(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

すなわち，入力 $X(t)$ のスペクトル密度 $G_{XX}(\omega)$ とシステムゲイン $|H(\omega)|$ から，出力 $Y(t)$ のスペクトル密度 $G_{YY}(\omega)$ が式(2.24)によって求められることがわかる。式(2.19)と類似の関係を用いて，

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) &= \int_0^\infty G_{YY}(\omega)d\omega \\ &= \int_0^\infty |H(\omega)|^2 G_{XX}(\omega)d\omega \end{aligned} \tag{2.25}$$

として，出力 $Y(t)$ の自乗平均値が求まる。

さて，$G_{XX}(\omega)$,$G_{YY}(\omega)$ がいずれも 0 でなく，かつデルタ関数を含まない場合（すなわち，あらかじめ 0 でない過程の平均値を除去して，原点におけるデルタ関数を除去した場合）には，入力 $X(t)$ と出力 $Y(t)$ との間の関連度関数（コーヒレンス関数）は

$$\left.\begin{aligned}\gamma^2_{XY}(\omega) &= \frac{|G_{XY}(\omega)|^2}{G_{XX}(\omega)G_{YY}(\omega)} = \frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)} \\ 0 &\leqq \gamma^2_{XY}(\omega) \leqq 1\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

で与えられる。理想的な定係数線形システムの場合には式(2.24)，(2.26)から

$$\gamma^2_{XY}(\omega) = 1 \tag{2.27}$$

であるが，実際には，（イ）測定に付加雑音がある，（ロ）システムが線形でない，あるいは（ハ）出力 Y(t) が入力 X(t) 以外の入力にも関係している，というような場合が多いので，コーヒレンスは 0～1 の間の値となるであろう。

2．3　標準パワー・スペクトル密度の算出

前小節で述べたように定常エルゴード過程 X(t) のパワー・スペクトル密度 $G_{XX}(\omega)$ は

$$G_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi T}E[|F_X(\omega,\ T)|^2] \qquad (2.17)（再掲）$$

ただし，

$$F_X(\omega,\ T) = \int_0^T X(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (2.18)（再掲）$$

で与えられる。そこで，１つの標本関数 x(t) に対して $G_{XX}(\omega)$ の推定量を

$$\hat{G}_{XX}(\omega) = \frac{1}{\pi T}|F_X(\omega,\ T)|^2 \tag{2.28}$$

とすれば，$G_{XX}(\omega)$ は記録 x(t) と T を与えれば FFT（高速フーリエ変換）で求めることができ，しかも分解バンド $2\pi B_e=2\pi/T$ をもつ推定量であると考えられる。周知のように有限フーリエ変換 $F_X(\omega,T)$ は複素量であるから，実数部を $F_R(\omega,T)$ ，虚数部を $F_I(\omega,T)$ とすれば，過程 X(t) がガウス性をもつとき，この $F_R(\omega,T)$ と $F_I(\omega,T)$ 平均値が零で等分散をもち，かつ互いに無相関である。したがって

$$|F_X(\omega,\ T)|^2 = F_R^2(\omega,\ T) + F_I^2(\omega,\ T) \tag{2.29}$$

はガウス性確率変数の２乗和となるから，式(2.28)の $G_{XX}(\omega)$ は各周波数成分について自由度２の χ^2 分布に従うことが明かであり，

$$\frac{\hat{G}_{XX}(\omega)}{G_{XX}(\omega)} = \frac{\chi_2^2}{2} \tag{2.30}$$

と表すことができる。自由度 n の χ^2 分布（$\chi_n{}^2$ と書いてもよい）の平均

と分散はそれぞれ n および 2n であるから，その変動係数 δ は

$$\delta = \frac{\sigma[\hat{G}_{XX}(\omega)]}{G_{XX}(\omega)} = \frac{\sqrt{2n}}{n} = \sqrt{\frac{2}{n}} \tag{2.31}$$

で与えられる。自由度 n=2 の場合には $\delta=1$ となり，換言すれば，パワー・スペクトルの推定量 $G_{XX}(\omega)$ の標準誤差は推定されるべき量と同程度の大きな誤差をもつことになる。そこで，$G_{XX}(\omega)$ の標準誤差の低減を図るために以下のような平滑化操作を行う必要がある。

(a) 集合平均による平滑化

独立な q 個の標本記録 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \cdots, q$；記録長は各 T_e) について q 個の推定スペクトル $G_{XX}(\omega)$ を求め各周波数ごとに平均をとる。この場合分解バンド幅を $2\pi B_e=2\pi/T_e$ とすると，全所要記録長は $T=qT_e$ となるから，$q=T/T_e$ で与えられる。

(b) 周波数についての平滑化

この場合には，1つの標本記録（記録長 T ）から求めた $\Delta\omega=2\pi/T$ の間隔で並んでいる推定値のうちの相続く l 個をとって平均する。$\Delta f=\Delta\omega/2\pi=1/T$ であるから，$l=B_e/\Delta f=T/T_e$ として，先の (a) の場合と比較すれば，q=l のとき，(a) と (b) とは等価である。

さて，χ^2 分布は再生性をもつから，バンド幅 $2\pi B_e$ 内で $G_{XX}(\omega)$ は一定であると仮定すれば，平滑化により求めたものは自由度 n=2l の χ^2 分布に従うことがわかる。自由度 n は

$$n = 2\ell = 2(B_e/\Delta f) = 2B_eT \tag{2.32}$$

で与えられるから，式(2.31)から

$$\delta = \frac{\sigma[\hat{G}_{XX}(\omega)]}{G_{XX}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{B_eT}} \tag{2.33}$$

つまり，分解バンド幅 $2\pi B_e$，標本長 T としたときの推定量 $G_{XX}(\omega)$ によるパワー・スペクトル密度 $G_{XX}(\omega)$ の $100(1-\alpha)$% 信頼区間は

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n\hat{G}_X(\omega)}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}} \leqq G_{XX}(\omega) \leqq \dfrac{n\hat{G}_{XX}(\omega)}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \\ n = 2B_eT \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

で与えられる。ただし，$\chi_{n;\alpha/2}{}^2$ は自由度 n の χ^2 分布の 100(α/2)% 点を表すものである。

2．4　周波数応答関数の推定

本節では１入力線形系モデルを用いて入出力 x(t) および y(t) が記録されているものとしよう。両者の標本記録が共通の時間間隔 T において得られているものとすれば，パワー・スペクトル密度 $G_{XX}(\omega)$ および相互スペクトル密度$G_{XY}(\omega)$ を第 2.3 節の手法によって自由度 $n=2B_eT$ で推定することができる。それゆえ，式(2.24)によって周波数応答関数 H(ω) を

$$\hat{H}(\omega)=\frac{\hat{G}_{XY}(\omega)}{\hat{G}_{XX}(\omega)}=|\hat{H}(\omega)|e^{-i\hat{\phi}(\omega)} \tag{2.35}$$

として推定することができる。ここに |H(ω)| と $\phi(\omega)$ はそれぞれゲインと位相の推定量である。

さて，ここで出力測定の際の雑音および入力と無相関な他の入力による出力成分とからなる出力端における余分の雑音を z(t) とすれば，

$$z(t)=y(t)-\int_0^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{2.36}$$

上式を有限フーリエ変換すると，

$$\begin{aligned}F_Z(\omega,\ T)&\cong F_Y(\omega,\ T)-H(\omega)F_X(\omega,\ T)\\&=\hat{F}_Z(\omega,\ T)+F_X(\omega,\ T)[\hat{H}(\omega)-H(\omega)]\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\hat{F}_Z(\omega,\ T)=F_Y(\omega,\ T)-\hat{H}(\omega)F_X(\omega,\ T) \tag{2.38}$$

パワー・スペクトル密度の推定式が有限フーリエ変換を用いて，例えば，

$$\hat{G}_{XX}(\omega,\ T)=\frac{1}{\pi T}|F_X(\omega,\ T)|^2$$

等のように与えられることを鑑み，かつ平滑化操作を与えて得られるスペクトル密度を $G_{XX}(\omega)$ 等と書くことにすれば，

$$\hat{G}_{ZZ}(\omega)\cong\hat{G}_{\hat{Z}\hat{Z}}(\omega)+\hat{G}_{XX}(\omega)|\hat{H}(\omega)-H(\omega)|^2 \tag{2.39}$$

やや複雑な考察の結果，H(ω) に対する信頼度 100(1-α)% の信頼区間が次式によって決定される。

$$|\hat{H}(\omega)-H(\omega)|^2\leqq\left(\frac{2}{n-2}\right)F_{2,n-2;\alpha}[1-\hat{\gamma}^2_{XY}(\omega)]\frac{\hat{G}_{YY}(\omega)}{\hat{G}_{XX}(\omega)} \tag{2.40}$$

ここに，

$n=2B_eT=$ 各スペクトル密度推定の自由度の数

$F_{2,n-2;}$ = 自由度 $n_1=2, n_2=n-2$ の F 分布の 100α %点

$G_{XX}(\omega)$= 入力 x(t) のパワー・スペクトル密度の推定値

$G_{YY}(\omega)$= 出力 y(t) のパワー・スペクトル密度の推定値

$$\hat{\gamma}^2_{XY}(\omega) = \frac{|\hat{G}_{XY}(\omega)|^2}{\hat{G}_{XX}(\omega)\hat{G}_{YY}(\omega)}$$

3． 非定常不規則荷重のスペクトル解析に関する歴史的考察

本節では確率過程として把握されている非定常不規則荷重のスペクトル解析に関する研究を歴史的に縦覧する。非定常確率過程を数学的に記述しようという試みは，1940年代にすでに行われている。D. Gabor[7]は，1946年に非定常スペクトルに関する論文を発表しており，この分野の最も古い研究者の１人と考えることができよう。また，J. ville[8]は1948年に「瞬間スペクトル」について発表している。実験的に非定常スペクトルを求めたものには W. Koeing[9] らの例があり，これは 1946 年のことである。その後，音声学，電機通信工学の雑音理論および信号理論分野において各種のスペクトルが提案され，データ解析に応用されている。機械・構造工学分野においては，1955 年に，Y. C. Fung[10]が飛行機着陸時の非定常不規則振動応答解析に関する研究結果を報告している。その後，宇宙飛翔体関係[11]，近年においては土木工学関係で建物の地震応答[54]，強風応答における非定常不規則振動解析が注目されている。これらの非定常スペクトル解析の考え方を歴史的に，機械・構造システム解析の観点からながめてみると，いくつかのカテゴリーに分類できる。

まず，第１のものは，周波数スペクトルとしては定常過程の特性をそのまま用い，強度（振幅）のみ時間変化があるとする，いわゆる「局所定常」過程に基づくものが代表的であろう。この局所定常過程については，R. A. Silverman が論じており，相関関数が時間 t と時間差　との関数に変数分離できるもの，すなわち

$$R(\tau,\ t) = R_1(\tau)\cdot R_2(t)$$

と仮定するものである。これを　についてフーリエ変換することによりパワー・スペクトル密度が定義される。入力には，

$$X(t) = S(t)\cdot g(t)$$

ただし，S(t) は定常不規則過程，g(t) は重み関数，の形で表されると仮定したものが，一般に構造システムの非定常応答解析に用いられている。[46]-[4

[9] しかしながら，この方法では周波数的非定常性は評価できない。また，周期定常過程[13]も提案されているが，構造システム解析ではあまり用いられていないようである。

第２に，定常過程の１次元フーリエ変換を２次元に拡張して非定常スペクトルを定義する方法がある。これは「一般化スペクトルあるいは２重周波数スペクトル」とよばれており，J. S. Bendat[14]ら，T. K. Caughey[15]，A. Papoulis[16]，J. B. Roberts[17]によって研究されている。これは数式的には，定常過程の延長として非常に理解しやすいが，このスペクトルの物理的意味付けが困難で，実際のデータ解析にはほとんど用いられていないのが現状である。

第３に，J. Ville[8] により提案された「瞬間スペクトル」の考え方がある。このスペクトルは，相関関数として，時間差 τ と中心時間 t をパラメータとして定義された相関関数，

$$R_{XX}(\tau,\ t) = E\left[X\left(t-\frac{\tau}{2}\right)X\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

を用い，これをフーリエ変換するもので，J. S. Bendat と A. G. Piersol[13]，W. D. Mark[19]-[21] によって発展させられてきている。W. D. Mark は，ウインド関数を使って，局所的に非定常過程を定常として解析し，「物理スペクトル」[19]，「局所時間平均スペクトル」[20]へと発展させている。

次に，「瞬間スペクトル」として，C. H. Page[22]によって定義されたものがある。これは，瞬間的パワーを時間の微分で表すもので，パワーとしては，過去からその問題とする時刻点までのものを考え，将来（問題とする時刻点より先）のパワーは考えない。この方法は，S. C. Liu[23]-[25]が発展させている。しかし，このスペクトルは部分的には負の値もとりうるので，物理的意味付けが困難となる欠点をもつ。さらには，N. Wiener[26]より提案された一般化フーリエ変換をもとに，M. B. Priestley[27]-[30]，J. K. Hammond[31]，M. Shnozuka[32]により発展させられてきた「時間変化スペクトル(Evolutionary Specurum)」がある。これは，不規則過程を Stieltjes 積分形，

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega,\ t)e^{j\omega t}dF_X(\omega)$$

で表すものである。地震波の解析[33],[34]，構造工学分野[35]に応用されてきている。非定常応答解析は，従来は自乗平均的評価法[50]-[52]，局所定常あるいは小区間定常的取り扱い[46]-[49] であったが，この時間変化スペクトルを用いての応答解析がよく行われるようになってきている。[36]-[42]

最後に，最近注目を集めているものとして，M. Shinozuka[5],[53]らによるデータ・ベースに基づくものがある。これは時刻歴の観測データのフーリエ変換を基本として，ランダム位相角を採用して非定常過程を構成するものであり，

取り扱いが簡単であると同時に，スペクトルの物理的意味付けもはっきりしており，地震荷重，風荷重あるいは航空機の操舵荷重の解析に応用され，工学的に有用性が高いものと思われる。

4． 非定常不規則荷重解析上の問題点

定常不規則荷重に比較して，非定常不規則荷重の解析が確立されていないのは，以下に述べるような様々の問題[43]が存在するためであると思われる。

(1) まず問題なのは，非定常過程を分析する場合に，厳密なある時刻でその時刻のスペクトルを厳密に決定することが困難となることである。これは，不確定性原理(uncertainty principle) として知られており，時刻とその時刻のスペクトルとを厳密にしようとする２つの要求は互いに相反するものとなることを意味している。Daniels はこの原理を量子力学における Heisenberg の不確定性原理と比較して論じている。ただし，これは狭帯域幅で短時間パルスを分析できるフィルタを作ることが不可能ということで，理論的に厳密な時間・周波数に対するスペクトルを定義し，評価することは可能である。

(2) 定常過程で便利であったエルゴード性の過程が非定常過程では成り立たない。したがって集合平均の代わりに時間平均を用いることができない。

(3) 意味ある時間平均をとることが難しい。時間域を細分化して，局所的平均を求め，繋ぎ合わせていくことになるがこの細分化が細か過ぎれば，平均の意味がなくなり，また粗過ぎると非定常性の評価ができなくなる。

(3) 定常過程でその物理的意味が明確であったパワー・スペクトル密度が非定常過程においては，定義によっては負値をとったり，二重の周波数の関数となったりするため，その物理的意味が明確でなくなる。これはスペクトル密度を求める際に，定常過程では有効であったフーリエ変換における直交性の特性が単純には使えなくなることによる。

(4) データ解析の観点からは，スペクトルを解析評価する際に，定常過程の場合よりも誤差原因が1つ増える。これは時間差バイアス誤差で，ある時刻 でのパワー・スペクトル密度と，その時刻ともう1つの別の時刻 t_2 との間 $(t_1-t_2)=\tau$ の平均パワー・スペクトル密度との間に差が生ずるということである。この誤差は時間差 τ に比例する。

以上のような問題点を解決するために種々の非定常スペクトルの考え方が提案され，また分析手法が開発されている。これらの各種の方法を比較評価する

ためには，その評価基準が必要であるが，機械・構造物に関する不規則応答解析の立場から，非定常スペクトルに対して要求される基本的事項をまとめると以下のようになるであろう。

(1) 物理的意味をもつこと。すなわち，時間および周波数の実関数で，負値をとらず，周波数にわたってのエネルギー分布を表すものであること。

(2) 入力スペクトルが与えられた場合に，線形系の応答スペクトルが容易に求まるものであること。

5．　非定常不規則荷重のスペクトル密度関数

5．1　はじめに

最初に，理解を深めるため，不規則荷重を確率過程として記述するための基本的パラメータの関連について再び考えよう。図2はこの関連を概括的に示したものである。平均値および分散は変動振幅の中心および広がり（振動の強さ）を表すパラメータで，振幅特性を表す基本的なものである。この振幅特性は確率密度関数により完全に規定される。相関関数とスペクトル密度関数は，それぞれ，時間領域および周波数領域の情報を備えている。複数の確率過程間の結合特性は，同時確率密度関数，相互相関関数，および相互スペクトル密度によって記述される。また，これらの規準化量として相関係数と関連度関数（コーヒレンス関数）が定義される。定常過程の場合と異なり，非定常過程の場合には，これらのパラメータがすべて時間に依存することになる。

さて，過程が非定常と考えられる場合には，その統計的特性が時間とともに変化するその早さが問題となる。非定常スペクトルについては種々の定義が現在までに提案されているが，その根底にある概念はすべて，時間間隔内では定常過程とみなせる，ということである。各種の非定常スペクトルは基本的には第４節に述べた事項を満足するように改良されてきている。以下においては現在までに提案されている代表的な非定常スペクトルについて述べる。なお，定常スペクトルがパワーと周波数との２次元表示であったのに比べ，非定常スペクトルは時間に依存したものとなるため，パワー，周波数および時間の３次元表示となる。

5．2　非定常不規則荷重の相関関数

非定常不規則荷重ではその統計的特性が時間に依存したものとなるため，先に定常過程で述べたところを多少拡張して論じる必要が生じる。ここでは任意の２つの時点を t_1，t_2 と定めて考えることにする。

さて，確率過程 $X(t)$ および $Y(t)$ の共分散関数は，

$$C_{XX}(t_1,\ t_2) = E[\{X(t_1)-\mu_X(t_1)\}\{X(t_2)-\mu_X(t_2)\}] \tag{5.1}$$

$$C_{YY}(t_1,\ t_2) = E[\{Y(t_1)-\mu_Y(t_1)\}\{Y(t_2)-\mu_Y(t_2)\}] \tag{5.2}$$

$$C_{XY}(t_1,\ t_2) = E[\{X(t_1)-\mu_X(t_1)\}\{Y(t_2)-\mu_Y(t_2)\}] \tag{5.3}$$

で定義される。ただし，$\mu(t)$は時刻 t における過程の平均値であって，

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \tag{5.4}$$

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] \tag{5.5}$$

で与えられるものである。定常過程の場合には，平均値は時間に無関係な定数となり，共分散は時間差 $\tau = t_2 - t_1$ のみの関数となるが，非定常過程の場合には t_1 および t_2 の関数となるわけである。また，相関関数は

