539.4.013：539.373

日本機械学会論文集(A編)
48巻433号(昭57-9)

J積分の板厚効果に関する一考察*

三好俊郎**，白鳥正樹***
Toshiro MIYOSHI, Masaki SHIRATORI

Key Words: Fracture, Material Testing, J-Integral, Thickness Effect, Plastic Constraint

1. 緒　言

いわゆる線形破壊力学が成立する小規模降伏の範囲では，平面ひずみ破壊じん性値 K_{Ic} を決定する際の板厚効果についてかなりの研究が行われており，K_{Ic} 破壊じん性試験法においては板厚に関して次式を満足しなければならないという厳しい制約が設けられている[1].

$$B \geqq 2.5(K_{Ic}/\sigma_Y)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに B は試験片の板厚，σ_Y は引張りの降伏応力を表す．これは基本的にはき裂先端の塑性域が十分に小さくて（板厚の約 50 分の 1），板厚方向の変形が拘束されるための条件として定められたものである．一方大規模降伏および全面降伏の範囲まで拡張した J_{Ic} 試験法においては，板厚に関する制約はかなり緩和され，ASTM E24 タスクグループの提案[2]によれば次式を満足すればよいとされている．

$$B \geqq 25(J_{Ic}/\sigma_{flow}) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに σ_{flow} は材料の変形抵抗を表し，通常 $\sigma_{flow}=(\sigma_u+\sigma_Y)/2$（$\sigma_u$：引張強さ）によりその値を定めるものとする．この式は J_{Ic} 試験法においては，き裂の発生点を何らかの方法で検出するので，板厚中央におけるき裂が発生する領域の大きさ(process zone size)の範囲にわたって平面ひずみの条件が満足されればよいという考えから導かれたものである[3].

一方 ASTM の推奨する J_{Ic} 試験法においては，3点曲げあるいは CT 試験片を用いて得られた唯1本の荷重-変位曲線から，それぞれ Rice の式[4]あるいは Merkle-Corten の式[5]によって J 積分が評価される．したがって J_{Ic} 試験において求められる荷重-変位曲線は板厚の影響を受けており，この点に関してまだ考察の余地があるように思われる．そこで本報では主として塑性拘束という観点から，板厚が J 積分におよぼす影響について考察を行った．

* 昭和54年4月5日　第56期通常総会講演会において講演，原稿受付　昭和55年9月27日.
** 正員，東京大学工学部（〒113 東京都文京区本郷 7-3-1).
*** 正員，横浜国立大学工学部（〒240 横浜市保土ケ谷区常盤台 156).

2. 有限要素法による平面応力解析と平面ひずみ解析の比較

著者らはすでに3点曲げ[6]，小形引張り（CT)[7]，および片側き裂（SEN）試験片[8][9]の平面ひずみ解析を有限要素法により行い，各種の J 積分評価式との比較検討を行ってきた．これは J_{Ic} 破壊条件に基づく破壊形態が本質的に平面ひずみ状態における破壊であるとの認識に基づくものである．しかし板厚効果を考えるとき，板厚中央部では平面ひずみ状態が支配的であるのに対して，表面近傍では平面応力状態が支配的となる．したがって本質的には三次元問題としての取扱いが必要となるが，現段階では解析能力の点で無理があるので，まず第1段階として平面応力と平面ひずみ解析の結果を比較することにより，定性的な知見が得られるものと考えられる．そこで本節では有限要素法により平面応力解析を行い，平面ひずみ解析の結果と比較検討する．

まず J 積分の経路独立性が保証されている全ひずみ理論に従う材料に対して，応力-ひずみマトリックス $[D^p]$ を導く．除荷を伴わない負荷径路に対しては，全ひずみ理論とひずみ増分理論に基づく解析とで，J 積分の値にほとんど差のないことが平面ひずみ問題に対して立証されているので[6]，全ひずみ理論に基づく解析結果も十分に実用材料にあてはまるものと考えることができる．

全ひずみ理論に基づく構成方程式は[10]

$$\varepsilon_{ij}'=\left(\phi+\frac{1}{2G}\right)\sigma_{ij}', \quad \phi=\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \quad \cdots\cdots(3)$$

