

501.32  
IT

---

# 構造物のモニタリングと検査によるベイジアン 信頼性解析法の開発

---

(研究課題番号06302062)

平成7年度 科学研究費補助金（総合研究(A)）研究成果報告書

平成8年3月

研究代表者 板 垣 浩  
(横浜国立大学工学部・教授)

横浜国立大学附属図書館



10039451

## はしがき

本研究は平成6年4月より平成8年3月に至る2年間にわたって、文部省科学研究費（総合(A)）の補助により行われたものである。研究課題は構造物のモニタリングと検査による安全性・信頼性の維持に関する解析手法の開発をねらっている。

従来から種々の構造物でモニタリングが行われているが、予め信頼性解析と言う見地からのデータの利用について十分に検討されているとは言い難く、まして、ベイジアン解析を視野にいれたものは皆無である。現場でのコンピュータ利用が容易になったことや計測技術の進歩などが構造物のモニタリングを容易にしつつある。これらの観点から本研究では、構造部分のモニタリング情報の収集方法や事後信頼度推定に如何に取り込むかについて検討した。

本研究の結果はモニタリングを考慮した構造信頼性解析に非常に有効な方法を与えるものと言えよう。

## 研究組織

- 研究代表者： 板垣 浩（横浜国立大学工学部・教授）
- 研究分担者： 町田 進（東京大学工学部・教授）  
清水 昭信（横浜国立大学工学部・教授）  
石川 浩（香川大学経済学部・教授）  
藤本由紀夫（広島大学工学部・教授）  
森下 信（横浜国立大学工学部・助教授）  
石塚 鐵夫（横浜国立大学工学部・講師）

## 研究経費

平成6年度	7,400 千円
平成7年度	3,000 千円
<hr/>	
計	10,400 千円

## 研究発表

- (1) Alexandre Kawano, Hiroshi Itagaki, Tetsuo Ishizuka  
An Application of Bayesian Decision Theory to the Design and Inspection of Marine Structures ;  
Journal of the Society of Naval Architects of JAPAN, Vol.176, 1994、pp.587- 595
- (2) Alexandre Kawano, Hiroshi Itagaki, Tetsuo Ishizuka  
Selection of the First Inspection Time Based on Maximization of Amount of Information ;  
Journal of the Society of Naval Architects of JAPAN, Vol.176, 1994、pp.597- 602
- (3) 藤本由紀夫、新宅英司、金 成燦  
構造モニタリングによる疲労損傷の感知と予知  
日本造船学会論文集、178号、1995、pp.523 - 533
- (4) Yukio Fujimoto, Eiji Shintaku, Sung Chan Kim  
A Study of Health Monitoring of Ship Structures  
MARIENV'95, Vol.1, 1995、pp.227 - 234
- (5) Yukio Fujimoto, Eiji Shintaku, Sung Chan Kim  
Structural Monitoring for Fatigue Crack Detection and Prediction  
ISOPE'96 (Int. Soc. of Polar Eng.), 1996、投稿中

## 研 究 成 果

### 報告項目

	頁
1. 確率論的破壊力学現象の予測問題 -----	1
2. 構造モニタリングに関する実験 -----	14
2. 1 疲労損傷モニタリングに関する実験 -----	14
2. 2 船体の変形モニタリングに関する考察 -----	34
3. 光ファイバーセンサによる歪計測 -----	36
3. 1 干渉型光ファイバーセンサによる歪計測実験 -----	36
3. 2 歪方向感知式マッハ・ツェンダ型センサによる歪計測実験 --	45
4. ベイジアン信頼性解析への組込み -----	51
4. 1 海洋構造物の設計・検査におけるベイズの決定理論の適用 ---	51
4. 2 情報量の最大化に基づく最初の検査施工時期の選択 -----	61

# 1. 確率論的破壊力学現象の予測問題

香川大学経済学部 石川 浩

## 1. 1 はじめに

周知の通り、機械・構造物の破壊は荷重繰り返しに伴う疲労損傷の累積に基因したことが多い。近年の研究によって、このような疲労損傷の累積は主としてき裂の発生・進展過程、もしくは初期欠陥からのき裂の進展過程として理解されるようになってきた。従って、構造物の耐疲労信頼性評価を行うには、繰り返し荷重を受ける構造部材に対して、き裂の発生・進展過程、特に溶接部のように初期欠陥が想定される場合にはき裂進展過程の信頼性工学的解析が必要となる。信頼性工学的解析とは、そのモデルに現れる種々の不確定要因を取り入れた確率論的解析のことであって、それによってはじめて構造物の安全性あるいは健全性の度合いを定量的に評価し得ることになる<sup>(1.1)~(1.10)</sup>。

他方、1950年代から、き裂材強度やき裂の挙動を力学的側面から評価・解析するための手法、いわゆる破壊力学 (fracture mechanics) が急速に発達し、ぜい性破壊の解析のみならず、疲労・環境破壊等を含めて、すべてのき裂き裂問題の解析に適用が可能であることが指摘された。しかしながら、現在でも、き裂の発生および微小き裂進展過程を定量的に、かつ適確に把握することは困難で、比較的その特性が良くわかっているのは、き裂が微視組織の影響を受けず安定成長するようになってから急速成長へ移行するまでの間の、いわゆる“subcritical crack growth”といわれる領域のみである。その結果、この領域での研究成果を構造物の設計・管理に活かすべく、航空機等では、たとえ非破壊検査で見出し得ない程度の欠陥が存在しても、次の点検時までいき裂が急成長段階に達することはないように、き裂を管理することを目標とした、いわゆる損傷許容設計 (damage tolerant design) 思想が普及し、破壊力学に基礎を置いたき裂進展モデルの研究が急速に進展してきている。

そこで、これらの研究成果の助けを借りて耐疲労信頼性評価を行うことを目指し、種々の不確定要因を考慮に入れたき裂進展過程の破壊力学的解析を行おうとする、確率論的破壊力学 (probabilistic fracture mechanics) の一分野が発展してきた。

本研究では、はじめに疲労き裂進展の破壊力学的モデルを概観し、次いで確率論的破壊力学による耐疲労信頼性評価手法の理論的背景並びに疲労き裂進展過程の確率モデル中に現れるパラメータの予測手法について考察する。

## 1. 2 疲労き裂と破壊力学

疲労損傷は主として疲労き裂の進展という形で累積してゆく。この疲労き裂進展過程を概観すれば図1.2.1に示すとおりである。第I段階はせん断応力の影響を受けて、き裂が材料内部に入り込んでゆく段階で、このようなすべりによるき裂は結晶粒界やすべりに対する障害物に出会ったとき進展を停止することがある。第II段階はへき開割れを含む過程および引張応力に依存した進展過程のことであり、結晶方位とは無関係に引張応力に垂直な方向に進む。その後、不安定成長段階を経て破損に至る。

第I段階では結晶学的因子の影響が強く、本節で述べる破壊力学が対象とするのは主として第II段階にあるき裂であって、この段階では結晶学的微視組織の影響は少ない。なお、比較的大きな実用構造部材、あるいは溶接部等では初期欠陥の存在は避けられず、それを起点としてき裂が進展してゆくが、このようなき裂の進展はほとんど第II段階と考えてよいことを注意しておく。

さて、図1.2.2のように、無限遠で応力 $\sigma$ の一樣引張りを受ける楕円孔のある弾性平板を考えると、楕円孔の近傍では応力集中が生じ、応力の分布は概略図に示すようになる。ところで、楕円孔の縁で生ずる最大応力は、楕円孔の曲率が大きくなる程大きくなり、曲率無限大の極限で発散する。き裂とは本来、無限に扁平な楕円孔と考えられ、従って、もし全領域で弾性論が適用可能なら、き裂先端付近で応力は発散し、き裂先端は一種の特異点となる。

実際、線型弾性論によれば、き裂先端付近での応力成分は、

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{有限項} \quad (1.2.1)$$

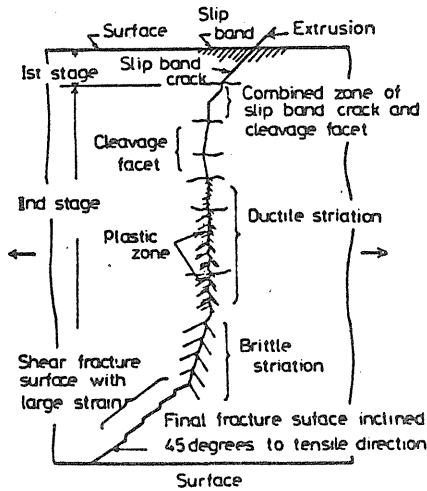


図 1.2.1 き裂進展過程

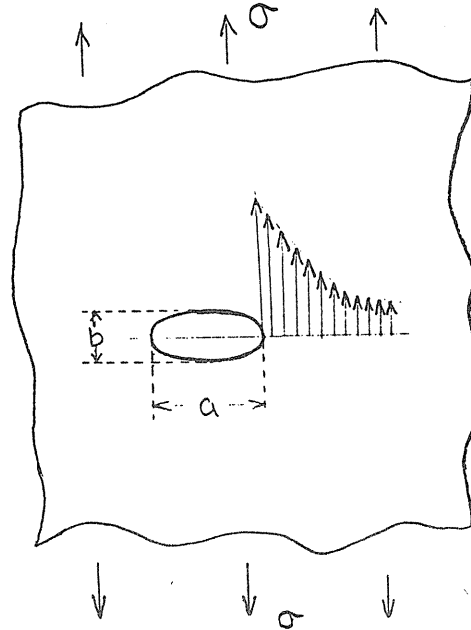


図 1.2.2 楕円孔のある平板の応力概略図

なる構造をもつ。すなわち、応力成分は  $r^{-1/2}$  で発散するのである。ここに  $r, \theta$  はき裂の垂直断面において、き裂先端に原点をもつ局所極座標系である。 $K$  は無限遠での応力およびき裂長によって定まる定数であって、応力拡大係数 (stress intensity factor) と呼ばれる。注目すべきことは、式 (1.2.1) の右辺第 1 項で  $K$  以外の要素は  $r, \theta$  のみの、負荷形式のみで決まる、ユニバーサルな関数であって、き裂の特性に依存しないということである。すなわち、き裂先端では、一種の相似則が成立し、 $K$  の大小によって応力の強さが比例的に拡大あるいは縮小されることを意味する。この事情は部材が有限となっても不変であり、応力拡大係数のみが部材形状によって異なってくるのみである。

上述したように、き裂の弾性解析によってき裂先端で  $r^{-1/2}$  の特異性を持つ応力分布が得られ、その係数として応力拡大係数が定義された。しかし、実際はき裂先端近傍で材料が降伏するので、応力がこのような特異性をもつことはなく、図 1.2.3 に示すように、き裂先端には塑性域が現れる。この塑性域の大きさ  $R$  を評価すれば、 $\sigma_y$  を降伏応力として

$$R = \kappa \left( \frac{K}{\sigma_y} \right)^2 \quad (1.2.2)$$

が得られ、 $\kappa$  は  $1/\pi$  程度の数値で負荷形態によって異なる。もし、 $R$  がき裂長  $a$  に比べて十分小さければ、やはり弾性解析結果が意味をもつと考えられる。従って、応力拡大係数  $K$  を用いる線型破壊力学が有効なのは、作用応力がそれ程大きくなく、 $R$  が  $a$  および部材の代表寸法に比べて十分小さいときである。このときには、 $K$  の値がき裂先端の微小領域における、応力、ひずみ、ひずみエネルギー、変位等のすべての力学的情報を代表すると言えるのである。

次に、応力拡大係数が遠方での応力  $\sigma$  とき裂長  $a$  のいかなる関数となるかを考えよう。厳密に解き得る場合は限られているが、例えば、無限平板中に長さ  $2a$  のき裂が存在し、き裂に垂直な方向に無限遠方で一様な応力  $\sigma$  が作用する場合 (図 1.2.2 で  $b \rightarrow 0$  とした極限) には、解は容易に求まり

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.2.3)$$

が得られる。一般の有限部材中のき裂では、これにき裂長  $a$  の関数である補正項  $F(a)$  を乗じたものとなる。実際によく現れる多くの例に対して、有限要素解析等を通して  $F(a)$  の具体的表式が提案されている<sup>(1,11)</sup>。

さて、塑性域の大きさが、き裂長および部材の代表寸法に比べて十分小さければ、き裂先端の力学的情報は応力拡大係数  $K$  のみで定まる。従って、き裂が進展し易いか否か、換言すれば、き裂進展速度は主とし

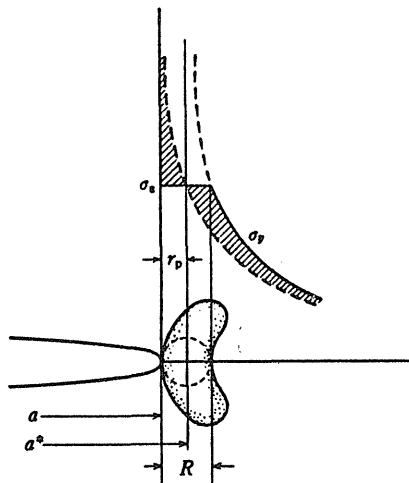


図 1.2.3 き裂先端の塑性域

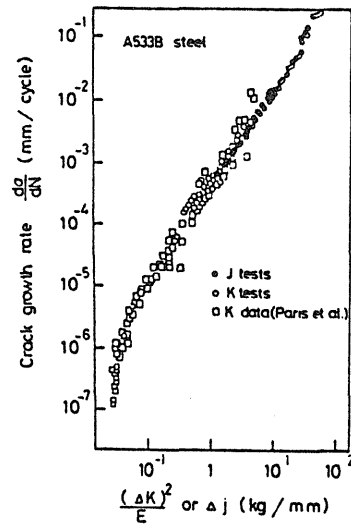


図 1.2.4 Paris-Erdogan 則の適用例

て  $K$  の値に依存するはずである、というのが破壊力学的アイデアである。すなわち、繰り返し荷重の場合には  $K$  は 1 サイクルにわたっても増減するから、便宜上  $K$  の変動幅  $\Delta K$  を考えて、1 サイクル当たりのき裂進展速度  $da/dn$  を第一近似的に  $\Delta K$  の関数として

$$\frac{da}{dn} = f(\Delta K) \quad (1.2.4)$$

と表そうとするのが破壊力学によるき裂進展モデルに他ならない。

しかし、残念なことに関数形がどんなものとなるかについては、破壊力学は教えてくれず、現在のところ実験による以外にない。ところが、実験によれば、 $\Delta K$  の値がある下限値  $\Delta K_{th}$  以上であれば  $da/dn$  と  $\Delta K$  の関数はかなり広い範囲にわたって両対数グラフ上で直線で近似し得ることが知られるようになった。すなわち、

$$\frac{da}{dn} = C(\Delta K)^m \quad (1.2.5)$$

が成立し、発見者にちなんで Paris-Erdogan 則<sup>(1.12)</sup> と呼ばれている。図 1.2.4 はその一例を示したものであって黒丸は変形が大きく、非線型破壊力学的パラメータによるものであるが、それらをも含めて広範囲で式 (1.2.5) が成立していることが理解できよう。Paris らは、はじめ  $m = 4$  として上式を提案したが、その後多くの実験によって  $m$  は材料によって異なった値を取り、一般には 2 ~ 6 の間の定数と考えられるようになった。

もし、応力拡大係数が遠方での応力およびき裂長  $a$  の関数として与えられていれば、式 (1.2.5) は  $a$  に対する微分方程式となり、き裂が初期長  $a_0$  から限界長  $a_c$  に到達するまでの寿命は容易に算出し得ることになる。

### 1. 3 確率的破壊力学

これまで、疲労き裂進展過程の特性およびその表現法について述べてきたが、それは、あくまで平均的振る舞いのみを記述するものであって、通常、き裂進展には種々の不確定要因が伴う。機械・構造物の信頼性解析のためには、これらの不確定要因を適切に考慮に入れた解析法の開発が不可欠である。それゆえ、ここでは、不確定要因のうちで、どうしても確率過程論的な取り扱いの必要な不規則き裂進展抵抗および不規則荷重の効果を考慮した、いわゆるき裂進展の確率的破壊力学モデルについて考察する。

#### 1. 3. 1 き裂進展の不確定性

先に述べたように、疲労き裂進展の安定成長期においては、線型破壊力学 (linear fracture mechanics) に基礎を置いたき裂進展予測式として、いわゆる Paris-Erdogan<sup>(1.12)</sup> 式がよく用いられる。しかし、以下に述

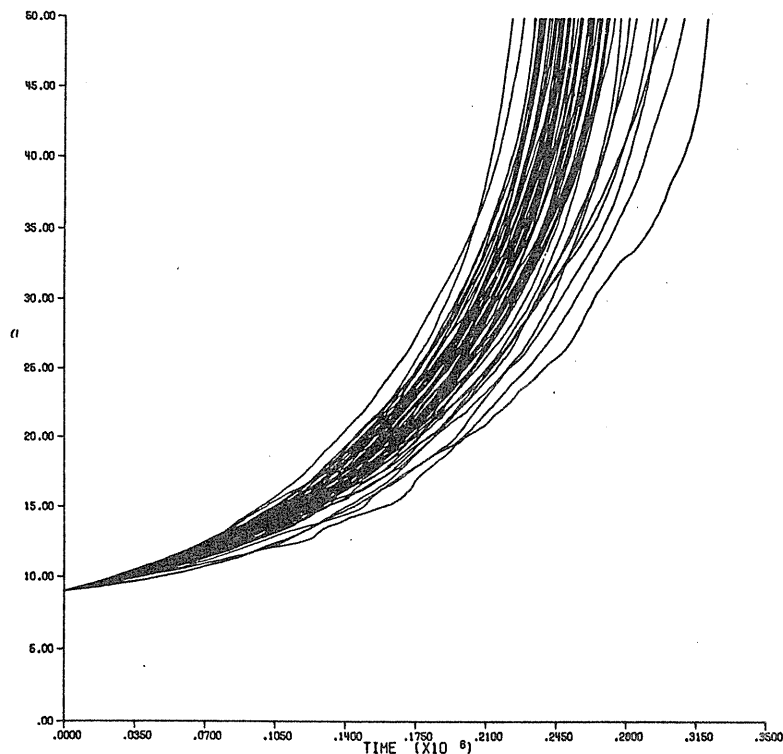


図 1.3.1 アルミニウム合金 2024-T3 の中央き裂板状試験片の疲労き裂成長実験結果

べるように、試験条件を非常によく制御した一定応力振幅下の疲労き裂進展実験においても、成長曲線はかなり統計的な変動があることが知られている。例えば、図 1.3.1 は Virkler らによりアルミニウム合金 2024-T3 の中央き裂板状試験片に関して実施された疲労き裂成長実験結果であり、成長曲線には著しいばらつきのあることが示されている。従って、少なくともこの場合には、き裂進展抵抗に関連したパラメータである式(1.2.5)中の  $C$  は確定値と見なすには無理があり、外力が不規則であればなおさら確定的に寿命予測することは不可能である。また、初期き裂に関する知見も不完全であるのが普通であり、モデルに現れる各種パラメータ値も確実に知り得るわけではない。従って、き裂長の時間発展は確率論的であり、き裂がある危険な長さにまで進展するに要する繰り返し数、すなわち、き裂進展寿命も分布する。そこで、機械・構造物の合理的な設計や運用のためには、き裂長分布および残存寿命分布特性の解明が必須となる。

これらの要請に応えるため、破壊力学を基礎としてき裂材の健全性を確率論的に評価する学問およびき裂進展過程を確率論的に解析する学問が発展し、これが確率論的破壊力学と呼ばれるもので、構造信頼性工学の重要な一分野となっている。

上述の各種の不確定要因の効果は与えられた環境に応じて異なったものとなるが、それらの内、材質の不均質性に起因するき裂進展抵抗の不規則性並びに部材に負荷される荷重の不規則変動に起因する負荷応力振幅の不規則性に関しては、共にその時々刻々の不規則な変動、すなわち確率過程論的基盤に立った研究が必要であり、種々のモデル・手法が提案されている<sup>(1.13),(1.14)</sup>。

### 1. 3. 2 確率的き裂進展モデル

はじめに、この種の研究における留意点に触れておこう。式(1.2.5)を適当に無次元化して、

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon \left( \frac{\Delta K}{K_0} \right)^m \quad (1.3.1)$$

と表すことにする。ここに  $X(n)$  は適当な長さで測った  $n$  サイクル後の無次元き裂長、 $\Delta K$  は同様に  $n$  サイクル後の応力拡大係数の変動幅、 $K_0$  はそれと同じ次元の定数、 $\varepsilon$  は無次元パラメータである。簡単のため、応力拡大係数が式(1.2.3)で表されるものとし、

$$\frac{\Delta K}{K_0} = Z_n \sqrt{x} \quad (1.3.2)$$

なる関係が成立するものと仮定する。ただし、 $Z_n$  は  $n$  サイクル目の適当に無次元化された不規則負荷応力振幅である。き裂進展抵抗の不規則性は式(1.3.1)の  $\varepsilon$  を便宜上  $\varepsilon C_n$  と改めることによって考慮し得る。すなわち  $C_n$  は  $n$  サイクル後の、き裂先端における進展抵抗のゆらぎを代表するものとする。従って、われわれは確率微分方程式

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon C_n Z_n^m X^{m/2} \quad (1.3.3)$$

に到達した。これを解くということは、 $C_n, Z_n$  の確率的特性を与えて、確過程  $X(n)$  の確率特性、特にその分布を決めるということである。

これを取り扱う上での留意点は次の2点である。第一は  $C_n, Z_n$  は記憶をもった確率過程であって、 $C_n$  と  $C_{n+n'}$  とは  $n'$  がかなり大きくなってはじめて独立となるという点である。そのため、解過程  $X(n)$  はマルコフ過程ではなくなる。そこで、取り扱いを便利にするためにはマルコフ近似が必要となる。第二は、通常  $m$  は2以上の値を取るため、有限の繰り返し数の後に  $X$  が無限大に達してしまうという点である。このような過程を確率論的に考察しようとするれば、たちまち次のような困難に出会う。図1.3.2はき裂進展過程の模式図であり、 $n = n^*$  (一定) の直線で切った切り口の密度が  $n^*$  サイクル後のき裂長の密度を与え、 $x = x_c$  の直線で切った切り口の密度が、き裂が  $x_0$  から  $x_c$  にまで成長するに要するき裂進展寿命の密度を表す。ところが、 $n^*$  サイクル後にはそれがいかに小さい確率であってもすでにき裂長が無限大に達しているサンプルが必ず存在し、そのサンプルに対しては、その繰り返し数以後、式(1.3.3)は成立せず、状態は無限遠に留まることになる。換言すれば、任意の  $n$  を指定したとき、式(1.3.3)は全サンプルに対して成立するのではなく、あるサンプル集団に対してのみ成立するのである。

この困難を解決すべく、確率的き裂進展モデル解析のための種々の手法が提案されている<sup>(1.13),(1.14)</sup>。しかしながら、本研究では比較的利用し易いモデルである、いわゆる“死点 (death point) を考慮したマルコフ近似モデル”についてのみ取り扱うこととする。このモデルは確率微分方程式モデルの一つであって、1984年、鶴井・石川が導入したものであり、Tsurui-Ishikawa モデルと略称されている。

ここでは詳細は省略し、原論文<sup>(1.1)~(1.6)</sup>に委ねることとするが、上記の困難を克服するためのアイデアについて簡単に触れておく。それは、状態空間に死点と呼ばれるき裂長無限大の状態を導入し、この点に達したサンプルについては、き裂長の連続な分布の仲間から取り去ってやり、その時刻にまだ死点に達していないサンプルに対してのみき裂長分布の変化を記述することである。そうすれば、初期長  $x_0$  から進展を開始したき裂のある時刻  $n$  におけるき裂長有限領域での密度  $w(x, n|x_0)$  は一般に

$$\int_0^\infty w(x, n|x_0) dx \leq 1$$

となってしまう、必ずしも通常の規格化条件を満足しなくなる。しかし、このときにも適当な工夫によって、上記の困難を避けつつ、マルコフ近似を遂行し得る<sup>(1.1)~(1.4),(1.14)</sup>。すなわち、外部荷重、進展抵抗等は相関を有する確率過程であるが、通常われわれに興味のあるのは相関時間に比べて十分長い時間間隔における分布の変化であり、このことに着目するのである。その結果、 $w(x, n|x_0)$  の変化を記述する偏微分方程式、いわゆる“一般化した意味での Fokker-Planck 方程式が得られることとなる。

もし、この偏微分方程式を解くことができれば、式(1.3.3)の確過程の確率特性を知り得ることになり、任意の繰り返し数後のき裂長分布がわかる。詳細は省略するが、実際、式(1.3.3)の場合はもちろん、実用上



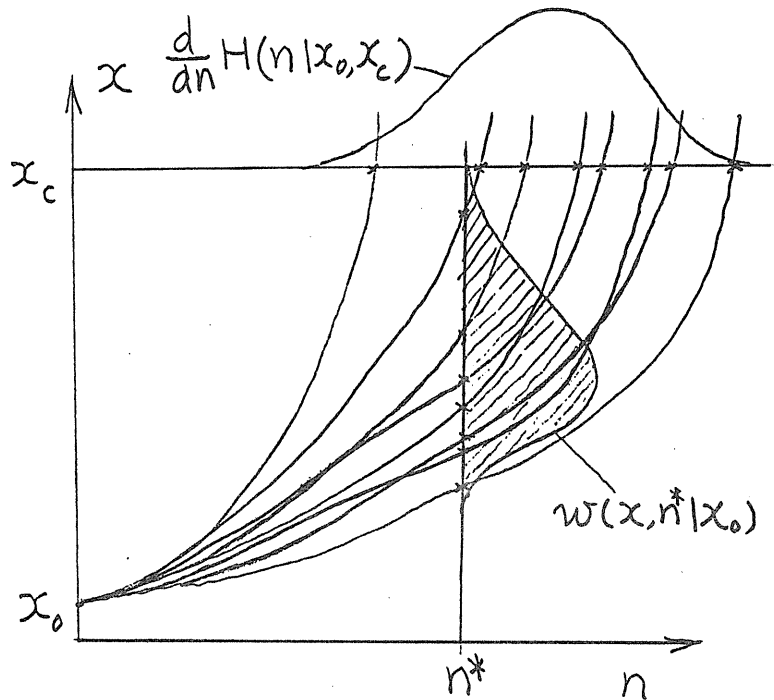


図 1.3.2 き裂進展過程の模式図

重要な多くの例に対して解が陽に与えられており<sup>(1.6),(1.14)</sup>、解の中には相関時間、相関距離のような確率過程独特の特性量が自然な形で入ってくる。図 1.3.3 は、き裂長分布の変化の一例である。き裂は長い程成長が速いことを反映して、き裂長密度は右に尾を引いたものとなり、その面積は  $(0, \infty)$  で積分しても 1 にはならない。1 とその面積との差は、その時刻に状態が死点にある確率に等しい。