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = E[X(t_1)\cdot X(t_2)] \tag{5.6}$$

$$R_{YY}(t_1,\ t_2) = E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)] \tag{5.7}$$

$$R_{XY}(t_1,\ t_2) = E[X(t_1)\cdot Y(t_2)] \tag{5.8}$$

で定義される。共分散関数および相関関数の間には次の関係が存在する。

$$C_{XX}(t_1,\ t_2) = R_{XX}(t_1,\ t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \tag{5.9}$$

$$C_{YY}(t_1,\ t_2) = R_{YY}(t_1,\ t_2) - \mu_Y(t_1)\mu_Y(t_2) \tag{5.10}$$

$$C_{XY}(t_1,\ t_2) = R_{XY}(t_1,\ t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \tag{5.11}$$

また，

$$|R_{XY}(t_1,\ t_2)|^2 \leqq R_{XX}(t_1,\ t_2)\cdot R_{YY}(t_1,\ t_2) \tag{5.12}$$

$$R_{XX}(t_2,\ t_1) = R_{XX}(t_1,\ t_2) \tag{5.13}$$

$$R_{YY}(t_2,\ t_1) = R_{YY}(t_1,\ t_2) \tag{5.14}$$

$$R_{XY}(t_2,\ t_1) = R_{YX}(t_1,\ t_2) \tag{5.15}$$

の関係がある。したがって，非定常確率過程の相関関数は $R_{XX}(t_1,t_2)$，$R_{YY}(t_1,t_2)$，$R_{XY}(t_1,t_2)$ および $R_{YX}(t_1,t_2)$ の４つが決まれば，その他のものも決定される。なお，各関数は $t_1 \leqq t_2$ における値がわかればよい。

次に，スペクトル密度関数を求める際に便利な相関関数の別の表現法について述べておく。これは時間 t_1 および t_2 を時間差 τ と中心時間 t とで置き換えるものである。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t_2 - t_1 \\ t &= \frac{t_1 + t_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

なる τ と t とを採用する。各時間は，上式を t_1 と t_2 について解くことによって，

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t - \frac{\tau}{2} \\ t_2 &= t + \frac{\tau}{2} \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

と表される。したがって，この表現法によれば，自己相関関数は

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= R_{XX}\left(t-\frac{\tau}{2},\ t+\frac{\tau}{2}\right) \tag{5.18}$$

と表すことができる。したがって，

$$R_{XX}(\tau,\ t) = E\left[X\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot X\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{5.19}$$

と表すことができる。このように，(t_1-t_2) と (t_1-t_2) の変数を用いず，τ および t を用いると，自己相関関数 $R_{XX}(\tau,t)$ は τ に関して偶関数になり，さらに，サンプリング時間 $(t-\tau/2)$ と $(t+\tau/2)$ は，互いに τ 時間離れ，時間 t について対称であり，時間 t における瞬間自己相関関数とみなせる。この定義は一般的相関関数

$$R_{XX}(\tau,\ t) \equiv E[X(t-k\tau)\cdot X\{t+(1-k)\tau\}] \tag{5.20}$$

において，k=1/2 としたものである。また対称性の特性をもつのは，この k=1/2 の場合のみである。

ここでさらに，$R_{XX}(\tau,t)$ が τ および t のみの関数に変数分離できるものと仮定してみよう。すなわち，

$$R_{XX}(\tau,\ t) = R_1(t)\cdot R_2(\tau) = R_1\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\cdot R_2(t_2-t_1) \tag{5.21}$$

と表しうる場合を考える。もしも，$R_2(t_1-t_2)$ が定常過程であって，$R_2(0)=1$ となるように規準化されているものとすれば，

$$R_1(t) = \psi_X^2(t) \tag{5.22}$$

となる。ただし，$\psi_X{}^2(t)$ は時刻 t における過程の自乗平均値であり，

$$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)] \tag{5.23}$$

で与えられるものである。このような仮定が成り立つ過程を局所定常過程（locally stationary process）とよぶ。

5．3　一般化スペクトルあるいは2重周波数スペクトル[17]

定常過程のパワー・スペクトル密度が定常相関関数のフーリエ変換で定義されたのと同様に，非定常過程のパワー・スペクトル密度も非定常相関関数をフーリエ変換することにより定義できる。このスペクトルは定常過程の直接的拡張として理解しやすい。しかしながら，この非定常の場合には2重フーリエ変換となり，スペクトルの物理的解釈が困難となるのが欠点である。

さて，非定常確率過程 X(t) の自己相関関数は式(5.6)で与えられているから，これをフーリエ変換して，一般化スペクトル（generalized spectrum）ま

たは２重周波数スペクトル (double frequency spectrum) は，

$$S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2) \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1,\ t_2)e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}dt_1 dt_2 \tag{5.24}$$

と定義される。また，上式を逆変換すれば，

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)e^{-i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2 \tag{5.25}$$

となる。式(5.25)において，$t=t_1-t_2$ とおけば，X(t) の自乗平均値は，

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(t,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}d\omega_1 d\omega_2 \tag{5.26}$$

と表される。いま，X(t) の全パワーを

$$\phi_X \equiv E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt\right] \tag{5.27}$$

と定義することにすれば，これは式(5.26)を用いて，

$$\begin{aligned}\phi_X = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}d\omega_1 d\omega_2 dt\end{aligned}$$

と表すことができる。

さらに，相互スペクトル密度も同様に定義できる。すなわち，式(5.8)で与えられる相互相関関数をフーリエ変換すれば，一般化相互スペクトル密度は，

$$S_{XY}(\omega_1,\ \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1,\ t_2)e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}dt_1 dt_2 \tag{5.28}$$

と定義される。この式を逆変換すれば，

$$R_{XY}(t_1,\ t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega_1,\ \omega_2)e^{-i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2 \tag{5.29}$$

となる。

ここで，特別な場合として定常過程を考えることとしよう。定義の場合には，$E[X^2(t)]$ は時間に無関係で一定のはずであるから，式(5.26)から，

$$\omega_1 \neq \omega_2 \text{ のとき，} S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2) = 0$$

となる。すなわち，$S_{XX}(\omega_1, \omega_2)$ は $\omega_1=\omega_2$ の面に限定される。この関係は，

$$S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2) = P_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)\delta(\omega_1-\omega_2) \tag{5.30}$$

と表すこともできる。ここに，$\delta(\omega_1-\omega_2)$ はディラックのデルタ関数で $\omega_1 \neq \omega_2$ のとき，0 である。式(5.30)を式(5.26)へ代入すれば，

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)\delta(\omega_1-\omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}d\omega_1 d\omega_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{XX}(\omega_1,\ \omega_1)d\omega_1 \tag{5.31}$$

となる。ところで，過程 X(t) が定常の場合には，式(2.19)から

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega \tag{5.32}$$

であるから，式(5.31)と(5.32)から，

$$P_{XX}(\omega_1,\ \omega_1) = S_{XX}(\omega_1)$$

となる。したがって，

$$S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2) = S_{XX}(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2) \tag{5.33}$$

であり，これを式(2.25)へ代入すれば，

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)\delta(\omega_1-\omega_2)e^{-i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1)e^{-i\omega_1(t_1-t_2)}d\omega_1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1)e^{-i\omega_1(-\tau)}d\omega_1$$
$$= R_{XX}(\tau)$$

すなわち，

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1)e^{i\omega_1\tau}d\omega_1 \tag{5.34}$$

である。式(5.34)を逆変換すれば，

$$S_{XX}(\omega_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i\omega_1\tau}d\tau \tag{5.35}$$

となり，式(5.34)と(5.35)は，定常過程の場合によく知られた，Wiener-Khintchine の関係式を与えている。

5．4　瞬間スペクトル[18),(19)]

非定常相関関数として式(5.19)を用い，これをフーリエ変換することにより，瞬間スペクトル(instantaneous spectrum)は，

$$S_{XX}(\omega,\ t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau,\ t)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty \tag{5.36}$$

で定義される。また，この式は $R_{XX}(\tau, t)$ が τ に関して偶関数であることから，

$$S_{XX}(\omega,\ t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau,\ t)\cos\omega\tau d\tau$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_{XX}(\tau,\ t)\cos\omega\tau d\tau \tag{5.37}$$

とも書くことができる。式(5.36)を逆変換すれば，

$$R_{XX}(\tau,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)e^{i\omega\tau}d\omega \tag{5.38}$$

となる。$X(t)$ の自乗平均値は式(5.38)において，$\tau=0$ とおけば，

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(0,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)d\omega$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)d\omega \tag{5.39}$$

と表すことができる。すなわち，$X(t)$ の自乗平均値はスペクトル $S_{XX}(\omega, t)$ の曲線と ω 軸とで囲まれる面積に等しい。$S_{XX}(\omega, t)$ は時間 t における瞬間パワー $E[X^2(t)]$ の円振動数 ω 領域への分解と考えることができる。また，ω を固定して考えたときには，$S_{XX}(\omega, t)$ は $E[|F_X(\omega)|^2]$ の時間領域への分解とも考えることができる。なぜならば，

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i\omega t}dt \tag{5.40}$$

$$F_X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{i\omega t}dt \tag{5.41}$$

の両式から，

$$E[|F_X(\omega)|^2] = E[F_X(\omega)\cdot F_X^*(\omega)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)X(t_2)]e^{-i\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

となり，ここで，座標を (t_1, t_2) から (τ, t) へ式(5.17)を使って変換すれば，上式は，

$$E[|F_X(\omega)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X\left(t-\frac{\tau}{2}\right)X\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{i\omega\tau}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial t_1}{\partial t} & \dfrac{\partial t_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau} & \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau}\end{vmatrix} dtd\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau,\ t)e^{i\omega\tau}d\tau dt$$

と変換され，さらに式(5.36)および式(5.37)から最終的に，

$$E[|F_X(\omega)|^2] = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)dt \tag{5.42}$$

となるからである。また，X(t) の全パワーは

$$\phi_X = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)d\omega dt \tag{5.43}$$

となる。式(5.43)へ式(5.42)を代入すれば，

$$\phi_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t)dtd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E[|F_X(\omega)|^2]d\omega \tag{5.44}$$

と表すことができる。すなわち，$E[|F_X(\omega)|^2]$ は，X(t) の全パワー ϕ_X についてのスペクトルとも解釈できる。このスペクトルの欠点は負値をとり得ることである（文献(18)参照）。

5．5　物理スペクトル(19)

物理スペクトル(Physical spectrum)は時間 t 近傍のパワーを表すものとして，

$$S_{XX}(\omega,\ t:W) \equiv E\left[\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} W(t-u)X(u)e^{-i\omega u}du\right|^2\right],\ (-\infty < \omega < \infty) \tag{5.45}$$

で定義される。ここで，W(t) は t=0 近傍で正値をとり，これ以外では絶対値 |W(t)| が非常に小となるウインド関数であり，次式

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t)dt = 1 \tag{5.46}$$

を満足するものとなる。このウインド関数の例としては，

i)
$$W(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{5.47}$$

ただし，
$$\mathrm{rect}\,(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leqq 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

ii)
$$W(t) = \beta^{\frac{1}{2}}\frac{\sin \pi\beta t}{\pi\beta t} \tag{5.48}$$

などが考えられる。

全パワーを表す式(5.27)において，X(t) の代わりに，W(t−u)X(u) を考えれば，時刻 t 近傍のパワーとして

$$\phi_X(t) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-u)X^2(u)du\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-u) E[X^2(u)] du \tag{5.49}$$

と表すことができる。また，全パワーは式(5.44)でも表されるので，この式に式(5.40)を代入し，さらに $X(t)$ の代わりに $W(t-u)X(u)$ を用いれば，時刻 t 近傍のパワーとして，

$$\phi_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) X(u) e^{-i\omega u} du \right|^2 \right] d\omega \tag{5.50}$$

とも表すことができる。上式は物理スペクトルの定義式(5.45)を用いれば，

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t : W) d\omega \tag{5.51}$$

となる。

したがって，全パワーは

$$\phi_X = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t : W) d\omega dt \tag{5.52}$$

と表される。式(5.21)から，$S_{XX}(\omega, t:W)$ は，時間 t 近傍の平均瞬間パワーを周波数領域へ分解したものと解釈できる。なぜならば，$X(t)$ が t 近傍で定常の場合を考えてみよう。式(5.49)において $E[X^2(u)]$には重み $W^2(t-u)$ が掛けられており，$u=t$ 近傍以外ではほぼ 0 となる。したがって，被積分関数として意味があるのは t 近傍のみである。ところで，いま，$X(t)$ は t 近傍で定常であるから，$E[X^2(u)]$ は t 近傍で一定と考えてよい。したがって，

$$\phi_X(t) = E[X^2(t)] \int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-u) du$$

と表すことができる。式(5.46)によって上式右辺の積分の値は 1 であるから，

$$\phi_X(t) = E[X^2(t)]$$

となり，また，式(5.51)から

$$\phi_X(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega,\ t : W) d\omega$$

である。したがって，$S_{XX}(\omega, t : W)$ は，非定常過程 $X(t)$ を時間tの近傍でほぼ定常とみなして，そのパワー・スペクトル密度を ω，t の関数として表したものといえるわけである。また，定義式(5.45)から，$S_{XX}(\omega, t:W)$ は非負で，かつ ω に関して偶関数である。式(5.52)からは，$S_{XX}(\omega, t : W)$ の全体積 $X(t)$ の全パワーに等しいこともわかる。

さらに，スペクトルの特性を知るために，式(5.45)を

$$S_{XX}(\omega,\ t:W)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(t-u_1)W(t-u_2)$$
$$\times E[X(u_1)X(u_2)]e^{-i\omega(u_2-u_1)}du_1du_2 \tag{5.53}$$

と書き，座標を（u_1,u_2）から（τ,u）へ，次の関係式，

$$\tau = u_2-u_1$$
$$u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)$$

を用いて変換すれば，式(5.53)は

$$S_{XX}(\omega,\ t:W)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W\left(t-u+\frac{\tau}{2}\right)W\left(t-u-\frac{\tau}{2}\right)$$
$$\times R_{XX}(\tau,\ u)e^{-i\omega\tau}\cdot\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(\tau,\ u)}d\tau du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_W(\tau,\ t-u)R_{XX}(\tau,\ u)e^{-i\omega\tau}d\tau du \tag{5.54}$$

と表すことができる。ここで，

$$R_W(\tau,\ t-u)=W\left(t-u+\frac{\tau}{2}\right)W\left(t-u-\frac{\tau}{2}\right)$$
$$=E\left[W\left(t-u+\frac{\tau}{2}\right)W\left(t-u-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{5.55}$$

であり，

$$S_W(\omega,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_W(\tau,\ t)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{5.56}$$

$$R_W(\tau,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}S_W(\omega,\ t)e^{i\omega\tau}d\omega \tag{5.57}$$

とする。式(5.54)は

$$S_{XX}(\omega,\ t:W)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_W(\tau,\ t-u)$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(\bar{\omega},\ u)e^{i\bar{\omega}\tau}d\bar{\omega}e^{-i\omega\tau}d\tau du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_W(\tau,\ t-u)e^{-i\tau(\omega-\bar{\omega})}d\tau S_{XX}(\bar{\omega},\ u)d\bar{\omega}du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_W(\omega-\bar{\omega},\ t-u)\cdot S_{XX}(\bar{\omega},\ u)d\bar{\omega}du \tag{5.58}$$

と表せることができる。すなわち，物理スペクトル $S_{XX}(\omega,t)$ を部分的に平滑化(smoothing)したものとも解釈できるのである。

5．6　局所時間平均スペクトル[21]

非定常過程相関関数として式(5.19)を用いて，局所時間平均自己相関関数(locally time averaged autocorrelation)を次のように定義する。

$$g_X^{(n)}(\tau,\ \lambda) \equiv \int_0^\infty \Lambda^{(n)}(t,\ \lambda) R_{XX}(\tau,\ t)dt,\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{5.59}$$

ここで，$\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ は時間ウインド関数で，次のように定義される。

$$\Lambda^{(n)}(t,\ \lambda) \equiv \begin{cases} 0 & (t < 0 \text{のとき}) \\ \dfrac{(2\lambda)^{n+1}}{n!}\cdot t^n e^{-2\lambda t} & (t > 0 \text{のとき}) \end{cases} \tag{5.60}$$

時間ウインド関数 $\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ の特性をまとめて示せば以下の通りである。

i) $0<t<\infty$ の領域で非負である。

ii) 次式を満足する。

$$\int_0^\infty \Lambda^{(n)}(t,\ \lambda)dt = 1 \tag{5.61}$$

iii) 関数 $\Lambda^{(n)}$ の時間的中心点は次式で表される。

$$\bar{t}^{(n)} = \int_0^\infty t\Lambda^{(n)}(t,\ \lambda)dt = \frac{n+1}{2\lambda} \tag{5.62}$$

iv) 公称持続時間(nominal duration)を時間的中心点 $\bar{t}^{(n)}$ に関する $\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ の２次のモーメントの平方根で定義すれば，次のように表される。

$$D_t^{(n)} \equiv \sqrt{\int_0^\infty (t-\bar{t}^{(n)})^2 \Lambda^{(n)}(t,\ \lambda)dt} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\lambda} = \sqrt{\frac{\bar{t}^{(n)}}{2\lambda}} \tag{5.63}$$

v) 関数 $\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ は次の点で最大値をとる。

$$t^{(n)} \equiv \frac{n}{2\lambda} \tag{5.64}$$

vi) 関数 $\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ と $\Lambda^{(n+1)}(t,\lambda)$ の各々の時間的中心点間の時間差，あるいは最大値をとる時間点間の時間差 Δt は，次のように表される。

$$\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)} = \frac{1}{2\lambda} \tag{5.65}$$

さて，上述の時間ウインド関数 $\Lambda^{(n)}(t,\lambda)$ の特性を考えれば，式(5.59)で定義される局所時間平均自己相関関数は，瞬間自己相関関数 $R_{XX}(\tau,t)$ を局所的に時間 $t^{(n)}=(n+1/2\lambda)$ の近傍で平均化したものとみなせる。したがって，n が式(5.62)に見られるように時間を表すパラメータであることを考えれば，$n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ に対応する $g_X^{(n)}(\tau,\lambda)$ のシーケンスが瞬間自己相関関数 $R_{XX}(\tau,t)$ の時間変化を表すものとなっているといえる。このことから，