ここで ε_{ij}'：偏差ひずみ，σ_{ij}'：偏差応力，$\bar{\varepsilon}^p$：相当塑性ひずみ，$\bar{\sigma}$：相当応力，G：横弾性係数である．ここで2直線近似で表されるような線形硬化則に従う材料を仮定すると，

$$C=\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\bar{\sigma}}=\frac{1}{H'} \quad \cdots\cdots(4)$$

により定義される加工硬化率 H' は荷重段階に依存せず常に一定となる．このように仮定された材料に対して，平面応力の場合の応力増分 $\lfloor d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy} \rfloor$ とひ

ずみ増分 $\lfloor d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\gamma_{xy} \rfloor$ の関係は次の形となる．

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/ED+C/D & \nu/ED+C/2D & 0 \\ \nu/ED+C/2D & 1/ED+C/D & 0 \\ 0 & 0 & G/(3GC+1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$D=\left(\frac{1+\nu}{E}+\frac{3}{2}C\right)\left(\frac{1-\nu}{E}+\frac{C}{2}\right)$$

あるいは簡単に $\{d\sigma\}=[D^p]\{d\varepsilon\}$

ここに E：ヤング係数，ν：ポアソン比である．この $[D^p]$ マトリックスを用いて弾塑性解析を行い，J 積分を評価する方法は，すでに平面ひずみ解析において述べた方法と同じである[6]．

解析の対象とした材料は常温における A533B 鋼を想定し，その機械的性質を以下のように与えた．

$E=21\,000$ kgf/mm^2

$\nu=0.3$

$\sigma_Y=49$ kgf/mm^2

$H'=E/100=210$ kgf/mm^2

はじめに図2に示す標準の3点曲げ試験片（$a/W=0.5$，a：き裂長さ，W：試験片幅）を図1に示すように定ひずみ三角形要素に分割し（145 節点，241 要素），平面応力解析と平面ひずみ解析を行って両者を比較した．図2に解析の結果得られた荷重－荷重点変位図（P/B-Δ 曲線）を示す．ただし縦軸は試験片の単位厚さ当たりの荷重 P/B を表している．また図中 G.Y. で示される点は全面降伏の開始点を表す．P/B-Δ 曲線は平面応力と平面ひずみとで大きな差のあることが認められる．次いでこれらの P/B-Δ 曲線を用いて Rice の式[4]

$$J=\frac{1}{b}\int_0^{\Delta}\left(\frac{P}{B}\right)d\Delta, \quad b=W-a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

により求めた J 積分の値を図3に示す．P/B-Δ 曲線が異なるので，J 積分の値も平面応力と平面ひずみとで大きな差が生じている．一般の有限の板厚の試験片では板厚中央部で平面ひずみが，また表面において平面応力が支配的であるから，この試験片から得られる P/B-Δ 曲線および J-Δ 曲線は，それぞれ図2および図3において平面応力と平面ひずみで表される曲線の中間に来るものと考えられる．しかも板厚の厚いもの程平面ひずみの曲線に近く，薄くなるに従って平面

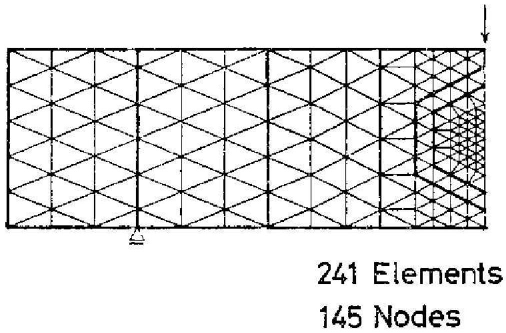
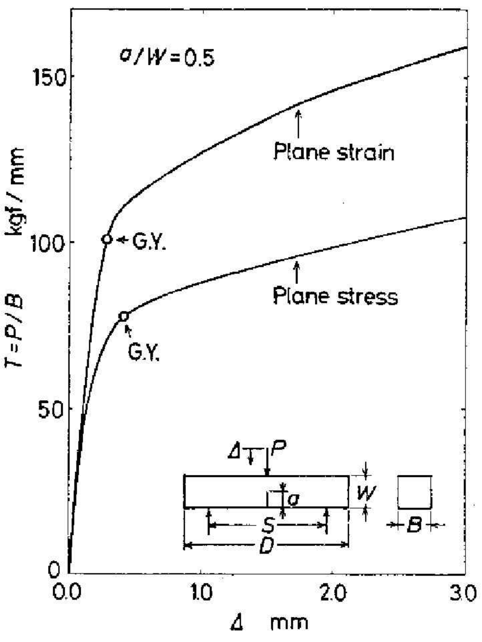