解が陽に与えられることの意味は非常に大きい。例えば、「橋梁構造物の実用的信頼性設計手法の開発」に見られる如く、統計的解析を意図して計画された実験データでなくても、場合によっては、一本のき裂進展曲線のデータからさえ、信頼性解析を可能とする時がある<sup>(1.13)</sup>。

#### 1. 4 疲労き裂進展過程とパラメータ予測

上述のように、構造部材における疲労き裂の進展過程を取り巻く環境には多くの不確定要因や不規則要因が存在する<sup>(1.1)~(1.6),(1.16)</sup>。従って、構造物の信頼性設計や信頼性解析を適切に実施するためには、それらを考慮に入れた確率論的見地からのアプローチが不可欠である。このため、き裂進展過程の確率的モデル化に関する種々の研究が行われ、現在までに多くのモデルが提案されているが、中でも前節にその特徴を述べた Tsurui-Ishikawa モデル<sup>(1.1)~(1.6)</sup>は、周知の Paris-Erdogan の疲労き裂進展則に基づいてマルコフ近似手法<sup>(1.4)</sup>を適用することにより導出されたものであり、負荷応力振幅、き裂進展抵抗、初期き裂長の個数や大きさ等のもつ不規則性や不確定性をすべて取り入れることができ、しかもその分布関数が閉じた形で陽に得られているために実用的に幅広い応用可能性を有したものとなっている。

本節では、確率論的破壊力学現象の予測問題の典型的な一事例として、このモデルの中に含まれている未知パラメータの合理的な推定手法について論じる。これによってき裂進展過程の確率分布が決定され、直ちにそれを残存寿命分布や信頼度の算出に応用することができる。

##### 1. 4. 1 疲労き裂進展過程の確率モデル (Tsurui-Ishikawa Model)

一般に、安定成長段階の疲労き裂進展は、 $a$  をき裂長、 $n$  を応力繰返し数、 $\Delta K$  をき裂先端の応力拡大係数の変動幅とすると、周知の Paris-Erdogan 則<sup>(1.12)</sup>

$$\frac{da}{dn} = C(\Delta K)^m \quad (1.4.1)$$

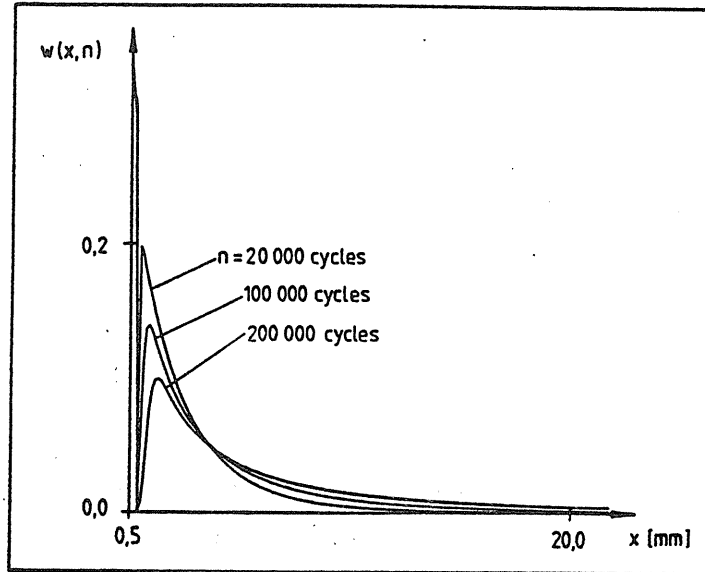


図 1.3.3 き裂長分布の変化の一例

によって記述される。ここに  $C$ ,  $m$  (通常は  $m \geq 2$ ) は材料定数である。ランダムな荷重負荷に対しても式(1)が成立するものとし、き裂進展抵抗の空間的不規則性を考慮して式(1.4.1)を無次元化すれば、

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon C_n Z_n^{2(\lambda+1)} g(X) \quad (1.4.2)$$

を得る。ただし、 $X = X(n) = a/a_0$  は  $n$  サイクル後の適当な長さ  $a_0$  で測った無次元き裂長、 $\varepsilon$  は無次元化された平均き裂進展抵抗、 $Z_n$  は  $n$  サイクル目の無次元ランダム負荷応力振幅、 $g(X)$  はき裂進展方向の板幅が有限であることに起因する補正項であり、また  $\lambda$  はべき指数  $m$  と次式

$$m = 2(\lambda + 1) \quad (1.4.3)$$

によって関係づけられる量である。さらに、 $C_n$  は  $n$  サイクル後のき裂進展抵抗の不規則性を表し、 $E[C_n] = 1$  である。 $C_n$ ,  $Z_n$  は不規則に変動する局所定常な確率過程であり、 $X \rightarrow B$  ( $= b/a_0$ ;  $b$  = 板幅) の時  $dX/dn$  が発散するという特異な確率微分方程式として式(1.4.2)を取り扱う必要がある。この点に注意を払い、Tsurui & Ishikawa は死点という概念を導入したマルコフ近似手法を用いて、他のモデルでは解消されていない数学的困難を見事に克服し、Tsurui-Ishikawa モデルを導出しているが、詳細は文献 [(1.1)~(1.6), (1.14)] に委ねる。

さて、ここで一定応力振幅試験結果を利用する場合を考えよう。この場合には負荷応力振幅  $Z_n$  は確定値  $Z_0$  となり、簡単のため補正項  $g(X)$  を考慮しないものとするれば、式(1.4.2)より

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon C_n Z_0^{2(\lambda+1)} X^{\lambda+1} \quad (1.4.4)$$

を得る。式(1.4.4)の初期条件  $X(0) = x_0$  の下での解過程  $X(n)$  の確率分布関数は、

$$\begin{aligned} W(x, n | x_0) &= P[X(n) \leq x | X(0) = x_0] \\ &= \Phi \left[ \frac{x_0^{-\lambda} - x^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}}{\lambda \sqrt{2G(n; x_0)}} \right] \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

で与えられ、その密度関数は

$$w(x, n | x_0) = \frac{1}{x^{\lambda+1} \sqrt{2G(n; x_0)}} \phi \left[ \frac{x_0^{-\lambda} - x^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}}{\lambda \sqrt{2G(n; x_0)}} \right] \quad (1.4.6)$$

で与えられる。ここに、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布関数、 $\phi(\cdot)$  はその密度関数であり、 $G(n; x_0)$  は不確定因子と呼ばれるもので、確定荷重下では次式で定義される<sup>(1.6)</sup>。

$$G(n; x_0) = \frac{\xi_0 \sigma_C^2}{(2\lambda + 1)} \left\{ x_0^{-(2\lambda+1)} - (x_0^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)} N(n; x_0))^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \right\} \quad (1.4.7a)$$

$$N(n; x_0) \equiv \text{Min.} \left[ n, \frac{x_0^{-\lambda}}{\lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}} \right] \quad (1.4.7b)$$

上式において、 $\sigma_C$ 、 $\xi_0$  はそれぞれ進展抵抗の不規則性を表す  $C_n$  の標準偏差、空間的相関距離に相当する定数である。また、初期き裂長  $x_0$  (確定値とする) から限界長  $x_c$  に到達するまでの残存寿命  $N$  の確率分布関数は次式で与えられる<sup>(1.6)</sup>。

$$H(n | x_0, x_c) \equiv P[N \leq n] = \bar{\Phi} \left[ \frac{x_0^{-\lambda} - x_c^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)} n}{\lambda \sqrt{2G(n; x_0)}} \right] \quad (1.4.8)$$

ここに、 $\bar{\Phi}(\cdot)$  は標準正規分布関数の余関数である。

#### 1. 4. 2. 最尤法によるパラメータ推定

##### (1) 推定すべきパラメータとその分類

一般に一定応力振幅試験結果を対象とすれば、 $Z_0$  は既知であり、推定すべき未知パラメータは、 $\varepsilon$ 、 $\lambda$ 、 $x_0$ 、 $\xi_0$ 、 $\sigma_C^2$  の5つである。もしも初期き裂長  $x_0$  が既知であれば、 $\varepsilon$ 、 $\lambda$ 、 $\xi_0$ 、 $\sigma_C^2$  の4つとなる。このうち  $\varepsilon$ 、 $\lambda$  はき裂進展則そのものに現れる言わば物理的パラメータであり、材質の不規則性に関連した統計的パラメータである  $\xi_0$ 、 $\sigma_C^2$  とは性格を異にする。一般に後者のような統計的パラメータを正確に特定するためには統計的実験を必要とするが、本研究ではこれを比較的少数の非統計的実験データから推定する方法について考究する。

##### (2) 最尤法によるパラメータ推定

疲労き裂進展に付随したパラメータを最尤法によって推定するためにはまず尤度関数を導出する必要がある。式(1.4.6)の導出と全く同様の方法により、推移確率密度関数

$$w(x', n' | x, n) = \frac{\partial W(x', n' | x, n)}{\partial x'} \quad (n' > n) \quad (1.4.9a)$$

$$W(x', n' | x, n) = P[X(n') \leq x' | X(n) = x] \quad (n' > n) \quad (1.4.9b)$$

は次式のように容易に得ることができる。

$$w(x', n' | x, n) = \frac{1}{x'^{\lambda+1} \sqrt{2G(n' - n; x)}} \phi \left[ \frac{x^{-\lambda} - x'^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)} (n' - n)}{\lambda \sqrt{2G(n' - n; x)}} \right] \quad (1.4.10)$$

一般に疲労試験におけるき裂進展データは、 $n_k$  を  $k$  番目のき裂長測定サイクル数、 $x_k$  をその時の測定き裂長として、 $(n_k, x_k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) という形で与えられている。このデータから尤度関数  $l$  を次の同時確率密度関数

$$l = \frac{\partial^K F(x_1, n_1; x_2, n_2; \dots; x_K, n_K | x_0)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_K} \quad (1.4.11a)$$

$$F(x_1, n_1; x_2, n_2; \dots; x_K, n_K) = P[X(n_1) \leq x_1, X(n_2) \leq x_2, \dots, X(n_K) \leq x_K | X(0) = x_0] \quad (1.4.11b)$$

により構成する。この尤度関数は、き裂進展過程の有する近似マルコフ性<sup>(1.4)</sup> および Bayes の公式を利用することにより、次式のように表すことができる。

$$l = \prod_{k=1}^K w(x_k, n_k | x_{k-1}, n_{k-1}) \quad (1.4.12)$$

ただし,  $n_0 = 0$  とする。式(1.4.10)を代入することにより, 尤度関数の表式として次式を得る。

$$l = \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{x_k^{\lambda+1} \sqrt{2G(n_k - n_{k-1}; x_{k-1})}} \phi \left[ \frac{x_{k-1}^{-\lambda} - x_k^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}(n_k - n_{k-1})}{\lambda \sqrt{2G(n_k - n_{k-1}; x_{k-1})}} \right] \right\} \quad (1.4.13)$$

この両辺の自然対数を取り, 不確定因子に式(1.4.7a)の表式を代入すると, 次式の対数尤度関数  $L$  が得られる。

$$\begin{aligned} L &\equiv \log l \\ &= -(\lambda + 1) \sum_{k=1}^K \log x_k \\ &\quad - \frac{K}{2} \{ \log(\xi_0 \sigma_C^2) + \log(2\lambda + 1) + \log 4\pi \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log \left\{ x_{k-1}^{-(2\lambda+1)} - (x_{k-1}^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}) \right. \\ &\quad \times N(n_k - n_{k-1}; x_{k-1}) \left. \right\}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} - \frac{2\lambda + 1}{4\lambda^2 \xi_0 \sigma_C^2} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^K \left\{ \left\{ x_{k-1}^{-\lambda} - x_k^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}(n_k - n_{k-1}) \right\}^2 / \left\{ x_{k-1}^{-(2\lambda+1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_0^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)}) N(n_k - n_{k-1}; x_{k-1}) \right\}^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \right\} \quad (1.4.14) \end{aligned}$$

従って, 最尤法によるパラメータ推定値は次の尤度方程式を同時に満足する解として与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \xi_0} = \frac{\partial L}{\partial \sigma_C} = 0 \quad (= \frac{\partial L}{\partial x_0}) \quad (1.4.15)$$

最尤法によるパラメータ推定では, 一般に未知パラメータの数が増えると, 最尤方程式を数値的に解くのに要する計算時間が増大し, 容易には解けなくなるような事態が生じ易い。また, 利用可能なデータ数が不足している場合には推定対象の数が増えると正確な推定が不能となる。従って, 何らかの他の情報を利用して推定対象数を減らす工夫をする必要がある。

#### 1. 4. 4 実用的観点からの推定手法の改善

##### (1) 物理的パラメータの推定

本質的に最尤法を適用せざるを得ないのは統計的パラメータ  $\xi_0, \sigma_C^2$  であって, 物理的パラメータ  $\varepsilon, \lambda$  は他の方法による決定法を考えるのが実用的である。このためにはき裂進展速度と応力拡大係数 ( $da/dN - \Delta K$ ) に関するデータや一定応力振幅試験結果の  $S-N$  曲線を利用することが考えられる。

##### A. $da/dN - \Delta K$ 曲線を利用する場合

き裂進展速度データに基づき,  $da/dN - \Delta K$  の関係を両対数グラフ上にプロットし, 最小2乗法により直線回帰することにより  $\varepsilon, \lambda$  を決定する。

##### B. $S-N$ 曲線を利用する場合

この場合には, 残存寿命分布のメディアン値  $\tilde{N}$  が  $S-N$  曲線上の直線にフィットするようにすればよい。式(1.4.8)に与えた残存寿命分布から,  $\tilde{N}$  は,

$$\tilde{N} Z_0^{2(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda \varepsilon} (x_0^{-\lambda} - x_c^{-\lambda}) \quad (1.4.16)$$

を満たすことがわかる。この両辺の対数を取ると,

$$\log Z_0 = -\frac{1}{2(\lambda+1)} \log \tilde{N} + \frac{1}{2(\lambda+1)} \{ \log(x_0^{-\lambda} - x_c^{-\lambda}) - \log \lambda - \log \varepsilon \} \quad (1.4.17)$$

という両対数目盛り上での直線関係が得られる。

限界き裂長  $x_c$  が既知の下で決定すべきパラメータは平均き裂進展抵抗  $\varepsilon$ , Paris-Erdogan 則のべき指数  $\lambda$  および初期き裂長  $x_0$  の3つである。 $\lambda, \varepsilon$  のうちの1つを上述Aの方法で求めて与えれば, 実験結果とし

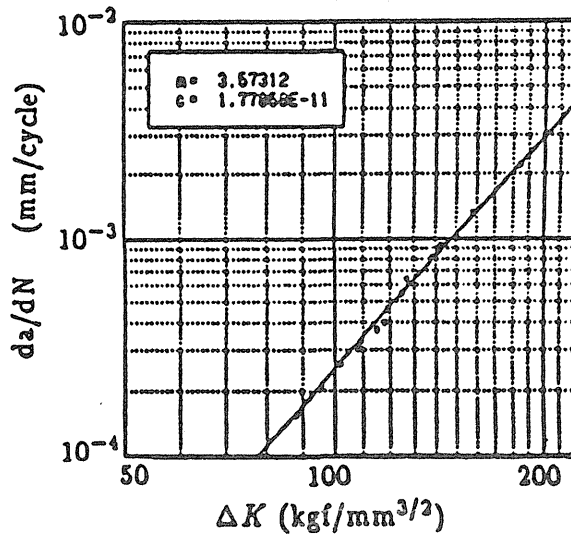


図1.4.1 SS-41鋼材の  $da/dN$ - $\Delta K$  関係

て得られている  $S$ - $N$  線図での回帰直線の傾きと切片から残りの2つは決定できることになる。なお、ここでは簡単化のために、初期き裂長  $x_0$  は確定値であるとして取り扱っているが、実際には初期き裂長は部材によりばらつきを示すと考えるのが自然である。従って、ここで推定した  $x_0$  は分布する初期き裂長の平均に相当するものであると考えるべきであろう。

図1.4.1に示す日本材料学会のSS41鋼材に関する  $da/dN$ - $\Delta K$  関係のデータ<sup>(1.17)</sup>を用いると、

$$\lambda = 0.787; \quad \varepsilon = 1.778 \times 10^{-11} \times \pi^{\lambda+1} \simeq 1.37 \times 10^{-10}$$

と推定される。 $\varepsilon$ をこの推定値に固定し、同じく同種材料に対する  $S$ - $N$  データ<sup>(1.18)</sup>を用いて最小2乗法によって  $\lambda$  および  $x_0$  を各データ・グループに対して決定し、ワイブル確率紙上にプロットしたものが図1.4.2 および図1.4.3である。この場合には  $\lambda$  および  $x_0$  の平均値は  $\bar{\lambda} = 2.90$ ,  $\bar{x}_0 = 0.0117$  mm となる。

## (2) 統計的パラメータの推定

物理的パラメータ  $\lambda, \varepsilon$  を前小節の方法で推定すると、最尤法による推定の対象となる未知パラメータは  $C_n$  の分散  $\sigma_C^2$  と  $C_n$  の空間的相関距離に相当する定数  $\xi_0$  の2つであるが、これらは常に積の形で現れるので、実際には  $\xi_0 \sigma_C^2$  の1つを推定すればよい。従って、式(1.4.14)から最尤方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial (\xi_0 \sigma_C^2)} = -\frac{K}{2} \frac{1}{\xi_0 \sigma_C^2} + \frac{2\lambda + 1}{4\lambda^2} \frac{C}{(\xi_0 \sigma_C^2)^2} = 0 \quad (1.4.18)$$

$$C \equiv \sum_{k=1}^K \left\{ \left\{ x_{k-1}^{-\lambda} - x_k^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)} (n_k - n_{k-1}) \right\}^2 / \left\{ x_{k-1}^{-(2\lambda+1)} - \left( x_{k-1}^{-\lambda} - \lambda \varepsilon Z_0^{2(\lambda+1)} N(n_k - n_{k-1}; x_{k-1}) \right)^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \right\} \right\} \quad (1.4.19)$$

与えられ、これを解くことにより、 $\xi_0 \sigma_C^2$  の最尤推定値  $(\xi_0 \sigma_C^2)^*$  として、次のような表式を得る。

$$(\xi_0 \sigma_C^2)^* = \frac{(2\lambda + 1)C}{2K\lambda^2} \quad (1.4.20)$$

このように、式(1.4.19)、式(1.4.20)に疲労き裂進展過程の1つの実現と見なされる1組のき裂進展曲線の観測データを代入するだけで、非線形尤度方程式(1.4.15)を数値的に解くという手順を経ずに、最尤推定値を数値評価することができ、本手法は実用的観点から非常に有用なパラメータ推定法であると考えられる。

以上、本節では確率論的破壊力学を基礎として、マルコフ近似手法を用い陽表的に導出されたき裂進展過程の確率モデル(Tsurui-Ishikawaモデル)を応用して、その中に含まれる未知パラメータの実用的な推定手法を明らかにし、構造部材の信頼性解析や余寿命の確率的性質の解明への応用可能性について示唆した。荷重を確定値とした場合には、推定すべきパラメータは物理的パラメータである  $\lambda, \varepsilon$ 、場合によっては初期

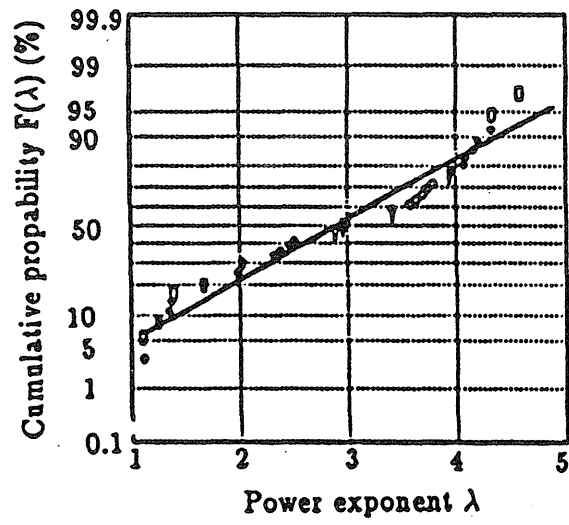


図1.4.2 指数  $\lambda$  の推定値のばらつき

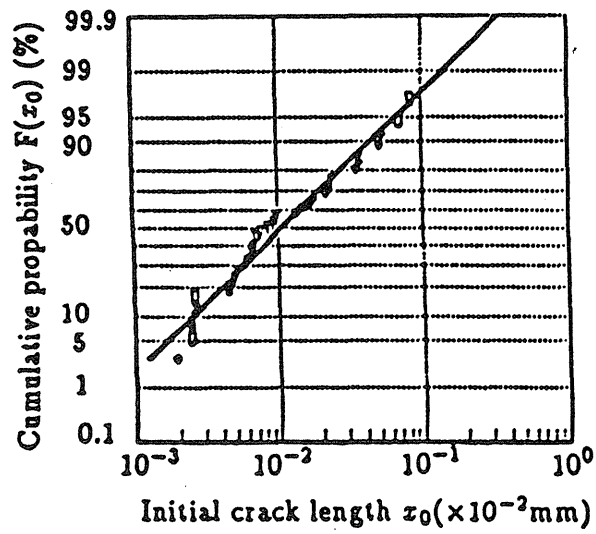


図1.4.3 初期き裂長  $x_0$  の推定値のばらつき

き裂長 $x_0$ 、および材質の不規則性に係わる統計的パラメータ $\xi_0, \sigma_C^2$ である。前者は $da/dN-\Delta K$ 関係のデータもしくは定応力振幅疲労試験結果の $S-N$ 曲線を用いて推定し、後者は常に積 $\xi_0 \sigma_C^2$ の形で表れるので、これを最尤法によって推定すれば、複雑な尤度方程式を数値解析することなく非統計的データから簡便に推定することができる、その結果を直ちに余寿命予測や信頼性解析に応用することができる。

## 1. 5 おわりに

本研究においては、機械・構造物の破壊の主要因である疲労現象に関連して、疲労損傷の累積過程の解析には疲労き裂進展が重要であり、このき裂進展は近年発展してきた破壊力学を用いたモデル化が有効であることを示した。さらに、耐疲労信頼性研究に際しては、確率論的破壊力学に基づく疲労き裂進展モデルが不可欠であり、とりわけ”死点を考慮したマルコフ近似モデル (Tsurui-Ishikawa's model)” が理論的根拠が明確で、解が陽表的に求められており、なおかつ利用し易いものであることを示すとともに、そのモデルに現れるパラメータの予測手法を明らかにした。本結果は直ちに種々の信頼性解析への応用が可能であり、工学的に極めて有用である。

## 参 考 文 献

- (1.1) 鶴井 明, 石川 浩, 「定常不規則荷重に対する疲労き裂進展寿命分布の理論的考察」, 日本機械学会論文集, 51巻461号A編 (1985), p.31.
- (1.2) 石川 浩, 鶴井 明, 「進展抵抗の不規則性を考慮した疲労き裂進展過程の確率モデル」, 日本機械学会論文集, 50巻454号A編 (1984), p.1309.
- (1.3) 鶴井 明, 石川 浩, 「疲労き裂進展に伴う部材信頼度の低下について」, 日本機械学会論文集, 51巻461号A編 (1985), p.31.
- (1.4) Tsurui, A. and Ishikawa, H., "Application of the Fokker-Planck Equation to a Stochastic Fatigue Crack Growth Model", Structural Safety, Vol.4(1986), p.15, Elsevier.
- (1.5) 鶴井 明, 石川 浩, 内海明博, 佐古 彰, 「形状効果を勘案した疲労き裂進展過程の確率モデル」, 材料, 35巻(1986), p.578.
- (1.6) 田中泰明, 鶴井 明, 石川 浩, 「疲労き裂進展過程における不確定要因の相乗効果」, 材料, 35巻(1986), p.1385.
- (1.7) Tanaka, H. and Tsurui, A., "Reliability Degradation of Structural Components in the Process of Fatigue Crack Propagation under Stationary Random Loading", Eng. Frac. Mech., Vol.27(1987), p.501.
- (1.8) Ishikawa, H., Turui, A. and Kimura, H., "Stochastic Fatigue Crack Growth Model and Its Wide Applicability in Reliability-Based Design", CJMR, Vol.2(1987), p.45, Elsevier.
- (1.9) 鶴井 明, 田中泰明, 半楕円型表面き裂進展の確率論的解析, 材料, 37巻(1988), p.996.
- (1.10) Tsurui, A., Tanaka, H. and Tanaka, T., "Probabilistic Analysis of Fatigue Crack Propagation in Finite Size Specimens", Prob. Eng. Mech., Vol.4(1989), p.120.
- (1.11) Tada, H., "A Note on the Finite Width Corrections to the Stress Intensity Factor", Eng. Frac. Mech., Vol.3(1971), p.345.
- (1.12) Paris, P. C. and Erdogan, F., "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws", Trans. ASME, Ser. D, Vol.85(1963), p.528.
- (1.13) 石川 浩, 鶴井 明, 確率的破壊力学に基づく機械・構造物の信頼性評価法, KAGAWA TECHNO, No.90-1(1990), pp.3-32.

- (1.14) Ishikawa, H., Tsurui, A., Tanaka, H. and Ishikawa, Hide. "Reliability Assessment of Machines and Structures Based upon Probabilistic Fracture Mechanics", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.8, No.1, (1993), pp.43-56, Elsevier Science Publishers Ltd., Essex, England.
- (1.15) 橋梁構造物の実用的信頼性設計手法の開発業務（その1）報告書, (1990), p.237, 阪神高速道路公団・日本材料学会.
- (1.16) Ishikawa, H., Tsurui, A. and Ishikawa, Hide., Some Aspects of Structural Reliability Assurance for Random Excitation Processes, JSME International Journal, Series I, Vol.32(1989), p.463.
- (1.17) 日本材料学会編, 金属材料疲労き裂進展抵抗データ集, Vol.1, (1983), p.3, 日本材料学会.
- (1.18) 田中道七編, 金属材料疲労強度データ集, Vol.1, (1982), p.9, 日本材料学会.