式(5.59)は τ および t の2変数をもつ関数 $R_{XX}(\tau, t)$ を τ のみの1変数関数 $g_X^{(n)}(\tau, \lambda)$ のシーケンス n=0, 1, 2,… へと変換するものであると考えることができる。

また，時間ウインド関数 $\Lambda^{(n)}(t, \lambda)$ は $t<0$ の領域で 0 と定義されているので，式(5.59)からは，$t<0$ での $X(t)$ の挙動に関する情報は一切わからない。したがって，ここでは

$$X(t) = 0, \quad (t < 0) \tag{5.66}$$

と仮定することにしよう。この場合には当然，

$$R_{XX}(\tau,\ t) = 0, \quad (t < 0) \tag{5.67}$$

となる。

さて，局所時間平均自己相関関数 $g_X^{(n)}(\tau, \lambda)$ をフーリエ変換することにより，$X(t)$ の局所時間平均スペクトル(locally time averaged spectrum)は次のように定義される。

$$\begin{aligned} S_X^{(n)}(\omega,\ \lambda) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_X^{(n)}(\tau,\ \lambda) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_X^{(n)}(\tau,\ \lambda) \cos \omega\tau d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} g_X^{(n)}(\tau,\ \lambda) \cos \omega\tau d\tau, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned} \tag{5.68}$$

ここで，$g_X^{(n)}(\tau, \lambda)$ は常に τ の偶関数であるから，$S_X^{(n)}(\tau, \lambda)$ も ω に関して偶関数となる。式(5.68)を逆変換すれば，

$$\begin{aligned} g_X^{(n)}(\tau,\ \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X^{(n)}(\omega,\ \lambda) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X^{(n)}(\omega,\ \lambda) \cos \omega t d\omega \\ &= 2\int_{0}^{\infty} S_X^{(n)}(\omega,\ \lambda) \cos \omega\tau d\omega, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned} \tag{5.69}$$

となる。ここで，$\tau=0$ とおけば，

$$g_X^{(n)}(0,\ \lambda) = 2\int_{0}^{\infty} S_X^{(n)}(\omega,\ \lambda) d\omega, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

また，式(5.59)から

$$\begin{aligned} g_X^{(n)}(0,\ \lambda) &= \int_{0}^{\infty} \Lambda^{(n)}(t,\ \lambda) R_{XX}(0,\ t) dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \Lambda^{(n)}(t,\ \lambda) E[X^2(t)] dt, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

となる。すなわち，$g_X^{(n)}(\tau, \lambda)$ において，$\tau=0$ とすれば，それは，瞬間パワー，$E[X^2(t)]$，を局所的に時間平均したものを示しているのである。

5．7 Page の瞬間スペクトル[22]

C.H.Page によって提案された瞬間スペクトル(Page's instantaneous spectrum)においては，まず，

$$F_X(\omega, t) = \int_{-\infty}^{t} X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{5.70}$$

を定義し，これをランニング・スペクトルとよぶ。式(5.70)は，$t\to\infty$ では，過程 $X(t)$ のフーリエ変換となる。瞬間パワー・スペクトルは，

$$\rho_X(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} | F_X(\omega, t) |^2 \tag{5.71}$$

で定義する。上式は

$$S_{XX}(\omega, t) = E[\rho_X(\omega, t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} E[2X(t)\mathrm{Re}[e^{i\omega t} F_X(\omega, t)]], \ (-\infty < \omega < \infty) \tag{5.72}$$

$$= \frac{1}{2\pi} E\left[2X(t)\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega t}\int_0^t X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau, t)\cos\omega\tau d\tau \tag{5.73}$$

と変換できる。ここに，

$$R_{XX}(\tau, t) = E[X(t)X(t-\tau)]$$

である。式(5.73)を逆変換すれば，

$$R_{XX}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega, t)\cos\omega\tau d\omega$$

$$= 2\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega, t)\cos\omega\tau d\omega \tag{5.74}$$

となる。$X(t)$ の全パワーは

$$\phi_X = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(0, t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, t)d\omega dt \tag{5.75}$$

で与えられる。このスペクトルは負の値もとり得るので，物理的意味が不明確となる欠点をもつ。

5．8　時間変化スペクトル[27]

非定常確率過程 X(t) が実関数である場合を考える。この場合には Stieltjes 積分表示ができ，

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega,\ t)e^{i\omega t}dF_X(\omega) \tag{5.76}$$

と表すことができる。ここで，A(ω,t) は周波数 ω と時間 t との確定関数であり，また $F_X(\omega)$ は直交性をもつ確率過程で，次の特性をもつ。

$$E[dF_X(\omega_1)dF_X^*(\omega_2)]=\begin{cases}\dfrac{S_{XX}(\omega)d\omega}{2} & (\omega_1=\omega_2 \text{ の場合})\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases} \tag{5.77}$$

さらに，式(5.76)は部分積分表示ができ，次のようにも書ける。

$$X(t)=\int_{0}^{\infty}|A(\omega,\ t)|\{\cos\omega t dU(\omega)+\sin\omega t dV(\omega)\} \tag{5.78}$$

ここで，U(ω) および V(ω) は直交実関数の過程であり，次の特性をもつ。

$$E[dU(\omega_1)dU(\omega_2)]=\begin{cases}S_{XX}(\omega)d\omega & (\omega_1=\omega_2 \text{ の場合})\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

$$E[dV(\omega_1)dV(\omega_2)]=\begin{cases}S_{XX}(\omega)d\omega & (\omega_1=\omega_2 \text{ の場合})\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

$$E[dU(\omega_1)dV(\omega_2)]=0 \tag{5.79}$$

さて，時間変化スペクトル(evolutionary spectrum)は次式のように定義されるものである。

$$S_X(\omega,\ t)\equiv|A(\omega,\ t)|^2S_{XX}(\omega),\quad \omega\geqq 0 \tag{5.80}$$

式(5.78)および式(5.79)から，X(t) の自乗平均値は，

$$\begin{aligned}E[X^2(t)]&=\int_{0}^{\infty}|A(\omega,\ t)|^2S_{XX}(\omega)d\omega\\&=\int_{0}^{\infty}\mathcal{S}_X(\omega,\ t)d\omega\end{aligned} \tag{5.81}$$

で与えられることがわかる。また，X(t) の全パワーは，

$$\phi_X=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t)^2]dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_X(\omega,\ t)d\omega dt \tag{5.82}$$

と表される。次に，相関関数を考える。

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(\tau,\ t) &= E\left[X\left(t-\frac{\tau}{2}\right)X\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty \left|A\left(\omega,\ t-\frac{\tau}{2}\right)\right|\left\{\cos\omega\left(t-\frac{\tau}{2}\right)dU+\sin\omega\left(t-\frac{\tau}{2}\right)dV\right\}\right. \\
&\quad \left.\times\int_0^\infty \left|A\left(\omega,\ t+\frac{\tau}{2}\right)\right|\left\{\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)dU+\sin\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)dV\right\}\right] \\
&= \int_0^\infty \left|A\left(\omega,\ t-\frac{\tau}{2}\right)A\left(\omega,\ t+\frac{\tau}{2}\right)\right|\cos\omega\tau S_{XX}(\omega)d\omega
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

ここで，$A(\omega,t)$ が t に関してなだらかに変化するならば，すなわち，

$$
A\left(\omega,\ t-\frac{\tau}{2}\right) \doteqdot A\left(\omega,\ t+\frac{\tau}{2}\right) \doteqdot A(\omega,\ t) \tag{5.84}
$$

と仮定できるならば，式(5.83)は，

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(\tau,\ t) &\doteqdot \int_0^\infty |A(\omega,\ t)|^2 S_{XX}(\omega)\cos\omega\tau d\omega \\
&= \int_0^\infty \mathcal{S}_X(\omega,\ t)\cos\omega t d\omega
\end{aligned}
\tag{5.85}
$$

と表される。したがって，$\tau=0$ のときには

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(0,\ t) &= \int_0^\infty \mathcal{S}_X(\omega,\ t)d\omega \\
&= E[X^2(t)]
\end{aligned}
$$

となる。

5．9　データ・ベースに基づく非定常確率過程のスペクトル(5),(53)

この手法は Shinozuka らによって提案されたものであり，通常，非定常確率過程の観測記録はそれ程多くはないので，観測データを十分に活用しようとするものである。

さて，$x_0(t)$ を記録長 T_0 の観測データであるとすれば，フーリエ変換対として

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_{X_0}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_{X_0}(\omega)|\, e^{i(\omega t+\zeta_0(\omega))}d\omega
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{X_0}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= |F_{X_0}(\omega)|\, e^{i\zeta_0(\omega)}
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

の関係が得られる。ただし，$F_{X_0}(\omega)$ は $x_0(t)$ のフーリエ変換であり，| Fx

$_0(\omega)|$ はフーリエ振幅，$\zeta_0(\omega)$ は位相角を表している。ここでランダム位相角 $\psi(\omega)$ を導入し，非定常確率過程 X(t) を

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_{x_0}(\omega)|\,e^{i\{\omega t+\zeta_0(\omega)+\Psi(\omega)\}}d\omega \tag{5.88}$$

によって構築する。いま，ランダム位相角 $\psi(\omega)$ として

$$\Psi(\omega)=\Phi\cdot\mathrm{sgn}(\omega) \tag{5.89}$$

ただし，sgn(ω) は符号関数であって，

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\omega)&=1 &&(\omega>0)\\ &=0 &&(\omega=0)\\ &=-1 &&(\omega<0)\end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

を採用するものとすれば，

$$X(t)=x_0(t)\cos\Phi-\hat{x}_0(t)\sin\Phi \tag{5.91}$$

という簡単な形で，過程 X(t) をシミュレートすることができる。ここに，ϕ は，任意分布をもった乱数であり，また $x_0(t)$ は

$$\hat{x}_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x_0(\tau)/(t-\tau)d\tau \tag{5.92}$$

で定義される $x_0(t)$ のヒルベルト変換である。過程 X(t) はまた，

$$X(t)=A_0(t)\cos\{\Phi+\theta_0(t)\} \tag{5.93}$$

と表すこともできる。ただし，$A_0(t)$ は包絡線関数であって，

$$A_0(t)=[x_0^2(t)+\hat{x}_0^2(t)]^{1/2} \tag{5.94}$$

で与えられ，また $\theta_0(t)$ は

$$\theta_0(t)=\tan^{-1}\{\hat{x}_0(t)/x_0(t)\} \tag{5.95}$$

で与えられる。

この過程の自己相関関数は

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1,\ t_2)&=E[X(t_1)X(t_2)]\\ &=\frac{1}{2}\{x_0(t_1)x_0(t_2)+\hat{x}_0(t_1)\hat{x}_0(t_2)\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\{x_0(t_1)x_0(t_2)-\hat{x}_0(t_1)\hat{x}_0(t_2)\}\cdot E[\cos 2\Phi]\\ &\quad-\frac{1}{2}\{x_0(t_1)\hat{x}_0(t_2)+\hat{x}_0(t_1)x_0(t_2)\}\cdot E[\sin 2\Phi]\end{aligned} \tag{5.96}$$

で与えられ，また一般化スペクトルは

$$\begin{aligned}S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(t_1,\ t_2)e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}dt_1dt_2\\ &=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2F_{X0}(\omega_1)F^*_{X0}(\omega_2)E\left[e^{i\Phi\{\mathrm{sgn}(\omega_2)-\mathrm{sgn}(\omega_1)\}}\right]\end{aligned} \tag{5.97}$$

で与えられる。ここに，$F_{X0}^*(\omega)$ は $F_X^*(\omega)$ の共役複素関数である。したがって，$R_{XX}(t_1,t_2)$ は $S_{XX}(\omega_1,\omega_2)$ のフーリエ逆変換として，

$$R_{XX}(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)e^{-i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2 \tag{5.98}$$

と表すこともできる。

特別の場合として，ϕ が $-m\pi \sim m\pi$（mは自然数）の間に分布する一様乱数であるとすれば，

$$R_{XX}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{2}\{x_0(t_1)x_0(t_2)+\hat{x}_0(t_1)\hat{x}_0(t_2)\} \tag{5.99}$$

$$\begin{aligned}S_{XX}(\omega_1,\ \omega_2)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2F_{X0}(\omega_1)F_{X0}^*(\omega_2) && (\omega_1\omega_2>0 \text{ または } \omega_1=\omega_2=0 \text{ の場合})\\ &=0 && (\text{その他の場合})\end{aligned} \tag{5.100}$$

という極めて簡単な形に帰着される。

実働荷重試験による海洋構造物の疲労信頼性保証に関する研究

緒言

新しい用途の構造物の設計、或は、より厳しい使用条件の下での設計、或は耐損傷設計の適用に際しては、従来と異なる破損モードの予測とそれに対する配慮が必要であるのは勿論である。それだけではなく、寿命予測などに関しては、従来の経験のみでは不十分であり、今までの経験を補足しうるデータを準備することも重要である。その一つに、疲労試験のデータがある。設計に際しての安全余裕の基準にもよるが、明らかに外力が不規則過程であるとき、即ち、地震動による負荷、波浪による海洋構造が受ける外力、航空機の荷重のPROFILE、風荷重など、を考慮する時には、合理的設計を目指すならば、換言すれば、確率的破壊力学、保守・点検の効果を取り入れた信頼性解析などを十分に活用し安全性に対する配慮を行うとすれば、それに応じうるデータ、即ち、実働荷重による試験の結果の利用が望ましい。従来提案されている種々の理論、或は簡便法を適用して実働荷重試験に替えるのも可能である[56),57)]。その最も単純なものはマイナー則の適用であろう。たとえそのような時でも、それらの方法の妥当性を実証するためには十分な実験的資料が必要である。従って実働荷重疲労試験（ランダム疲労試験）の必要性はかなり大であると言わざるを得ない。にもかかわらず、ランダム疲労試験が一般的な試験法として定着していないのは、その必要性が認識されていないからではなく、試験が困難であったためである。事実、必要やむを得ないときには、大規模な実験装置と大型コンピュータ、あるいはかなり性能の良いミニコンピュータを用いた実験が行われている[58),59)]。いわば、費用対効果比の問題であったといえよう。最近、制御機能の充実した各種の試験気が普及すると共に、マイクロコンピュータによる計測及び制御の応用の発展が著しく、ようやく実働荷重試験をより容易に行いうるようになってきた[60,)61)]。また、いわゆるパーソナルコンピュータも実験に応用されている[62),63)]。しかしながら、Micro Processing Unit(MPU)機能上の制約（計算速度が十分でないこと、メモリ容量の不足など）、試験機の動特性が必ずしも満足できるものではないことなどのため、望ましい荷重履歴を用

いた実験は必ずしも可能ではない。筆者等は、８ビットＭＰＵが発表されて以来、ＭＰＵによるランダム疲労試験の可能性を検討し続け、いくつかの試みを行ってきた[64),65)]。その際、最も大きな制約はランダムプロセスのシュミレーションであった。大型コンピュータでしばしば用いられる余弦級数和による疑似ガウス過程の計算は、ＭＰＵの計算速度の制約上、十分長いランダム過程を得ることは困難である。Fast Fourier Transform (FFT) をMPUを用いて実行するとしても、記憶容量の制約から、長期間のランダム系列を得ることは不可能である。（比較的短時間のランダム過程、例えば地震加速度のシュミレーションは可能ではある）。一自由度あるいはは、二三の自由度のシステムのインデンシアル応答を用いたランダム過程のシュミレーションも、ある卓越した振動モードが問題となるような構造部材の疲労などが対象となるときにはかなり有効である。その場合でも、現在の、ＭＰＵではアセンブラによるプログラムによらず、ベーシックなどを用いるならば、非常に低試験速度で実験を行わざるを得なくなる[66)]。また、この方法の欠点は、任意のパワースペクトル密度（ＰＳＤ）を持つランダム過程を発生することが困難なことである。以上述べてきたように、現時点ではマイクロコンピュータによるランダム疲労試験はほとんど不可能である。したがってマイクロコンピュータを用いたシステムによる実験によって、疲労被害に関してランダム（実働）荷重系列と等価なかつ簡単な荷重系列を見いだすことは不可能ということになろう。この点に関しては、ミニコンピュータあるいは、スーパーミニコンと呼ばれるシステムに頼れば簡単に解決すると思われる。しかしながら、ルーチンの材料試験に採用するには高価過ぎるであろう。ＭＰＵを利用する一法として、大型コンピュータで準備したデータによって演算速度の遅いことおよび、記憶容量の少ないという欠点を補うことが考えられる。MPUの標準的入出力機器であるフロッピーディスクが大型コンピュータとの互換性がないので、TSSにるデータの授受によることになる。後述するようにこれにも転送速度上の制約が有り問題は残るが、現状ではやむを得ないであろう。同時に、この方法ではいくつかのMPUを結合して用いることも必要となってくる。一方、ランダム荷重が一連のpatchからなる過程であって、各patchの長さが短く、MPUのメモリサイズ程度でも充分にシュミレートしうる時は、ＦＦＴ演算などに工夫を加えれば、大型計算機の助けを借りる必要も無くなるであろう。また、１つの連続確率過程を適当な長さの幾つかの独立確率過程で置換できればMPUの有効利用も可能となる。荷重のシュミレーションが可能になったとしても、十分な試験速度で実験を行うためには、試験機の動特性を考慮にいれねばならない。比較的剛な試験片の場合、或は、

試験中の動特性の変化が少ないような試験の場合は、予め試験機のサーボアンプを調節しておくことによって、初期の負荷を試験片に与えることも可能である。しかし、一般に動的試験では入力に対する試験機系の応答を補償する方法[67]を取るのが普通である。ランダム疲労試験でも同様である[68]。ＭＰＵによる場合も、試験時間を短縮しようとするならば、この点を考慮にいれねばならない。本研究は、以上のごとき問題点を踏まえて、まず、第一に海洋構造物の負荷のシミュレーションについて考察を行い次いで、比較的小規模なシステムによるランダム疲労試験の方法を考案し、基礎実験を行うことを目的としている。なお、応力拡大係数（以下Ｋ値という）が定常ランダム過程であれば、疲労亀裂伝播に寄与する亀裂先端の状態は亀裂長によらず定常過程となると考えられる。換言すれば、定常ランダムＫ値下では疲労亀裂は一定の期待進展速度を持つと考えられる。これは予備的な実験でも確かめられていることでもあり[65]、またΔK_{eq}でランダム荷重下の亀裂進展が説明できる[60]という事実からも予想されるところである。この様な条件下で実験を行えば、確率過程の特性の差による疲労亀裂の振舞いの差を、定常ランダム荷重によるよりも、はっきりと把握しうると期待される。それゆえ、本研究ではＫ値制御のランダム疲労亀裂伝播試験が行えるような、ソフトウェア及びハードウェアを開発した。