図 1　3点曲げ試験片の要素分割 ($a/W=0.5$)



$a/W=0.5$, $W=20$ mm, $D=110$ mm, $S=110$ mm

図 2　荷重－荷重点変位図

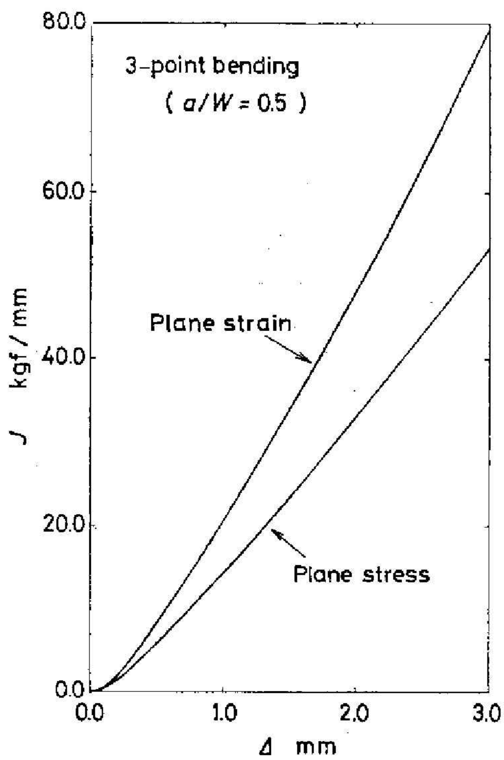


図 3　J 積分－荷重点変位図

応力の曲線に近づくものと思われる．

図4は図2および図3の荷重および J 積分について，平面ひずみと平面応力の条件下における計算値の比，P_I/P_s および J_I/J_s をプロットして示したものである．ここに下付添字の I および s はそれぞれ平面ひずみおよび平面応力に対応する値であることを示す．図から $\Delta>0.5$ mm の範囲，すなわち変形の十分にすすんだ範囲（全面降伏以後）において，これらの値がほぼ1.5に近いことがわかる．一方図中に示す実線は，3章で示す剛完全塑性体を仮定したすべり線場解析の結果得られたもので，この場合 $P_I/P_s=J_I/J_s$ =1.44 となり，有限要素解析の結果と良く一致している．

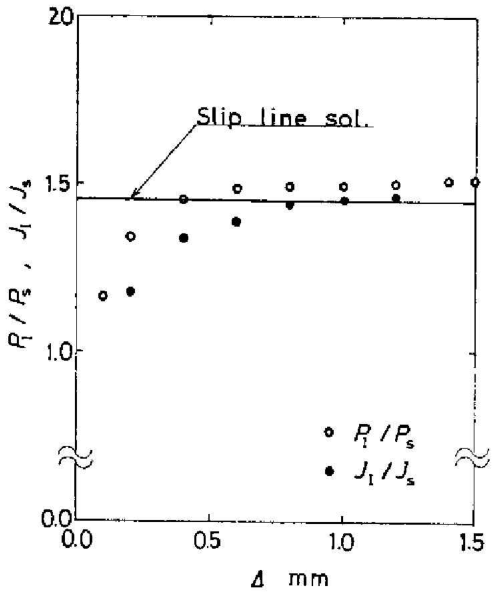
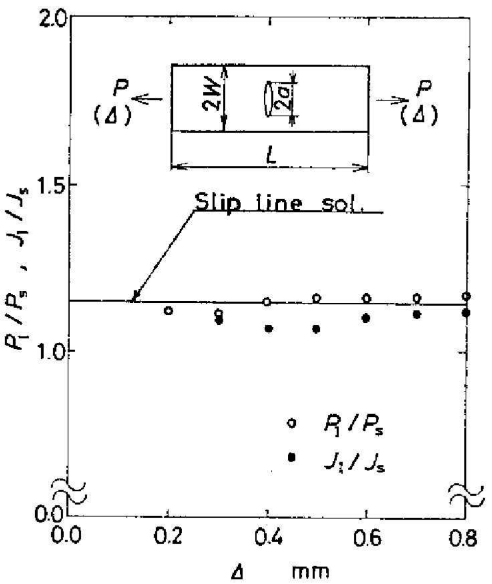