## 2. 構造モニタリングに関する実験的検討

### 2. 1 疲労損傷モニタリングに関する実験

船舶や海洋構造物の構造解析や設計手法は日々進歩しているが、疲労損傷箇所を的確に予測して合理的な疲労設計が行えるにはなかなか至らない。その理由は疲労メカニズムの複雑さと、外力や構造解析に関与する種々の不確実性要因によると考えられる。このような状況下において一層の安全性を確保しようとする場合、保守点検や構造損傷モニタリングなど使用中の安全管理を強化するのが有効と考えられる。

これには図2. 1に示す2通りの方法が考えられる。一つは構造物中の実在亀裂を検出する方法（異常感知法）で、使用中検査や亀裂モニタリング（ヘルスマニタリング、センサーによる聴音）がある。もう一つは構造物の疲労損傷を事前に予知する方法（危険予知法）で、部材の歪み測定、組織の微細観察、部材から切出した微小試験片の残余寿命試験、および実部材より早期に損傷が発生する犠牲試験片取付け法などがある。

このうち、使用中検査はほとんどの構造物で行われており、歪み測定も必要に応じて行われてきた。また、最近、余寿命評価が問題となっているボイラーや重要プラントでは、組織観察、微小試験片の切出し法やAEによるモニタリングも検討されている。

これに対して、ヘルスマニタリングや犠牲試験片の取付け法は、いまだアイデアの段階にある。ヘルスマニタリングは航空機翼や高速道路に光ファイバーを埋め込む研究が、犠牲試験片取り付けは橋梁や海洋構造物で一部実験研究が行われている程度にすぎない。

しかし、ヘルスマニタリングは検査と異なって、常時リモートの異常監視できる点に魅力がある。また、犠牲試験片取り付けは実部材の寿命予測だけでなく、“実機に取付けて疲労試験を行うようなもの”と考えると、実機疲労で問題となる荷重履歴や限界累積被害値に関する有用な情報が得られる可能性がある。また、両者は構造物が将来向かうであろう知能化構造物への接近をめざしている。

以上の考えから、平成6年度は導電フィルム、導電塗料およびプラスチック光ファイバ、ガラス光ファイバおよび炭素繊維束を用いた5種類の亀裂感知センサを試作し、角廻し溶接継手試験片とコンパクトテンション試験片に適用して、亀裂感知特性を検討した。また、平成7年度は疲労損傷予知の観点から、中央亀裂付き平板をエポキシ樹脂に埋め込んだ犠牲試験片を試作した。そして、平板の母試験片に適用して疲労実験を行い、犠牲試験片の性能を実験的に検討した。これらの研究の結果は以下の2つの文献に報告している。

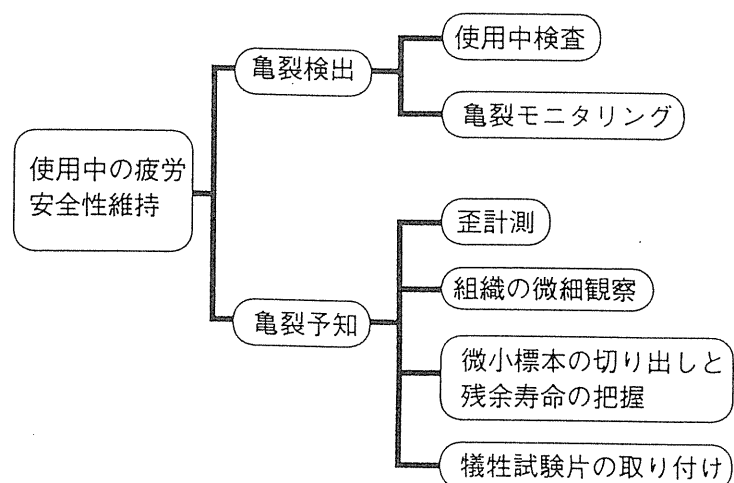


図2.1 構造モニタリングによる疲労損傷の感知と予知

以下の頁は著作権者の許諾を得ていないため、公表できません。

p. 15 ~ p. 33

p. ~ p.

p. ~ p.

p. ~ p.

p. ~ p.

## 2. 2 船体の変形モニタリングに関する考察

構造モニタリングの目的には、”異常感知および異常予知”の他に”情報収集”の目的もある。ヘルスマニタリングや犠牲試験片の取付けは前者に当たり、歪ゲージによる応力モニタリングや、ロイド船級が提案している2m程度の丸棒の伸縮を作動トランスで計測する方法などは後者にあたる。

ところで、船体構造を考えたとき、筆者は構造変形のモニタリングも重要と考えている。それは、以下のような利用方法があるからである。

- 1)航行中の変形をモニタし、船の速度や進路の選択を支援。
- 2)積付けによる船倉変形の監視。
- 3)経年劣化船の新造時との変形の増大傾向を把握し、安全管理に利用。
- 4)たわみ、ねじれなどの測定値を構造解析と比較し、構造解析精度と問題点の解明。
- 5)運行中の船体変形の画像記録のVDR情報としての利用。

船体は長さ、深さおよび幅方向に大きいので、図2. 2のように、運行中の船体位置と変形を高精度測定できないものかと考えている。測定には赤外線、レーザー光、テレビカメラなどを用い、各所に取り付けたマーカーをモニタし、その位置関係から変形量を画像処理で明らかにできないかと考えている。

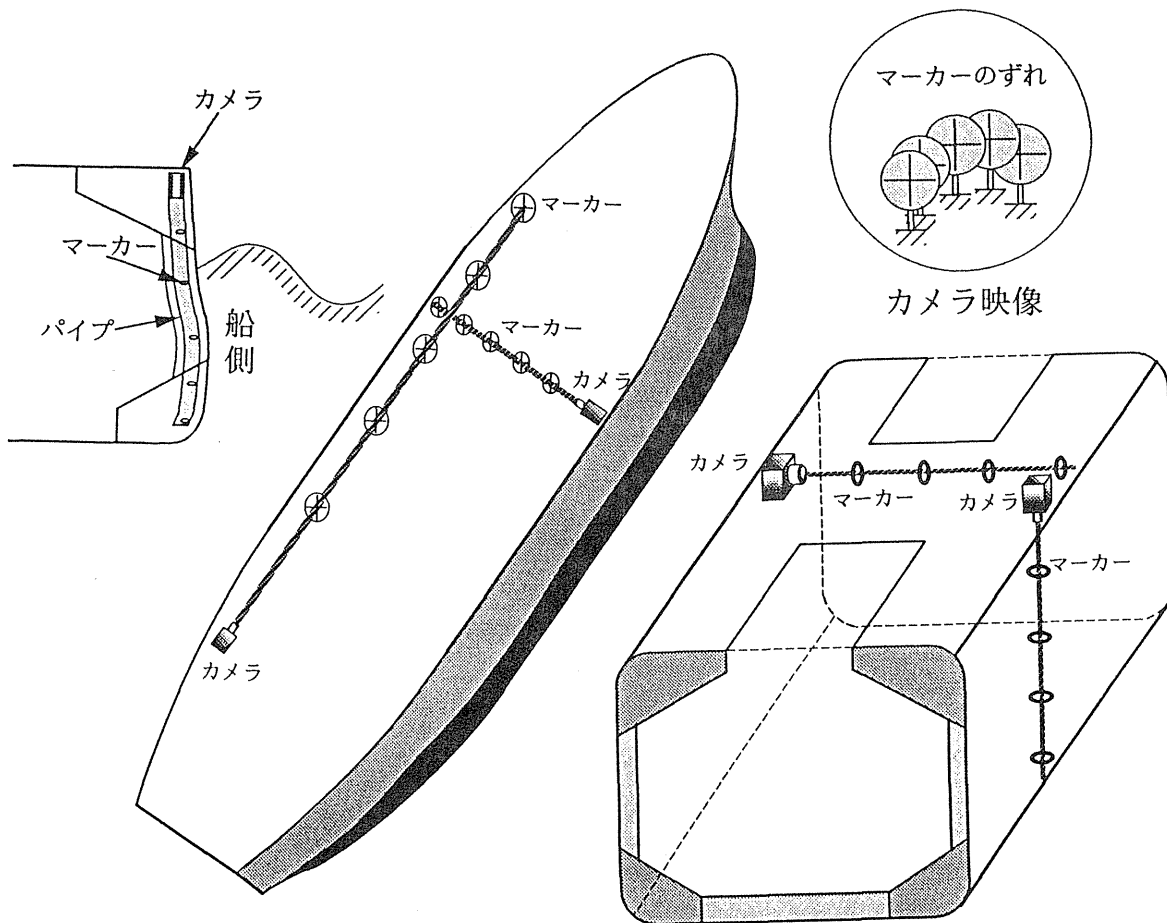
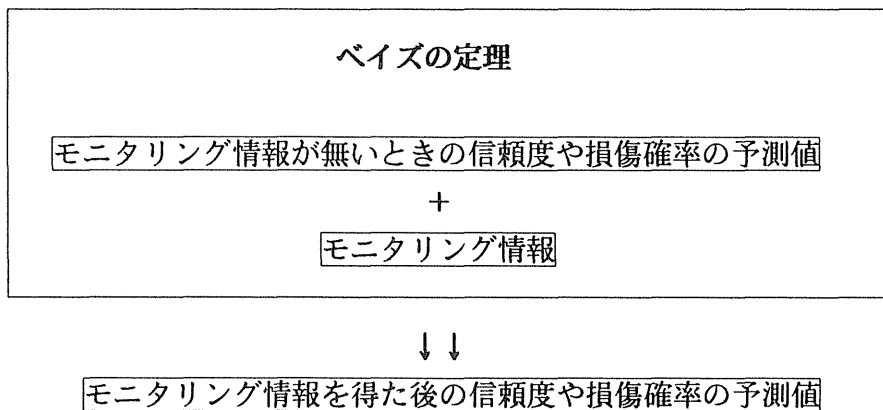


図2. 2 船体変形のモニタリング

岸壁や着底構造から変形をモニタする方法はいくつかあり、例えば、赤外線やレーザ光と反射プリズムを用いた3次元測長システム（勇崎雅朗，造船用3次元計測評価システム，造船学会誌，771号，p. 628, 1993）も開発されている。また，近距離の物体を精密測定する方法はいくつもあるが，遠距離で装置自身が運動し，振動や風などの影響があっても長期間使用できる高精度計測法はあまり無い現状にある。構造物の変形計測には，1)歪ゲージ，ロードセル，作動トランスによる変形の計測，2)オートコリメータ，レーザ光反射による傾斜角度の計測，3)赤外線，レーザ光による距離測定（三角測量型，反射型），4)渦電流，超音波による距離測定（短距離），5)マーカ，発光ダイオードの望遠ビデオ測定，6)加速度計による測定値を積分する方法，などが考えられる。これらの技術を駆使したモニタリング手法の開発と，実船実験を通じた実用化が望まれる。

なお，モニタリング情報があるときと無いときの信頼性や損傷確率の評価は，次式のベイズ手法で検討するのが望ましいと考えられる。



設計時に考えた構造信頼度や損傷確率は，船体の場合相当の曖昧さを有していると考えられる。モニタリング情報を得る毎に，それをベイズの定理に追加情報として与え，初期に考えた信頼性や損傷の可能性のアップデートを行うことができる。これにより，初期の曖昧さを次第に削減していくことができる。その結果，

- 1)主観的に評価している経年劣化度が定量化でき，健全度の客観的差別化が可能になる。
- 2)積付けの監視，船の速度や進路の選択を支援する。
- 3)モニタリング情報を将来の設計や保守管理計画の改善に利用する。

などのメリットが生まれる。もちろん，モニタリングで得られた損傷や異常の情報は，船舶の事故防止と危険回避に利用できるものである。

### 3. 光ファイバセンサによる歪計測

#### 3. 1 干渉型光ファイバセンサによる歪計測実験

##### 3. 1. 1 干渉型センサの回路

光の干渉を利用したセンサの構成は様々であるが、基本的にはまず光源からの光をハーフミラーなどを使って分岐し再びそれらを結合させる形をとっている。結合した際光は干渉するが、測定対象の変化量に応じてその干渉光強度が変動する。この変動を検出することによって、温度・圧力・歪など様々な物理量の測定が可能となる。

##### ・ マッハ・ツェンダ型

光源から出射した光は、光ファイバに入射され、まず光ファイバカプラ1へと進み、ここで二つに分岐される。光ファイバカプラは光を分岐あるいは結合させるもので、研磨形、融着延伸形などいくつかの種類がある。分岐された光の一方は感知用、他方は参照用となってそれぞれのファイバを通り光ファイバカプラ2で再び結合され、干渉する。感知用ファイバが歪を感知すると、その大きさに応じた干渉光強度の変動があるので、これを検出すれば歪の測定ができる。

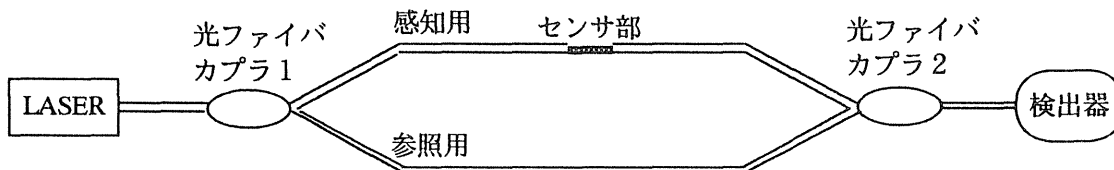


Fig 3.1 マッハ・ツェンダ型

##### 3. 1. 2 光ファイバに生じた歪と位相変化の関係

干渉型の光ファイバセンサは、センサ部に生じた歪による位相変化を干渉光強度の変動として検出する。測定対象が歪でなく温度や圧力の場合でも、それらの対象による位相変化を知ることと同様に考えていくことができる。センサ部の光の位相 $\phi$ は、軸方向の伝搬定数(propagation constant)を $\beta$ 、センサ部の長さを $l$ とすると

$$\phi = \beta l \quad (3.1)$$

である。更に真空中の波数を $k$ 、コアの屈折率を $n$ 、ファイバ中を伝搬する光を軸方向にたいして $\theta$ だけ傾いた平面波と考えると、 $\beta$ は

$$\beta = kn \cos \theta \quad (3.2)$$

となる。しかし光ファイバが単一モードの場合、非屈折率が小さいので $\theta$ も非常に小さくなり(3.2)式は

$$\beta \cong kn \quad (3.3)$$

と近似できる。これを(3.1)式に代入して、

$$\phi = knl \quad (3.4)$$

今、光ファイバに歪が生じ、センサ部の長さが $\Delta l$ 、コアの屈折率が $\Delta n$ 、位相が $\Delta \phi$ だけ変化したとすると、

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta n}{n} \quad (3.5)$$

となる。(3.5)式の屈折率変化 $\Delta n/n$ は

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_p \Delta T + \frac{\delta n}{n} \quad (3.6)$$

と表される。

この右辺第一項は、ガラスの密度変化による寄与である。第二項は光ファイバに生じた歪による屈折率変化を示し、これを光弾性効果という。光弾性効果による屈折率変化 $\delta n$ は、ポッケルス係数 $P_{ij}$ を用いて、

$$\delta n = -\frac{n^3}{2}(p_{11}\varepsilon_1 + p_{12}\varepsilon_2 + p_{12}\varepsilon_3) \quad (3.7)$$

と表せる。ただし、 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ は光ファイバ断面方向歪、 $\varepsilon_3$ は軸方向歪である。そこで、光ファイバの軸方向を $z$ 軸、ポアソン比を $\nu$ とすると、

$$\varepsilon_3(=\varepsilon_z) = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_z \quad (3.9)$$

という関係が得られ、(3.7)式は、

$$\delta n = -\frac{n^3}{2}\{p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})\}\varepsilon_z \quad (3.10)$$

となる。(3.6)式、(3.8)式、(3.10)式を(3.5)式へ代入し整理すると、

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} = \left[1 - \frac{n^2}{2}\{p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})\}\right]\varepsilon_z + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\rho \Delta T \quad (3.11)$$

が得られる。

ここで温度変化 $\Delta T$ を0とし、

$$C = 1 - \frac{n^2}{2}\{p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})\} \quad (3.12)$$

とおくと、

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} = C\varepsilon_z \quad (3.13)$$

(3.4)式を(3.13)式へ代入し、 $\varepsilon_z$ について解くと、

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta\phi}{knl} \cdot \frac{1}{C} = \frac{\lambda}{2\pi nl} \cdot \frac{1}{C} \cdot \Delta\phi \quad (3.14)$$

ただし、 $\lambda$ は真空中の光の波長。

ここで、干渉光強度がちょうど一周期したとき、すなわち位相が $2\pi$ だけ変化したときの歪は、(3.14)式において $\Delta\phi$ を $2\pi$ とすることにより得られ、

$$\varepsilon_z = \frac{\lambda}{nl} \cdot \frac{1}{C} \quad (3.15)$$

となる。

### 3. 1. 3 実験理論とその方法

Fig 3.2には今回行った鋼材の引張り試験用の試験材料に光ファイバセンサと抵抗線歪ゲージを取り付けた様子を示してある。試験片の表面にマッハ・ツェンダ型干渉計の感知用ファイバをはりつけ、その裏側のちょうど同じ位置に取り付けられた歪ゲージは、得られた測定値の比較をするためのものである。

実験はまず初めに同図(a)に示すように光ファイバの二点を粘着テープで止めたもので、続いて(b)に示すように光ファイバを歪ゲージ用の瞬間接着剤で接着したもので行った。接着する際には、より正確な計測をするために光ファイバのジャケットの部分(primary coating)を剥してクラッドをむき出しの状態にした(同図(c))。これは光ファイバに歪が生じたときにジャケットとクラッドの間でずれが起こってしまうと、試験片の歪がコアまで伝わらないことがあると予想されるからである。

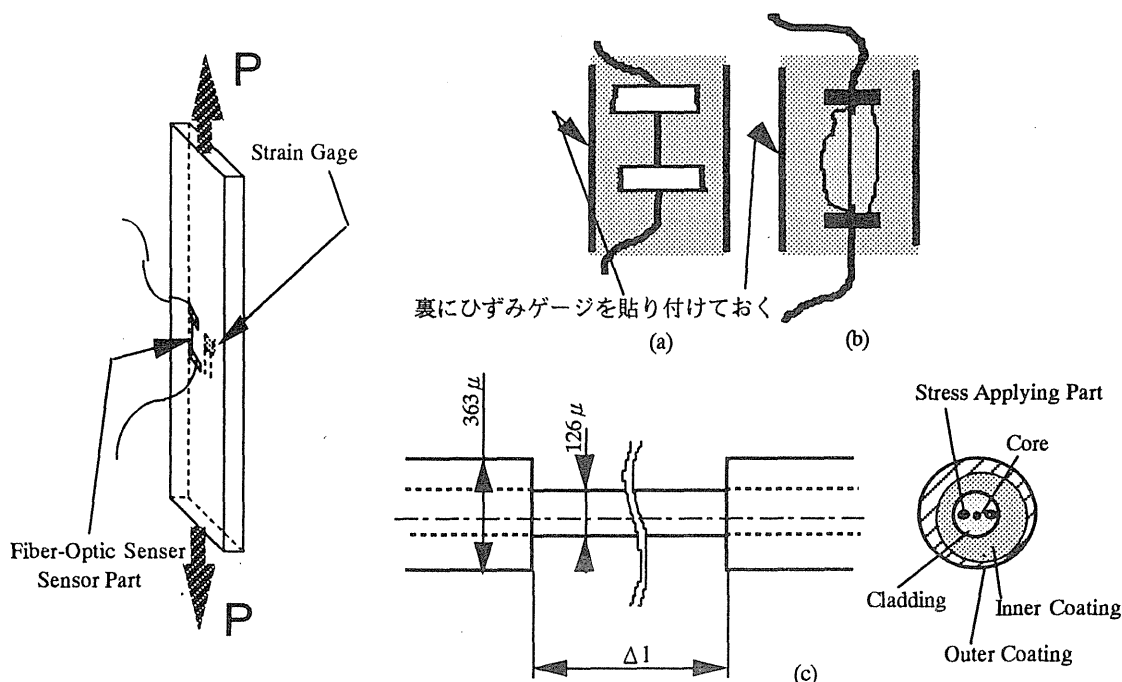


Fig 3.2 光ファイバセンサ取り付けの様子

干渉型光ファイバセンサでは、参照用ファイバと感知用ファイバの長さの差 $\Delta L$ とそれに伴う屈折率変化 $\Delta n$ により干渉する二つの光の位相が変わって、得られる光強度出力が変化する。今回の歪計測実験では、試験片とそれに張り付けられた感知用ファイバのセンサ部の受ける歪が等しいと考えているので、センサ部が歪を受けて、その伸びによって位相が $2\pi$ だけ変化すれば得られる光強度出力は一周分だけ明暗を繰り返すことになる。従って同じ方向のひずみが与えられ続けると、光強度出力には歪速度に応じた周期的な明暗が現れ、その繰り返し数と先の(3.12)、(3.15)式にセンサ長さ及びTable 3.1に示した各パラメータを代入して求めた数値（一周分の歪に相当する）とによって試験片に生じた歪を算出することができる。(3.12)式よりCの値は、

$$C = 0.781 \quad (3.16)$$

となり、これを(3.15)式に代入し整理すると、干渉光強度の変化一周分に相当する歪の大きさはセンサ部の長さ $l$ を用いて、

$$\varepsilon_z = 1.14 / l \times 10^{-6} \quad (3.17)$$

となる。また、試験片の寸法、光ファイバセンサのセンサ長をTable 3.2に示しておく。

Table 3.1 Fiber Parameter List

Fiber Parameter	Symbol	Value
Refractive Index	$n$	1.46
Poisson's Ratio	$\nu$	0.164
Pockels' Constants	$P_{ij}$	$P_{11}=0.121$ $P_{12}=0.270$
Wavelength	$\lambda$	$1.3 \mu\text{m}$

Table 3.2 試験片サイズおよび光ファイバセンサのセンサ長

Specimen	Material	Steel
	Cross Section Area (width $\times$ thickness)	$97.9\text{mm}^2$ $(29.93 \times 3.27)\text{mm}^2$
	Young's modulus	$21000 \text{ kgf/mm}^2$
Fiber Sensor's Gage Length		26.5 mm

### 3. 1. 4 実験系装置

Fig 3.3に装置の様子を示した。実験の際には試験機の前後をビニールシートで覆い、風の影響を受けにくいように配慮した。Fig 3.4は系全体の概略図である。

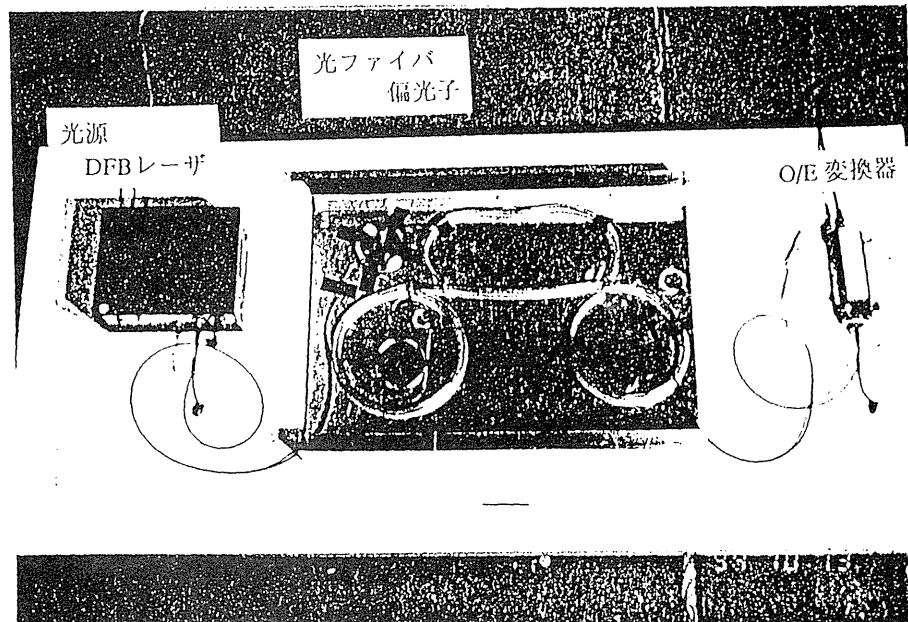
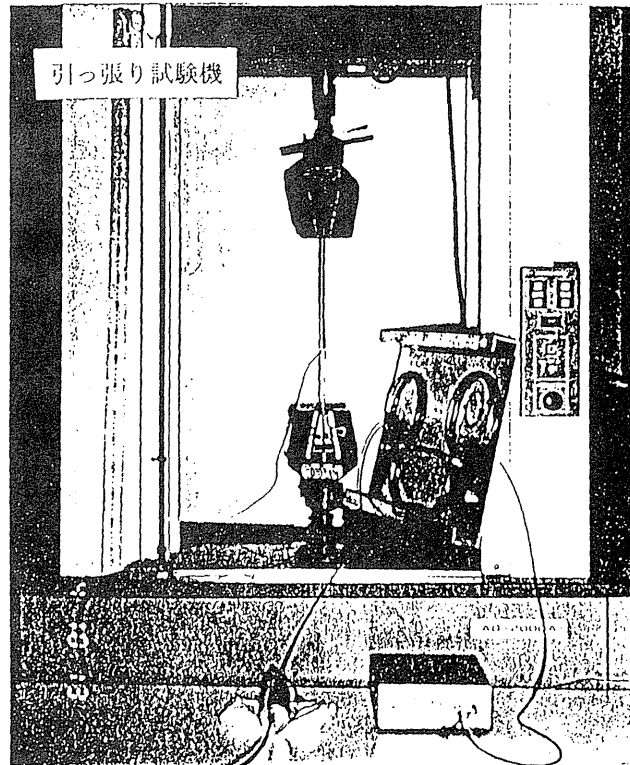