6　小規模ディジタルシステムによる疲労試験

6.1　試験機への指令信号の作製

電気油圧サーボ試験機を利用することを考えているので、試験機への入力信号としてのランダム指令信号を必要とする。前述のように、本研究では、大型計算機で求めた所期のランダム過程を、ＴＳＳを介して一度フロッピー・ディスクに記録し、ＭＰＵで試験機へ送り出す方法を取る。

また、短いランダム過程の場合はMPUのみによって、ランダム荷重信号を作製する。

6.1.1　定常ガウス過程のシュミレーション

一般に定常ランダム過程ｘ（ｔ）は、復素フーリエ成分Ｒ（ｆ）を用いて、（６．１）式の様に表される。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} R(f)e^{i2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|e^{i(2\pi ft+\theta(f))}\,df \qquad (6.1)$$

t=time, f=frequency and $\theta(f)$=random phase

これを離散表示した近似式として、

$$\begin{aligned} x(i\Delta t) &= \sqrt{S(0)\cdot\Delta f}+2\sum_{k=0}^{M\leq N/2}\sqrt{S(k\Delta f)\cdot\Delta f} \\ &\quad \times\cos(2\pi k\Delta ft+\theta_k) \quad (i=1,2,\cdots,N) \\ &= \sqrt{S(0)\cdot\Delta f}+2\sum_{k=0}^{M}\{G_R(k\Delta f)\cos(2\pi k\Delta ft) \\ &\quad +G_I(k\Delta f)\sin(2\pi k\Delta ft)\} \end{aligned} \qquad (6.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &G_R{}^2(k\Delta f)+G_I{}^2(k\Delta f)=S(k\Delta f)\cdot\Delta f \\ &G_R(k\Delta f)/G_I(k\Delta f)=\tan^{-1}(\theta_k) \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

$$\Delta f\cdot N/2=f_{\max}=1/2\Delta t \qquad (6.4)$$

θ_k=uniform random number in 0, 2π

Δf=frequency interval

$S(f)$=power spectrum density

$G_R(f), G_I(f)$=Real and Imaginary part of Fourier Transform of $x(t)$

N=discrete data points

Δt=time interval

（６．２）式によれば、パワースペクトル密度が与えられ、θ_kを適当に取れば、高速フーリェ変換ＦＦＴを利用してランダム過程をシュミレート出来る。ランダム過程をシュミレートする際、例えば１０秒の長周期の波の一周期を４０点で表すとすれば、Δtは０．２５秒になる。長時間続く外乱を想定すれば、時刻歴の出力点数であるＦＦＴの分割数、Ｎを十分大にせねばならない。Δt＝０．２５秒の場合、$N=2^{17}$のもので、約９時間分の外乱をシュミレートできることになる。ＭＰＵでこれを行うとするとメモリ容量上$N=2^{12}$のＦＦＴが限界で、これは１５分間１００波程のデータであり、計算時間も考えれば十分とはいいがたい。大型計算機で１回に発生する外乱、2^{17}点分を以下”１storm”と呼ぶことにする。（６．２）式でθ_kを変えれば、同じパワースペクトルから次々に異なる”storm”が得られる。外乱の強さは、全体のパワーを変えることによって変動させられるが、本実験システムでは、実験時に任意にソフトで設定できるので、シュミレーション時に考慮する必要はない。
また、MPUでシュミレートしうる程度の荷重履歴も作り、patch長の効果も調べることにした。

6.1.2　大型計算機からの転送データと信号の復元

緒言で述べたように、試験機の動特性対策が必要なので、試験方法として、２つの方法が考えられる。１つは、十分追従するように試験速度を遅くする方法、１つは、動特性を考慮した指令信号を試験機に入力することによって、応答補償する方法である（大型コンピュータ或は高速のミニコンピュータを援用出来るシステムで通常とられている方法である）。なお、試験片を含めた系の動特性なので、疲労亀裂の寸法、亀裂まわりの塑性域の状態、荷重の大きさなどが、試験が進に従い、また試験の条件により変わるので、応答特性も変わってくる。そのため、系全体の応答補償は、実験中、オンラインで随時、行う必要がある。以下、前者を補償しない場合、後者を補償する場合と区別する。両者の優劣を決める要因は、疲労試験に要する時間と、大型計算機からのデータ転送時間である。試験時間については、７．４節で詳しく述べるとして、ここでは大型計算機からの転送データとＭＰＵでの指令信号の復元方法について述べる。補償しない場合では、大型計算機よりの転送データは、極値の大きさと極値間の距離（Ｆｉｇ．６．１）とし、ＭＰＵで隣合う極値を1/2余弦波で結び復元したものを、試験機への指令信号とする。補償をする場合には、発生したランダム過程ｘ（ｔ）をx_1，x_2,...,x_nに分割し、各々にＦＦＴを行いR_1（ｆ），R_2（ｆ），・・・，R_n（ｆ）なるデータとしてＭＰＵに転送する。ＭＰＵでは、後述するようにR_i（ｆ）に補償演算を施してからInverse　Fast　Four ier Transform(IFFT)をおこない、$x_i(t)$を応答荷重として得るための荷重入力信号$x_i^*(t)$とする。$R_i(f)$について更に詳しく述べると、先ず分割数nは、MPUで用いるFFTの分割数を2^{10}としたので、$n=2^{17}/2^{10}=128$となる。Fig.6.2に示す様に、本論文では、高周波成分の一周期文の出力点数が少なくならないように、大型計算機で与えるパワースペクトルの最高周波数成分が、fmaxの1/4以下になる様にfmaxを与えることにしたので、$x_i(t)$($i=1, 2, \cdots, 128$)をFFT(分割数$N=2^{10}$)した複素フーリエ成分$R_i(f)$(Fig6.3)も、fmaxの1/4以下に、ほとんどのデータが格納される。分割数2^{10}のFFTで求める$R_i(f)$

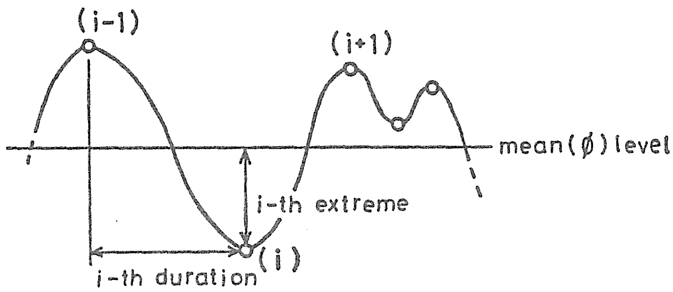


Fig.6.1 Data to be transfered for system without Response Compensation

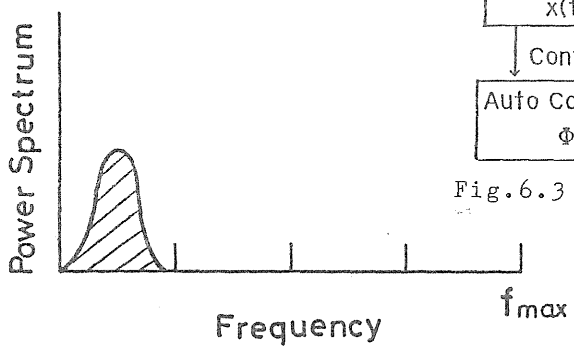


Fig.6.2 Schematic Representation of a Power Spectrum

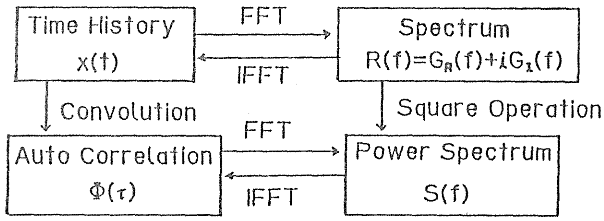


Fig.6.3 Relation between Time History and Power Spectrum

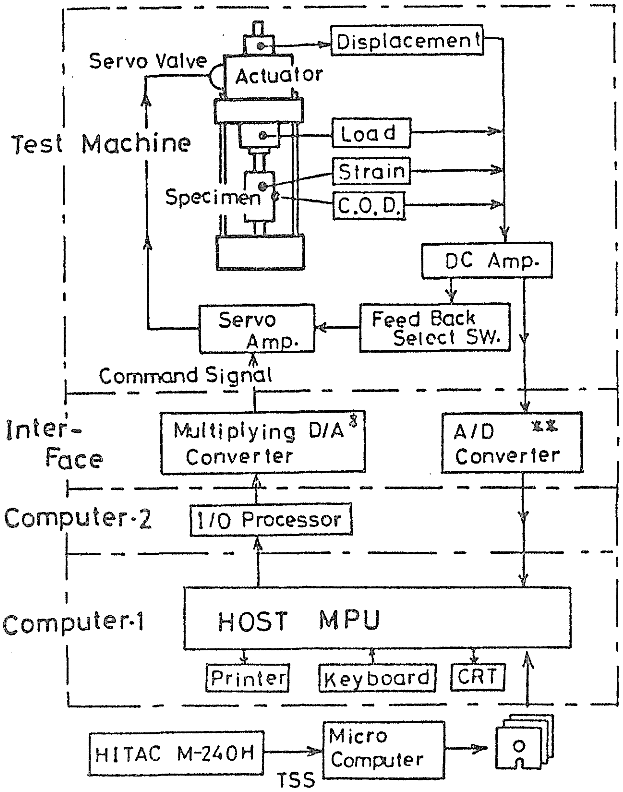
のfmaxは、2^9点目、fmax1/4以下では、2^7点目、迄の範囲である。それゆえ複素表示である倍の2^8(256)点が$x_i(t)$ 2^{10}点のために転送されるデータ$R_i(f)$があり、i=1から128でで全データが転送できる。ランダム過程の受信はTSSによるが2^{17}点を普通に全点受信すれば、一時間半かかる(2400bps)ので、転送データを減らすことで、それぞれ、受信時間短縮を計る。更に転送方式は、数字を一字づつアスキーコードで受け取る方法(アスキー転送)ではなく、バイナリ表示の数値データを、コントロール

コード以外のコードで表して転送し、実験室でディスクにセーブする際に数値に変換する方法（以下、バイナリ転送と呼ぶ）を、とっている。補償しない場合の転送データの一つである極値の大きさの表現を例にとれば、アスキー転送では符号と５桁の数字で６文字、６バイトの転送データを、バイナリ転送では３バイトで転送できる。補償する場合も、しない場合も、バイナリ転送によればアスキー転送の半分の時間で済む。具体的な時間については後述する。データ転送量は補償しない方法の方が少なく、また補償する方法の試験速度はＭＰＵによるＦＦＴの演算時間から限界があるので、一概に補償する方法が時間的に優れているとは、いえない。

６．２．２ＭＰＵによる制御

6.2.1 応答補償しない場合

Ｆｉｇ．６．４に、システムのブロックダイヤグラムを示す。制御は、２台のＭＰＵで行い、試験全体の管理や荷重指令信号の再現を行う”ＨＯＳＴ　ＭＰＵ”と、連続的に指令信号を試験機に送るもの”Ｉ／Ｏ　Ｐｒｏｃｅｓｓｏｒ”（以下、ＩＯＰという、これは独立した１台のMPUでもよい）とがある。ＩＯＰには指令信号を中継するための専用メモリとして８ｋバイトのメモリが２つ用意されていて、ここから試験機に荷重の信号を送る。ＨＯＳＴ側で荷重の条件や試験速度などの初期設定をキーボードから得て、ＩＯＰへ情報を送る。次に最初のｓｔｏｒｍのデータをディスクから読み取り、メモリへ格納し、隣合う極値を１／２余弦波で再現して、最初は１６Ｋバイト分の、次からは８Ｋバイト分のデータを、ＩＯＰへ送り出す。試験開始の支持を受けると、ＩＯＰは試験速度に応じた一定時間間隔で割り込む”ＴＩＭＥＲ”の割り込みプログラムで片側８Ｋバイトから順番に荷重信号を試験機へ送る。ＩＯＰから試験機へは、復元した荷重指令信号の間をさらに８等分した信号を順次送ることによって、指令信号の一層の平滑化を図る。ＩＯＰは片側８Ｋバイトを出し終ると、ＨＯＳＴへデータ要求信号を送る。ＨＯＳＴ側はこの信号を検知すると、荷重指令信号を８Ｋ分復元し、ＩＯＰへ送る。ＩＯＰでは、ＨＯＳＴが指令信号を復元する間も、また荷重入力信号データを空になった８Ｋバイトメモリに受信中にも、随時、試験機へ荷重入力信号を送り出す割り込みプログラムへ跳び、もう一方の８Ｋバイトメモリからデータを得て試験機へ荷重信号を送り続ける。またＨＯＳＴ側には、キーボードからの割り込みにより、試験の中断、再開、



*…16 bits DAC & 12 bits MDAC
**…12 bits ADC with multiplexer

Fig.6.4 Block Diagram of System

実験状況のプリントアウト等を実行する割り込みプログラムがあり、随時、キーボードを通して試験全体を管理できるようになっている。１ｓｔｏｒｍ分の処理を終えると次のｓｔｏｒｍのデータをディスクから読む。ディスクにデータがなくなった場合は、実験者がディスクを入れ換えるのを待つ。２台の独立したMPUを用いる場合も各々同様であり、互いの連絡ソフトを適当に作れば良い。

6.2.2 応答補償をする場合

同じくＦｉｇ．６．４のシステムを用いる。プログラムでは、応答特性を推定し、荷重指令信号を修正して復元する部分と、ＩＯＰからＨＯＳＴへの８Ｋデータ転送の要求方法とが、前者と異なる。荷重指令信号の復元をＩＦＦＴで行うため演算量が多いので、ＨＯＳＴが、指令信号の復元作業、復元したデータのＨＯＳＴ側メモリへの格納作業が常に行えるように、ＨＯＳＴからＩＯＰへの８Ｋバイトごとのデータ転送のタイミングは、ＩＯＰからの割り込み（Ｆｉｇ．６．５）による方法をとった。Ｆｉｇ６．５はプログラムフローチャート

で、ｉ番目ｓｔｏｒｍの最初から最後までの部分を表す。ｉ番目ｓｔｏｒｍがＩＯＰにより負荷されている間、（ｉ＋１）番目ｓｔｏｒｍの荷重指令信号を修正復元し、ＨＯＳＴ側メモリに格納する。その間にＩＯＰの８Ｋバイトメモリの一方が空になるとＩＯＰは割り込み（Ｆｉｇ．６．５）をかけるので、ＨＯＳＴは作業を一時中断してＨＯＳＴ側のメモリに貯めてあるｉ番目ｓｔｏｒｍの荷重入力信号をＩＯＰへ８Ｋバイト分送り出す。前節応答補償の無い場合には、プログラム中の待機ループで常にＩＯＰからのデータ要求を待つ方法を

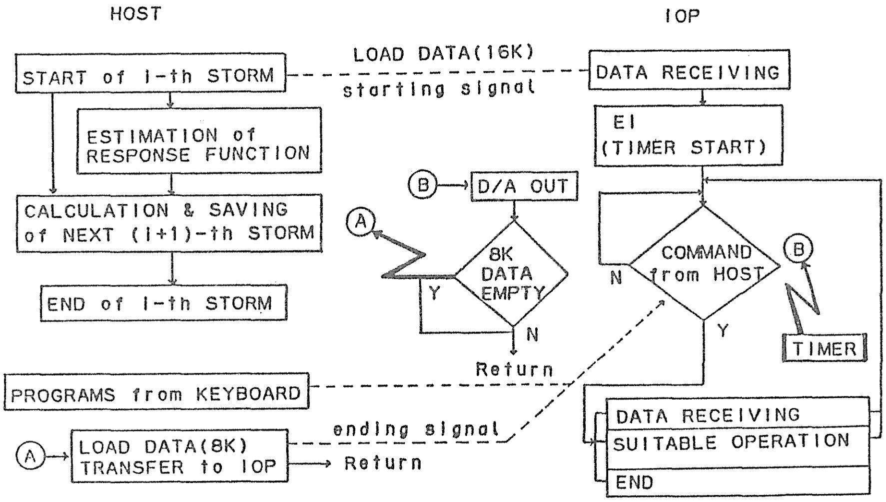


Fig.6.5 Partial Program Flow Chart with Response Compensation

とっている。試験片に負荷される荷重を補償するには、試験機への荷重指令信号を前述のように、その時の全試験システムの応答特性に見合ったものに修正する必要があり、このため、ある時点での系全体の応答特性を推定せねばならない。Ｆｉｇ．６．５のＨＯＳＴ側のフローの２段目に示すように、亀裂進展に応じて何回かに１回、周波数応答特性を推定させる。その場合には、その回の先頭に、短時間の帯域制限ホワイトノイズを負荷し、この指令信号ｚ（ｔ）と対応する荷重のフィードバック値ｙ（ｔ）をサンプリングする。帯域制限ホワイトノイズによれば、制限した周波数範囲内での成分を均等に含むので、この範囲内の周波数応答特性を考慮するのに好都合である。試験に用いるランダム過程は、時には比較的狭帯域のスペクトルから発生したものを用いる場合もあり、このランダム荷重でのサンプルから応答特性を推定しようとすれば、正確な推定のための処理が複雑になる。そこで応答特性を推定するための荷重サンプルは、帯域制限ホワイトノイズとした。このホワイトノイズは、サンプリング時間間隔や、解析に用いるＦＦＴのサイズを考慮して、帯域制限をしたものを、ＨＯＳＴのメモリに納めておく。荷重の大きさは、試験に用いるランダ

ム荷重と、瞬時値のＲＭＳを等しくするようにしている。通常のスペクトル解析に従い、サンプルｚ（ｔ）とｙ（ｔ）からz_i（ｔ），y_i（ｔ）（i=１，２，・・・，ｌ）を取り出し、ラグウインドーをかけた後、ｚ（ｔ）のオートパワースペクトルと、ｚ（ｔ）とｙ（ｔ）のクロスパワースペクトルを、それぞれｌ回の平均を取り、応答関数Ｈ（ｆ）は（６．５）式より求める。

$$H(f)=G_{yz}/G_{zz} \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} G_{yz}&=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}[Z_i^*(f)\cdot Y(f)]\text{; cross power spectrum} \\ G_{zz}&=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}[Z_i(f)\cdot Z^*(f)]\text{; auto power spectrum} \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_i(f)&=\mathrm{FFT}[\tilde{z}_i(t)] \quad \tilde{z}_i(t)=\text{lag window }[z_i(t)] \\ Y_i(f)&=\mathrm{FFT}[\tilde{y}_i(t)] \quad \tilde{y}_i(t)=\text{lag window }[y_i(t)] \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