図 4 P_I/P_s および J_I/J_s（3点曲げ）



$a/W=0.5$, $W=50$ mm, $L=240$ mm

図 5 P_I/P_s および J_I/J_s（中央き裂を持つ帯板の引張り）

次に図5は同様の解析を中央き裂を持つ帯板の引張り（$a/W=0.5$）に対して行ったもので，この場合にもやはり変形の大きい範囲ですべり線場解析から得られる値 $P_I/P_s=J_I/J_s=1.15$ と良い一致を示している．しかしこの比の値は曲げの場合の 1.44 とは異なっており，これは主として塑性拘束の影響を受けているためであると考えられる．

3. 剛完全塑性体の平面応力解析と平面ひずみ解析の比較

以上見た通り有限要素法による弾塑性解析の結果と，剛完全塑性体を仮定したすべり線場解析の結果は，全面降伏以後の変形の大きい範囲で良く一致しているので，本節では剛完全塑性体のすべり線場解析を行い，各種試験片の P_I/P_s および J_I/J_s を求める．このような簡単化を行うことにより結果を陽な形に求めることができ，板厚効果におよぼす諸因子の影響をいっそう明りょうにできると考えたためである．

3・1 3点曲げ 平面ひずみ状態の3点曲げに対する塑性拘束率 β は Green と Hundy[11] のすべり線場解析の結果から $a/W=0.5$ に対して $\beta=1.25$ $(2k/\sigma_Y)$ で与えられる．一方平面応力においては塑性拘束は存在しないから，図1に示す3点曲げ試験片に対する全面降伏荷重をそれぞれ平面応力で P_s，平面ひずみで P_I により表し，式（6）を用いると，

$$\frac{J_I}{J_s}=\frac{P_I}{P_s}=\beta=1.25\frac{2k}{\sigma_Y} \quad\cdots\cdots(7)$$

ここに k はせん断の降伏応力で，Tresca 材に対しては $2k/\sigma_Y$ の値は 1.0 となり，Mises 材に対しては $2/\sqrt{3}=1.15$ となる．したがって Mises 材に対しては式（7）の値は 1.44 となり，この結果が図4にプロットされている．

3・2 小形引張り（CT）試験片 CT 試験片の J 積分評価式としては，板厚如何にかかわらず一般に Merkle-Corten の式[5]

$$J=\frac{1}{b}(\eta_r\phi_r+\eta_c\phi_c) \quad\cdots\cdots(8)$$

が用いられている．ここで ϕ_r は P/B-Δ 曲線の下の面積すなわち単位厚さ当たりのひずみエネルギを表し，一方 ϕ_c は $\phi_c=(P/B)\Delta-\phi_r$ すなわち単位厚さあたりのコンプリメンタリエネルギを表す．また η_r, η_c はき裂深さに依存する定数である．今剛性完全塑性体を考えているので，$\phi_r=(P/B)\Delta$, $\phi_c=0$ となり

$$J=\eta_r\frac{P\Delta}{bB} \quad\cdots\cdots(9)$$

が成り立つ．したがって同じ荷重点変位 Δ に対して，平面ひずみと平面応力の J 積分の比はやはり

$$\frac{J_I}{J_s}=\frac{P_I}{P_s}=\beta \quad \cdots\cdots(10)$$

となり，塑性拘束率 β に等しい．

ところで CT 試験片の全面降伏荷重 P_I（平面ひずみ）および P_s（平面応力）は，それぞれに対するすべり線場解析の結果から

$$\left.\begin{aligned} P_I&=2kb\left[2.705\left[-\left(\frac{W}{b}-1\right)+\left\{\left(\frac{W}{b}-1\right)^2+0.740\left(\frac{W}{b}-\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2}\right]-1\right]\\ P_s&=\sigma_Y b\left[-\left(\frac{W}{b}-1\right)+\left\{\left(\frac{W}{b}-1\right)^2+\left(\frac{W}{b}-\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2}\right]-1\right]\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