Fig 3.3 光ファイバセンサによる引っ張り試験



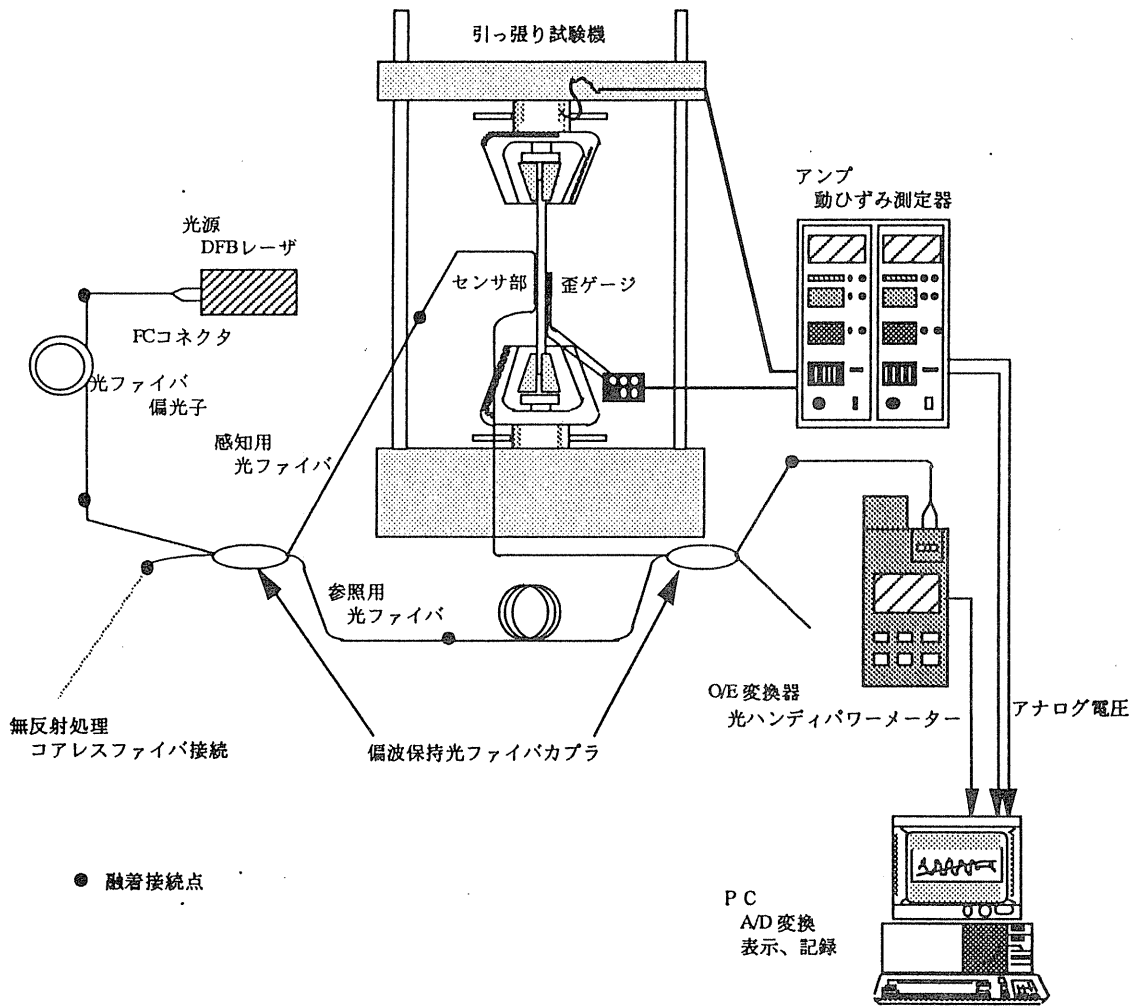


Fig 3.4 実験系装置概略図

次に回路の中にある無反射終端について説明する。

通常光ファイバの終端では、伝搬してきた光の多くがそのまま透過してしまうが、一部の光は端面で反射して光ファイバの中を戻っていき、干渉によって得られる光強度変化に影響を及ぼす。そこで今回の実験系の心臓部（マッハ・ツェンダ型干渉計）では使用しない光ファイバの終端に無反射処理として導波路構造を持たない光ファイバ（以降、コアレスファイバと称する）を接続している。

導波路構造を持たないとは、コアが存在しないということで、このような光ファイバでは入射したどんな光もすぐに漏洩してしまう（Fig 3.5）。コアレスファイバを終端に接続すれば、コアレスファイバ端に反射点が存在しても反射点まで光が到達できないので、結果として無反射終端が実現できる。Fig 3.6は通常のSMファイバに石英のみでできた光ファイバを融着接続し、終端をファイバカッターで直角に切断したものに波長 $1.3\mu\text{m}$ の光を入射したときの反射減衰量とコアレスファイバの損失をその長さを変化させて測定した結果である。これによると反射減衰量50dBを達成するためには、コアレスファイバ長は200mm程度あればよいことになるが、コアレスファイバはファイバの曲がりに対して非常に敏感なため、軽い曲げが入るだけで反射は更に小さなものになる。従って、実際には100mm程度のコアレスファイバを融着して少し曲げて固定するだけで十分な特性が得られる。

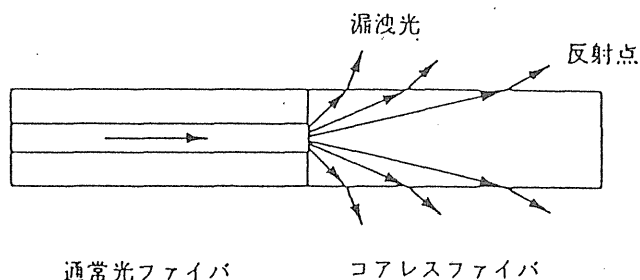


Fig 3.5 コアレスファイバ無反射終端の原理  
射終端

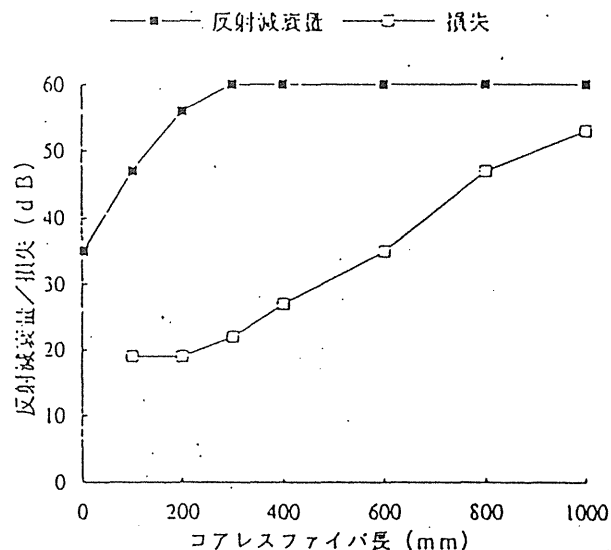


Fig 3.6 コアレスファイバ無反

### 3. 1. 5 結果及び考察

Fig 3.7は試験片に光ファイバのセンサ部をテープではり付けて試験を行ったときに得られた干渉光強度の荷重に対する変化の様子をグラフにしたものである。初めのうち振幅が等しく周期的であった波形が途中から乱れているのは、センサ部をテープではり付けているために光ファイバと試験片の間ですべりが生じたからである。Fig 3.6はセンサ部をテープではなく接着剤ではり付けたときの干渉光強度変化の様子である。光ファイバと試験片との間にすべりが生じないので出力波形は荷重を止めるまで乱れずに続いている。出力波形と荷重の時間に対する変化を示したのがFig 3.9で、荷重を増やす時と減らす時で同じ様な波形が見られる。測定したセンサ長(26.5mm)を(3.17)式に代入して、出力波形の一山に相当する値を求めると $43.0\mu$ であった。この歪に光強度変化の山の数をかけて求めた試験片の歪を歪ゲージによるものと比較したグラフがFig 3.10であり、横軸に歪、縦軸に荷重をとっている。

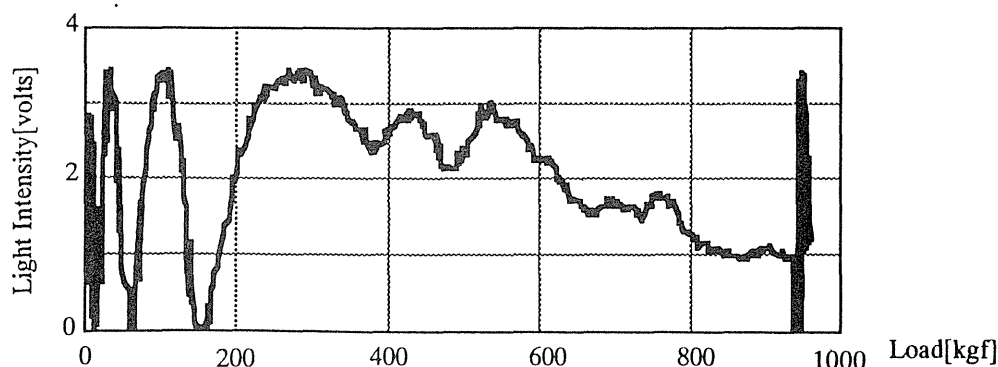


Fig 3.7 荷重に対する干渉光強度の変化 (テープ)

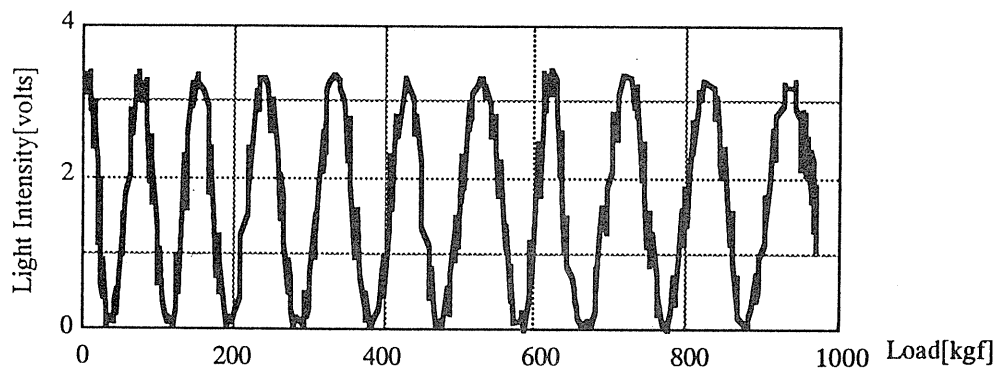


Fig 3.8 荷重に対する干渉光強度の変化 (接着)

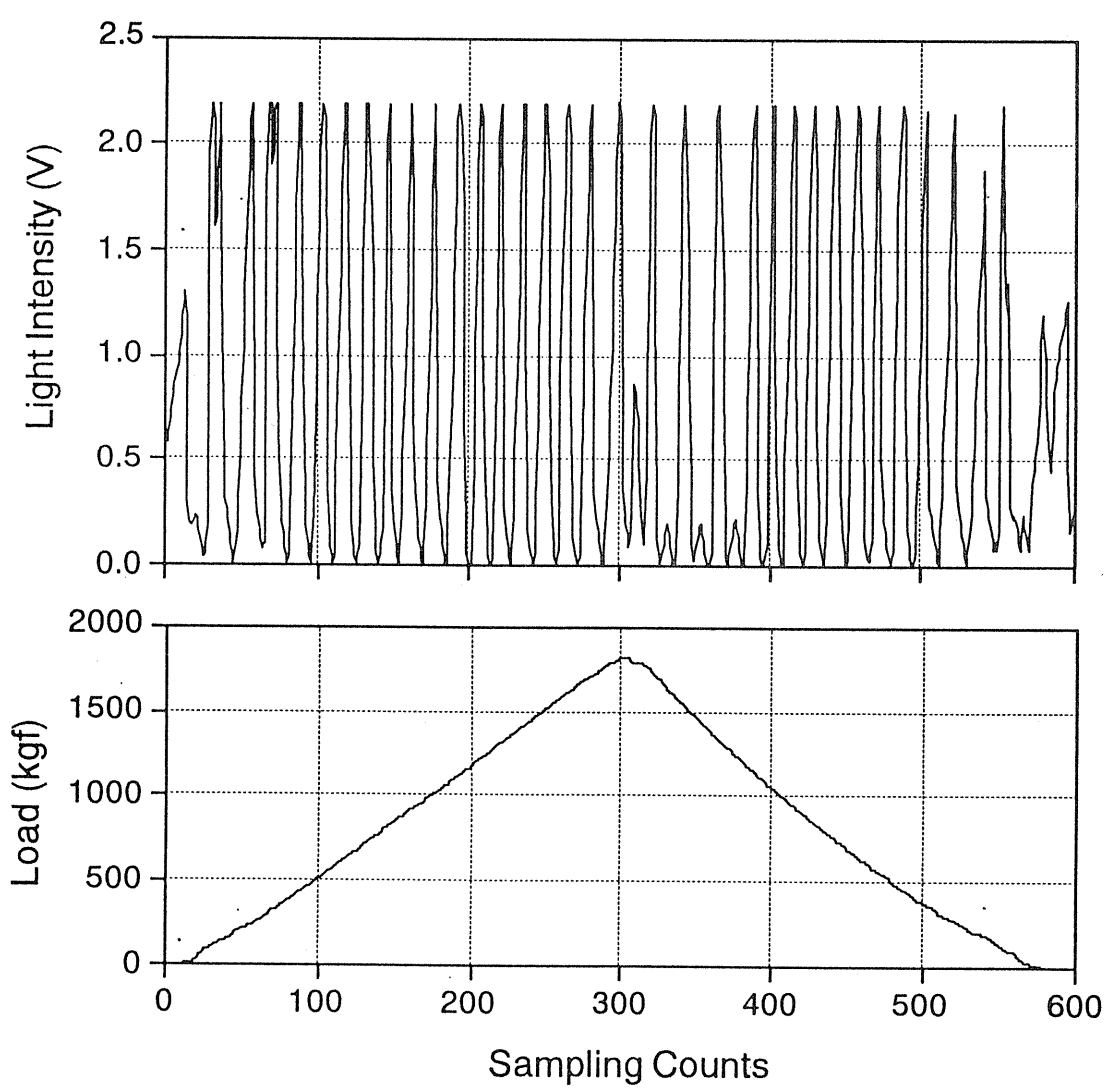


Fig 3.9 Graph of Realtime Data(0~1800kgf)

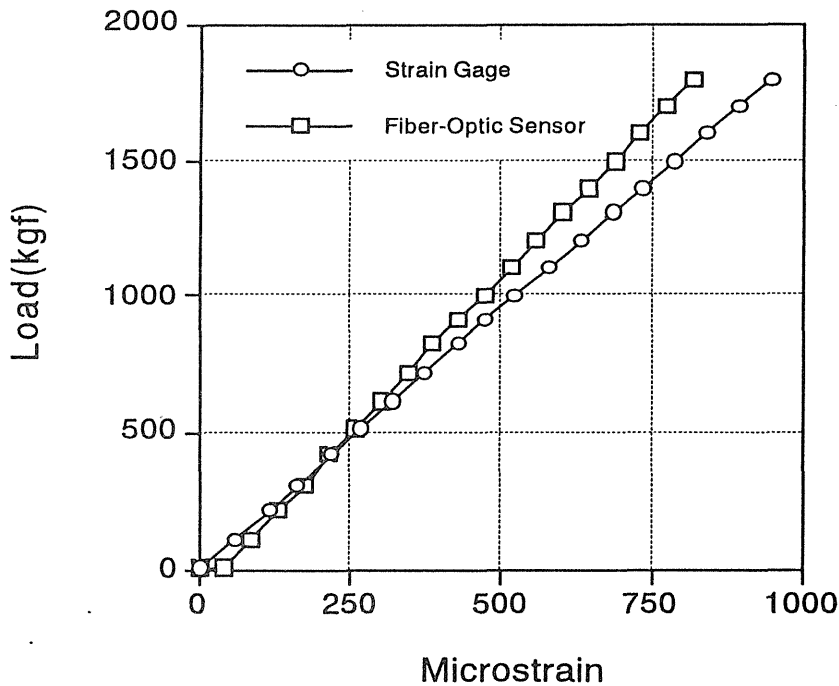


Fig 3.10 Load vs. Microstrain (0~1800kgf)

このグラフを見ると、まず光ファイバセンサによる歪は荷重をかけ始める前から既に生じているように見える。これは干渉光強度出力が荷重一定時（無荷重時を含む）でも安定していないからで(cf. Fig 3.9)、その原因として主に考えられるのは、試験機の振動、温度変化、レーザの出力変動である。温度変化による光出力の変動は比較的低い周波数で起こり、振動及びレーザの出力変動による光出力の変動は高い周波数であると思われる。また、グラフより光ファイバセンサと歪ゲージでは明らかにその傾きが異なっているのが分かるが、両者の受ける歪はその貼り付け方法から等しいと考えられる。歪ゲージによる計測結果が多少の誤差はあるにしろ正確であるとすれば、光ファイバセンサによる歪は実際よりも小さくでていることになる。光ファイバセンサによる結果もほぼ直線上になっていることから、干渉光強度の波形の一山に相当する歪の値を校正すれば歪ゲージの値と近いものが得られると予想される。校正方法として縦軸に荷重、横軸に歪をとったときの傾きを光ファイバセンサと歪ゲージの両方について最小二乗法により求め、光ファイバセンサによる歪が歪ゲージによる歪と合うように一山の値を換算した。その結果、6回の試験で換算した値に多少のばらつきが見られたが、その平均値は一山あたり $49.6 \pm 0.7 \mu$ であった。

このようにして、零点を合わせて傾きを校正したグラフがFig 3.11である。これを見ると光ファイバセンサによる計測結果は、歪ゲージのものと近い結果となり、歪ゲージに対する誤差は最大で4.4%となった。

光ファイバセンサによる歪が実際よりも小さかった原因としては、歪と位相の関係を知るために使った理論式もしくはそこで用いた定数や測定値に不適切なものがあったことが考えられる。理論式では導波路分散(waveguide dispersion)による寄与を省略しているが、この影響は無視できることが文献によって報告されている。理論式に用いた定数・測定値には、屈折率、ポアソン比、波長、ポッケルス係数、センサ長がある。このなかで実際に測定したセンサ長が正確でなかったとすると、26.5 mmであった所を22.8mmに直せば歪ゲージによる計測結果に近づく。測長の際に4mm近くも測り間違えることはないが、試験片についての接着剤の縁2mmぐらいつながりが弱く、ここですれが起るようなことがあれば、この程度の誤差が出ることも考えられる。また、定数(係数)では、屈折率、ポアソン比、波長は信頼できる値であり、仮にこれらの値

が正確でなかったとすると、屈折率は1.46である所を2.39か1.13に、ポアソン比は0.164である所を $-9.65 \times 10^{-2}$ に、波長は $1.3 \mu\text{m}$ である所を $1.51 \mu\text{m}$ に変えなければならず、これだけ大きく異なるとは考え難い。しかし、使用波長と物質によって異なるポッケルス係数については関係論文が非常に少なく、石英ファイバの波長 $1.3 \mu\text{m}$ における値は残念ながら今回までに知ることができなかったので、現在分かっている波長 $0.546 \mu\text{m}$ における値を利用した。このポッケルス係数は二つの独立した値であるので、傾きを合わせるためにはFig 3.12の直線上の任意の一点を選べばよいことになる。

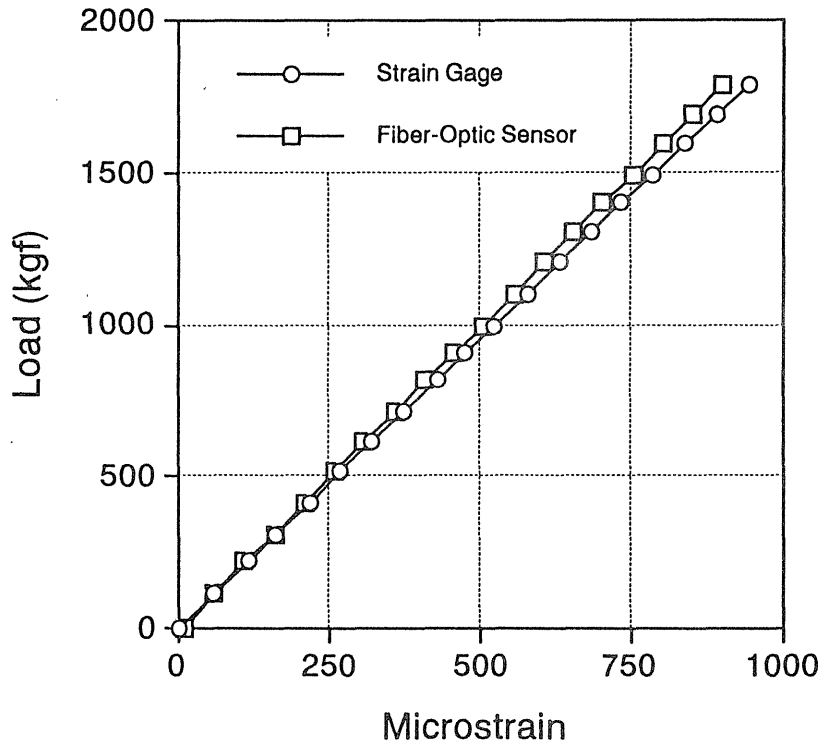


Fig 3.11 Load vs. Microstrain (0~1800kgf)

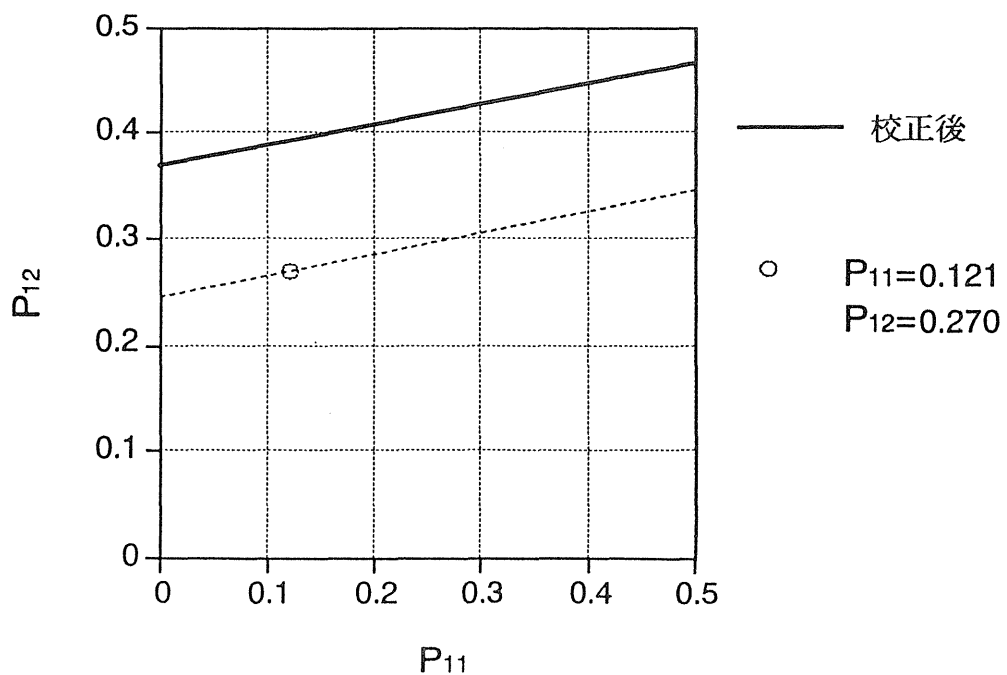


Fig 3.12 ポッケルス係数の校正値

### 3. 2 歪方向感知式マッハ・ツェンダ型センサによる歪計測実験

#### 3. 2. 1 実験理論とその方法

前節ではマッハ・ツェンダ型干渉計によって実際に歪の測定を行い、それが可能なことを確かめた。しかし先の回路では干渉した光の出力が正弦波状に現れるため、その歪の方向を判断するまでには至っていない。

干渉した光の強度変化は重ね合わせる二つの光の位相差（この場合主にその導波距離・光行路差）に因るので歪が伸びであっても縮みであっても同様の時間に対して周期性を持った波形が現れ、歪が止まれば干渉光の出力は一定となる。つまり試料にかかる荷重がFig 3.13(a)の様であれば干渉光出力は理想的には同図(b)の様になると考えられるわけである。このような出力変化であれば図中時刻 $t_2$ 後に歪の方向が逆になったことが解析可能だが、もし仮に歪の止まった箇所（実際に止まる必要はない）が正弦波状の極小或いは極大点ならばどうだろうか(cf 同図(c))。このような変化では時刻 $t_2$ 後に歪が逆になったのかそれとも更に進んだのか判断はつけられない。

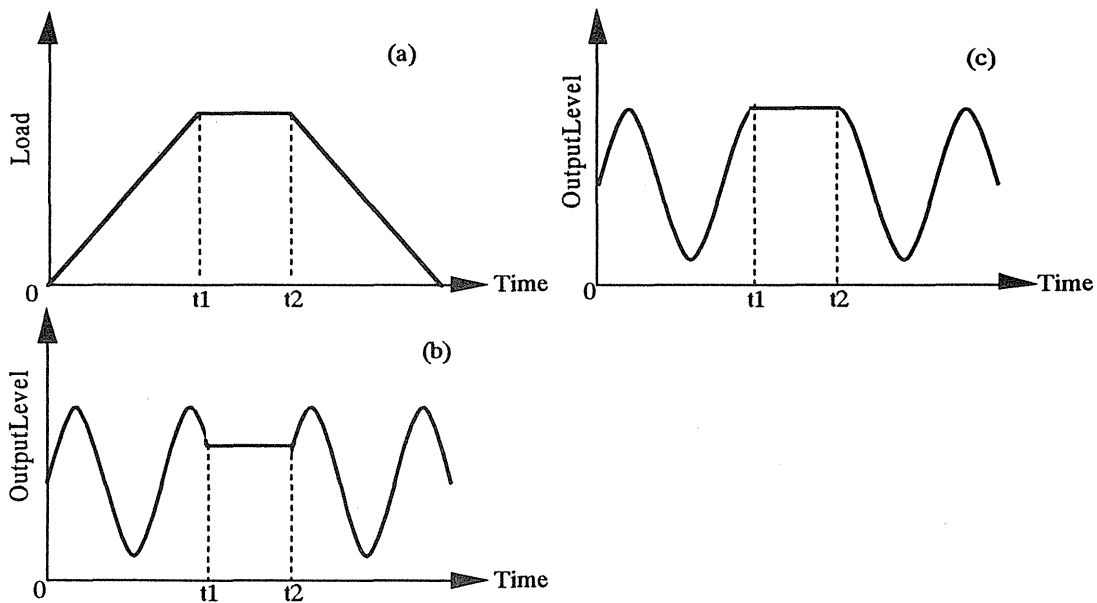


Fig 3.13 荷重と干渉光出力の関係

この歪の方向を判断するために、干渉させる二つの光に次のような操作を行う。

(1)感知用・参照用の両信号をそれぞれ更に二つずつに分ける。(2)二つに分けた参照用信号の一方を $1/4$ 波長分だけずらす。(3)感知用・参照用信号を一つずつ取り出して干渉させる。このような操作によって、得られる二つの出力も $1/4$ 波長分ずれたものとなる(cf. Fig 3.14)。これら二つの出力が同時に得られれば、それらの位相関係の変化からどちらか一方の極小（大）点で歪の停止、その進行方向の逆転があっても、他方の出力結果から歪の方向の判断が可能となる(cf. Fig 3.15)。