ディスクに受けとってある、応答となるべき時刻歴x_i（ｔ）（i=１，２，・・・，１２８）の復素フーリエ成分R_i（ｆ）は、（６．８）式に示すように応答関数による修正を施した後、（６．９）式に示す様にＩＦＦＴして修正荷重指令信号x_i^*（ｔ）とする。

$$R_{ci}(f)=R_i(f)/H(f) \tag{6.8}$$

$$x_i^*(t)=\mathrm{IFFT}[R_{ci}(f)] \tag{6.9}$$

x_i^*（ｔ）をＨ（ｆ）の応答特性を持つ系に入力すれば、R_i（ｆ）に相当する時刻歴x_i（ｔ）が試験片の応答荷重になる。

7　実験

7.1　試験片と系の応答特性

試験片はＦｉｇ．７．１に示す溶接構造用圧延鋼材ＳＭ５０のＣＴ試験片で、化学的成分、機械的性質をＴａｂｌｅ７．１，７．２にそれぞれ示す。Ｋ値は、多田らの式[7①]に従って求めた。この試験片を用いたときのシステム全体の応答特性は、亀裂長さによる影響が大きい。Ｆｉｇ．７．２に（６．５）式で計算した周波数応答関数の例を示す。一定振幅荷重による予備的な実験の結果、

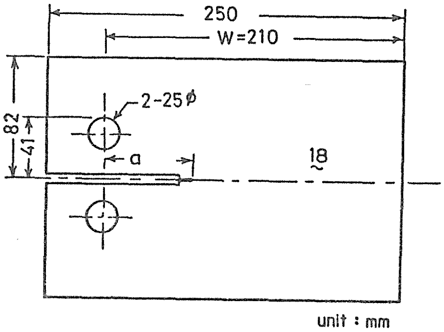


Fig.7.1 Shape and Dimensions of Specimen

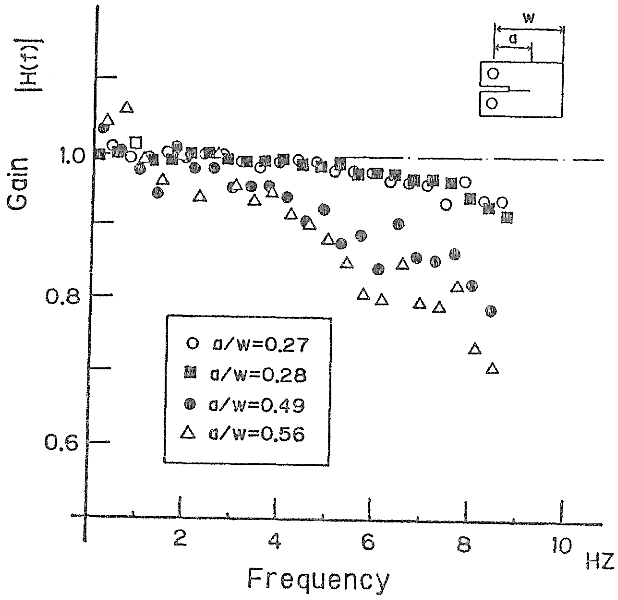


Fig.7.2 Examples of Response

Table 7.1 Chemical Compositions

SM50B	C	Si	Mn	P	S
(%)	0.15	0.34	1.45	0.023	0.007

Table 7.2 Mechanical Properties

Yield Point	Tensile Strength	Elongation
36.0kgf/mm² 352.8MPa	54.0kgf/mm² 529.2MPa	28 %

ゲインは２Ｈｚあたりまでは平坦であり、２Ｈｚから１０Ｈｚあたりまでは、ほぼ直線的に下降することがわかっているので、プログラム中ではこの折線近似を用いることとした。Ｆｉｇ．７．３に応答補償をしない場合と、した場合について、帯域制限ホワイトノイズ入力により、試験片に負荷された荷重履歴を示す。図中の－印は、実際に負荷したい荷重履歴の極値を示す。荷重信号が帯域制限ホワイトノイズであるので、両者の差が著しくなる傾向があるが、後述するように亀裂伝播試験に用いた比較的狭いバンド幅のランダム過程でも、はっきりした差が現れている。なおＦｉｇ．７．３において、一部極小値が修正されない部分は、治具の都合上、引っ張りのみの試験とするため、圧縮荷重の負のデータは、ＩＯＰへ送る段階で０とするので、高いピークから低いトラフを得るために、修正荷重データが負となるものも、ＩＯＰからの指令信号で

はすべて０とした影響である。

7.2　K値制御

疲労亀裂伝播試験を環境を変えて行い比較するには、緒言で述べたようにK値一定試験が便利と思われる。本システムでは、１ｓｔｏｒｍに緩やかな負荷除荷過程を加え、荷重と亀裂開口量をサンプリングして、あらかじめ求めてある単位荷重あたりの開口量と、亀裂長さの関係から、亀裂長さを算出し（Ｆｉｇ．７．４）、所定のK値を得るように、ＩＯＰのマルチプライングＤ／Ａコンバータ（ＭＤＡＣ）の乗数を変えて荷重信号を調節する。なお、算出された亀裂長さが、実験中計測する亀裂長さとの間に差がある場合は、キーボードからの割り込みプログラムで、ｄＶ／ｄｐとａの関係式を実験状況に合うように修正できるようにしてある。ランダム荷重に伴いランダムに変動するK値の制御は、荷重のＲＭＳから得られるK値のＲＭＳ（K_{rms}）を一定に保つように、亀裂進展に見合う分、ＭＤＡＣの乗数を落としてゆく。これによれば、試験開始時に設定されるK値の平均値（K_{mean}）と最大K値（K_{max}）も、同時に一定となる。

7.3　簡単な矩形スペクトルによる試験（応答補償をした場合）

Ｆｉｇ７．５に示す簡単なスペクトルから発生したランダム荷重を用いて、亀裂伝播速度を測定した。波形の例をＦｉｇ．７．６に、極値の分布をＦｉｇ．７．７に示す。実験ではこの原波形に直流成分２．５　σを加え、最大５σで打ち切る波形を用いる。この実験用の波形の統計量をＴａｂｌｅ７．３に示す。Ｔａｂｌｅ７．３で振幅ΔＰは、隣合う極値の大きさの差であり、等価振幅ΔP_{eq}は、事前に行った一定振幅荷重試験結果からから、パリス則ｄａ／ｄＮ＝$C(\Delta K)^m$のｍ＝３．５として、（７．１）式から求めたものである[71)]。

$$\Delta P_{eq}=\sqrt[3.5]{\sum^{N}\Delta P^{3.5})/N} \qquad (7.1)$$

また振幅　ＰのＲＭＳ　P_{rms}は（７．２）式による。

$$\Delta P_{rms}=\sqrt{(\sum^{N}\Delta P^{2})/N} \qquad (7.2)$$

実験では、原波形の１σが３５ｋｇｆ／ｍｍ$^{3/2}$（１０．９ＭＰａｍ）になるようにしたため、実験用の波形のK_{rms}、K_{mean}、K_{max}およびK_{min}は、それぞれ３４．３ｋｇｆ／ｍｍ$^{3/2}$（１０．６ＭＰａｍ）、８６．６ｋｇｆ／ｍｍ

$^{3/2}$（２６．８ＭＰａｍ）、１７５ｋｇｆ／ｍｍ$^{3/2}$（５４．３ＭＰａｍ）、および０となる。想定すべき荷重の速度は、外乱の種類、構造物によって異なるが、仮に、船舶等が１０秒前後の長周期の変動応力を受けるとし、f_1＝０．１Ｈｚ（Ｆｉｇ．７．５）とすると、試験時間は１ｓｔｏｒｍにつき９時間に

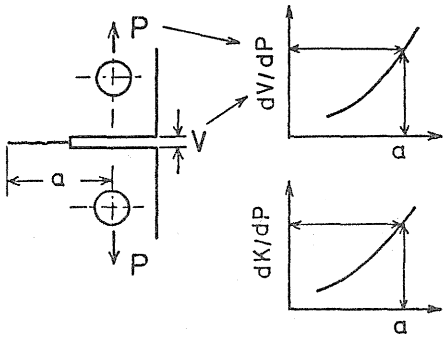


Fig.7.4 Estimation of K-value

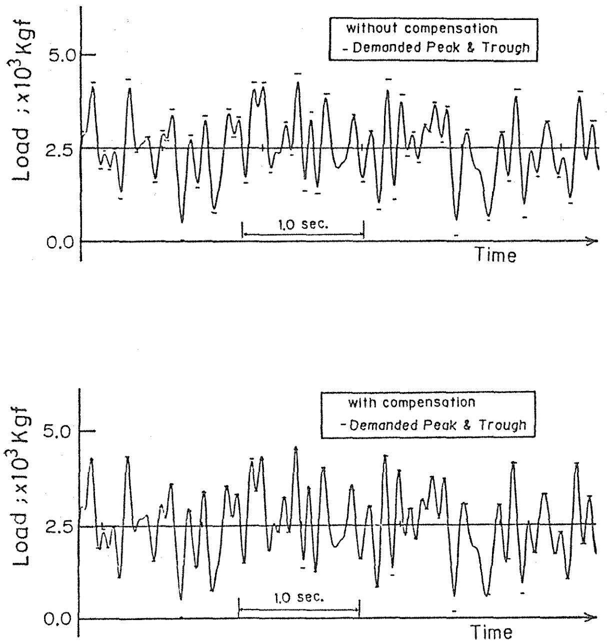


Fig.7.3 Effect of Response Compensation under Band Limited White Noise

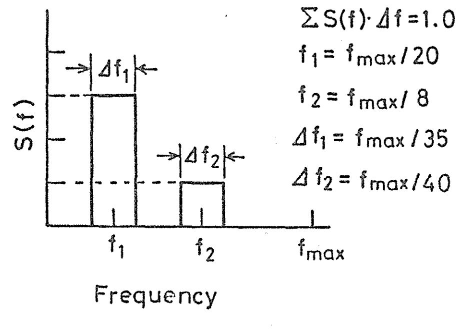


Fig.7.5 Idealized Power Spectrum for Experiment

なり実験速度が遅くなるので、ここでは加速試験と考え速度を約２５倍（ｆｍａｘ＝５０Ｈｚ）にし、試験時間を短縮した。すなわち、f_1＝２．５Ｈｚ、f_2＝６．２５ＨＺに相当する時刻歴を用いた。ｓｔｏｒｍごとに亀裂長さを走査式読み取り顕微鏡で測定して求めたａ－Ｎ関係[72]をＦｉｇ．７．８に示す。本荷重条件（Ｋｒｍｓ＝３５ｋｇｆ／ｍｍ$^{3/2}$）、試験速度（最大７Ｈｚまでの成分波を含む）および試験に用いた亀裂長さの領域では、本方法による応答補償が十分であることを、大型計算機で求めたランダム過程と比較し確認した。Ｆ ｉｇ．７．９にａ／Ｗ＝０．６の時の荷重入力信号の時刻歴、試験片に負荷された荷重履歴、大型計算機で求めた要求されるランダム過程の例を示す。本実験速度で応答補償を行わない場合の亀裂伝播速度を測定した結果は、Ｆｉｇ．７．８の値に比べ明らかに遅く、例を示せばａ／Ｗ＝０．６４の近傍では、Ｆｉｇ．７．８に示した伝播速度の平均値のおよそ７０％である。

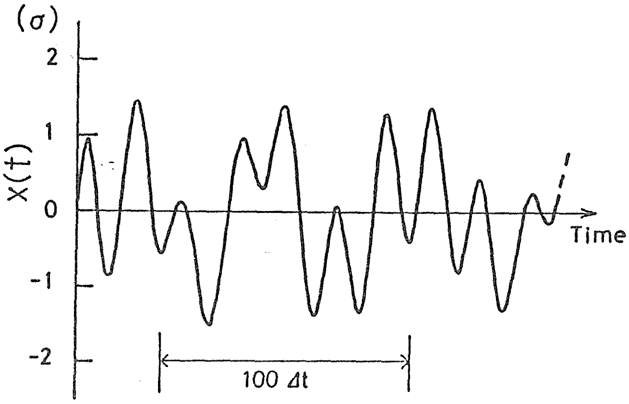


Fig.7.6 Examples of Time History with the Spectrum shown in Fig. 12

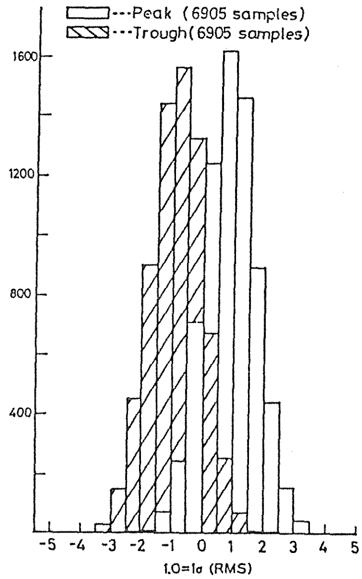


Fig.7.7 Histogram of Peak and Trough an Original Storm

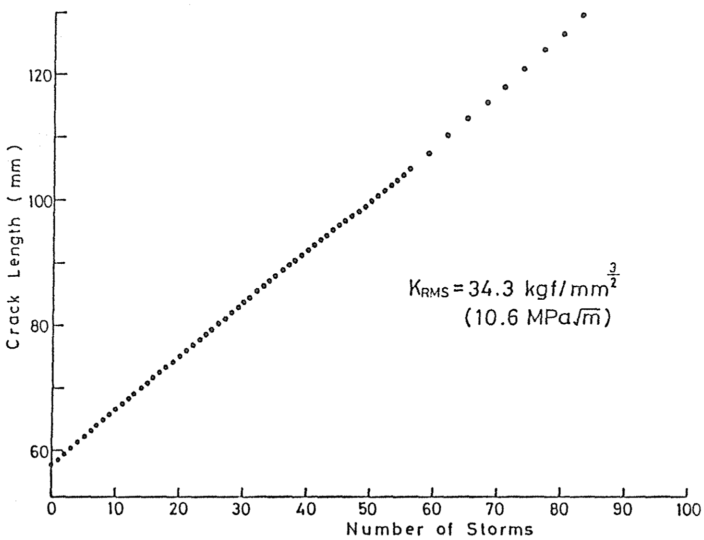


Fig.7.8 Crack Length vs. Number of Storms

7.4　波形の変化が亀裂伝播に及ぼす影響

前節の応答補償をする実験では、ランダム過程に含まれる最高周波数が７Ｈｚとなるような試験速度で行えたが補償なしで行う場合は、６．１節で述べた試験機の特性より、所期の波形を正確に負荷するには、含まれる最高周波数がほぼ２Ｈｚになる試験速度が限界であった。しかし応答補償する場合は、大型計算機よりのデータ転送量が多く、演算量も多いので得策とはいえない。そこで、補償なしで試験が行えるような、前節で用いたランダム過程と等価で、しかも簡単な時刻歴を見いだすために３種類の方法を試みた。Ｆｉｇ．７．６に示すスペクトルからシュミレートした波形を”ORIGINAL”とする。Ｆｉｇ．７．１０に示すようにｆ2を中心とする山を削除したスペクトルから得た波形を”LOWPASS”と呼ぶ。また（ｂ）に示す、ｆ2を中心とする山を削除し、ｆ1を中心とする山のパワーを増し、全パワーをORIGINALと等しくしたスペクトルから得た波形を”EQIVALENT-Power”する。（ｃ）は、ランダム過程が平均値を横切る間で絶対値最大の極値以外を無視したもので”SIMPLIFIED”とする。LOWPASSは、高周波成分による小振幅の変動が亀裂進展にあまり影響しないのではないかという考えから、試みることにした。EQIVALENT-Powerは、低周波成分のピークに、高周波成分のピークが重なる場合なども考え、全パワーを等しくとってみた。SIMPLIFIEDはLOWPASSと同様な考えで平均値をはさむ大きな極値だけを残した。LOWPASSとEQIVALENT-Powerは、応答補償なしでも比較的試験速度を大きく出来る。SIMPLIFIEDも、余分な極値データを捨てられることになれば、