で与えられる[12]．したがって例えば $a/W=0.5$ および 0.6 のとき，式 (10) の β の値はそれぞれ 1.45 および 1.43 となる．

3・3 引張り試験片　（1） 中央き裂試験片

板幅 $2W$，き裂長さ $2a$，リガメント長さ $2b$ の中央き裂を持つ帯板の引張りにおける全面降伏荷重は[13]

$$\left.\begin{aligned} &\text{平面応力に対して}\\ &P_s=\sigma_Y 2bB\\ &\text{平面ひずみに対して}\\ &P_I=2k2bB\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

一方その J 積分は

$$J=-\frac{1}{B}\left\{\frac{\partial(P\Delta)}{\partial(2a)}\right\}_\Delta \quad \cdots\cdots(13)$$

により与えられるから，同じ Δ の値に対する平面応力と平面ひずみの J 積分の比は，式 (12) を式 (13) に代入して

$$\frac{J_I}{J_s}=\frac{P_I}{P_s}=\beta=\frac{2k}{\sigma_Y} \quad \cdots\cdots(14)$$

となる．Mises 材に対しては上式の値は 1.15 となり，この結果が図 5 に示されている．

（2） 両外側き裂試験片　板幅 $2W$，き裂長さ a，リガメント長さ $2b$ の両外側き裂を持つ帯板の引張りにおける全面降伏荷重は

平面応力に対して

$$P_s=2k2bB \quad \cdots\cdots(15\cdot a)$$

平面ひずみに対して

$a/W>0.884$ のとき，Plandtl[14] のすべり線場から

$$P_I=2k(1+\pi/2)2bB \quad \cdots\cdots(15\cdot b)$$

$0.884\geqq a/W\geqq 0.770$ のとき，Ewing と Hill[15] が提案した上界すべり線場の解から

$$\left.\begin{aligned} P_I&=2k\left(1+\ln\frac{1+w}{2}\right)2bB\\ w&=W/(W-a)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15\cdot c)$$

したがって平面応力と平面ひずみの J 積分の比は，式 (15) を式 (13) に代入して

$a/W>0.884$ のとき

$$J_I/J_s=P_I/P_s=\beta=1+\pi/2 \quad \cdots\cdots(16\cdot a)$$

$0.884\geqq a/W\geqq 0.770$ のとき

$$J_I/J_s=P_I/P_s=\beta=1+\ln\frac{1+w}{2} \quad \cdots\cdots(16\cdot b)$$

以上見たように，考えたすべての場合に対して，同じ荷重点変位 Δ に対する平面応力と平面ひずみにおける J の値の比 J_I/J_s は，それぞれに対する全面降伏荷重の比すなわち塑性拘束率 β に等しい．

4. 三次元積層板モデル

一般に式（1）の条件を満足しない状態で破壊じん性試験を行うと（J_{Ic} 試験がこれに相当する），破壊はまず板厚の中央部で発生し（平面ひずみ破壊），次いで外力の上昇に伴って板の表面近傍にせん断縁の形成（平面応力破壊）が見られる．J_{Ic} 試験法においては中央部における平面ひずみ破壊の発生を何らかの方法で検出して，そのときの P-Δ 曲線から J_{Ic} を求めるのが一般的である．

ここで J 積分の板厚効果について考察するために，Krafft らの提案しているモデル[16] と同様にして以下のような三次元積層板モデルを仮定する．すなわち図 6 に示すように，板厚 B のうち中央部の $(1-s)B$ の部分に平たんな平面ひずみ破壊が発生し，残りの両外側表面 $c=sB/2$ の部分にせん断による平面応力破壊が生じるものとする．また簡単のためこの平面応力から平面ひずみへの遷移領域を無視した一種の積層板を考え，各層は剛完全塑性体の P-Δ 曲線を描くものと仮定する．このように仮定するとこの三次元積層板の