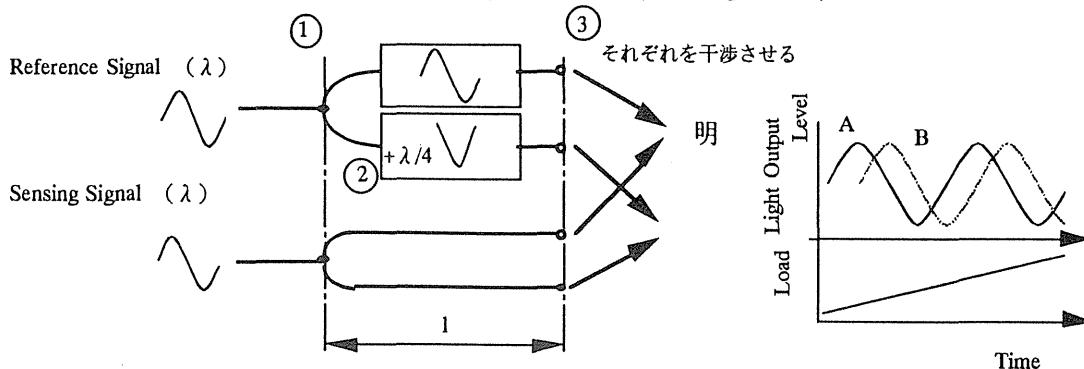


Fig 3.14 光信号の操作

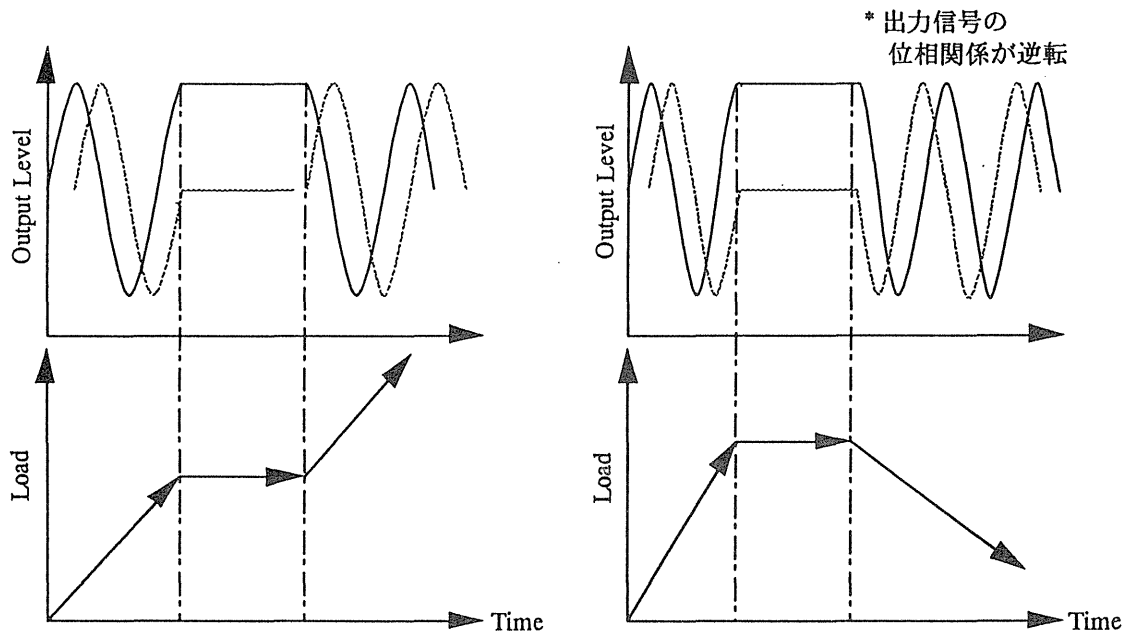


Fig 3.15 荷重と干渉光出力の関係 (2出力)

しかし、この理論をそのまま実験装置で実現するには参照・感知両信号を更に分岐させる点から干渉させる点までの四つの導波路の長さ (Fig 3.14 中の  $l$ ) を厳密に等しくする必要がある。これは技術的にも非常に困難であり、またその為には相当の時間と費用、人員がかかると思われる。そこで今回は Fig 3.16 の様な回路を a、b、c、d が大体同じ長さになるように組み立て、Output 1, 2 の位相差が半波長の整数倍である可能性は低いとして前回と同じ手法で実験を行った。

試料についてのデータを Table 3.3 に示しておく。

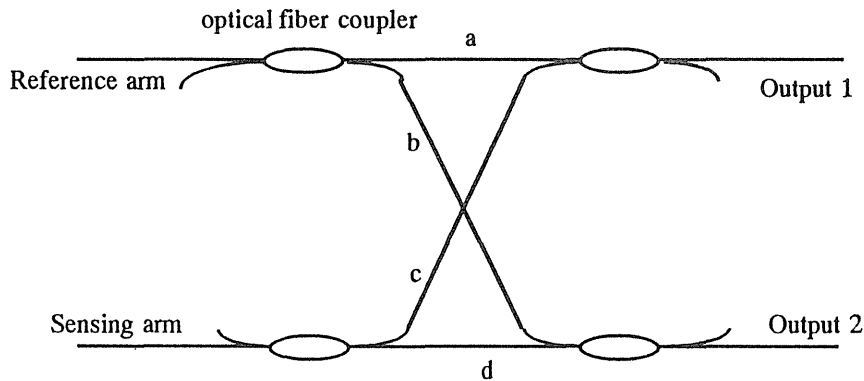


Fig 3.16

Table 3.3 試験片サイズ及び光ファイバセンサのセンサ長

Specimen	Material	Aluminum
	Cross Section Area (width × thickness)	50.0 mm <sup>2</sup> (10.0 × 5.0) mm <sup>2</sup>
	Young's modulus	7300 kgf/mm <sup>2</sup>
Gage Length		29.5 mm

### 3. 2. 2 実験結果と考察

この実験では歪の方向を感知することが主な目的であるので、試験片にはFig 3.17に示すような途中で歪の方向が停止・変化する荷重を加えた。その時の二つの干渉光強度の出力結果をFig 3.18に示す。この図より位相のずれた二つの波形が見て取れ、荷重が加わっている時間帯と止まっている時間帯の識別も可能である。また、歪速度が速いほど波形の振幅が小さくなっていることも分かる。この現象は歪速度に比べてサンプリング周期が長いときに起こると考えられ、歪速度の増加とともに一周期にかかる時間が短くなり、その間のサンプリング回数が減るために起こる。このような状態になると、周期のカウントをするプログラムにおいてデータ間の増減が正しく読み取れないことや、基準となるデータが二つのサンプリングデータの間にならないことがあり、正確な周期の回数が数えられなかった。この対策としては、センサ長を短くしてセンサの感度を鈍らせ一周期にかかる時間を長くしたり、カウントするときの基準のデータを光出力の振幅の中心付近に設定して小さな振幅に対応できるようにすることなどが考えられる。更に歪の方向を感知するという点についてもうまく判断できるときと出来ないときがあり、100%感知するにはプログラムにまだ多くの改良の余地があると言える。歪方向の判断がうまくいかなかった原因としては、同じ時間のデータとしていても各チャンネルをサンプリングするのに若干の時間差があることと、荷重の停止時に光出力が安定しないことが考えられる。これを改善するにはプログラム中のデータ処理の効率を良くするなどしてその時間差を短くする必要がある。

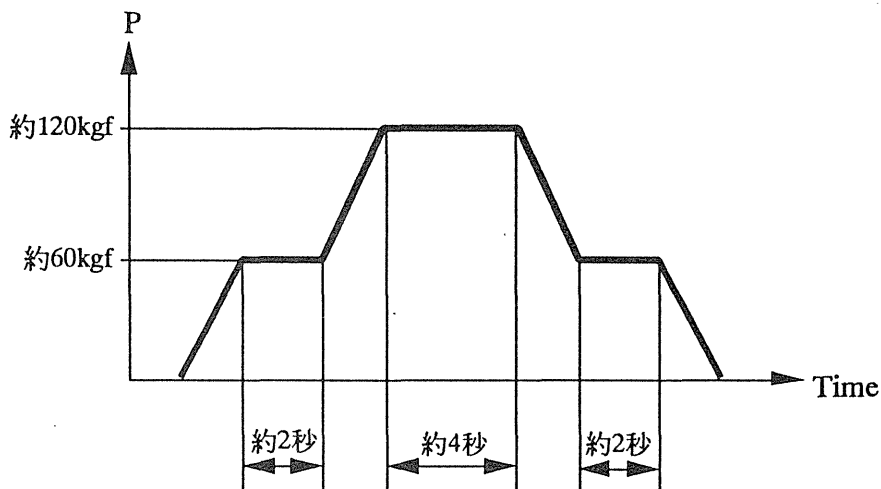


Fig 3.17 試験片に与えた荷重

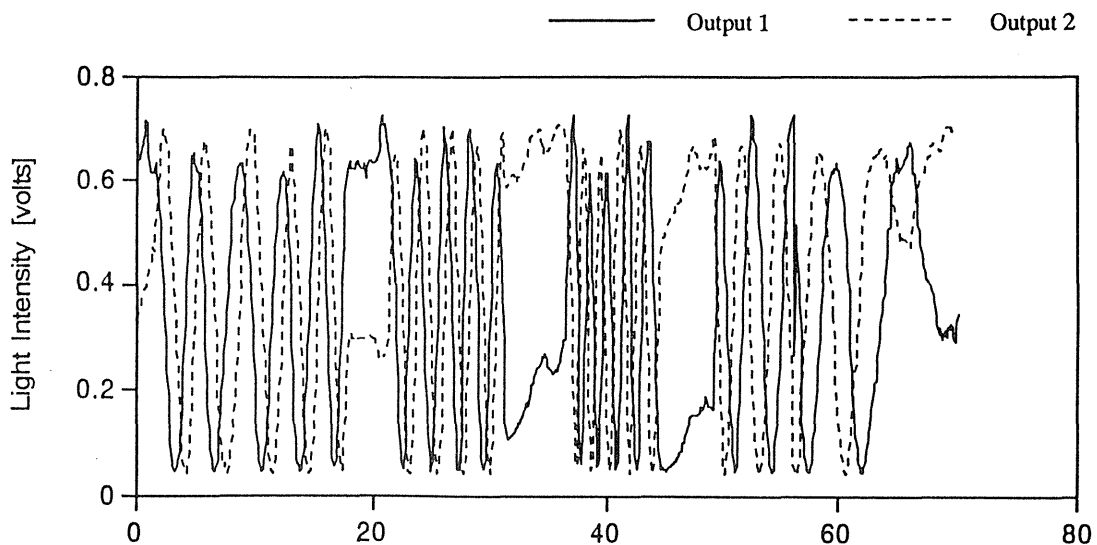


Fig 3.18 干渉光出力結果

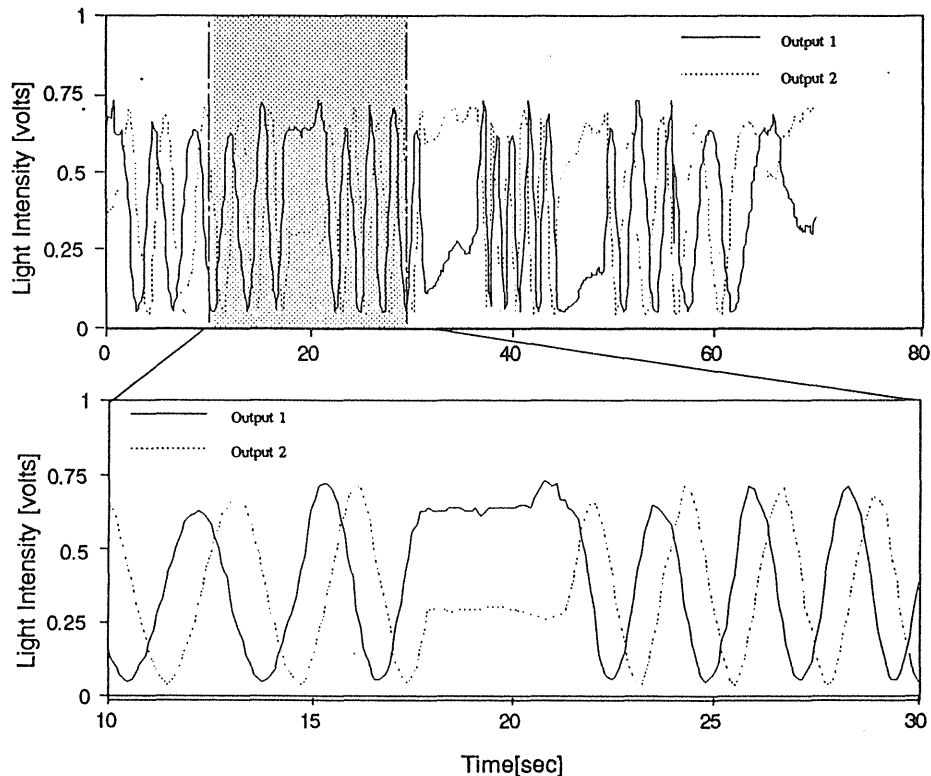


Fig 3.18では出力波形がつまりすぎていて見にくいのでFig 3.19にその一部を拡大して示す。今回作成したプログラムでは歪の方向を判断することが出来なかったが、この図を見ると歪の方向の変化をOutput1とOutput2の順序が変わったかどうかから読み取ることが出来る。つまりOutput1と2の順序に荷重停止前後で変化がないときは歪の向きにも変化はなく（同図(1)）、その順序が入れ替わったときは歪の向きも変わっている（同図(2)）。

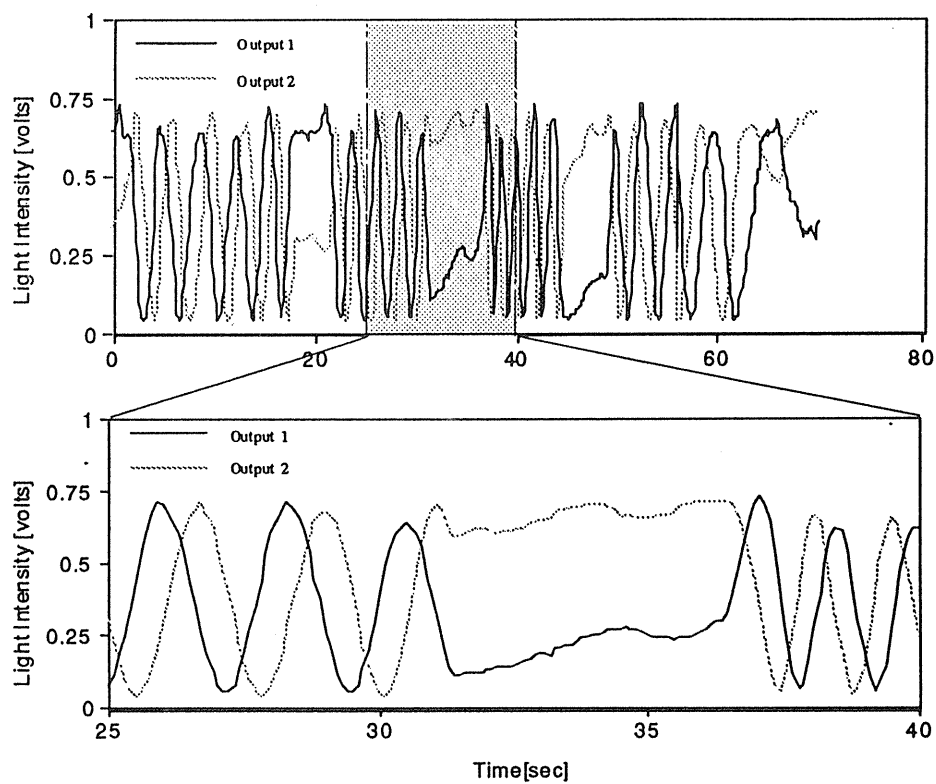
Fig 3.18やFig 3.19に挙げた結果では、二つの光出力の位相差は適度にずれていて、歪の方向の判断の目安となり得るが、このずれの大きさは実験を行う度に多少異なり、二つの出力波形のピークがちょうど重なることや、半周期だけずれることもあった。このようなことはFig 3.16において光ファイバaとcを通る光の位相差 $\Delta\phi_1$ とbとdを通る光の位相差 $\Delta\phi_2$ の差 $\Delta\phi (= \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2)$ が $\pi$ の整数倍で表わせる場合に起こり、a~dのファイバのいずれかに位相変調器を取り付けることで避けられる。

Fig 3.20には縦軸に歪、横軸に時間をとったグラフ上で光ファイバセンサによる歪を歪ゲージのものと比較した結果を示してある。ここで光ファイバセンサによる歪の算出は、Fig 3.12の校正後のポッケルス係数の値を用い、センサ長が29.5mmであったので、出力波形の一周期が $44.8\mu$ に相当するとして行った。また、歪の方向はプログラムで知ることが出来なかったので、出力の時間波形から目で読み取った。その結果、前節同様に歪ゲージに近い値が得られた。

以上の結果から、まだ光ファイバセンサの回路やデータ処理プログラムに改良の余地はあるが、歪の方向が判断できる光ファイバ歪センサは実現可能と思われる。



(1) 歪の方向が変わらない場合  
Fig 3.19 干渉光出力の拡大図



(2) 歪の方向が変わる場合  
 Fig 3.19 干渉光出力の拡大図

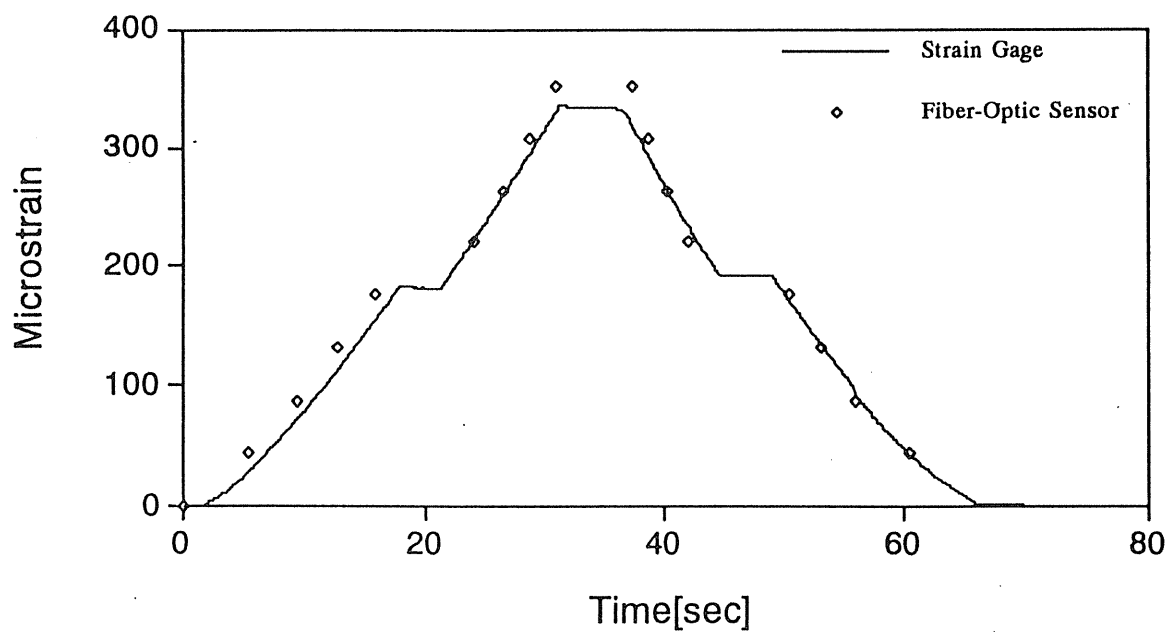


Fig 2.20 光ファイバ・センサと歪ゲージの比較

### § 3. 3 結 言

今回行った歪計測実験によって光ファイバセンサを用いた歪の絶対量測定は可能であることが確かめられたが、幾つかの課題を残す結果となった。

光ファイバセンサを構成する上で最も重要でかつ解決しなければならない点は、測定対象以外の物理量による外乱の影響である。干渉型のセンサは光の位相差を計測に用いるために、分布型やその他の型のセンサと比較して感度が高いといわれ、さらに本研究で使用したマッハ・ツェンダ型はその中でも特に高感度であるという報告がされている。しかし高感度であるということは同時に温度や振動などによる外乱の影響を受けやすいことを意味し、その影響が干渉光出力を変動させ、測定精度を低下させてしまう。そこで測定精度を高く保つためにできる限り外乱による影響を除去する必要が出てくる。その方法としては、

(a)出力信号を処理して外乱による変動成分を取り除く

(b)光ファイバ干渉計の回路に外乱を受けにくい様な工夫を凝らす

(c)測定対象以外の物理量の変化に影響されにくい新しいファイバの開発が進められているので、そういったファイバを用いる

などが考えられる。特に今回、上記(a)については得られたデータをフーリエ変換及び逆フーリエ変換して外乱による周波数成分の除去を試みたが、歪による干渉光出力の変動は一定でなかったため外乱との境界がはっきりせず、考えていたような良い結果は得ることができなかった。また実際の歪計測においても歪速度が一定であるようなことはまず有り得ず、この方法だけで全ての外乱を除去することは不可能と考えられる。しかしながら、振動の影響やレーザの出力変動の影響と思われる高い周波数の外乱の除去にはある程度有効かと思われた。

また、今回の計測では干渉光出力の明暗の一周期がどれだけの歪に相当するかを算出し、その値と明暗の周期数から歪を求めているので、干渉光出力の変化が一周期未満となるような小さな歪は計測することは出来ない。実際、センサ長が30mmのとき一周期に相当する歪は $44\mu$ 程度となり、この間隔での計測しか行えないことになる。センサ長を長くすることで、その間隔を短くすることはできるが、あまり長くし過ぎると貼り付け部にスペースの問題が生じたり、局部の歪計測が不可能となったりする。このような問題は干渉光出力一周期を幾つかに分割し、それぞれの間隔がどの程度の歪に相当するかを求めることで解決できると思われる。

別の問題がデータ処理プログラム中の歪の方向を判断する点にある。光ファイバセンサによる歪の絶対量測定が可能なのは先に述べたが、今回プログラムによって歪の方向を完全に判断するまでには至らなかった。この原因の一つにも外乱の影響が挙げられ、この軽減ができれば歪方向の判断をコンピュータで行うことが可能となると考えている。いずれにしろ干渉型センサでは試験片の部分だけでなく全ての部分にセンサの感度があることが致命的な問題となっているため、外乱の影響の軽減が最大の課題となる。

#### 4. ベイジアン信頼性解析への組み込み

構造部材の破損状況の検査に係わる不確実因子、破壊力学的因子、荷重履歴に係わる不確実因子などについて検討し、ワークステーション(WS)を用いて信頼性解析プログラムの開発を行っている。

##### 4. 1 海洋構造物の設計・検査におけるベイズの決定理論の適用

疲労破壊を考慮したときの構造物の寿命は、高い不確かさや危険性を含んでいる。そのような構造物のシステムを設計するためには、ランダムな要素を考慮する必要がある。構造物の寿命に関しては、イニシャルコストや検査、保全それに信頼性水準の関係が重要であり、良い設計の実現のためにはコストエフェクティブの観点から研究を行う必要があるであろう。そこで、本研究ではこれらの関係について解析し、新しいベイズの損失関数を用いて、いくつかの選択肢の最適な組み合わせを実現する方法を提案した。

詳細は以下の文献に報告している。

# An Application of Bayesian Decision Theory to the Design and Inspection of Marine Structures (A new class of loss functions)

by Alexandre Kawano\* Hiroshi Itagaki\*\*  
Tetsuo Ishizuka\*\*

## Summary

Life of structures which are subject to fatigue failures involves high degree of uncertainty and risk. In order to design such systems it is necessary to take into account several stochastic elements. As the structure ages, the relationship among initial cost, inspections, maintenance and reliability level becomes important, and it has to be studied in order to achieve a good design from the cost-effectiveness point of view. This paper analyses this relationship and proposes a method to take the best decision among a set of alternatives regarding structural dimensions using a new class of Bayesian loss functions that are based on the concepts of under and over design.

## 1. Introduction

Fatigue is perhaps the most important failure mode in offshore structures. In some instances, it accounts for more than 80% of all observed service failures 1). Moreover, in the case of offshore installations, where the degree of redundancy is low, fatigue failures often mean catastrophic failure. Despite all efforts to reduce this kind of failure, it is still a challenge to solve. In the literature one can find several papers that deal with the design of large structures subject to random loading and fatigue with cost preoccupations as in e. g. 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10) or with focus in something else as in 11) 12) 13) 14) 15) 16). This paper is concerned with finding the optimal cost design of marine structures under the condition that epistemic uncertainty exists. By epistemic uncertainty 6) it is understood the uncertainty in parameters that can be removed by collecting more information through research, inspection results or by performing experiments. In particular, in the case of large ocean structures this kind of uncertainty is large, since precise statistical conclusions are quite difficult to obtain given that the sizes involved make full scale tests prohibitive and that the number of same type of structures are not large enough to allow statistical inference 12). In this case Bayesian analysis is invaluable as it permits that the designer incorporates his own experience with similar structures in the decision process,

making possible less conservative designs than otherwise. Up to date, cost optimal designs are obtained by minimizing an overall cost formula, taken as if it were monetary loss, that includes material usage costs, maintenance costs and failure costs for both the cases when epistemic uncertainty is present or not. While in the view of the authors of this paper it correctly finds the optimal design for the nonepistemic case, in some circumstances this method fails when epistemic variability is present. In this paper this is shown and a method using a new class of loss functions is proposed. Specifically, these loss functions are studied in conjunction with the design of structures made up several components subject to strength degradation due to fatigue, but also subject to inspection and maintenance along the life time. Although design is a very complex task involving several decision variables not in all cases tangible, here it will mean simply to choose among possible alternatives, the inspection times and a structural dimension parameter so that a loss measure is minimized.

In the first sections reliability evaluation is focussed. Later, cost and loss functions are presented. At the end, a numerical example is performed.

## 2. Loading and structural dimensions

In this work, it is supposed that all the geometrical forms are defined, i. e., optimization of forms are not performed, and the structural dimension to be optimized,  $h$ , stands for a general quantity such that  $F/h = X$  where  $F$  stands for force or moment acting on a particular structural element, and  $X$  for stress. Therefore,  $h$  has a broad meaning and in its definition stress concentration factors and other coefficients are naturally included. In this study, it is supposed that the stochastic

---

\*Graduate student, Yokohama National University

\*\*Faculty of Engineering, Yokohama National University

Received 8th July 1994

Read at the Autumn meeting 10, 11th Nov. 1994

characteristics of the  $F$  process do not change with  $h$ . It is true for the case when the total dynamic mass, damping and stiffness are not sensitive to small alterations in  $h$ , or for the cases when  $h$  is related to the dimensions of relatively small critical elements. Another hypothesis made in this work is that  $F$  is ergodic.