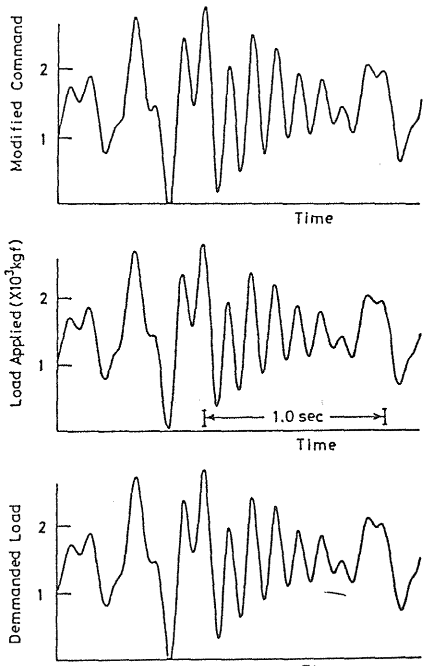


Fig.7.9 Example of Response Compensation under Experimental Random Load

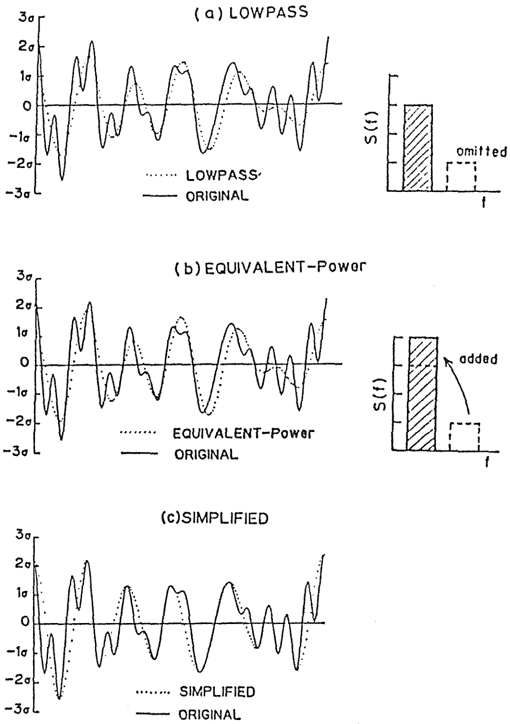


Fig.7.10 Reform of Time History

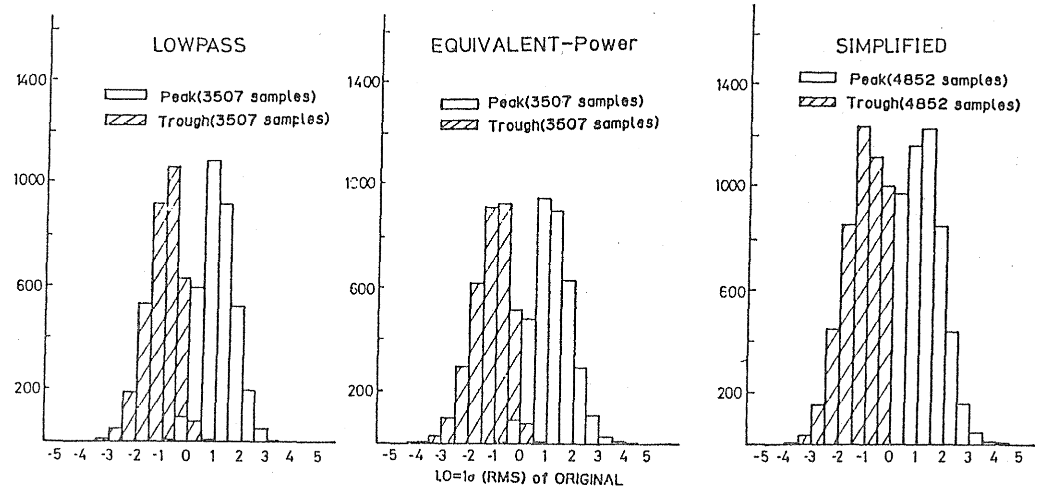


Fig.7.11 Histogram of Peak and Trough of Storms

ｓｔｏｒｍの全体時間が短縮されるので、低速度ながら試験時間は短くなる。以上３種類とORIGINALの４つで、Ｋ値制御試験を、補償ありの方法で行った。３種類の原波形の極値の分布をＦｉｇ．７．１１に示す。これらは実験に用いるときには、７．３節の時と同様に、ORIGINALの原波形のＲＭＳを１σとして、直流成分２．５σを加え、最大を５σで打ち切る。この実験用の波形の統計量をＴａｂｌｅ７．４に示す。（式（７．１），（７．２）参照）。なお、Ｋ値制御は、ORIGINALの原波形の１σを、３５ｋｇｆ／ｍｍ$^{3/2}$（１０．ＭＰａｍ）とするので、各波形のＫ値の条件はＴａｂｌｅ７．５のようになる。試験速度は３．３節と同じく、ｆ1=２．５Ｈｚ，ｆ2=６．２５Ｈｚにとった。ａ－Ｎ関係をＦｉｇ．７．１２に示し、各群での、平均速度をＴａｂｌｅ７．６に示す。なお、各群の最初の２ｓｔｏｒｍはいずれも明らかに前の群の影響を受けており、Ｔａｂｌｅ７．６では最初の２ｓｔｏｒｍを含まない値で示した。実験結果から明かなように、ORIGINALに対してLOWPASSとEQIVALENT-Powerは等価とはいえないが、SIMPLIFIEDはほぼ等価なランダム過程と見なせる。Ｔａｂｌｅ７．４に示すようにSIMPLIFIEDの場合極値の数は３／４に減るので、転送と試験時間短縮のための波形簡易法として、有効な手段と思われる。なお、SIMPLIFIEDの方法では、平均値近傍を変動する小振幅が残存し、更に簡単化が可能であると考える。Ｔａｂｌｅ７．７に４種類の波形について、転送時間と試験時間を示す。応答補償する場合は、転送データは定量であるので転送時間は

ランダム過程でも同じである。また、試験時間は、演算時間の限界から、荷重入力信号復元に２５分程度かかるので、いかなるランダム過程でも同じになる。応答補償なしの場合では、転送時間は極値の個数に比例するので、低周波の狭帯域ほど短時間ですむ。試験速度は、波形が含む最高周波数が試験機の制約条件内（本実験では２Ｈｚ）に納まるように設定するので、低周波の狭帯域ほど速く試験できる。

7.5 Patch長さを変えたランダム荷重系列による実験

7.5.1 ランダム荷重指令信号のシミュレーション

本実験に使用したランダム荷重指令信号の作製は大型計算機により行った。Ｆｉｇ．７．１３に本実験で使用したパワースペクトル形状を示す。この形状の決定に際しては、飯田等の論文を参考にした。使用した形状は参考論文中のS3型スペクトルに相当するもので、ピーク角周波数の相異なる２つのスペクトルを重ね合わせた双峰型スペクトルであり、これを示す式を振動数表示に直したものを式（７．３）に示す。

EQUATION OF POWER-SPECTRUM

$$S(F) = C * \left(\frac{1}{B\hat{}2 + (F-F1)\hat{}2} + \frac{ALPH}{B\hat{}2 + (F-F2)\hat{}2} \right) \tag{7.3}$$

C : PARAMETER OF MAX DENSITY
B : PARAMETER OF PEAK WIDTH
ALPH : PEAK RATIO
F1,F2 : PEAK FREQUENCY

この飯田等の方法を用いれば式中のパラメータ、項数を変えることで、パワースペクトル形状設定は容易である。さらに本実験では、シミュレートされた瞬時値のその平均に対する標準編さ(RMS)が1.0となるようにパワースペクトルを設定している。ＴＡＢＬＥ７．８に本実験で使用した使用したパワースペクトル形状３種のパラメータを示す。設定したパワースペクトル形状３種について、それぞれＦＦＴの際の分割数を２の１７乗、２の１５乗とした最短２種の荷重時刻歴をシミュレーションし、1STORMとしたものを必要STORM数作成する。

7.5.2 試験結果

横軸に荷重繰り返し回数Ｎ（＊１００Cycle)、縦軸にき裂長さａ（mm）をとったａ－ｎ　CurveをＷ　Ｓｅｒｉｅｓ，Ｍ　Ｓｅｒｉｅｓ，及びＮ　Ｓｅｒｉｅｓの種別ごとにそれぞれＦｉｇ７．１４，Ｆｉｇ７．１５，Ｆｉｇ７．１

６に示す。明らかにランダム荷重時刻歴をシミュミレートする際のＦＦＴにおけるパワースペクトル分割数の大小、つまりシミュレート長さの長短による亀裂進展速度への影響は最大でも４％弱で大きいとはいいがたく、計測誤差、試験片材料の不均一さ等を考慮にいれれば影響は殆ど無いといえる。

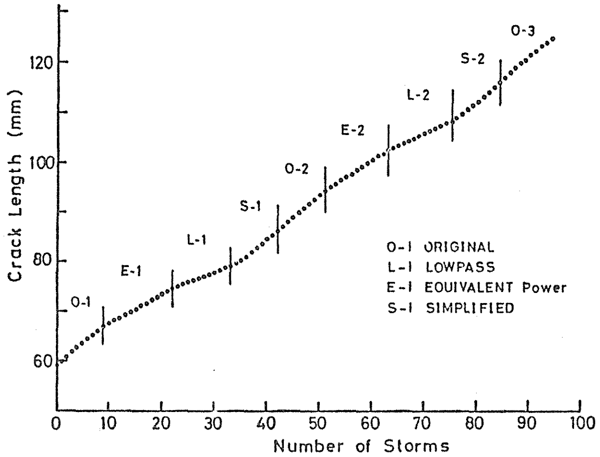


Fig.7.12 Crack Length vs. Number of Stoms

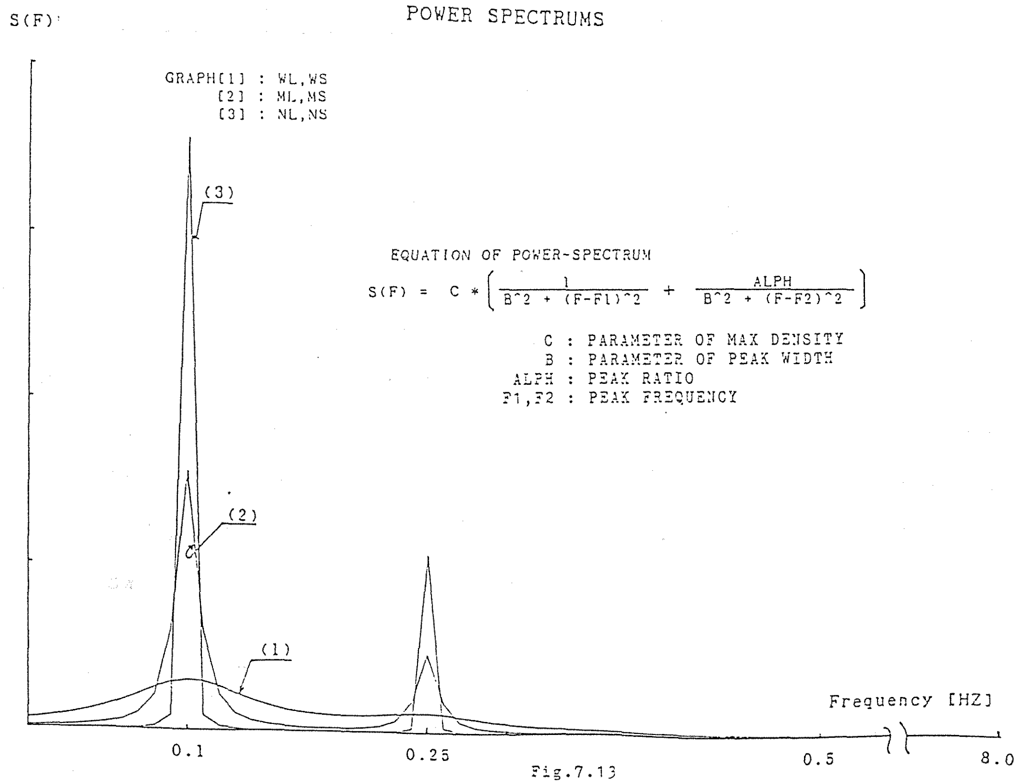


Fig.7.13

Table 7.3 Statistics of Applied Load per Storm (ORIGINAL)

Mean	RMS	Number of mean up cross	Total Number of Peak	ΔP_{rms}	ΔP_{eq}
2.475	0.98	4808	6868	2.10	2.50

nondimensionalized by RMS of Basic Random Process

Table 7.4 Statistics of Applied Load per Storm (reformed)

	Mean	RMS	Number of mean up cross	Total Number of Peak	ΔP_{rms}	ΔP_{eq}
L	2.475	0.87	3321	3510	2.38	2.71
E	2.475	0.98	3321	3510	2.65	2.99
S	2.475	1.05	4764	4810	2.60	2.93

L: LOWPASS E: EQUIVALENT Power S: SIMPLIFIED

nondimensionalized by RMS of ORIGINAL Process

Table 7.5 K-value correspond to each Wave

	K_{mean}	K_{rms}	K_{max}	K_{min}
ORIGINAL	86.6 (26.8)	34.3 (10.6)	175.0 (54.3)	0.0
LOWPASS	86.6	30.6 (9.49)		
EQUIVALENT Power	86 6	34.3 (10.6)		
SIMPLIFIED	86.6	36.8 (11.4)		

unit: $kgf/mm^{\frac{3}{2}}$ ($MPa\sqrt{m}$)

Table 7.6 Crack Growth Rates

	1	2	3
ORIGINAL	0.86	0.91	0.86
LOWPASS	0.42	0.48	
EQUIVALENT Power	0.58	0.67	
SIMPLIFIED	0.89	0.88	

unit: mm / storm

Table 7.7 Comparision of Time needed to perform One Storm Experiment

	NO COMPENSATION		COMPENSATION	
	DATA TRANSFER	EXPERIMENT	DATA TRANSFER	EXPERIMENT
ORIGINAL	6.3 min.	75 min.	15 min.	30 min.
LOWPASS	3.2	30		
EQUIVALENT Power	3.2	30		
SIMPLIFIED	4.7	67		

DATA TRANSFER : 2400 bps

Kind of STORM	IFFT	B
WL	131072	0.30
WS	32768	0.30
ML	131072	0.05
MS	32768	0.05
NL	131072	0.01
NS	32768	0.01

ALPH=	0.3
F1=	0.1
F2=	0.25

Table 7.8 PARAMETER OF SPECTRUMS

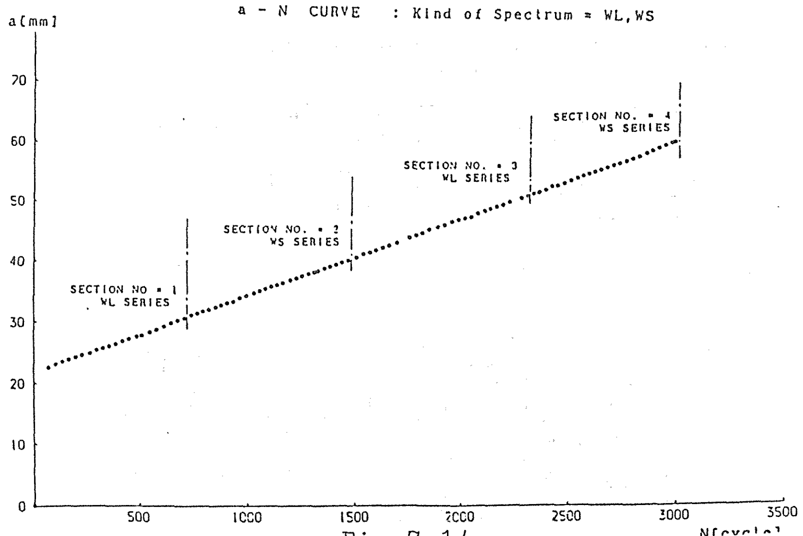


Fig.7.14

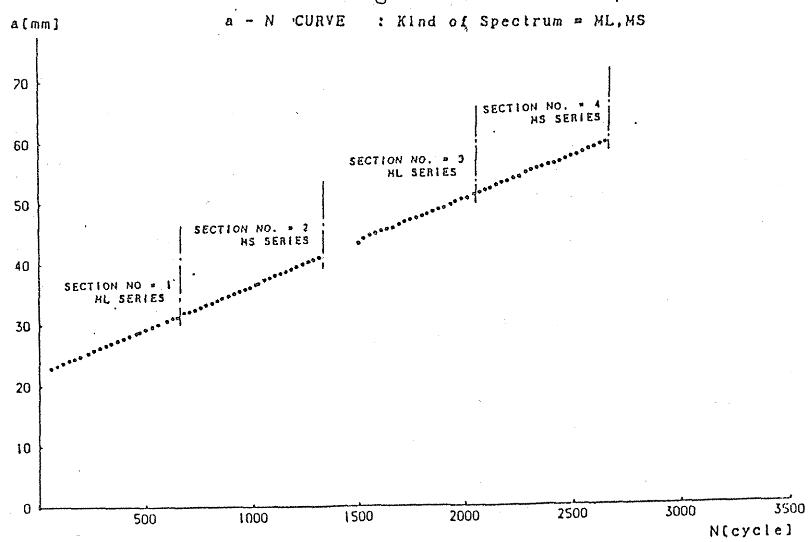


Fig.7.15

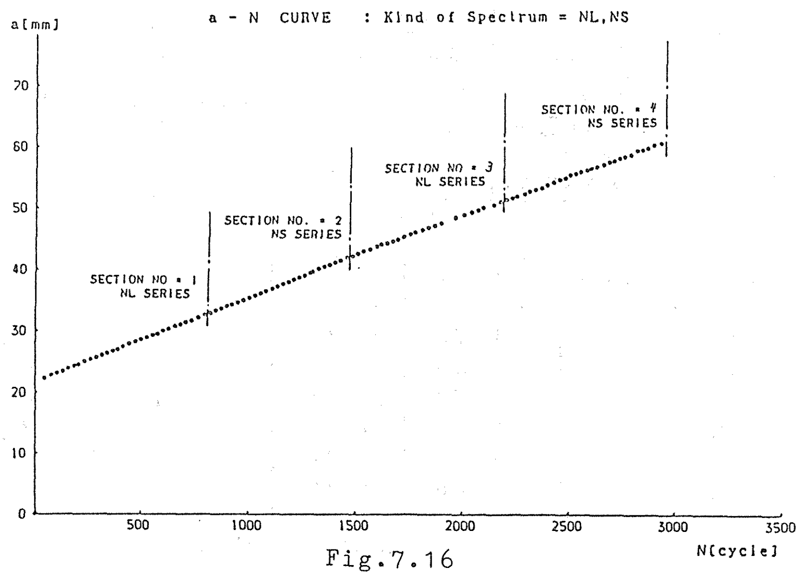


Fig.7.16

8　まとめ

ランダム荷重を受ける構造物の合理的疲労設計のためには、出来るだけ多くのランダム疲労試験データが、必要でありそのための試験法が普及していなくてはならないという認識の下に本研究を行った。時間的に海洋構造物に作用する負荷は一般にその振幅が不規則に変動した非定常なものである。本研究ではこのような不規則荷重を確率過程として把握し，種々の荷重解析を行う場合に極めて重要となるスペクトル解析手法に焦点を当て，特に非定常性を有する過程に力点を置いて，考察を加えた。観測記録に基づいて過程のパワー・スペクトルを求めることができれば，逆にそれを用いて確率過程をシミュレートすることが可能となり，様々な問題に対する解決の手がかりが与えられる。とりわけ最近の高性能のコンピュータを用いて，計算手法に工夫を凝らせば，多くの複雑な問題を効率よく経済的に解決することができる。また，観測された時間履歴がそれほど多重に望めないような場合でも，Data-Base に基づく考え方から不規則荷重のシミュレーションが可能となり，多くの工学的問題をモンテカルロ法を用いて解くことが可能となる。そのシミュレートしたランダム過程を用いた試験法としては、

1．　試験システムの動特性を考慮した適当な確率的性格を持つランダム過程を発生できること

2．　既存のサーボシステムなどに容易に付加しうること

3．　安価であること

などの条件のもとに、マイクロコンピュータの計算精度、速度の限界などを考慮して、荷重制御、或は応力拡大係数制御試験の行えるシステムを構成した。

簡単なパワースペクトルの定常ガウス過程を用いて、幾通りかの基礎的実験を行った結果、本法が実用に耐えることがわかった。応答補償の効果はかなり顕著で、その必要性が明かとなった。同時に、本報告でSIMPLIFIEDと称した波形簡易法を改良すれば、より簡便な試験で同等の効果が得られる可能性も示された。

4．パワースペクトル形状が比較的狭帯域なものからやや白色雑音に近いものまでの３種を用いて実験を行った結果、ランダム荷重時刻歴をシミュレートするに際してのＦＦＴのためのパワースペクトルの分割数の大小、つまりシミュレートされたランダム荷重時刻歴の長短によって疲労亀裂の進展速度は影響を受けないことが実験によって確認された。これにより、従来、長いランダム荷重時刻歴をシミュレートするために大型計算機を使わざるを得ず実験システムが大規模になり費用対効果比の問題から一般に普及しなかったランダム疲労試

験をパーソナルコンピュータレベルの計算機によってのみ行うという、その簡易化への方向性を示すことが出来た。

参 考 文 献

(1) J.S.Bendat and A.G.Pirsol 原著，得丸英勝ら共著，「ランダムデータの統計的処理」，培風館（昭51）.