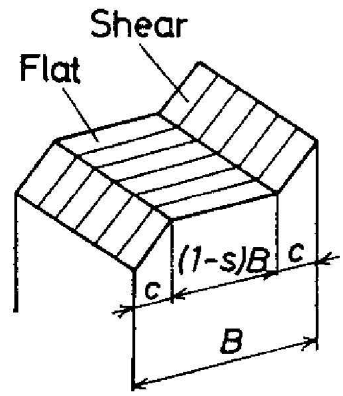


図 6　三次元積層板モデル

全面降伏荷重は，それぞれの層における全面降伏荷重 P_I，P_s を用いて次式で与えられる．

$$P=(1-s)P_I+sP_s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

前節における考察と同様にして $J/J_I=P/P_I$ が成立するから

$$\frac{J}{J_I}=\frac{P}{P_I}=(1-s)+s\left(\frac{P_s}{P_I}\right)$$

$$=\frac{1}{\beta}+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(1-s) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここに J_s および J_I はこの積層板を Δ だけ変位させたとき，それぞれ板厚の表面および内部において実現されている J の値を表し，これらは前節で求めた J_s と J_I に同じである．一方，式 (18) の J は同じ Δ に対する三次元積層板の P-Δ 曲線から得られる見かけの J の値を表している．また $1-s$ は板厚に占める平面ひずみ破壊が生じる層の厚さの比を示しており，$1-s=0$ のときは完全な平面応力状態すなわち非常に薄い板を表し，$1-s=1$ のときは完全な平面ひずみ状態すなわち非常に厚い板を表している．この意味で $1-s$ は“平面ひずみ率”とでも呼ばれるべきパラメータである．前節で考察した各試験片について式 (18) をプロットすると図7のようになる．

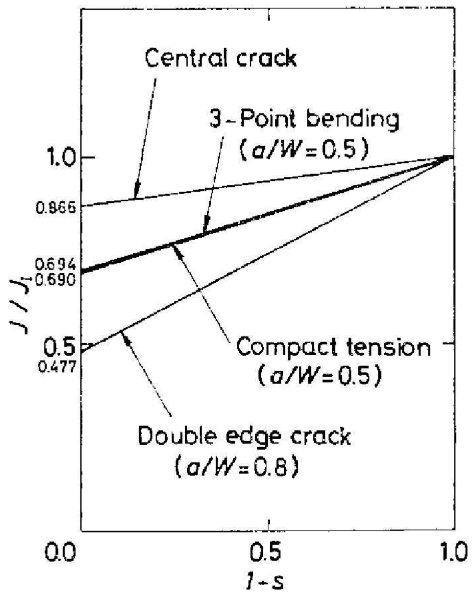


図 7　平面ひずみ率 $(1-s)$ と見かけの J (Mises 材)

一般に板厚 B の試験片に外力を負荷すると板厚中央部において $J_I=J_{Ic}$ の条件が満足されたときにその部分で破壊が発生し，これを何らかの方法で検知してそのとき得られる見かけの J 値すなわち式 (18) で与えられるような J の値をもって材料の J_{Ic} であると考えている．しかし試験片全体の平均値としての J 積分と板厚中央部に生じている J_I の値とは，式 (18) で示されるように一般に $J/J_I<1$ であってこれらの値が等しくはならない．たとえば $1-s=0.5$ の場合の見かけの J は図7より

3点曲げ試験片 $(a/W=0.5)$ に対して

$J/J_I=0.847$

CT 試験片 $(a/W=0.5)$ に対して

$J/J_I=0.845$

中央き裂試験片に対して

$J/J_I=0.933$

深い両外側き裂試験片 $(a/W=0.8)$ に対して

$J/J_I=0.738$

となって真の J_{Ic} よりも J を過小評価することになる．

実際問題としては板厚 B をどの程度に厚くすれば $J\cong J_{Ic}$ とみなせるかが問題である．図6から $s=2c/B$ であるから，これを式 (18) に代入すると

$$J/J_I=1-2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(c/B) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

を得る．したがって B/c を横軸にとって式 (19) を種々の試験片に対してプロットすると図8のようになる．ここで $B/c<2.0$ では $s>1$ となり，このモデルは意味を失う．横軸の B/c は板厚と平面応力破壊の生じる層の厚さの比を表しているが，ここで任意の板厚に対してせん断縁の厚さ c が板厚によらず一定であると仮定すると，図8の横軸は板厚そのものを表していることになり，この図から板厚効果は明りょうである．すなわち B/c が約5