Given the above hypothesis, it means that the spectral composition of  $F$  and  $X$  are identical except for a factor, and the expected value and variances of both processes are related by:

$$E[X] = \bar{X}(h) = \frac{E[F]}{h} \quad (1)$$

$$V[X] = [\sigma_x(h)]^2 = \frac{V[F]}{h^2} \quad (2)$$

### 3. Fatigue life and element reliability

In this work, fatigue life is considered to have three distinct phases: crack initiation, propagation and final failure. Given this hypothesis, it is necessary to model the element reliability accordingly, that is, to set up different models for the probability of not failure of a given element before and after crack initiation.

#### 3.1 Crack initiation

Classically, fatigue life is predicted with the help of  $S-N$  curves, that relate a certain constant stress amplitude level to the corresponding number of cycles representing the fatigue life which can mean the number of cycles to failure or the number of cycles to crack initiation. The specimens used to obtain these  $S-N$  curves can be small standard specimens, scale models or even full scale structures. Moreover, the testing stress can simulated with several degrees of "realism". Of course, the more complex the testing, the more uncertainties can be removed, but given the prohibitive costs of testing full scale structures in the marine and offshore industry, in general they are not performed. Here it is supposed that only constant amplitude tests for crack initiation in the structural detail of which  $h$  is to be decided is available. To relate constant amplitude data to the "real" stress loading  $X$ , it is supposed that the Palmgren-Miner rule applies. Conditions for the validity of this assumption is investigated in e. g.17). A crack is said to initiate when it reaches a macro size  $a_0$  from which phenomenological fracture mechanics is applicable, i. e., stress intensity factor amplitude becomes meaningful for describing the crack propagation phase. In general, for common structures,  $a_0$  is of the order of the size of detectable cracks by the naked eye, or more precisely, the order of centimeters.

Mathematically, the crack starting time (or number of cycles) is supposed to be governed by the Wöhler formula:

$$N(\Delta\sigma)^p = Q \quad (3)$$

where  $N$  is the number of cycles till crack initiation,  $\Delta\sigma$  is the constant amplitude of a stress process  $\sigma$ , and  $Q$  and  $p$  are (roughly) material characteristics. As it is well known, fatigue test data show great scatter. It

could be modeled by making  $p$  and  $Q$  random variables, but instead, what is usually done 18) is to fix the value of  $p$  and model all randomness contained in these data in  $Q$  only.

According to the  $P-M$  rule, crack starts when the total damage  $\Delta$  reaches the critical value  $\Delta_{crit}=1$ . However, this rule in itself presents uncertainties, mainly related to sequence and size effects. To take it into account,  $\Delta_{crit}$  will be treated as a random variable that follows a 2 parameter Weibull distribution with mean one.  $\Delta$  is calculated as follows:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_j \Delta_j(h) = \sum_j \frac{n_j}{Q(\Delta\sigma_j)^{-p}} \\ &= \frac{1}{Q} \sum_j n_j (\Delta\sigma_j)^p = \frac{1}{Q} \sum_j n_j [\Delta X_j(h)]^p \end{aligned} \quad (4)$$

where  $n_j$  is the number of cycles corresponding to the constant stress amplitude  $\Delta\sigma_j = \Delta X_j$ . Now, if the number of cycles is very high, which in fact is the case, the coefficient of variation (c. o. v.) of the summation factor is very small 19), and it is possible to use its mean value:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_j n_j [\Delta X_j(h)]^p\right] \\ = T \times E[N_+(0)] (2\sqrt{2})^p [\sigma_x(h)]^p \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

where in the formulas above,  $T$  is the time in years,  $\sigma_x(h)$  is the standard deviation of the stress process  $X$ , and  $E[N_+(0)]$  is the number of zero crossings from below for unit time. To obtain the above result, it was supposed that  $X$  is a narrow band Gaussian process. While the assumption of narrow-bandness gives conservative designs e. g.20), the assumption that the loading is Gaussian does not 21). However, these hypothesis do not invalidate the conclusions at the end of the paper concerning cost and loss functions.

Crack is said to initiate when  $\Delta$  reaches a critical value  $\Delta_{crit}$ . Substituting (5) into (4) and solving  $\Delta(h) = \Delta_{crit}$  for  $T = T_c$ , the critical time can be written as:

$$T_c(h) = \frac{Q \Delta_{crit}}{E[N_+(0)] (2\sqrt{2})^p [\sigma_x(h)]^p \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} \quad (6)$$

The probability density function for the critical time  $T_c(h)$  can be easily found as the pdf of a product of two RVs ( $Q$  and  $\Delta_{crit}$ ) 22):

$$f_{rc}(t/h) = \int f_Q(\lambda J(h)) f_{\Delta_{crit}}(t/\lambda) \left| \frac{1}{\lambda J(h)} \right| d\lambda \quad (7a)$$

and the density function

$$F_{rc}(t/h) = \int_0^t f_{rc}(\tau/h) d\tau \quad (7b)$$

where

$$J(h) = E[N_+(0)] (2\sqrt{2})^p [\sigma_x(h)]^p \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right) \quad (8)$$

Note that in the above model, there is no fatigue limit. It was observed experimentally that the engineering fatigue limit that may exist for some materials vanishes or decreases abruptly under random loading 21).

### 3.2 Crack propagation

The crack propagation phase of the fatigue life is very important when considering inspections and maintenance. After initiation, the crack is assumed to propagate according to the Paris law :

$$\frac{da}{dn} = C \left( \frac{\Delta K}{K_0} \right)^m \quad (9)$$

where  $a$  is the crack size,  $n$  is the number of cycles,  $\Delta K$  is the stress intensity factor range, and  $C$ ,  $m$  and  $K_0$  are material properties.

In probabilistic reliability analysis the above formula is randomized in order to reflect the fairly high scatter present in crack propagation data see e. g.23)24)25). In this work, it is supposed that  $m$  is deterministic, and  $C$  is a lognormal random variable in line with the model proposed by Yang 23)26)27). Although from the phenomenological point of view this model works, it does not mean that it is also correct from the physical point of view. Indeed, if one thinks the structural system as a "black box" that is opened only at the inspection times, then, any one of the variables,  $C$ ,  $m$ , or even  $K_0$  could be used to randomize the crack propagation law to model the variability in the data. Of the three choices, randomization of  $C$  is by far the simplest. As it was pointed out in the introduction, in the offshore and marine industry it lacks experimental records. In this paper it is supposed that  $C$  has mean value  $\mu_c$ , uncertain in the Bayes sense. This uncertainty will be tackled later in conjunction with cost considerations. Note that any significant difference that would emerge if  $m$  or  $K_0$  were randomized instead of  $C$  vanishes with the application of the Bayesian method since, in the end, the probability distribution of the crack size  $a$  (what is really important) is updated in the light of data.

The stress intensity factor  $\Delta K$  is given by :

$$\Delta K(h) = \Delta X(h) Y(a) \sqrt{\pi a} \quad (10)$$

where  $Y(a)$  is a non-dimensional geometry factor, which depends both on the structural element and the shape and length of the crack. To simplify analysis,  $Y(a)$ , in this work is supposed to be constant and equal to one, which corresponds to the infinite plate solution. It in no way invalidates the final conclusions.

Supposing that the stress process  $\Delta X$  is narrow-band Gaussian and integrating (9) to obtain the crack length  $a$  as a function of time  $t$  :

$$a(t - t_c, h, c) = \left[ a_0^{\frac{2-m}{2}} + (t - t_c) C \gamma(h) \right. \\ \left. \times \frac{2-m}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{K_0} \right)^m \right]^{\frac{2}{2-m}} \quad \text{if } m \neq 2 \quad (11a)$$

$$a(t - t_c, h, c) = a_0 \exp \left[ C \gamma(h) \left( \frac{\sqrt{\pi}}{K_0} \right)^m (t - t_c) \right] \\ \quad \text{if } m = 2 \quad (11b)$$

where  $t_c$  stands for crack initiation time and :

$$\gamma(h) = E[N_+(0)] (2\sqrt{2})^m [\sigma_x(h)]^m \Gamma \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \quad (12)$$

In the above formula,  $a_0$  is the initial crack size (see section 3.1).

### 3.3 Conditional element reliability

A given element, which starts servicing at time  $t_i$  may fail before or after crack initiation. In this section, the reliability of an element conditional to the knowledge of failure before or after crack initiation will be studied. The stress process is supposed to be a narrow-band one with characteristic frequency  $\omega_0 = E[N_+(0)]$  cycles a year. A given element fails if the stress level crosses the element strength, an event of which probability can be given by some approximate solutions of the first passage problem.

The element strength degradation law is in general geometry dependent, and difficult to obtain, specially if the structure is redundant. In such cases, the degradation law must be obtained by analysis and testing. In this work, it will be assumed simply that, the maximum stress the element can withstand is the one that corresponds to the critical stress intensity factor  $K_c$  for an infinite plate. In other words, it is a very simple criterion for failure, that does not involve any other failure mode except general yielding of the cross section, if the critical stress required to brake the element by crack instability is greater than the yield point of the material  $\xi_0$  in consideration. This simple model also does not provide "crack stoppers". Mathematically, the strength degradation law is given by :

$$\xi(a(t, h, c)) = \frac{K_c}{\sqrt{a(t, h, c) \pi / 2}} \quad \text{if } a(t, h, c) \geq a_{crit} \quad (13)$$

where

$$a_{crit} = \left( \frac{K_c}{\xi_0 \sqrt{\pi / 2}} \right)^2 \quad (14)$$

Failure of the structure occurs when the residual strength  $\xi(a(t, h, c))$  is exceeded by the applied stress process  $X(t)$ . The failure rate associated with this first passage problem can be approximated by 14)28)29) :

$$fr(\tau, \xi, h, c) = E[N_+(0)] \\ \times \exp \left[ - \frac{(\xi(a(\tau, h, c)) - \bar{X}(h))^2}{2\sigma_x(h)} \right] \quad (15)$$

Behind the approximation used, there is the assumption that in the range where cracks can exist undetected, the element strength  $\xi(a(t, h, c))$  is sufficiently high compared to the range of  $X(t)$  in a typical inspection interval, so that the crossing times can be considered independent even if  $X(t)$  is narrow band. Designs obtained with this failure rate become rather conservative 28).

Using eq. (13), the element reliability after a crack started can be given by :

$$V(t - t_c | c, h) = \exp \left[ - \int_0^{t-t_c} E[N_+(0)] \right. \\ \left. \times \exp \left[ - \frac{(\xi(a(\tau, h, c)) - \bar{X}(h))^2}{2\sigma_x(h)} \right] d\tau \right] \quad (16)$$

The reliability of an element before crack starts  $U(\cdot)$  is given by a simplification of the above formula (element strength is constant in time) :

$$U(t-t_i|h) = \exp \left[ -E[N_+(0)](t-t_i) \right. \\ \left. \times \exp \left[ -\frac{(\xi_0 - \bar{X}(h))^2}{2\sigma_x(h)^2} \right] \right] \quad (17)$$

### 3.4 Unconditional element reliability

As it was put before, an element can fail before or after crack initiation. At section 3.3 the conditional reliability given this knowledge was calculated. Now, the interest relies on the unconditional one. Inspections are performed at times  $T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_n$  as indicated in Figure 1. As is shown in the figure,  $T_j$  denotes the last inspection up to time  $t^*$ . It is assumed that during an inspection any failed element is found with probability one.

The set of non failed elements, that started service at time  $T_i$ , at inspection  $T_j$  consists of those elements that do not have cracks and survives, and those elements that have (undetected) cracks and survives. It is important to remember that the elements of this set were inspected at  $T_{i+1}, T_{i+2}, \dots, T_{j-1}$  and neither cracks were detected nor they were found to have failed. That is, although the objective of this section is to find an expression for the reliability at  $T_j$  of an element which started service at  $T_i$  unconditional to crack initiation time, this reliability is conditional on the fact that the element did not fail nor cracks were detected at previous inspections. Before mathematically writing it, two events are defined:

$A = \{\text{Element does not fail from time } T_j \text{ till time } t^* > T_j\}$

$B = \{\text{No cracks were detected from time } T_i \text{ till the last inspection at } T_j\}$

The probabilities of events  $A$  and  $B$  are dependent on a given value of crack propagation coefficient  $C=c$ .

The reliability at time  $t^*$  of the elements that started service at  $T_i$  and were inspected for the last time at  $T_j$  can be written as:

$$R_e(t^*|T_i, T_j, h, \mu_c) = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \\ = \frac{\int P[A \cap B|c] f_c(c|\mu_c) dc}{\int P[B|c] f_c(c|\mu_c) dc} \quad (18)$$

where  $f_c(c|\mu_c)$  is the probability density function of the random variable  $C$  conditional on the knowledge of its mean. Furthermore,

$$P[A \cap B|c] = U(t^* - T_i|h) [1 - F_{rc}(t^* - T_i|h)] \\ + \int_{T_i}^{t^*} U(t - T_i|h) V(t^* - t|c, h) \prod_{k=i+1}^j [H(T_k - t) \\ - D(a(T_k - t, h, c))] f_{rc}(t - T_i|h) dt$$

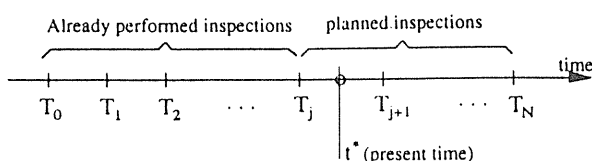


Fig. 1 Schematic view of inspection times

$$\times (1 - D(a(T_k - t, h, c))) f_{rc}(t - T_i|h) dt \quad (19)$$

In the above formula  $H(\cdot)$  is the Heaviside function and  $D(a)$  stands for the probability of detection of a crack of size  $a$ :

$$D(a) = 1.0 - \exp[-d(a - a_{min})] \quad (20)$$

The parameters  $d$ , a positive quantity and  $a_{min}$ , the minimum detectable crack size are considered constant for a given inspection procedure.

The fraction of elements that neither fail till  $t^*$  nor have detected cracks belongs basically to two mutually exclusive categories: a) elements that no cracks develop (or, putting into other words, cracks start after  $t^*$ ) and do not fail. This fraction of elements are represented by the first term of the LHS of eq. (19). b) elements that do not fail and possess cracks that started before  $t^*$  but were not detected. Note that it includes cracks that start between the last inspection at  $T_j$  and  $t^*$ . This second category of elements is represented by the second term of the LHS of eq. (19).

The fraction of elements that belongs to set  $B$  is obtained in an analogous manner.

$$P[B|c] = U(T_j - T_i|h) [1 - F_{rc}(T_j - T_i|h)] \\ + \int_{T_i}^{T_j} U(t - T_i|h) V(T_j - t|h, c) \prod_{k=i+1}^j [H(T_k - t) (1 - D(a(T_k - t, h, c)))] f_{rc}(t - T_i|h) dt \quad (21)$$

### 4. Inspection results

It is of interest the number of elements found cracked or failed at the inspection at  $T_j$ . In this study, elements found cracked or failed are repaired or substituted and after this operation, they are supposed to be good as new. It is acknowledged that repair qualities influences the overall cost/reliability relation as is pointed out by Sorensen 7), but it is not modeled here. In this study, the elements found cracked are classified into a number of classes depending on their sizes. The probability density function of the size of the cracks at time  $T_j$ , of those elements that started service at  $T_i$  can be easily calculated. First it is useful to remember that in the last inspection, all elements were checked, that is, the population of crack sizes consists of those not detected till  $T_j$ . Defining the following events:

$C = \{\text{Crack of size between } a \text{ and } a + da \text{ detected at inspection at } T_j\}$

$D = \{\text{No cracks detected NOR failure from time } T_i \text{ till inspection at } T_{j-1}\}$

Then,

$$P[C|D] = \rho(a|T_i, T_j, h, \mu_c) \\ = \frac{\int P[C \cap D|c] f_c(c|\mu_c) dc}{\int P[D|c] f_c(c|\mu_c) dc} \quad (22)$$

The probability of the occurrence of the event  $C \cap D$  can be obtained considering that the fraction of elements that belongs to  $C \cap D$  is composed of elements



that possess cracks of size  $a$  (or more precisely, between  $a$  and  $a+ad$ ) and do not fail before crack initiation, nor after, and the growing crack is not detected until  $T_j$ . Note that given the crack growth parameters, and the fact that at  $T_j$  the crack size was  $a$ , it is possible to backpropagate the crack to find initiation time  $t_c(a)$ .

$$P[C \cap D|c] = U(t_c(a) - T_i|h) V(T_j - t_c(a)|h, c) \times \prod_{k=i+1}^{j-1} \{1 - H(T_k - t_c(a))D(a|T_k - t_c(a), h, c)\} D(a)f_A(a) \quad (23)$$

The fraction of elements that start service at  $T_i$  and do not fail nor have cracks detected till time  $T_j$  comes from two mutually exclusive groups: a) Those that do not fail and cracks do not start till the last inspection at  $T_j$ , and b) Cracks really start at any time before  $T_j$  but they are not detected. Therefore:

$$P[D|c] = U(T_j - T_i|h) [1 - F_{T_c}(T_j - T_i|h)] + \int_{T_i}^{T_j} U(t - T_i|h) V(T_j - t|h, c) \prod_{k=i+1}^{j-1} [1 - H(T_k - t)D(a|T_k - t, h, c)] f_{T_c}(t - T_i|h) dt \quad (24)$$

In this work, cracks are classified according to their sizes. Class  $i$  comprehends detected cracks or sizes between  $CL_i$  and  $CL_{i+1}$ . The probability that an element which started service at  $T_i$  that is classified as class  $i$  is given by:

$$P[\text{Find a crack classified as level } i | T_i, T_j, h, \mu_c] = \int_{CL_i}^{CL_{i+1}} p[a|T_i, T_j, h, \mu_c] da \quad (25)$$

Another type of elements can be repaired at  $T_j$ . They are those that failed. The probability of finding them among those that started service at  $T_i$  is exactly equal to the probability of a element that started service at  $T_i$  fails between  $T_{j-1}$  and  $T_j$ , given that it was up and found without cracks in earlier inspections, since failed members are detected with probability one. Therefore, using eq. (18), it is simply calculated as:

$$P[\text{Finding a failed member } | T_i, T_j, h, \mu_c] = 1 - R_e(T_j | T_{j-1}, T_i, h, \mu_c) \quad (26)$$

The number of repaired elements in a inspection is calculated according to the following scheme:

a) Define a vector of sets  $R_i$  containing elements that were repaired for the last time, and consequently started service, at time  $T_i$ . Let the number of elements in this set be  $M_i$ .

b) At time  $T_0$ , set  $M_0$  equal to the total number of critical elements in the structure, and all other sets to empty ones.

c) To determine the quantities of each set  $R_i$ , immediately after inspection  $T_j$ , follow the algorithm:

FOR  $i$  equal to zero TO  $i$  equal to  $(j-1)$  DO  
BEGIN

Calculate the Number of repaired members as:

BEGIN

Number Of Repaired Members

$$= M_i \left\{ \begin{array}{l} P[\text{Finding a failed member} \\ | T_i, T_j, h, \mu_c] + \sum_i P[\text{Find a crack} \\ \text{classified as level } i | T_i, T_j, h, \mu_c] \end{array} \right\}$$

END

$M_i$  updates to ( $M_i$ -Number Of Repaired Members)

$M_j$  updates to ( $M_j$ +Number Of Repaired Members)

END

At the end of the algorithm all sets  $R_i$  shall contain the mean number of elements that started at  $T_i$  and were not repaired till the last inspection at  $T_j$ .

### 5. Structural reliability

Failure of any member is a very undesirable event, but it does not necessarily mean catastrophic failure of all the system. This is particularly true in the case of fail safe, or redundant structures. Sequence of fatigue failures that lead to system failures is studied for example in 30)31). In this work, to simplify the problem, it is assumed that, for the purposes of computing the reliability, the structure is a series system. In the event of element failure, there are at least two modeling options: a) Consider it catastrophic, with high subsequent costs and that after the incident the structure is completely lost, i. e. no repair possible. b) Consider the incident unpleasant not catastrophic, with moderate costs, and repair possible. To model these two possibilities, it is introduced a flag  $\delta$  ( $\delta=1$  for the first model and  $\delta=0$  for the second).  $\delta$  will be used in section 6 in cost formulas.

Mathematically, the reliability of the whole system  $R_s$  at time  $t^* > T_j$  can be written as:

$$R_s(t^*|h, \mu_c) = \prod_{i=0}^j (R_e(t^* | T_i, T_j, h, \mu_c))^{M_i} \quad (27)$$

### 6. Cost modelling

Decision strategies based on expected cost, or on expected values of any measure of utility are reasonable if one thinks on the long term. If decision costs of several undertaken projects are independent, then if one consistently chooses alternatives that renders the minimum cost, by the central limit theorem, in the long term, he will with almost certainty minimize his money expenditure 32). In this work, it is supposed that the expected value principle applies, but is necessary to recognize the limitations of using the expected value as a basis for comparison on unique or unusual projects when the long term effects are less meaningful.

The expected overall cost CO is a function of the number of inspections performed  $N$ , the times when

Table 1 Definition of repair sets

Set	$R_0$	$R_1$	...	$R_i$	...	$R_{j-1}$
Time	$T_0$	$T_1$	...	$T_i$	...	$T_{j-1}$
Number of elements	$M_0$	$M_1$	...	$M_i$	...	$M_{j-1}$

they are performed  $T = \{T_1, \dots, T_N\}$  and of the structural dimensions, here symbolized by  $h$ . Denoting the design set  $\{h, T_1, \dots, T_N\} = \text{DESIGN}$ :

$$\begin{aligned} \text{CO}(\text{DESIGN}, \mu_c) &= \text{C. Init}(h) + \text{C. Inspec}(h, T, \mu_c) \\ &\quad + \text{C. Maint}(h, T, \mu_c) + \text{C. Fail}(h, T, \mu_c) \end{aligned} \quad (28)$$

where

$$\text{C. Init}(h) = \text{C. Init}_0 + \text{C. Init}_1 \times h + \text{C. Init}_2 \times h^2 \quad (29)$$

is the initial cost. The linear and quadratic terms try to model the change in cost with  $h$ .

$$\begin{aligned} \text{C. Inspec}(h, \{T\}, \mu_c) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{C_i}{(1+r)^{T_i}} \left[ 1 - \delta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( 1 - \prod_{n=1}^i R_s(T_n|h, \mu_c) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

is the cost corresponding to inspections.  $r$  is the annual interest rate, here included because usual rates, of the order of 30% a year, significantly influences the results.  $C_i$  is the cost of the inspection operation in itself, plus docking costs, and ship operation stoppage costs. Note the reliability factor in the parenthesis. If  $\delta$ , defined in section 5, is one, then the inspection costs at time  $T_i$  will be included in the summation if and only if the structure is still up.

$$\begin{aligned} \text{C. Maint}(h, \{T\}, \mu_c) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\sum_k^{\text{all levels}} C_{Rk} M(T_i, k)}{(1+r)^{T_i}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - \delta \times \left( 1 - \prod_{n=1}^i R_s(T_n|h, \mu_c) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

is the cost corresponding to maintenance. Note that different repair levels correspond to different costs. Level  $k$  corresponds to cost  $H_{Rk}$ .

$$\begin{aligned} \text{C. Fail}(h, \{T\}, \mu_c) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ 1 - \delta \times \left( 1 - \prod_{n=1}^{i-1} R_s(T_n|h, \mu_c) \right) \right] \right. \\ &\quad \times \frac{C_f (1 - R_s(T_i|h, \mu_c))}{(1+r)^{T_i}} \\ &\quad + \left[ 1 - \delta \times \left( 1 - \prod_{n=1}^i R_s(T_n|h, \mu_c) \right) \right] \\ &\quad \left. \times \frac{C_f (1 - R_s(T_{\text{MAX}}|h, \mu_c))}{(1+r)^{T_{\text{MAX}}}} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

corresponds to failure costs.  $C_f$  is the cost of failure event. It takes account of environmental costs, loss of lives costs, insurance effects, etc.

### 7. Design variables and Inspection times optimization

In this work, the strategy used to find the "best" design variable  $h$  and the "best" inspection times is to minimize the overall cost  $\text{CO}(\cdot)$  eq. (28) subject to the following constraints:

$$\begin{aligned} 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < T_{\text{MAX}} \\ T_1 &\leq T_{1\text{max}} \\ T_{j\text{min}} &\leq (T_{i+1} - T_i) \quad \forall i=1, 2, \dots, N \\ R_{\text{overall}} &\leq R_s(T_{\text{MAX}}|h, \mu_c) \times \prod_{i=1}^N R_s(T_i|h, \mu_c) \quad (33) \\ R_{\text{min}} &\leq R_s(T_i|h, \mu_c) \quad \forall i=1, 2, \dots, N \\ R_{\text{min}} &\leq R_s(T_{\text{MAX}}|h, \mu_c) \end{aligned}$$

$$h_{\text{min}} \leq h \leq h_{\text{max}}$$

The above constraints refer to the minimal reliability level  $R_{\text{min}}$  for any inspection interval span, for the minimal reliability level  $R_{\text{overall}}$  for the life time span, to the maximum time for the first inspection  $T_{1\text{max}}$ , to the minimal spacing between inspection times  $T_{j\text{min}}$ , and finally, to the limits on the structural dimension  $h$ ,  $h_{\text{min}}$  and  $h_{\text{max}}$ . The algorithm chosen to minimize  $\text{CO}(\cdot)$  is the Powell's Conjugate Gradient (39).