(2) 石川浩，鶴井明，「不規則荷重の統計的性質」，材料，第31巻 346 号，pp.736-742（昭57）.

(3) 石川浩，「機会・構造物の信頼性設計理論」，材料，第 31 巻 345 号，pp.527-537（昭57).

(4) G.I.Schueller原著，小西一郎，高岡宣善，石川浩共訳，「構造物の安全性と信頼性」，p.81,丸善，（昭59）.

(5) 石川浩，「不確定性予測のためのシミュレーション技術」，昭和59年度文部省特定研究報告書，pp.201-244，香川大学経済学部（昭60）.

(6) H.Ishikawa, H.Mitsuma and M.Shinozuka, "Digital Simulation of Nonstationary Randam Processes and Its Applications", The Kagawa Univ.Economic Review. Vol.52, No.3,4, pp.308-373 (1979).

(7) D.Gabor, "Theory of Communication," Inst.Electer.Eng., 93, pp.429 -457, (1946).

(8) J.Ville, "Thorie et Applications de la Notion de Signal Analytique," Cable et Trasmission, 2, pp.61-74, (1948).

(9) W.Koenig, H.K.Dunn and L.Y.Lacy, "The Sound Spectrograph," J.Acoust.soc.Am., Vol. 18. No.1, pp.189-49, (1946).

(10) Y.C.Fung, "The Analysis of Dynamic Stresses in Aircraft Structnres During Landing asd Nonstationary Random Processes," J.Applied Mechanics, Vol.22,Trans.ASME,Vol.77,pp.449-457,(1955).

(11) J.S.Bendat,L.D.Enochson,G.H.Klein and A.G.Piersol,"Advanced Concepts of Stochastic Processes and Statistics for Flight-Vehicle Vibration Estimation and Measurement,"ASD-TDR-62-973, Thompson Ramo Wioldridge,Inc.,(1962).

(12) R.A.Silverman,"Locally Stationary Random Processes,"Trans,IEEE Inf.Theory, IT-3,pp.182-187,(1957).

(13) W.A.Gardner,L.E.Franks,"Characterrization of Cyclostationary

Random Signal Processes,"Trans.IEEE Inf.Theory,IT-21,No.1, pp.4-14,(1975).
(14) 文献(11)のpp.5・1-5・19.
(15) T.K.Caughey,"Nonstationary Random Inputs and Responses,"Random Vibration,Vol.2,Ed.by S.H.Crandall, MIT Press,pp.66-84,(1963).
(16) A.Papoulis,"Probability,Random Variables, and Stochastic Processes 'McGraw-Hill Book Company,pp.430-452,(1965).
(17) J.B.Roberts,"On the Harmonic Analysis of Evolutionary Random Vibration,"J.Sound Vib.,2(3),pp.336-352,(1965).
(18) J.S.Bendat and A.G.Pirsol,"Measurement and Anaysis of Random data",Jhon,Wiley and Sons,Inc.,New York,p.364,(1966).
(19) W.D.Mark,"Spectral Analysis of the Convolution and Filtering of Nonstationary Stochastic Processes,"J.Sound Vib,11,pp.19-63, (1970).
(20) W.d.Mark,"Characterization of Stochastic Trasients and Transmission Media:The Method of Power-Moments Spectra,"J.Sound Vib,22(3),pp.249-295,(1972).
(21) W.D.Mark,"Power Spectral Representation of Nonstationary Random Processes Defined over Semi-infinite Intervals,"J.Acoust. Soc. Am.,Vol.59,No.5,pp.1184-1194,(1976).
(22) C.H.Page,"Instantaneous Power Spectra,"J.Applied Physics, Vol.23 ,No.1,pp.103-106,(1952).
(23) S.C.Liu,"Time-Varying Spectra and Linear Transformation,"Bell System Technical J.,VOl.50,NO.7,pp.2365-2374,(1971).
(24) S.C.Liu,"An Approach to Time-Varying Soectral Analysis," J.Eng. Mech.Div., Proceedings of ASCE, EM 1,pp.243-253,(1972).
(25) S.C.Liu,"Time-Varying Spectra of Nonstatimary Processes."
(26) N.Wiener,"Generalized Harmonic Analysis," Acta.Maths.StocKen., 55,p.117,(1930).
(27) M.B.Priestley,"Evolutionary Spectra and Non-Stationary Processes," J.Royal Statist.Soc., B 27,pp.204-237,(1965).
(28) M.B.Priestley,"Design Relations for Non-stationary Processes," J.Poyal Statist. Soc., B 28,pp.228-240,(1966).

(29) M.B.Priestley,"Power Spectral Analysis of Non-stationary Processes," J.Sound Vib., 6(1),pp.86-97,(1967).
(30) M.B.Priestley,"Some Notes on the Physical Interpretation of Spectra of Non-Stationary Stochastic Processes," J.Sound Vib., 17(1),pp.51-54,(1971).
(31) J.K.Hammond,"ON the Response of Single and Multidegree of Freedom Systems to Non-Statinary Random Excitations," J.Sound Vib., 7(3),pp.393-416,(1968).
(32) M.Shinozuka,"Random Processes with Evolutionary Power," J.Eng. Mech.Div.,ASCE,REM 4,pp.543-545,(1970).
(33) S.C.Liu,"Evolutionary Power Spectral Density of Strong Motion Earthquakes," Bull.Seismological Soc.Am., Vol.60, No.3, pp.891-900,(1970).
(34) H.Kameda,"Evolutionary Spectra of Seismogram by Multifilter," J.Eng.Mech.Div.,ASCE, EM 6,p.787-801,(1975).
(35) P.W.Brant and M.Shinozuka,"Application of the Evolutionary Power Spectrum in Structural Dynamics,"EM.Conf.,ASCE,Perdue Univ., Nov.1969.
(36) L.J.Howell and Y.K.Lin,"Response of Flight Vehicles to Nonstationary Atmospheric Turbulence,"AIAA J., Vol.9,No.11, pp.2201-2207,(1971).
(37) Y.Fujimori and Y.K.Lin,"Analysis of Airplane Response to Nonstationary Turbulence Including Wing Bending Flexibility," AIAA J.,Vol.11,No.3,pp.334-339,(1973).
(38) Y.Fujimori and Y.K.Lin,"Analysis of Airplane Response to Nonstationary Turbulence Including Wing Bending Flexibility II," AIAA J., Vol.11, No.9,pp.1343-1345,(1973).
(39) Y.Fujimori,"Shear and Moment Responce of the Airplane Wing to Nonstationary Turbulence,"AIAA J., Vol.12,No.11,pp.1549-1460, (1974).
(40) W.R.Davis Jr., and L.L.Bucciarelli Jr.,"Nonstationary Spectral Analysis for Linear Dynamic Systems,"AIAA J.,Vol.13,No1,pp.25-31, (1975).
(41) R.B.Corotis and E.H.Vanmarcke,"Time-Dependent Spectral Content

of System Response,"J.Eng.Mech.Div,ASCE,EM 5,pp.623-637,(1975).
(42) R.B.Corotis and T:A.Marshall,"Oscillator Response to Modulated Random Excitation."
(43) K.G.Beauchamp,"Signal Processing,"London,George Allen & Linwin Ltd.,pp.510-512,(1973).
(44) R.M.Loynes,"On the Concept of the Spectram for Non-stationary Process,"J.,Royal Stat.Soc.,B 30,pp1-20,(1968).
(45) J.S.Bendat and A.G Piersol,"Random Data:Analysis and Measurement Procedures,"Wiley-Interscience,pp.344-365,(1971).
(46) J.B.Roberts,"The Convariance Response of Linear Systems to Locally Stationary Random Excitation,"J.Sound Vib., 17(3), pp.299-307,(1971).
(47) R.E.Holman and G.C.Hart,"Structnral Response to Segmented Nonstationary Random Excitation,"AIAA J.,Vol.10,No.11, pp.1473-1478,(1972).
(48) P.D.Schmitz and N.P.McManus,"Average StructuralResponse to Locally Stationary Random Excitation,"AIAA J.,Vol.12,No.2, pp.229-231,(1974).
(49) R.E.Holman and G.C.Hart,"Nontationary Response of Response of Structural Systems,"J.Eng.Mech.Div,ASCE, EM 2,pp.415-431,(1974).
(50) R.L.Barnoski and J.R.Maurer,"Mean-Square Response of Simple of Simple Mechanical Systems to Nonstationary Random Excitation," J.Applied Mech.,Trans.ASME,pp221-227,(1969).
(51) J.M.Verdon,"Nonstationary Response Exceedance Statistics of a Simple Mechanical System,"AIAA J.,Vol.10,No.6,pp.834-836,(1972).
(52) T.Hasselman,"Liner Response to Nonstationary Random Excitation," J.eng.MechDiv,ASCE,EM 3,pp.519-530,(1972).
(53) M.Shinozuka,H.Ishikawa and H.Mitsuma,"Data-Based Nonstationary Random Processes ,"Proc.of the Specialty Conf.on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability,pp.39-43,ASCE,(1979).
(54) 小西一郎編，「鋼橋－基礎編II」，p.807，丸善，（昭52）.
(55) A.Papoulis原著，平田寛二ら監訳，「工学のための応用確率論－確率過程編」，p.285，東海大学出版会，（昭47）.
(56) BARSOM,J.M.: Fatigue-Crack Growth Under Variable-Amplitude

Loading in Various Bridge Steels, ASTM STP595,(May 1976),p-147.
(57) Elber,Wolf: Equivalence Constant-Ampl;itude Concept for Crack Growth Under Spectrum Loading, ASTM STP59,(May 1976),p.236.
(58) J.B.Chang: Round-Robin Crack Growth Prediction Center-Crack Tension Specimens under Random Spectrum Load,ASTM STP748(Oct 1981),p.3.
(59) 菊川、城野、三上、:定常変動荷重下の疲労亀裂進展と亀裂開口挙動（アルミニウム合金の場合）、材料、第３１巻、第３４４号、（昭和５７年５月）、P.483.
(60) 町田、大岡、渡辺、森田、： 実働荷重下の疲労亀裂伝播の研究（第１報）ランダム荷重とブロック荷重との比較、日本造船学会論文集、第１５４号、(1983)、P.396.
(61) 薄、岡村、:定常ランダム荷重下の疲労亀裂進展（第１報、試験システムおよびS45C）の実験結果、日本機械学会論文集（第１報）、４４巻３８６号（昭５３－１０）、P.3322.
(62) 八木、長田、富田、浅田、橋本、： ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究（第１報）指数分布のランダム荷重下での疲労寿命の統計的性質、日本造船学会論文集、第１５２号、（昭　５７－１１）、P.361.
(63) 岩崎、川原　：　ランダム荷重下での疲労亀裂伝播に及ぼす荷重頻度分布形状の影響、日本造船学会論文集、第１５６号、（昭　５９－１１）、P.523.
(64) Itagaki, Ogawa : Digital Simulation of Stationary Gaussian Random Process for The Reliability Experiments,Reliability Approach in Structual Engineering, Maruzen Co.,Ltd., Tokyo 1975.
(65) 板垣、小川、入江、： Ｋ値制御下の疲労亀裂伝播、ランダム疲労について、日本造船学会論文集、第１３６号、（昭　４９－１１）、P.219.
(66) 板垣、石塚、： １９８５年神奈川県技術者研修資料「マイクロコンピュータ応用」”金属材料試験への応用”、横浜国立大学工学部船舶海洋工学科.
(67) 白木、安田、武内、： 他機能振動データシステム、三菱重工技報、Vol.18, No.5,(1981-9),p.647.
(68) F.Sherratt and P.W.Davall : Accelerating Random-Sequence Fatigue Test by Response Compensation and Cycle Deletion,ASTM STP613,p.104

(69) 日野幹雄 ： スペクトル解析、朝倉書店.

(70) Tada, Paris, Irwin : The Stress Analysis of Crack Hndbook, Del Research Corporation.

(71) 岡村、板垣、: 強度の統計的取扱い＝構造強度信頼性工学（昭 ５４）、培風館.

(72) J.P.Gallagher & H.D.Stalnakir : Predicting Flight by Fatigue Crack GrowthRates, Journal of Aircraft, Vol12, No.9,(Sep 1975), p,699.

付録

RANDOM LOAD GENERATOR GRL　の説明

このPROGRAMはBASICのMAIN PROGRAMから次のような方法でCALLする。

CALL GRL(DA%(0),PWS%(0),COST%(0),SINT%(0),PARA%(0))

ここで、DA%　はＤＡ変換して荷重信号として試験機に送るデータである。
PWS　は目的とするパワースペクトルのルートに分割幅DXを乗じた値である。下限周波数と上限周波数との間を適当に分割するようにする。実際に、逆　FFT　するﾃﾞｰﾀの数は　N　であるが、この上下間の分割数は、1/8N　のていどでよい。
COST%及びSINT%は各々0から180度迄の数表である。これは0-(N/2-1)の添字変数として用意する。
PARA%(0)はDACするデータの数、すなはち、IFFTのデータ数　Nである。
PARA%(1)は2のべき乗で表したときの指数　Mである。
PARA%(2)はPWSの下限、
PARA%(3)はPWSの上限で、0-Nの値。
PARA%(4)はPWSの値をINTEGERで表現するために2**K（K<0、>0、=0）倍した時の指数KPARA%(5)は一様乱数の初期値の下16ﾋﾞｯﾄをINTEGERで与える。BASICに戻る時には最後の乱数の下の16ﾋﾞｯﾄを保持している。
PARA%(6)はIFFTを実行したときにOVERFLOWを防ぐために行われたRIGHT SHIFTの回数が記録されてBASICにもどる。このｱｾﾝﾌﾞﾘ言語のPRROGRAMではPARA%(4)と(6)との差をとってSHIFTをしているので,BASICに戻ったときには使用していない。

これらのパラメータはすべてINTEGERであるからBASICのPROGRAMではその様に定義しておくか、%をつけておく。

PROGRAMの；RECEIVING PARAMETERS AND ADDRESS INFORMATION
の部分は上記のPARAMETERSを受取り、アドレスの設定をおこなう。

CALL IRAND　は一様分布のランダム位相差をつくり、対応するSINとCOSとを求めREALとIMAGINARYの部分のデータを用意する。

;IFFTの部分は逆FFTの計算を行なう。

;**DATA FOR DA CONVERSION ARE STORED IN MEMORY DA%(I)
の部分はSTOREする形式がDAC BOARD によって異なるので、適当に変更する必要がある。この例では,DACのBUFFERが25KWORDSなので、16Kを越えるIFFTの時は一部のデータのみを用いている。また、DA%(0)にはデータ数、N、をいれ,DA%(1)からDA%(N)までに変換すべきデータを入れている。また、DACが12BITなので右に4ビット算術シフトをして16BITのうちの上の12BITをデータとしている。BIAS FOR DAC 800H も必要ないときには省かなければならない。