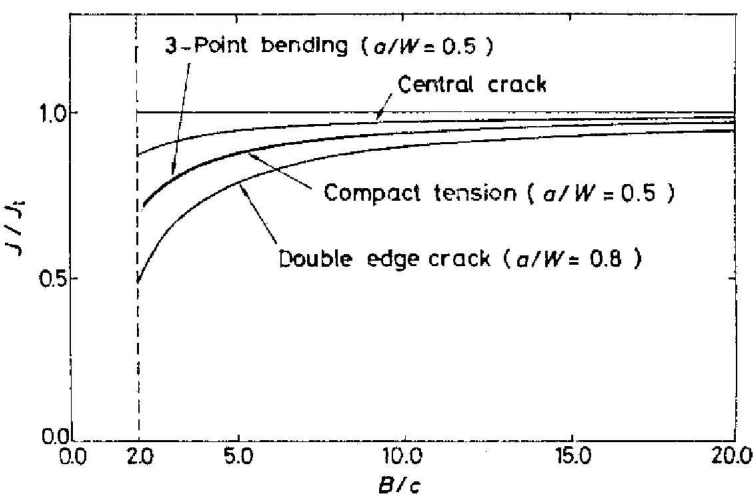


図 8　板厚と見かけの J (Mises 材)

より大きい板厚を持つ試験片では，みかけの J は3点曲げ（$a/W=0.5$）および CT 試験片（$a/W=0.5$）に対して J_{Ic} より多少低目ではあるが，ほとんど実験の誤差範囲内と考えられる値を持つことになる．しかし板厚が極端に薄い場合や両外側き裂を持つ帯板の引張りにおいては板厚効果が顕著となり，見かけの J の値は真の J_{Ic} よりかなり過小評価となる恐れがある．

5. 結　　言

ASTM の推奨する J_{Ic} 試験法においては，3点曲げあるいは小形引張試験片を用いて得られた唯1本の荷重-変位曲線から J 積分が評価される．本報ではこのようにして評価される J 積分におよぼす板厚の影響について，塑性拘束という観点から考察を行った結果以下の知見を得た．

（1） 3点曲げおよび中央き裂を持つ試験片の引張りに対して有限要素解析を行い，全面降伏荷重および J 積分の平面ひずみ状態と平面応力状態での比が塑性拘束率 β に等しいことを示した．

（2） 次いですべり線場解析の結果に基づき，3点曲げ，小形引張り，中央き裂および両外側き裂を持つ帯板の引張りに対して，有限要素解析の場合と同じ結果が導かれることを陽な形で示した．

（3） 上記（2）の結果に基づき，表面は平面応力，内部は平面ひずみからなる三次元積層板モデルを提案した．このモデルによれば，板厚とせん断縁の厚さの比 B/c が大きい（約5以上）場合には，みかけの J は3点曲げおよび小形引張りの標準試験片に対して真の J_{Ic} より多少低目ではあるが，ほとんど実験の誤差範囲内と考えられる値を持つ．しかし B/c が2に近い場合あるいは塑性拘束率の高い試験片（深い両外側き裂を持つ帯板の引張り）では板厚効果が顕著となり，見かけの J は真の J_{Ic} よりかなり過小評価となる恐れがある．

文　　献

（1） ASTM Standard E 399-74 (1974).

（2） Clarke, G.A., ほか7名, *JTEVA*, 7-1 (1979), 49.

（3） Begley, J.A. and Landes, J.D., *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 514 (1972), 1.

（4） Rice, J.R., ほか2名, *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 536 (1973), 231.

（5） Merkle, J.G. and Corten, H.T., *Trans. ASME*, Ser. J, **94**-4(1974) 286.

（6） 三好・ほか3名, 有限要素法, (昭 51), 150, 実教出版.

（7） Miyoshi, T. and Shiratori, M. (Taplin, D.M.R. 編), *Fracture*, (1977), ICF4, Canada, 3; (1977) 273, Waterloo.

（8） 白鳥・ほか2名, 機論, **46**-407, A (昭 55), 837.

（9） 白鳥・ほか2名, 機講論, No. 790-3 (昭 54-4), 160.

(10) Hill, R. (鷲津・ほか2名共訳), 塑性学, (昭 29), 44, 培風館.

(11) Green, A.P. and Hundy, B.B., *J. Mech. Phys. Solids.*, **4** (1956), 128.

(12) 白鳥・三好, 機論, **45**-389, A (昭 54), 50.

(13) Knott, J.F., *Fundamentals of Fracture Mechs.*, (1973), 40, Butterworth.

(14) Hill, R., 文献 (10) の 251 ページ.