### 8. Bayesian Decision and Loss Functions

Bayesian decision making theory is explained in e. g. (32)(33)(34)(35). Here a brief review is given. Suppose that for the decision maker, are available a set of possible actions he can take  $A_i$ , a set of possible states of nature  $\theta_j$ , and a set of functions  $L(A_i, \theta_j)$  representing the loss incurred when action  $A_i$  is taken and the true state of nature is  $\theta_j$ . Also suppose that it is possible to assign degrees of belief, as probabilities  $p(\theta_j)$ , to the values of  $\theta_j$ . Then the Bayesian Strategy is to choose the action  $A_i$  that corresponds to the minimum expected loss, defined as:

$$\bar{L}(A_i) = \sum_{\text{all } j} L(A_i, \theta_j) \times p(\theta_j) \quad (34)$$

Clearly, the above formulation can be easily extended to the case when any of the variables  $A_i$  or  $\theta_j$  are continuous. The problem is to find suitable loss functions  $L(A_i, \theta_j)$ . In literature concerning optimal design and optimal experiment planning e. g. refs.(34)(36)(37)(38), the common loss function used is of the form:

$$L(h, \lambda) = \text{CO}_i(\{W\}) + \text{CO}_f \times P_f(\{W\}|\lambda) + \text{CO}(\cdot) \quad (35)$$

where  $\{W\}$  is vector of continuous variables that represent structural design parameters such as scantling or inspection times, and  $\lambda$  (also continuous) represents an statistical parameter whose value is unknown, such as the mean of the crack propagation coefficient  $C$ .  $\text{CO}_i(\{W\})$  is the cost associated with  $\{W\}$ , in general the initial cost;  $\text{CO}_f \times P_f(\{W\}|\lambda)$  is the expected cost of failure computed as the cost of failure times its probability; and  $\text{CO}(\cdot)$  is a cost term that is not a function of the parameter  $\lambda$ .  $\text{CO}(\cdot)$  in general includes things such as the cost of performing experiments to collect information about  $\lambda$  or costs activated by a particular decision. In the first case, the effort put in experiments is also a decision variable and the problem assumes the characteristic of a Pre-Posterior analysis. The "actions" set is made up of all possible  $\{W\}$ , and the state of nature set is made up of possible values of  $\lambda$ . Using eq. (35) the designer should choose the set  $\{W\}$  that minimizes the expected loss over all possible states of nature.

This class of loss functions, in a sense, works because in principle if the decision maker is ignorant about the true state of nature, he will in general, use very conservative relatively flat (mass) probability density functions for the state of nature  $\lambda$ . In this way, unless also

conservative, and therefore expensive  $\{W\}$  is not used, the probability of failure, and the associated cost will be high. On the other hand, beyond a point, use of more conservative  $\{W\}$  promotes very little decrease in the failure costs because the probability measure is bounded, and at the same time material costs increases. This means that use of ultra conservative  $\{W\}$  corresponds to loss due to overdesign. As for the pre-posterior analysis, provided that conservative prior density functions are employed, use of this class of loss functions also works because as more experiments are performed, more information is gathered, resulting in less conservative posteriors. As a natural consequence, for a given reliability level, cheaper designs can be attained.

As common sense says, loss should be inversely proportional to the amount of information gathered. That is, the more it is known about a problem, the less the probability of taking the wrong decision is. However, loss functions of the type presented by eq. (35) do not present this pattern. To appreciate this, suppose, not a conservative prior, but instead, a flat but optimistic one proposed by a bold and, possibly young, decision maker. If eq. (35) is used, the best decision  $\{W\}$  will correspond to a relatively cheap cost, or loss. However, if he is allowed to perform some experiments the probability density function for  $\lambda$  is updated, becoming sharper and less optimistic. However, the best design corresponding to this new degree of belief distribution renders cost, or loss, more expensive than before. In conclusion, a pre-posterior analysis that uses eq. (35) as loss function would imply that the best number of experiments to be performed in order to get more information is zero. The problem with eq. (35) is that, although it can be used as a loss function when the prior distribution for the degree of belief concerning  $\lambda$  is very conservative, it is not strictly speaking, a loss function. It is a mere cost function. Clearly use of eq. (35) is not satisfactory since whether a prior is conservative or not when not much is known about a parameter, is very subjective, and use of "absolute" conservative priors would render ultra conservative designs, or if it is to be avoided, very expensive experimental costs. This conclusion is especially true since it is well known that the prior distribution in Bayesian analysis greatly influences the final results. It must be stressed, however, that if the analysis is not Bayesian, eq. (35) can be used without consternation, as is done in, for example, 2)3)6). This paper presents a new class of loss functions. Let the new loss function for the design and inspection planning problem be :

$$\begin{cases} \text{if } \mu_c \text{ design} > \mu_c \text{ true (over design) :} \\ L(\mu_c \text{ design}, \mu_c \text{ true}) = \text{CO}(\text{DESIGN}, \mu_c \text{ design}) \\ \quad \quad \quad - \text{CO}(\text{OPTIMAL}, \mu_c \text{ true}) \\ \text{if } \mu_c \text{ design} \leq \mu_c \text{ true (under design) :} \\ L(\mu_c \text{ design}, \mu_c \text{ true}) = \text{CO}(\text{DESIGN}, \mu_w \text{ true}) \\ \quad \quad \quad - \text{CO}(\text{DESIGN}, \mu_c \text{ design}) \end{cases} \quad (36)$$

where DESIGN is the set  $\{h, T_1, \dots, T_N\}$  corresponding to the best design obtained by minimizing eq. (28) given that  $\mu_c = \mu_c \text{ design}$ ; OPTIMAL is the set  $\{h, T_1, \dots, T_N\}$  that corresponds to the best design obtained when  $\mu_c = \mu_c \text{ true}$ ; now,  $\mu_c \text{ true}$  is the unknown true value of the mean of the crack propagation coefficient C and  $\mu_c \text{ design}$  is the value really used to design the structural system. Note that  $\mu_c \text{ design}$  is a quantity to be chosen by the decision maker, that is it is symbolized by the "actions" set, while  $\mu_c \text{ true}$  is uncertain and corresponds to the "state of nature" set.  $\mu_c \text{ design}$  is obtained through the strategy of minimizing :

$$\bar{L}(\mu_w \text{ design}) = \int L(\mu_c \text{ design}, x) f_{c \text{ true}}(x) dx \quad (37)$$

As can be readily be noted, a sharp degree of belief represented by the probability density function  $f_{c \text{ true}}(\cdot)$  will always correspond to a smaller loss compared to that of a flat one. Therefore, in the young designer case previously mentioned, the loss will certainly decrease. The loss in this way defined can be compared directly to experimental costs. In a pre-posterior analysis, if the decreased part in the loss due to experiments is greater than the cost of the experiment itself, then it should be performed. Moreover, as it will be seen the next section, this loss function class is better behaved than the traditional one.

### 9. Numerical results

In order to show the superiority of the new class of loss functions over the classical one a numerical example is shown. To simplify analysis and show only the relevant aspects of the problem, the inspection times are fixed (here, rather arbitrarily:  $T_1=4.5$ ,  $T_2=8.0$ ,  $T_3=11.0$ ,  $T_4=13.5$ ), i. e., they are not considered optimization variables, and only  $h$  is to be optimized. Besides, to

Table 2 Numerical value used in the example (SI units, otherwise stated)

# NUMBER OF INSPECTIONS		# CRACK PROPAGATION	
min_number_inspec	4	initial_crack_size	1.0e-2
max_number_inspec	4	mean_crack_propag_coef_c	(see text)
		cov_crack_propag_coef_c	0.1
# GENERAL		crack_propag_k0	32.6e6
number_of_critical_elements	10.0	crack_propag_expo_m	3.0
max_time (years)	15.0		
cycles_per_year	1.0e6	# CRACK INITIATION: Miner's rule	
		weibull_alpha	2.0
		weibull_beta	1.2
# FIXED TIMES		# DESIGN VARIABLE	
number_of_fix_times	4	min_h	1.0
fix_times	4.5 8.0 11.0 13.5	max_h	10.0
		h_guess	3.0
# MINIMUM RELIABILITY LEVELS		# WOHLER'S LAW	
min_relib_life_time	0.9	fatigue_k	0.9e12
min_relib_partial	0.9	fatigue_p	3.0
# STRENGTH AND STRESS		# COST PARAMETERS (relative costs)	
ult_strength	371.0e6	initial_cost0	100.0
crit_stress_intensity_factor	100.0e6	initial_cost1	10.0
mean_stress	100.0e6	initial_cost2	1.0
stress_variance	7.25e14	inspection_cost	10.0
# DETECTION PARAMETERS		repair_cost 1	1.0
detect_d	46.2	repair_cost 2	1.0
min_detectable_crack	1.0e-2	repair_cost 3	2.0
crack_level_size 1	0.1	repair_cost 4	3.0
crack_level_size 2	0.2	repair_cost 5	5.0
crack_level_size 3	0.5	repair_cost 6	10.0
crack_level_size 4	1.0	catastrophic_failure_cost	300.0
crack_level_size 5	2.0	interest	0.30

Table 3 Degrees of belief

Certainty	Degree of belief						
	0.05	0.10	0.70	0.10	0.05	0.00	0.00
Strong	0.05	0.10	0.70	0.10	0.05	0.00	0.00
Weak	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

Table 4 Optimal designs for each value of  $\mu_c$

$\mu_c$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Optimal $h$	1.35	1.43	1.49	1.55	1.59	1.66	1.68
Cost	121.4	122.5	123.4	124.2	124.9	125.5	126.2

Table 5 Costs (eq. 28) for each "action"  $h$  against each state of nature  $\mu_c$

$h \backslash \mu_c$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
1.35	121.5	123.8	129.1	134.8	143.	149.6	152.6
1.43	122.1	122.5	124.3	128.	132.8	138.5	144.6
1.49	122.7	122.8	123.5	125.4	128.4	131.7	136.3
1.55	123.4	123.5	123.6	124.3	125.7	128.3	130.3
1.59	123.8	123.9	124.	124.3	125.1	126.7	128.4
1.66	124.7	124.8	124.8	124.9	125.2	125.6	126.5
1.68	125.	125.	125.	125.1	125.3	125.7	126.4

Table 6 Losses (eq. 36) for each "action"  $\mu_{c \text{ des}}$  against each state nature  $\mu_{c \text{ true}}$

$C_{\text{des}} \backslash C_{\text{true}}$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.8	0.	2.3	7.6	13.3	21.5	28.1	31.1
1.0	1.	0.	1.8	5.5	10.3	16.	22.1
1.2	2.	1.	0.	1.9	4.9	8.2	12.8
1.4	2.8	1.8	0.8	0.	1.4	4.	6.
1.6	3.6	2.6	1.6	0.8	0.	1.6	3.3
1.8	4.1	3.1	2.1	1.3	0.5	0.	0.9
2.0	4.9	3.9	2.9	2.1	1.3	0.8	0.

highlight the differences in the results when using eq. (35) and eq. (36), the state of nature and action sets are made the same, and only discrete values will be used.

In Table 2 it is shown the numerical values used. In the examples, three probability density functions (Table 3) representing the degree of belief about the true value of  $\mu_c = \mu_{c \text{ true}}$  as used in order to show the sensitivities of eq. (35) and (36), as loss functions, in relation to prior distributions.

By minimizing eq. (28), optimal  $h$  and the corresponding cost for each value of  $\mu_c$  is obtained and listed in Table 4. In order to better compare the behavior of the concurrent loss functions, it is supposed that the actions set contain only these seven obtained values for  $h$ .

Table 5 shown in line  $i$ , column  $j$ , the cost calculated when a particular "action"  $h_i$  and a particular  $\mu_{c_j}$  is substituted into eq. (28). Note that although the elements in the diagonal are obtained by minimization, it does not necessarily mean that it is the least in a given column. The reason for this is that while the optimization process is subject to strict constraints such as minimum reliability level, simple cost evaluation of eq. (28) is not.

Results using eq. (36) are plotted in Table 6 of which element  $(i, j)$  is obtained by simple transformations of Table 5. The rules are: a) If  $i = j$  then the loss is zero.

Table 7a Expected losses eq. 35

$\mu_c$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$h$	1.35	1.43	1.49	1.55	1.59	1.66	1.68
Weak certainty	136.3	130.4	127.3	125.6	125.1	125.2	125.4
Strong certainty	129.4	124.8	123.8	123.7	124.1	124.1	125.0

Minimum values are shown encircled

Table 7b Expected losses eq. 36

$\mu_c$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$h$	1.35	1.43	1.49	1.55	1.59	1.66	1.68
Weak certainty	14.84	8.10	4.40	2.40	1.93	1.71	2.27
Strong certainty	7.95	2.37	0.63	0.95	1.73	2.13	2.93

Minimum values are shown encircled

b) If  $i < j$  then subtract element  $(i, j)$  (Table 5) from element  $(i, i)$  (Table 5). c) If  $i > j$  then subtract element  $(j, j)$  (Table 5) from element  $(i, i)$  (Table 5). Note that all elements are nonnegative and that these extra calculations do not take substantial time.

Now, the classic expected loss can be calculated using Table 5, and the expected loss of eq. (36) using Table 6. The results are plotted in Tables 7a and 7b. Compare the best decisions when using the "weak certainty" case. In this case almost nothing is known about  $\mu_c$  except that it can assume one of the values in the set "actions". Losses calculated by the new class of loss functions eq. (36) gives, luckily, more conservative designs than if they were calculated by eq. (35). Moreover, if "strong certainty" degree of belief is used, calculations using eq. (36) again gives better decision than that obtained through eq. (35). The belief that  $\mu_c = 1.20 \times 10^{-7}$  is so strong that there should be no margin to other "action" choice. Note that eq. (35) gives an unnecessary conservative design. The inevitable conclusion is that, at least for this simple example, the new class of loss functions eq. (36) is superior than the one commonly found in the literature.

### 10. Conclusions

A new class of loss function suitable for application in structures subject to inspections and maintenance was presented. It does not require that the designer specifies a conservative prior. A numerical example was performed and it indicates that the new class of loss functions is better behaved than the one found in the literature. Also, the extra amount of calculations do not seem to take so much computational time.

### References

- 1) Wirsching P. H.: Statistical Summaries of Fatigue Data for Design Purposes. NASA-CR-3697, 1983
- 2) Cramer E. H., Lars H. H.: A Maximum Utility Model for Structures Subject to Fatigue Crack Growth. OMAE 1991, V. 2 Safety and Reliability ASME.
- 3) Dalane J. I., Skjong R., Lotsberg I.: Optimal Fatigue Design of Offshore Structures. Proceed-

- ings OMAE 1990, V. 2 pp. 412-421. Houston, TX, 1990.
- 4) Fujimoto Y., Itagaki H., Itou S., Asada H., Shin-ozuka M.: Bayesian Reliability Analysis of Structures with Multiple Components. Proceedings ICOSSAR 89, San Francisco 1989, pp. 2143-2146.
  - 5) Fujimoto Y., Swilem A. M., Iwata M., Nagai K.: Inspection Planning for Deteriorating Structures Based on Sequential Cost Minimization Method. J. Soc. Naval Architects, V. 170, 1991.
  - 6) Rolf, S., Rune T.: Rational Methods for Fatigue Design and Inspection Planning of Offshore Structures. Marine Structures, V. 4, pp. 381-406, 1991.
  - 7) Sorensen J. D., Faber M. H., Rackwitz R., Thoft-Cristensen P.: Modelling in Optimal Inspection and Repair. OMAE 1991, V. 2 Safety and Reliability.
  - 8) Sorensen J. D.: Reliability-Based Inspection Planning for Structural Systems. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993.
  - 9) Yang J. N.: Statistical Estimation of Service Cracks and Maintenance Cost for Aircraft Structures. AIAA/ASME/SAE 16th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver Colorado, 1975.
  - 10) Yang J. N.: Optimal Periodic Proof Test Based on Cost-Effective and Reliability Criteria. AIAA Journal, 15(3), 402-409, 1977.
  - 11) Deodatis G., Fujimoto Y., Ito S., Spencer J., Itagaki H.: Non-Periodic Inspection by Bayesian Method I. Probabilistic Engineering Mechanics V. 7 pp. 191-204, 1992.
  - 12) Itagaki H., Yamamoto N.: Bayesian Analysis of Inspection on Ship Structural Members. Proceedings of ICOSSAR'85 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, pp. (III-533)-(III-542).
  - 13) Itagaki H., Itou S., Yamamoto N.: Bayesian Reliability Analysis for Evaluating In-Service Inspection. Current Japanese Materials Research V. 5, Nakagawa T., Ishikawa H., Tsurui A. (eds), Elsevier Applied Science, London, 1989.
  - 14) Shinozuka M.: Development of Reliability-Based Aircraft Safety Criteria. AFFDL-TR-76-31, V. 1, 1976.
  - 15) Wirsching P. H., Chen Y. N.: Considerations of Probability-Based Fatigue Design for Marine Structures. Marine Structures V. 1, pp. 23-45, 1988.
  - 16) Yang J. N. Trapp W. J.: Reliability Analysis of Aircraft Structures under Random Loading and Periodic Inspection. AIAA Journal V. 12, N. 12, 1974.
  - 17) Lutes L. D., Corazao M., Hu S-L. J., Zimmerman J. J.: Stochastic fatigue damage accumulation. J. Struct. Engng. ASCE, 110 (ST11), pp. 2585-2601, 1984.
  - 18) Pittaluga A. Cazzulo R., Romeo P.: Uncertainties in the Fatigue Design of Offshore Steel Structures. Marine Structures V. 4, pp. 317-332, 1991.
  - 19) Madsen, H. O., Krenk S., Lind N. C.: Methods of Structural Safety. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1986.
  - 20) Wirsching P. H.: Fatigue Reliability for Offshore Structures. J. Struct. Engng. ASCE, 110 (1984), pp. 2340-2356.
  - 21) Sarkani S., Kihl D. P., Beach J. E.: Fatigue of Welded Joints under Narrowband non-Gaussian Loadings, Probabilistic Engineering Mechanics, V. 9, pp. 179-190, 1994.
  - 22) Meyer, P. L.: Introductory Probability and Statistical Applications. Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1965.
  - 23) Provan J. W. (Ed.): Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability, Martinus Nijhoff, The Hague, 1987.
  - 24) Sobczyk K., Spencer B. F. Jr.: Random Fatigue. Academic Press, Boston, 1992.
  - 25) Itagaki H., Isizuka T., Yan H. P.: Experimental Estimation of the Probability distribution of Fatigue Crack Growth Lives. Probabilistic Engineering Mechanics, V. 8, pp. 25-34, 1993.
  - 26) Yang, J. N.: Application of Reliability Methods to Fatigue, Quality Assurance and Maintenance. ICOSSAR'93.
  - 27) Yang J. N., Manning S. D., Norton J. M.: A Stochastic Crack Growth Analysis for Aircraft Structures. ICOSSAR'93, Innsbruck, Austria.
  - 28) Lin Y-K.: Probability Theory of Structural Dynamics. McGraw-Hill, New York, 1967.
  - 29) Paliou C., Shinozuka M., Chen Y. N.: Reliability and Durability of Marine Structures. Journal of Structural Engineering, V. 113, No. 6, June 1987.
  - 30) Karamchandani A. K., Dalane J. I., Bjerager P.: Systems Reliability of Offshore Structures Including Fatigue and Extreme Wave Loading. Marine Structures, V. 4, pp. 353-379, 1991.
  - 31) Karsan D. I., Kumar A.: Fatigue failure paths for offshore platform inspection. J. Struct. Engng. ASCE, 116(1990) 1679-1695.
  - 32) Ang A. H-S. Tang W.: Probabilily Concepts in Engineeing Planning and Design, VOL I and II. Jonh Wiley and Sons, New York, N. Y. 1984.
  - 33) Beaumont G. P.: Intermediate Mathematical Statistics. Chapman and Hall Ltd, London, 1980.
  - 34) Turkstra C. J.: Application of Bayesian Decision Theory, in: Lind N. C. (ed): Structural Reliability and Codified Design, chapter 4, SM studies series, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1970.
  - 35) Chenoff H. and Moses L. E.: Elementary Decision Theory. John Wiley and Sons, 1959.
  - 36) Sorensen J. D., Faber M. H., Kroon I. B.: Reliability-Based Optimal Design of Experiment Plans for Offshore Structures. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993.
  - 37) Englund S., Bouyssy V., Rackwitz R.: On Optimal Bayesian Designs for Crack initiation Tests. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993.
  - 38) Fujimoto Y.: Inspection Planning for Deteriorating Structures Taking into account uncertain factors. J. Soc. Naval Architects SR207-WG4-5-8, 1992.
  - 39) Press W. H., Flannery B. I., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T.: Numerical Recipes: The art of scientific computing. CUP, Cambridge, 1986.

#### 4. 2 情報量の最大化に基づく最初の検査施工時期の選択

最初の検査の結果は、実験によってほとんど得ることができないような情報（例えば、き裂進展開始時間のパラメータに関する情報など）を含んでいる。そのうえ検査の結果が事前の検査や検査の不完全さによるノイズの影響を受けていないとすれば、ある意味でそれは純粋な情報であるといえる。いいかえれば、ベイズの方法を用いて解析される情報が豊富であるといえるだろう。最初の検査施工時期は、構造物の相対的な信頼性に大きな影響を及ぼし、それゆえ総体的なコストも影響を受けることになる。そこで、Shannonの情報に基づく損失関数を最小化することが、最初の検査施工時期を決定するための適当な基準となることを提案した。

詳細は以下の文献に報告している。

# Selection of the First Inspection Time Based on Maximization of Amount of Information

by Alexandre Kawano\*, Hiroshi Itagaki\*\*,  
Tetsuo Ishizuka\*\*,

## Summary

The results of the first inspection contain information which laboratory experiments can hardly furnish, such as crack initiation time parameters. Moreover, it is pure in a sense that it is not infected by noise coming from previous, imperfect, inspections. In other words, it is a rich source of information that can be analyzed by Bayesian methods. The first inspection time also heavily influences the overall structural reliability, and therefore the overall costs as was noticed from previous works. By minimizing a loss function based on mean Shannon information, a suitable criterion for selecting the first inspection time is proposed.

## 1. Introduction

For large structures under random loadings such as aircraft, ships, offshore installations and bridges, fatigue is often the governing limit state. Under repetitive loading, cracks initiate and grow in size reducing the strength of structures. If these cracks are detected during inspections, the defected part is repaired or substituted, improving the overall system reliability. Since damage accumulates randomly and the inspection operation is imperfect, uncertainties inevitably increases and reliability decreases with time.

There are several papers dealing with the optimal selection of inspection intervals in the literature. For example, Yang & Trapp<sup>1)</sup> studied the effect of periodic inspections using classic probabilistic methods, Itagaki & Yamamoto<sup>2)</sup> realizing that the inspection results themselves furnish data that can be used to update the knowledge about uncertain parameters, applied Bayesian analysis into the problem in order to select inspection intervals, Fujimoto<sup>3)</sup> proposed the Sequential Cost Minimization Method to minimize overall service costs. In general, however, the methods for selecting the inspection times that use Bayesian analysis do not worry about the events associated with the first inspection and are set based on only initial estimates of the parameters, which are very poor. Moreover, as is observed almost without exception, the first time

inspection obtained by common methods found in the literature is set relatively late in the structural life, see e. g. 1)2)4)5)6)7)8)9)10).

From the point of view of information content, the first inspection is very rich since it does not contain noise coming from previous inspections, and provides data which laboratory tests can hardly furnish such as crack initiation times under service loading or crack propagation data of very large specimens. This information could be used to update the knowledge about uncertain parameters of a single unit, improving reliability and costs estimates for the remaining life, or even updating uncertain parameters for future designs. In other words, the results of the first inspection can be viewed as a result of a full scale test, and in this sense, the more information is gathered the better, even if the optimal cost for a single unit is sacrificed.

There are a number of ways of how amount of information can be defined. For an overview see refs 11) and 12). The concept of information was mathematically formulated for the first time in 1925 by Sir R. A. Fisher in his work on the theory of estimation<sup>13)</sup>. In this paper, the amount of information collected during an inspection is measured by the Shannon information measure, created by Claude Shannon in 1947 in the field of the theory of communication<sup>14)</sup>.

The authors of this work try to set a special criteria to select the first inspection interval based on minimization of a loss function based on the amount of Shannon Information. The formulas about fatigue life and reliability follow closely the ones in 15) included in the same number of this journal. They are repeated here for convenience.

## 2. Fatigue life and element reliability

It is supposed that fatigue life can be divided into

\* Graduate Student, Yokohama National University

\*\* Faculty of Engineering, Yokohama National University

Received 8th July 1994

Read at the Autumn meeting 10, 11th Nov. 1994

three distinct phases. Crack initiation, propagation and final failure. Given this hypothesis, element reliability will be modelled accordingly, that is, different reliability models for the probability of not failure before and after crack initiation shall be set up.

A crack is said to initiate when a micro crack grows to a size  $a_0$  from which continuum fracture mechanics is applicable, i. e., stress intensity factor range becomes meaningful for describing the crack propagation phase. The size  $a_0$  is in general of the size of the order of tens of millimeters, or in a more mundane way of expressing, the size of detectable cracks by the naked eye. If the time for crack initiation experimentally obtained is cast into the S-N format, and if the Miner's rule applies, it can be shown that 15) the time for a crack to start in the structure is given by :

$$t_c = \frac{Q \Delta_{crit}}{E[N_+(\bar{X})](2\sqrt{2})^p \sigma_X^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} \quad (1)$$

where  $\Delta_{crit}$  is the critical accumulated damage used in the Miner's rule, in general ranging between 0.3 and 2.0,  $\sigma_X^2$  is the variance of the random stress process  $X$  considered to be Gaussian and narrow-band,  $E[N_+(\bar{X})]$  is the number of crossings from below of the process  $X$  through its temporal mean, and finally  $p$  and  $Q$  are parameters of the S-N curve, typically written as (Number of cycles)  $\times$  (stress amplitude) $^p = Q$ .

Now, all uncertainty about the S-N parameters, about Miner's rule, stress process, and about the approach in itself is modelled considering  $\Delta_{crit}$  a random variable. Here it is supposed to follow a Weibull distribution with shape parameter  $\alpha$  and scale parameter  $\beta$ . By standard variable transformation, the probability density function for the crack initiation time becomes :

$$F_{t_c}(t_c|\beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_c}{\beta J}\right)^\alpha\right] \quad (2)$$

where  $J$  is given by :

$$J = \frac{E[N_+(\bar{X})](2\sqrt{2})^p \sigma_X^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{Q} \quad (3)$$

After initiation, a crack of size  $a$  is assumed to propagate according to Paris law :

$$\frac{da}{dt} = C(\Delta X \times Y(a))^m \left(\frac{\sqrt{\pi}a}{K_0}\right)^m \quad (4)$$

where  $m$ ,  $C$  as well as  $K_0$  are material properties,  $\Delta X$  is the far field stress range and  $Y(a)$  is a function dependent of the element and crack geometry. Now, if the crack sizes found during an inspection are thought to correspond to realizations of a set of random variables, then, eq.(4) can be integrated with respect to time following the usual rules of calculus. At this point, it is made the conservative assumption that  $Y(a) = Y_0$  is constant and equal to the stress concentration factor SCF at the hot spot.

$$a(t - t_c) = a_0 \exp\left[C\gamma \left(\begin{array}{l} \text{Environmental and} \\ \text{geometric conditions} \end{array}\right)\right]$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{\pi}}{K_0}\right)^2 (t - t_c) \quad (5)$$

In the above equation,  $\gamma(\cdot)$  is a function dependent of the stress process characteristics such as representative frequency and amplitude, and on the geometric forms of the crack. It is given by :

$$\gamma = E[N_+(\bar{X})](2\sqrt{2})^2 (Y_0 \sigma_X)^2 \Gamma(2) \quad (6)$$

There are uncertainties in almost all parameters of eq.(5), besides uncertainties concerning Paris law itself and in the assumptions made. All uncertainties are cast into the crack propagation coefficient  $C$ , considered to be a random variable. Consequently, crack lengths given by eq.(5) become conditional on  $C$ . Here it is assumed that it follows a lognormal probability distribution of which median  $m_c$  is, in Bayesian sense, unknown.

$$f_c(C|m_c) = \frac{1}{ds_c \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(C/m_c))^2}{2s_c^2}\right] \quad (7)$$

In the above equation,  $s_c$  is the standard deviation of  $\ln(C)$ .