最後の部分の;LAST AND・・・の所は初めと終わりが 0 に近い値になるようにしているが、BASICのPROGRAMで行っても良い。

BASIC の SAMPLE PROGRAM

```
10  CLS 3:CLEAR ,&H****
11' 機械語をLOADするためのメモリを適当に確保
20  DEF SEG=&H****:BLOAD "GRL.BAS"
21'  アセンブルしたPROGRAMをあらかじめBASIC用に変更してGRL.BASと
22'  いうファイルを作っておく
100 PRINT "NUMBER OF DATA IN ONE PATCH OF RANDOM LOAD,N=2**M"
110 INPUT "          M(<=14)=";M
120 N=2^M
130 PARA%(0)=N:PARA%(1)=M
140 DIM DA%(N),SINT%(N/2),COST%(N/2),PWS%(N/8)
150 GOSUB *SCTABLE
160' SIN、COSの数表を作るサブルーチンへいく
170 GOSUB *DATASET
180' POWER SPECTRUM のデータをつくるルーチンへ
190 DEF SEG=&H****:GRL=0H
200 CALL GRL(DA%(0),PWS%(0),COST%(0),SINT%(0),PARA%(0))
```

```
201’ 乱数発生の機械語サブルーチンを呼ぶ
210 GOSUB *DAOUT
211’ DA変換をして、指令信号を出力する
300 *SCTABLE
310’ 適当なルーチン
315 RETURN
400 *DATASET
401 INPUT"LOWER LIMIT=";LL.PWS
402 INPUT"UPPER LIMIT=";UL.PWS
403 INPUT"MULTIPLIER=";K
410 PARA%(2)=LL.PWS
420 PARA%(3)=UL.PWS
425’ ﾊﾟﾜｰｽﾍﾟｸﾄﾙGF(I)を定義しておく
430 FOR I=LL.PWS TO UL.PWS
435 GF(I)=........
440 PWS%(I)=DF*SQR(GF(I))*(2^K)
450 NEXT I
460 RETURN
500 *DAOUT
510’ 適当なルーチン
520 RETURN
```

```
COMMENT *
*
;++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

;     RANDOM LOAD GENERATOR(IFFT PROGRAM)

;++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
;
GRL     SEGMENT BYTE PUBLIC 'CODE'
        ASSUME CS:GRL, DS:GRL

BIGIN:  PUSH    AX
        PUSH    BX
        PUSH    CX
        PUSH    DX
        PUSH    DS
        PUSH    ES
        PUSH    DI
        PUSH    SI
; Receiving Parameters and Address information
        LES     SI,[BX]
        MOV     AX,ES:[SI]
        MOV     CS:N,AX         ;PARA%(0)=Number of samples
        MOV     AX,ES:[SI+2]
        MOV     CS:M,AX         ;PARA%(1)=Exponent M=log2 N
        MOV     AX,ES:[SI+4]
        MOV     CS:MINIF,AX     ;PARA%(2)=Lower limit of PWS
        MOV     AX,ES:[SI+6]
        MOV     CS:MAXF,AX      ;PARA%(3)=Upper limit of PWS
        MOV     AX,ES:[SI+8]
        MOV     CS:PW_MPY,AX    ;PARA%(4)=Multiplyer of PWS
        MOV     AX,ES:[SI+10]
        MOV     CS:URANL,AX     ;PARA%(5)=SEED
        NEG     AX
        AND     AX,7FFFH
        MOV     CS:URANH,AX     ;MSW of SEED
        ADD     SI,10
        MOV     CS:RDSEG,ES     ;Save area for next seed
        MOV     CS:RDOFF,SI     ;Back to BASIC in PARAF%(5)

        ADD     SI,2
        MOV     CS:SHIFSEG,ES   ;PARAF%(6)=Number of normalizations
        MOV     CS:SHIFOFF,SI

        LES     SI,[BX+4]       ;
        MOV     CS:SOFF,SI      ;Segment and offset of
        MOV     CS:SSEG,ES      ;SIN,COS-Table
        LES     SI,[BX+8]
        MOV     CS:COFF,SI
        MOV     CS:CSEG,ES
        LES     SI,[BX+12]
        MOV     CS:PWOFF,SI     ;Segment and offset of
        MOV     CS:PWSEG,ES     ;PWS storage
        LES     SI,[BX+16]
        MOV     CS:DOFF,SI      ;Segment and offset of
        MOV     CS:DSEG,ES      ;generated load data
```

```
         PUSH     CS
         POP      DS                  ;Set DS
         CALL     IRAND               ;CALL for preparation of Real
; IFFT                                ;and Imaginary data
         MOV      SHIFT,0000H         ;Number of normalizations
         MOV      STAGE,0001H         ;Stage counter initialize
         MOV      AX,M
         MOV      SCNT,AX
         MOV      AX,N                ;Number of data points
         SHR      AX,1
         MOV      HALFN,AX            ;Half samples of subgroup
;
TOP:     CALL     NORM

;Initialize Cosine Table Pointer PTW
         MOV      AX,HALFN
         MOV      CNTHALF,AX
         MOV      PTW,000H
         MOV      DATP1,000H
         MOV      DATP,0000H          ;Pointer for top half data
M2:      MOV      CX,STAGE
         MOV      BX,COFF
         MOV      ES,CSEG
         MOV      SI,PTW
         SHL      SI,1                ;(ROW No. of table)*2=offset
         MOV      AX,ES:[BX+SI]
         MOV      COS,AX
         MOV      BX,SOFF
         MOV      ES,SSEG
         MOV      AX,ES:[BX+SI]
         NEG      AX
M4:      MOV      SIN,AX
;*************************************************************
M1:      CALL     FFT00               ;Butterfly Operation
;*************************************************************
         MOV      AX,HALFN
         SHL      AX,1                ;Point the next subgroup data
         ADD      DATP,AX
         LOOP     M1                  ;Do butterfly STAGE times with
                                      ;save SIN/COS
         MOV      AX,STAGE
         ADD      PTW,AX              ;Advanse S/C pointer by 2**(R-1)
         INC      DATP1               ;
         MOV      AX,DATP1
         MOV      DATP,AX             ;Reset data pointer
         DEC      CNTHALF             ;Butterfly No.-1
         JNZ      M2                  ;IF Not 0,Real SIN/COS
         SHL      STAGE,1             ;to next stage
         SHR      HALFN,1             ;1/2 NO. of data in SUBGRP
         DEC      SCNT
         JNZ      TOP                 ;Repeat
;
; Bit revers process
BIT_REV:MOV       AX,N
         DEC      AX
```

```
;
BR2:    CLC
        MOV     BIT_PAT,AX
        MOV     DX,0000H
        MOV     CX,M
BR1:    RCR     AX,1
        RCL     DX,1
        LOOP    BR1
;
        MOV     AX,BIT_PAT
        CMP     AX,DX
        JBE     BR3
;
; Exchange data
        MOV     ES,RSEG
        MOV     BX,ROFF
        SHL     AX,1                ;Bit pattern=1/2 Address
        MOV     SI,AX               ;Offset=SI
        MOV     AX,ES:[BX+SI]
        MOV     G1,AX               ;ORIG data in G1
        SHL     DX,1                ;REV-Pattern *2=Address
        MOV     DI,DX
        MOV     AX,ES:[BX+DI]
        MOV     G2,AX               ;REV data in G2
        MOV     AX,G1
        MOV     ES:[BX+DI],AX       ;ORG data in REV-Address
        MOV     AX,G2
        MOV     ES:[BX+SI],AX       ;REV data in ORG-Address
        MOV     BX,IOFF             ;BX=Offset of IMAG
        MOV     ES,ISEG
        MOV     AX,ES:[BX+SI]
        MOV     G1,AX
        MOV     AX,ES:[BX+DI]
        MOV     G2,AX
        MOV     AX,G1
        MOV     ES:[BX+DI],AX
        MOV     AX,G2
        MOV     ES:[BX+SI],AX
;
BR3:    MOV     AX,BIT_PAT
        DEC     AX
        JNZ     BR2
;
;
        MOV     AX,N
        CMP     AX,1100             ;IF N<1K then no truncation
        JB      GOOD
        CMP     AX,2200             ;IF N=2K
        JB      A2K
        CMP     AX,4400             ;IF N=4K
        JB      A4K
;
        MOV     DI,50               ;IF N>4K
        MOV     SI,25
        JMP     TRUNC
A4K:    MOV     DI,10
        MOV     SI,5
        JMP     TRUNC
A2K:    MOV     DI,10
        MOV     SI,5
```

```
TRUNC:  MOV     BX,ROFF
        MOV     ES,RSEG
        CALL    A0
        MOV     BX,IOFF
        MOV     ES,ISEG
        CALL    A0
;Shift data left by number of normalizations
GOOD:
        MOV     ES,RSEG
        MOV     BX,ROFF
        MOV     DX,N
        MOV     CX,SHIFT
        SUB     CX,PW_MPY           ;Power spectrum multiplied
                                    ;by 2^PW_MPY to be
                                    ;SUITABLE Integer
        CMP     CX,0000H
        JG      LSHIFT              ;Left Shift
        JZ      LAST
        NEG     CX
RSHIFT: PUSH    CX                  ;Right Shift
        MOV     AX,ES:[BX]
RS1:    SAR     AX,1
        LOOP    RS1
        MOV     ES:[BX],AX
        ADD     BX,2
        POP     CX
        DEC     DX
        JNZ     RSHIFT
        JMP     LAST
;
LSHIFT: PUSH    CX
        MOV     AX,ES:[BX]
        CMP     AX,0000H
        JG      SH1
        JZ      SH3
        NEG     AX                  ;Shift of negative data
SH0:    SAL     AX,1
        JS      CUT2
        LOOP    SH0
        NEG     AX
        JMP     SH2
CUT2:   MOV     AX,8000H
        JMP     SH2
SH1:    SAL     AX,1
        JS      CUT
        LOOP    SH1
        JMP     SH2
CUT:    MOV     AX,7FFFH
SH2:    MOV     ES:[BX],AX
SH3:    ADD     BX,2
        POP     CX
        DEC     DX
        JNZ     LSHIFT

; Data for convertion area stored memory DA%(I)
LAST:   MOV     AX,CS:DSEG
        MOV     ES,AX
        MOV     DI,CS:DOFF
        MOV     AX,CS:RSEG
        MOV     DS,AX
        MOV     SI,CS:ROFF
```

```
        MOV     AX,CS:N
        CMP     AX,17000
        JB      LAST1
        MOV     AX,25000            ;DAC Device has only
                                    ;a 50K Byte buffer
LAST1:  MOV     CX,AX
        MOV     ES:[DI],AX          ;DA%(0)=N
        ADD     DI,0002H
REP:    MOV     AX,DS:[SI]
        PUSH    CX                  ;use only upper 12 bits
        MOV     CL,04
        SAR     AX,CL
        POP     CX
NCRIP:  ADD     AX,800H             ;Bias for DAC, 800H = 0 VOLT
        AND     AX,0FFFH
        MOV     ES:[DI],AX
        INC     DI
        INC     DI
        INC     SI
        INC     SI
        LOOP    REP
        DEC     DI
        DEC     DI
        MOV     AX,8800H
        MOV     ES:[DI],AX          ;ADD END bit for the device
        JMP     READY
; Last and first few data are set to zero
;                        for smooth start and end
ENDING: SUB     DI,2
        MOV     AX,ES:[DI]
        AND     AX,0FFFCH           ;Eliminate insiginificant bits
        CMP     AX,800H
        JZ      DATOP
        MOV     AX,800H
        MOV     ES:[DI],AX
        JMP     ENDING
DATOP:  MOV     DI,CS:DOFF
DATOP1: ADD     DI,2
        MOV     AX,ES:[DI]
        AND     AX,0FFFCH
        CMP     AX,800H
        JZ      READY
        MOV     AX,800H
        MOV     ES:[DI],AX
        JMP     DATOP1
READY:  MOV     ES,CS:RDSEG         ;Ready GO back to BASIC
        MOV     SI,CS:RDOFF
        MOV     AX,CS:URANL         ;Save the last random number
        MOV     ES:[SI],AX
        POP     SI
        POP     DI
        POP     ES
        POP     DS
        POP     DX
        POP     CX
        POP     BX
        POP     AX
        IRET
```

```
A0:       MOV     CX,N
A05:      MOV     AX,ES:[BX]
          CMP     AX,0000H
          JE      AX0
          CWD
          IDIV    DI
          CMP     DX,SI
          JGE     ADD1
          NEG     SI
          CMP     DX,SI
          JG      DO_NOTH
          NEG     SI
          SUB     AX,1
          JMP     DO_NOTH
ADD1:     INC     AX
DO_NOTH:CWD
          IMUL    DI
          MOV     ES:[BX],AX
AX0:      INC     BX
          INC     BX
          LOOP    A05
          RET

NORM:     MOV     ES,RSEG
          MOV     BX,ROFF
          CALL    OVF
          JC      NR1
          MOV     ES,ISEG
          MOV     BX,IOFF
          CALL    OVF
          JC      NR1
          RET
NR1:      MOV     BX,ROFF
          MOV     ES,RSEG
          CALL    DNRM
          MOV     BX,IOFF
          MOV     ES,ISEG
          CALL    DNRM
          INC     SHIFT
          JMP     NORM

OVF:      MOV CX,N
OVF1:     MOV     AX,ES:[BX]
          TEST    AH,80H
          JZ      SKIP
          NEG     AX
SKIP:     CMP     AX,3FFFH
          JBE     OF1
          STC
          RET
OF1:      INC     BX
          INC     BX
          LOOP    OVF1
          CLC
          RET
```

```
;+++++ Data Normlization ++++++

DNRM:   MOV     CX,N

DNRM1:  MOV     AX,ES:[BX]
        SAR     AX,1
        MOV     ES:[BX],AX
        INC     BX
        INC     BX
        LOOP    DNRM1
        RET


;+++++++ Butterfly Operation ++++++++++++++++++++++++++++

FFT00:  MOV     SI,DATP
        MOV     AX,SI
        ADD     AX,HALFN
        SHL     SI,1
        SHL     AX,1                ;To GET offset
        MOV     DI,AX
        MOV     ES,RSEG             ;Real data address
        MOV     BX,ROFF             ;ES=EXTRA,BX=ROFF
        MOV     AX,ES:[BX+SI]
        MOV     G1,AX
        MOV     AX,ES:[BX+DI]
        MOV     G3,AX
        MOV     ES,ISEG
        MOV     BX,IOFF             ;Imaginary data address
        MOV     AX,ES:[BX+SI]
        MOV     G2,AX

        MOV     AX,ES:[BX+DI]
        MOV     G4,AX
; Butterfly Operation
        MOV     AX,G1
        MOV     DX,G3
        ADD     G1,DX       ;G1 <--- G1+G3
        SUB     AX,DX       ;AX <--- AX=G1-G3
        MOV     G3,AX       ;G3 <--- G1-G3
        MOV     AX,G2
        MOV     DX,G4
        ADD     G2,DX       ;G2 <--- G2+G4
        SUB     AX,DX       ;G2-G4
        MOV     G4,AX       ;G4 <--- G2-G4
        CMP     SIN,0000H
        JE      SZERO
;
;
CNZERO: MOV     AX,G3
        CMP     AX,0000H
        JE      PAX
        IMUL    COS         ;(G1-G3)*COS ---> DX:AX
        CALL    UNIT1
PAX:    PUSH    AX
        MOV     AX,G4
        CMP     AX,0000H
        JE      PDX
```

```
        IMUL    SIN         ;(G2-G4)*SIN ---> DX:AX
        CALL    UNIT1
PDX:    POP     DX          ;(G1-G3)*COS
        ADD     AX,DX       ;(G1-G3)*COS+(G2-G4)*SIN
        PUSH    AX          ;Temporary save
        MOV     AX,G4
        CMP     AX,0000H
        JE      PAX2
        IMUL    COS
        CALL    UNIT1
PAX2:   PUSH    AX
        MOV     AX,G3
        CMP     AX,0000H
        JE      PDX2
        IMUL    SIN
        CALL    UNIT1
PDX2:   POP     DX
        SUB     DX,AX       ;(G2-G4)*COS-(G1-G3)*SIN
        MOV     G4,DX       ;G4 <---
        POP     AX
        MOV     G3,AX       ;G3 <--- (G1-G3)*COS+(G2-G4)*SIN
SZERO:  MOV     AX,G1
        MOV     ES,RSEG
        MOV     BX,ROFF
        MOV     ES:[BX+SI],AX
        MOV     AX,G3
        MOV     ES:[BX+DI],AX
        MOV     ES,ISEG
        MOV     BX,IOFF
        MOV     AX,G2
        MOV     ES:[BX+SI],AX
        MOV     AX,G4
        MOV     ES:[BX+DI],AX
        RET
;
UNIT1:  CMP     DX,0000H
        JB      U1
        SHL     AX,1
        RCL     DX,1
        MOV     AX,DX
        RET
U1:     NOT     DX
        NOT     AX
        ADD     AX,1
        ADC     DX,0
        SHL     AX,1
        RCL     DX,1
        NEG     DX
        MOV     AX,DX
        RET
```

```
; Routine to generate random phases and prepare data for
; inverse Fourier Transforms
;
IRAND:
        MOV     CX,N                    ;Clears Real and Imaginary
        MOV     ES,RSEG                 ;parts
        MOV     BX,ROFF
        XOR     AX,AX
CLEAR:  MOV     ES:[BX],AX
        MOV     ES:[BX+1],AX
        INC     BX
        INC     BX
        LOOP    CLEAR
        MOV     CX,N
        MOV     ES,ISEG
        MOV     BX,IOFF
CLEAR1: MOV     ES:[BX],AX
        MOV     ES:[BX+1],AX
        INC     BX
        INC     BX
        LOOP    CLEAR1
;
        MOV     SI,PWOFF                ;Initialize pointer,DATP,
        MOV     AX,MINIF                ;and counter,CX
        MOV     DATP,AX
        ADD     AX,AX
        ADD     SI,AX
        MOV     CX,MAXF
        SUB     CX,MINIF
        INC     CX
COMMENT~ This is a uniform random number generator called from
        the gaussian random load generator, "GRL.ASM".

        IY=IX*65539=IX*(2^16+3)=IX*(shift one word) + IX*3
        ~
RANSU:  MOV     AX,URANL
        MOV     BX,URANL                ;Save in BX
        MOV     DX,URANH
        SHL     AX,1
        RCL     DX,1                    ;UH.UL*2
        ADD     URANL,AX
        ADC     URANH,DX                ;UH.UL*3
        ADD     URANH,BX
        AND     URANH,7FFFH             ;BIT31=0,POSI
;
        MOV     AX,URANH

        MOV     BX,N
        IMUL    BX                      ;To make use of SIN,COS Table
        MOV     BX,7FFFH                ;MAX of URAN=7FFF
        IDIV    BX                      ;Normalize
        MOV     ANGLE,AX                ;ANGLE 0-2PAI(FROM 0 TO N)
        MOV     DX,N
        SAR     DX,1                    ;N/2 IN DX
        CMP     AX,DX
        JB      ASITIS                  ;IF ANG<PAI
        SUB     AX,DX                   ;ANG-PAI
        SHL     AX,1                    ;Set table pointer;A Random
                                        ;angle
```

```
          MOV     ANGLE,AX
          MOV     ES,SSEG
          MOV     BX,SOFF
          ADD     BX,AX
          MOV     AX,ES:[BX]
          NEG     AX
          MOV     SIN,AX
          MOV     ES,CSEG
          MOV     BX,COFF
          ADD     BX,ANGLE
          MOV     AX,ES:[BX]
          NEG     AX
          MOV     COS,AX
          JMP     DSTOR
ASITIS:   ADD     AX,AX
          MOV     ANGLE,AX
          MOV     ES,SSEG
          MOV     BX,SOFF
          ADD     BX,AX
          MOV     AX,ES:[BX]
          MOV     SIN,AX
          MOV     ES,CSEG
          MOV     BX,COFF
          ADD     BX,ANGLE
          MOV     AX,ES:[BX]
          MOV     COS,AX

DSTOR:    MOV     ES,PWSEG
          MOV     DI,DATP
          ADD     DI,DI
          MOV     AX,ES:[SI]
          CMP     AX,0000H
          JE      IRNEXT
          PUSH    AX
          IMUL    COS
          CALL    UNIT1                   ;SQR(G(t),df)*SIN or COS
          MOV     BX,AX
          POP     AX
          IMUL    SIN
          CALL    UNIT1
          MOV     DX,BX
          MOV     ES,RSEG
          MOV     BX,ROFF
          MOV     ES:[BX+DI],DX
          MOV     ES,ISEG
          MOV     BX,IOFF
          MOV     ES:[BX+DI],AX
IRNEXT:   INC     DATP
          ADD     SI,2
          DEC     CX
          JZ      GOBACK
          JMP     RANSU
GOBACK:   RET
```

```
;
;++++++ Working Area ++++++++++++++++++++++++++++++++++
;
URANL   DW      ?               ;Uniform random number
URANH   DW      ?
ANGLE   DW      ?
N       DW      ?               ;Number of samples
M       DW      ?               ;Exponent M
PW_MPY  DW      ?               ;Multiplyer of PWS(Shift times)
MINIF   DW      ?               ;Lower limit of PWS
MAXF    DW      ?               ;Upper limit of PWS
SHIFT   DW      ?
STAGE   DW      ?
HALFN   DW      ?               ;One half of a Subgroupe
PTW     DW      ?               ;COS table pointer for butterfly
DATP    DW      ?               ;Data pointer from the top of
                                ;spectrum
SCNT    DW      ?               ;Stage counter
COS     DW      ?               ;Temporal storage of COS
SIN     DW      ?
G1      DW      ?               ;Data for butterfly OPE
G2      DW      ?
G3      DW      ?
G4      DW      ?
CNTHALF DW      ?
BIT_PAT DW      ?
SHIFOFF DW      ?
SHIFSEG DW      ?
COFF    DW      ?               ;C-Table offset
CSEG    DW      ?               ;C-Table segment
SOFF    DW      ?
SSEG    DW      ?
ROFF    DW      0000H           ;Offset of real address
RSEG    DW      9000H
IOFF    DW      0000H           ;To be initialized
ISEG    DW      8000H
PWOFF   DW      ?
PWSEG   DW      ?
DOFF    DW      ?
DSEG    DW      ?
RDSEG   DW      ?
RDOFF   DW      ?

GRL     ENDS
        END
```