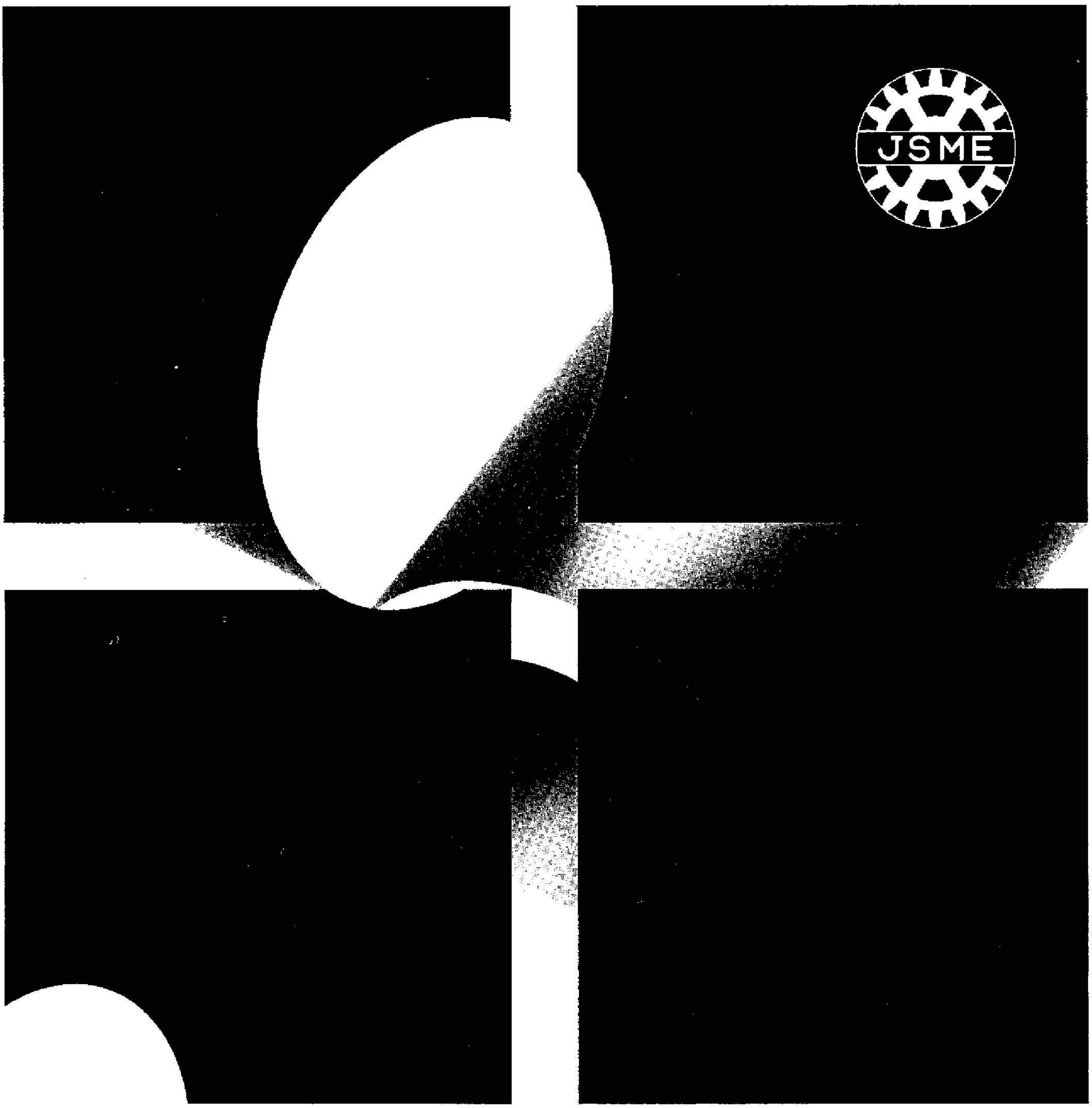
(15) Ewing, D.J.F. and Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids.*, **15** (1967), 115.

(16) Krafft, J.M., ほか2名, *Proc. Symp. Crack Propagation, Cranfield*, (1961), 8.

昭和54年4月5日　第3種郵便物認可　昭和57年9月25日発行（毎月1回・25日）　ISSN 0387－5008

昭和57年 9月　第433号　A 編

日本機械学会論文集



TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS

September, 1982

日 本 機 械 学 会