This paper is concerned with finding the first inspection time  $T_1$  so that using the data then collected information about  $m_c$  and  $\beta$  is maximized.

After a crack initiates in an element, its ultimate strength starts to decrease. Here it is made the hypothesis that an element can fail only by two mechanisms: a) general yielding because the loading stress became greater than the yield stress. b) instable fracture. No modelling of crack stoppers are provided. Mathematically, the ultimate strength  $\xi(a)$  can be written as :

$$\xi(a) = \frac{K_c}{\sqrt{a\pi/2}} \quad \text{if } a \geq \left(\frac{K_c}{\sigma_{yield}\sqrt{\pi/2}}\right)^2 \quad (8a)$$

$$\xi(a) = \sigma_{yield} \quad \text{if } a < \left(\frac{K_c}{\sigma_{yield}\sqrt{\pi/2}}\right)^2 \quad (8b)$$

Where in the above formulas,  $K_c$  is the critical stress intensity factor and  $\sigma_{yield}$  is the yield stress for the material employed.

Essentially, a element fails if the loading stress process exceeds its ultimate strength, that is, it can be modeled as a first passage problem. Making the hypothesis that the element ultimate strength and the stress process are well apart in the interval where cracks can exist undetected, crossing times can be thought as independent even if the loading process is narrow-band.

Denoting the element reliability before and after crack initiation by  $U(\cdot)$  and  $V(\cdot)$  respectively, it is possible to write<sup>15)</sup> :

$$U(t - t_i) = \exp\left[-E[N_+(0)](t - t_i) \cdot \exp\left[-\frac{(\sigma_{yield} - \bar{X})^2}{2\sigma_X^2}\right]\right] \quad (9a)$$

$$V(t - t_c|C) = \exp\left[-\int_0^{t-t_c} E[N_+(0)] \cdot \exp\left[-\frac{(\xi(a(\tau|C)) - \bar{X})^2}{2\sigma_X^2}\right] d\tau\right] \quad (9b)$$

where in (9a)  $t_i$  is the element service initiation time.

Note that eq.(9b) is conditional to a value of  $C$ , since as it was already discussed, the crack size at time  $\tau$  is



conditional to it.

A crack is considered to be detected before element failure with probability given by :

$$D(a) = 1.0 - \exp[-d(a - a_{\min})] \quad (10)$$

where  $a_{\min}$  is the minimum detectable crack set equal to the crack initiation size  $a_0$ , and  $d$  is a positive parameter.

### 3. Structural reliability at the first inspection

In the last section,  $U(\cdot)$  and  $V(\cdot)$  are element reliability conditional to the crack initiation time. The element reliability not conditional to this knowledge is given by :

$$R_e(T_1|\beta, m_c) = U(T_1)[1 - F_{t_c}(T_1|\beta)] + \int_0^{+\infty} \int_0^{T_1} U(t)V(T_1 - t|C)f_{t_c}(t|\beta)f_c(C|m_c)dtdc \quad (11)$$

Basically, to obtain  $Re(\cdot)$  it is summed up the probabilities corresponding to the events: a) Crack does not start in the element and it does not fail till  $T_1$ . b) Crack does start but the element does not fail. Now, if the structure is made up by  $M$  critical elements, then the structural reliability at the first inspection, time  $T_1$ , can be written as

$$R_s(T_1|\beta, m_c) = (R_e(T_1|\beta, m_c))^M \quad (12)$$

if failure of any element is to be meant system failure.

Parameters  $\beta$  and  $m_c$  are unknown, and this uncertainty is modelled in the Bayesian way, that is, degrees of belief one possess are treated as probabilities. Mathematically, the belief that  $\beta$  lies between  $\beta'$  and  $\beta' + d\beta$ , and  $m_c$  between  $m'_c$  and  $m'_c + dm_c$  is given by  $f_{m_c, \beta}(m'_c, \beta')d\beta dm_c$ , where  $f_{m_c, \beta}(m_c, \beta)$  is a probability density function. The structural reliability corresponding to the (un)certainly on the parameters one has at a particular moment is given by :

$$R_s(T_1) = \int_{m_c} \int_{\beta} R_s(T_1|\beta, m_c)f_{m_c, \beta}(m_c, \beta)d\beta dm_c \quad (13)$$

Therefore reliability in the Bayesian framework is not a property of the system, but it also reflects the present state of knowledge one has about the relevant parameters of the problem. Then, it is readily realized that the structural reliability changes as more information is gathered.

### 4. Inspection results and the amount of information gathered

By the knowledge of inspection results, degrees of belief or probability distributions, of the parameters  $\beta$  and  $m_c$  can be updated via Bayes methods. As will be explained later, the difference of the amount of mathematical uncertainty about a parameter before and after some data become known is defined as information.

The following events form the sample space for inspection results concerning one element :

- a) A crack of size between  $a$  and  $a + da$  is found in the element.
- b) No cracks are found in it.

c) It failed.

Although finding that the element failed before some specified time  $t$  can give some information, in this analysis, this event is forced to correspond to information content zero :

$$\text{Info}(\{\text{system failed}\}) = 0.0 \quad (14)$$

In words, it means that in this paper it is assumed that knowing that the system failed will not change the opinion one has about uncertain parameters.

This can be justified by several reasons. First, in this work, the prevailing criterion for the selection of the first inspection time is the maximization of the amount of information gathered, assuming that its utility is proportional to its numerical value. Then, it can be argued that information has no utility if the structure collapses. Second, given that the system collapses it is not possible to realistically relate it to a fatigue cause in all cases. There may be other unexpected factors that are not accounted in the model, but on the other hand, knowledge that the system did not fail excludes any kind of failure cause, including fatigue.

In order to evaluate the information contained in the data regarding crack sizes, it is necessary to find the likelihood associated to the following event :

$$A = \left\{ \begin{array}{l} n_1 \text{ elements out of } M \text{ are found to} \\ \text{have cracks of sizes } a_1, \dots, a_{n_1}, \text{ and} \\ M - n_2 \text{ are found to be intact (no cracks)} \end{array} \right\}$$

Strictly speaking, the expression "finding a crack of size  $a$ " in fact means "finding a crack of size between  $a$  and  $a + da$ ". Mathematically, the likelihood of the event  $A$  occurring at the first inspection, time  $T_1$ , is given by :

$$\text{Like}(A, T_0, T_1|\beta, m_c) = (P_2(T_0, T_1|\beta, m_c))^{n_2} \cdot \prod_{i=1}^{n_1} p_1(a_i, T_0, T_1|\beta, m_c) \quad (15)$$

In the above formula,  $T_0$  is the time when the elements started service and  $T_1$  is the time when the event takes place.

The probability of finding a crack of size between  $a$  and  $a + da$  at time  $T_j$  in a element that started service at time  $T_i$ ,  $p_1(a, T_i, T_j|\beta, m_c)da$ , is given by the summation of all probabilities corresponding to all realizations of the random pair  $(t_c, C)$  that correspond to a crack of size  $a$  at  $T_j$  in those elements that does not fail and no cracks are found in the inspections carried out before  $T_j$  :

$$p_1(a, T_i, T_j|\beta, m_c)da = \int_{c_1}^{+\infty} U(t - T_i)V(T_j - t|C) \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} [1 - H(T_k - t)D(T_k - t|C)]D(a)f_{t_c}(t - T_i|\beta) \cdot f_c(C|m_c)dCdt \quad (16)$$

where  $c_1 = \frac{\ln(a/a_0)}{\gamma T_j}$ ,  $t = T_j - \frac{\ln(a/a_0)}{\gamma C}$ ,  $\left| \frac{dt}{da} \right| = \frac{1}{\gamma Ca}$  and  $H(\cdot)$  is the Heaviside function.

The probability of finding no cracks at time  $T_j$  in those elements that started service at  $T_i$  and not failed is obtained by counting the fraction of elements in which cracks do not start, or in which cracks started but are not detected.

$$\begin{aligned}
 P_2(T_i, T_j | \beta, m_c) &= (1 - F_c(T_j - T_i | \beta)) U(T_j - T_i) \\
 &+ \int_0^{T_j} \int_0^{+\infty} U(t - T_i) V(T_j - t | C) H(T_k - t) \\
 &\cdot \prod_{k=i+1}^j [1 - D(a(T_k - t | C))] \\
 &\cdot f_c(t - T_i | \beta) f_c(C | m_c) dC dt \quad (17)
 \end{aligned}$$

The degree of belief one possess about the parameters  $m_c$  and  $\beta$  changes as more data become available to him. The way it changes can be modeled by Bayesian updating as is explained in e. g. 16). Essentially, in words it becomes:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Posterior} \\ \text{beliefs} \end{array} \right) = \text{Likelihood} \times \left( \begin{array}{c} \text{Prior} \\ \text{beliefs} \end{array} \right) \quad (18)$$

Mathematically, it is written in the following form:

$$f^{(\text{posterior})}(\beta, m_c) = \frac{\text{Like}(A, T_i | \beta, m_c) f^{(\text{prior})}(\beta, m_c)}{\iint \text{Numerator } dm_c d\beta} \quad (19)$$

The denominator in the above formula is necessary in order to guarantee that the posterior density function  $f^{(\text{posterior})}(\beta, m_c)$  is in fact a probabilistic one, that is, its integral over the entire domain is equal to the unity.

In this paper, the prior distribution is assumed to be:

$$f^{(\text{prior})}(\beta, m_c) = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(m_{c1} - m_{c2})} \quad (20)$$

The only information content in the above prior is that the true pair  $(\beta, m_c)$  can assume any point in the square bounded by  $\beta_1, \beta_2, m_{c1}$  and  $m_{c2}$  with equal chances. For this analysis, where the interest relies just in when the first inspection is to be performed in order to maximize the information absorption, it is enough.

Now, in order to mathematically measure the amount of information gathered in the first inspection, the Shannon information will be used. It is defined as the difference between the entropy a random variable had before the outcome of some experiment is known and the entropy it has afterwards. Entropy is a measure of the uncertainty about the outcomes of a R. V., and in the case of a discrete random variable, the entropy is the mean number of bits necessary to differentiate all its possible outcomes. In the case of a continuous random variable  $Z$ , it is defined as:

$$\text{Entropy}(Z) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \ln(f(z)) dz \quad (21)$$

where the base of the logarithm is immaterial. The amount of information the knowledge of experimental results {Exp} contain is given by:

$$\begin{aligned}
 \text{Info}(\{\text{Exp}\}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \ln(f(z)) dz \\
 &- \left( - \int_{-\infty}^{+\infty} f(z|\{\text{Exp}\}) \ln(f(z|\{\text{Exp}\})) dz \right) \quad (22)
 \end{aligned}$$

The information gained when the event  $A$  becomes known after the first inspection is performed at time  $T_i$  is evaluated as:

$$\begin{aligned}
 \text{Info}(A, T_i) &= \int_{m_{c1}}^{m_{c2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f^{(\text{posterior})}(\beta, m_c) \\
 &\cdot \ln(f^{(\text{posterior})}(\beta, m_c)) - f^{(\text{prior})}(\beta, m_c) \\
 &\cdot \ln(f^{(\text{prior})}(\beta, m_c)) d\beta dm_c \quad (23)
 \end{aligned}$$

The above formula gives the information that the

results of the first inspection contain. However, the first inspection time is the optimization variable, that is, the outcomes of the inspection are not known yet. Therefore, when optimizing the information obtainable, several criteria are possible. This paper will optimize the mean information, averaging the last equation through all possible inspection result outcomes, supposing that the true values of the unknown parameters are  $\beta = \beta_{\text{true}}$  and  $m_c = m_{\text{true}}$ .

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Info}(T_i)} &= \sum_{n_1=0}^M P[n_1 \text{ out of } M | \beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}] \\
 &\cdot \int_0^{+\infty} \dots \iint \text{Info}_2(A, T_i) f_{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}} \\
 &\cdot (a_1, a_2, \dots, a_{n_1} | \beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}) da_1 \dots da_{n_1} \quad (24)
 \end{aligned}$$

where  $P[n_1 \text{ out of } M | \beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}]$  is the probability that  $N_i = n_1$  elements out of  $M$  are found defective, and  $f_{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}}(\cdot)$  is the probability density distribution of the crack sizes given that cracks exist in  $n_1$  elements. The numerical evaluation of the above formula is very time consuming, even when considering structures with a small number of critical elements. Since the interest relies in when the first inspection should be performed to obtain maximum information, and not in the exact value of this information, the above formula will be consistently simplified by employing the means of  $N_i$  and of the crack size  $A$  at the time of first inspection  $T_i$ :

$$\overline{\text{Info}(T_i)} \cong \text{Info}(B, T_i) \quad (25)$$

where the event  $B$  is given by:

$$B = \left\{ \begin{array}{l} E[N_i | \beta, m_c] \text{ elements are found cracked} \\ \text{with crack sizes all equal to } a = E[A | \beta, m_c] \end{array} \right\}$$

### 5. Probability density function for the crack sizes detected in the first inspection

As noted in the previous section, it is necessary to know the probability density function of the detected crack sizes at the first inspection and the mean number of elements found defective.

The probability that a crack of size between  $a$  and  $a + da$  is found in a non-failed element, is obtained from eq.(16) setting  $T_i = 0$  and  $T_j = T_i$ . Therefore, the probability that a cracked element is found is simply given by:

$$P \left[ \begin{array}{l} \text{element found} \\ \text{cracked at } T_i \\ \text{but not failed} \end{array} \middle| \beta, m_c \right] = \int_{a_0}^{+\infty} p_1(a, T_0, T_i | \beta, m_c) da \quad (26)$$

It is readily seen that in eq.(24), the probability that  $N_i = n_1$  elements out of  $M$  are found cracked follows a binomial distribution. Its mean is:

$$E[N_i | \beta, m_c] = M \times P \left[ \begin{array}{l} \text{element found} \\ \text{cracked at } T_i \\ \text{but not failed} \end{array} \middle| \beta, m_c \right] \quad (27)$$

The mean crack length of the detected cracks is:

$$E[A | \beta, m_c] = \frac{\int_{a_0}^{+\infty} a \times p_1(a, T_0, T_i | \beta, m_c) da}{P \left[ \begin{array}{l} \text{element found} \\ \text{cracked at } T_i \\ \text{but not failed} \end{array} \middle| \beta, m_c \right]} \quad (28)$$

Eq.(27) and (28) then are substituted in eq.(25) to obtain  $\overline{\text{Info}}(T_1)$ .

### 6. Loss function used to locate the optimum first inspection time

It is possible to relate the entropy about an uncertain parameter and the probability of taking a wrong decision concerning its true value, as is shown in 17). Since the more information is collected entropy lessens, it is clear that some utility can be attached to it. In this work, it is supposed that the utility associated to some amount of information is proportional to its numerical value, except when the structure fails as a whole. In this last case, the utility is supposed to be zero. In mathematical terms:

$$\begin{aligned} \text{Util}(T_1|\beta, m_c) &= \overline{\text{Info}}(T_1) \times R_s(T_1|\beta, m_c) \\ &\quad + 0 \times (1 - R_s(T_1|\beta, m_c)) \\ &= \overline{\text{Info}}(T_1) \times R_s(T_1|\beta, m_c) \end{aligned} \quad (29)$$

Rather than using the total probability theorem to integrate out  $\beta$  and  $m_c$  from eq.(29), and then to directly optimize the resulting utility function with respect to  $T_1$ , in this paper, a general measure of loss is to be minimized.

The loss function is defined as fraction of utility that is lost, due to non-optimality in the choice for the first time inspection.

Concretely, if the true value of the parameters  $\beta$  and  $m_c$  were known, the utility given by eq.(29) could be fully optimized. Suppose the optimum point corresponds to time  $T_1^*$  and the maximum utility is equal to:

$$\text{Util}(T_1^*|\beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}) = \max_{T_1 > 0} [\text{Util}(T_1|\beta_{\text{true}}, m_{\text{true}})] \quad (30)$$

Also, for a given pair  $(\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}})$  assumed at the design stage, it is possible to find another time  $T_1^{**}$  for which the utility is optimized:

$$\begin{aligned} \text{Util}(T_1^{**}|\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}) \\ = \max_{T_1 > 0} [\text{Util}(T_1|\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}})] \end{aligned} \quad (31)$$

The difference

$$\begin{aligned} L(\{\beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}\}, \{\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}\}) \\ = \text{Util}(T_1^*|\beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}) - \text{Util}(T_1^{**}|\beta_{\text{true}}, m_{\text{true}}) \end{aligned} \quad (32)$$

is defined as the loss function. Now, since the true values of  $\beta$  and  $m_c$  are unknown, the loss function will be averaged using their prior joint probability density distribution. The result becomes a function of the design parameters only:

$$\begin{aligned} L(\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}) &= \int_{m_{c1}}^{m_{c2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \\ &\quad \cdot L(\{\beta, m_c\}, \{\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}\}) \\ &\quad \cdot f_{\beta, m_c}^{(\text{prior})}(\beta, m_c) d\beta dm_c \end{aligned} \quad (33)$$

Minimizing the above function in the variables  $\beta_{\text{design}}$  and  $m_{\text{design}}$ , it is possible to select the best design point  $(\beta_{\text{design}}^*, m_{\text{design}}^*)$ . This set is then used to fix the first inspection time  $T_1$  by using eq.(31).

### 7. Numerical results

An application of the proposed method is shown. In

Table 1 it is shown the numerical values that are considered constant in the example. The true values of the parameters considered uncertain,  $\beta$  and  $m_c$ , as well as their ranges are shown in Table 2.

As it was already discussed, the degree of belief associated with them is uniformly distributed. Using the true values, the amount of information gathered in the first inspection is calculated by eq.(25) and plotted in figure 1. Note that if the inspection occurs too early, the information level is low because, as it is expected, no cracks are found and therefore no new fact is uncovered. Also, past a point, the amount of information starts to decrease. This is because the number of combinations of  $\beta$  and  $m_c$  that can lead to the results of an inspection becomes too numerous, and as a consequence, the likelihood function eq.(15) becomes blunt.

The loss function eq.(33) is plotted in Figure 2. From it, the design point  $(\beta_{\text{design}}, m_{\text{design}}) = (0.7, 1.5 \times 10^{-7})$  is obtained. Substituting it back into eq.(31), the best

Table 1 Constant values used in the example. Units: SI, otherwise stated

# GENERAL		# CRACK PROPAGATION	
number_of_critical_elements	10.0	initial_crack_size	1.0e-2
max_time (years)	15.0	mean_crack_propag_coef_c	(see text)
cycles_per_year	1.0e6	cov_crack_propag_coef_c	0.1
		crack_propag_k0	32.6e6
		crack_propag_expo_m	3.0
# STRENGTH AND STRESS		# CRACK INITIATION: Miner's rule	
ult_strength	371.0e6	weibull_alfa	2.0
crit_stress_intensity_factor	100.0e6	weibull_beta	(see text)
mean_stress	100.0e6		
stress_variance	4.51e14		
# DETECTION PARAMETERS		# WOHLER'S LAW	
detect_d	46.2	fatigue_k	0.9e12
min_detectable_crack	1.0e-2	fatigue_p	3.0

Table 2 Uncertain parameters. Units: SI, otherwise stated

uncertain parameter	true value	range
$\beta$	0.9	0.5-1.5
$m_c$	$0.8 \times 10^{-7}$	$0.7 \times 10^{-7}$ - $1.8 \times 10^{-7}$

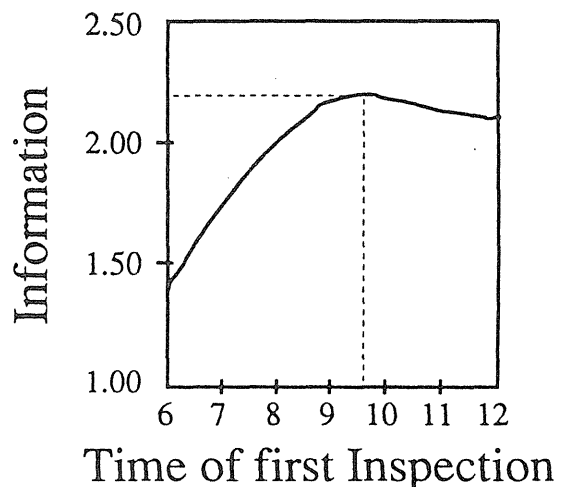


Fig. 1 Information gathered

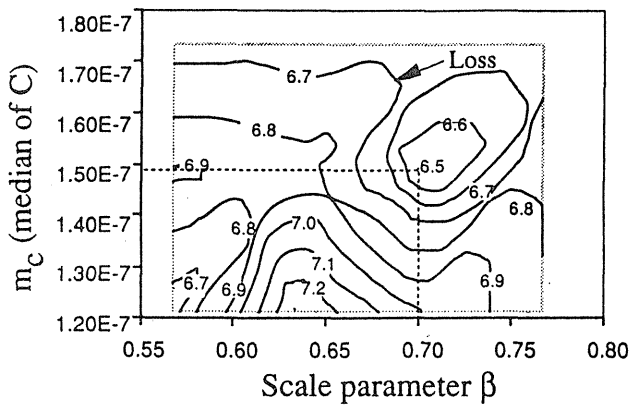


Fig. 2 Expected loss function

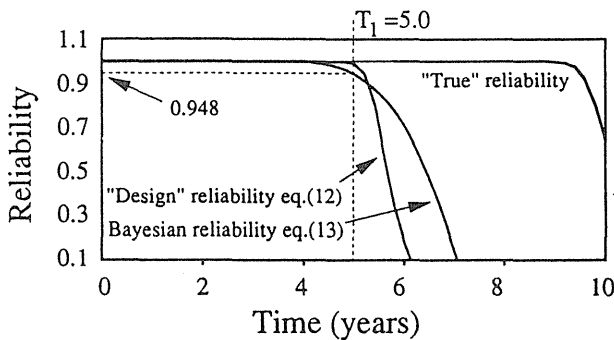


Fig. 3 Reliability as a function of time

time to carry out the first time is calculated to be  $T_1^{**} = 5.0$  years.

It would be interesting to verify the structural reliability at  $T=5.0$ . Figure 3 shows the structural reliability as a function of time obtained by substituting true values of the unknown parameters into eq.(12), or by using the specified flat prior (table 2) in eq.(13). Note that the first case corresponds to removal of all uncertainty. Now, if carrying out the first inspection at  $T=5.0$  is considered good, will depend if the decision maker finds the obtained reliability level satisfactory or not. In other words, this work proposes a new criterion to select the first inspection time based on maximization of to-be-collected amount of information, but if it is applicable to one's particular case or not, it still depends on engineering judgement. Further, it must be noticed that the time  $T_1$  could be made smaller if better inspection procedures were employed.

### 8. Conclusions

In this paper, a criterion based on maximization of to-be-collected amount of information was proposed to select the first inspection time. This criterion can be useful if the calculated time corresponds to acceptable reliability levels, or in other words, if it results earlier than times set by other criteria such as minimum cost or

maximum reliability, which in general render late first inspection times.

### References

- 1) Yang J. N., Trapp W. J.: Reliability Analysis of Aircraft Structures under Random Loading and Periodic Inspection. AIAA Journal V. 12, N. 12, 1974
- 2) Itagaki H., Yamamoto N.: Bayesian Analysis of Inspection on Ship Structural Members. Proceedings of ICOSSAR'85 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, pp.(III-533) - (III-542)
- 3) Fujimoto Y., Swilem A. M., Iwata M., Nagai K.: Inspection Planning for Deteriorating Structures Based on Sequential Cost Minimization Method. J. Soc. Naval Architects, V. 170, 1991
- 4) Cramer E. H., Lars H. H.: A Maximum Utility Model for Structures Subject to Fatigue Crack Growth. OMAE 1991, V. 2 Safety and Reliability ASME
- 5) Dalane J. I., Skjong R., Lotsberg I.: Optimal Fatigue Design of Offshore Structures. Proceedings OMAE'1990, V. 2, pp. 412-421. Houston, TX, 1990
- 6) Deodatis G., Fujimoto Y., Ito S., Spencer J., Itagaki H.: Non-Periodic Inspection by Bayesian Method I. Probabilistic Engineering Mechanics V. 7, pp. 191-204, 1992
- 7) Fujimoto Y., Itagaki H., Ito S., Asada H., Shin-ozuka M.: Bayesian Reliability Analysis of Structures with Multiple Components. Proceedings ICOSSAR 89, San Francisco 1989, pp. 2143-2146
- 8) Itagaki H., Ito S., Yamamoto N.: Bayesian Reliability Analysis for Evaluating In-Service Inspection. Current Japanese Materials Research V. 5, Nakagawa T., Ishikawa H., Tsurui A. (eds), Elsevier Applied Science, London, 1989
- 9) Rolf S., Rune T.: Rational Methods for Fatigue Design and Inspection Planning of Offshore Structures. Marine Structures, V. 4, pp. 381-406, 1991
- 10) Sørensen J. D.: Reliability - Based Inspection Planning for Structural Systems. Proceedings of IFIP5 WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, Elsevier, 1993
- 11) Sobczyk K., Spencer B. F. Jr.: Random Fatigue. Academic Press, Boston, 1992
- 12) Klir G. J., Folger T. A.: Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. Prentice-Hall International, 1988
- 13) Beaumont G. P.: Intermediate Mathematical Statistics. Chapman and Hall Ltd, London, 1980
- 14) Shannon C., Weaver W.: The Mathematical Theory of Communication. The University of Illinois Press, 1967
- 15) Kawano A., Itagaki H., Ishizuka T.: Submitted to the Japanese Society of Naval Architects, 1994
- 16) Sander P., Bardoux R. (eds): Bayesian Methods in Reliability. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991
- 17) Guisau S.: Information Theory with Applications. McGraw-Hill inc. New York, 1977