

DEAによるファンド・オブ・ファンズのポートフォリオ分析

伊 藤 豊
馬 奈 木 俊 介
松 田 あ き み

1. はじめに

近年ファンドオブファンズ（以下 FoF とする）の注目が高まっている。FoF は運用機関が複数のファンドを適切に組み合わせて新たに一つのファンドとしてまとめたものである。ファンドはもともとそれぞれの運用方針に基づき分散投資されているため、それらを多数組み合わせることでより広範囲な分散を実現してリスクを抑えることができると言われている。FoF の代表的なものとして、各ファンドへの投資パターンを低リスク型（安定型）、中リスク型、高リスク型（成長型）といったように、特定のリスクを取るよう設計されたものや、高リスクから低リスクへの資産配分の変化を時間（年齢）の経過と関連付けて自動的に調整していくものなどがあり、ともに確定拠出年金の運用対象としても注目されている。

しかし一方で問題点もいくつか指摘されている。例えばファンドの「マネジメント・フィー」や「パフォーマンス・フィー」などの手数料が二重、三重にもとられるためコストが割高になるといった問題や FoF の運用者が優秀である場合はいいがそうでない場合は適正なファンドを選択していない可能性がある¹⁾、といった問題である。したがって FoF のポートフォリオは、手数料を考慮した上でリスクが小さいだけでなくリターンが大きい、パフォーマ

ンスの優れたファンドで構築される必要がある。

そこで本稿では FoF を運用するマネージャーにとって役立つと思われる DEA (Data Envelopment Analysis) の手法を応用したファンドの評価モデルを紹介し、欧米でのデータを用いて実証結果を示す。DEA 法は、フロンティアからの乖離で企業・事業所などのいわゆる意思決定主体（以下 DMU; Decision Making Unit）の運営効率性を定量的に評価するために線形計画（LP）法の枠組みで具体的に展開したものである。本稿ではこの手法を発展させた Briec, Kerstens and Lesourd (2004) の平均分散ポートフォリオの最適化モデルを用いた実証分析を行いその有効性を示す。このモデルは、(1) 直観的にわかりやすく、(2) 対象となるファンドのリターンのヒストリカルデータがあれば分析が可能であり、(3) ファンドのリターンとリスクを同時に考慮することが可能である、といった特徴がある。

2. モデル

2-1. DEA の概略

上述したように、本稿で用いるモデルは DEA による効率性分析の考えを応用したものである。はじめに図 1, 2 を参考に効率性分析の概略を説明する。効率性とは、一般にアウトプットとインプットの比率で表され、より少な

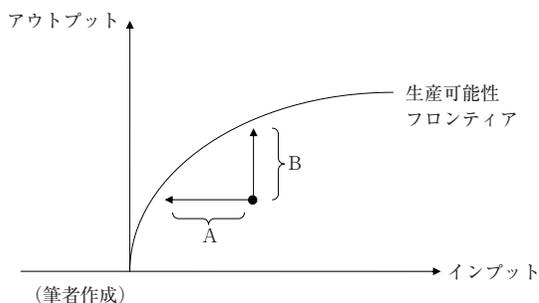


図1 Malmquist Index

いインプットでより多くのアウトプットを生産しているほど、効率性が高いと考えられる。効率指数には様々な種類があるが、ファンドパフォーマンスの分析における先行研究においては、Morey & Morey (1999) の Malmquist Index タイプのモデルを用いた分析がある。この Malmquist Index の測定にはアウトプット距離関数またはインプット距離関数という関数が用いられる。ここでいう距離とは、観察されるデータと生産可能性フロンティアの距離を意味する。アウトプット距離関数は、所与のインプットのもとでアウトプットをどれだけ増やす余地が残っているか、という観点から生産可能性フロンティアとの距離を測定 (図1で見ると B に該当) する。一方インプット距離関数は、所与のアウトプットをどれだけ少ないインプットで生産できるか、という観点から生産可能性フロンティアとの距離を測定 (図1で見ると A に該当) する。

Malmquist Index を用いるためには、アウトプット距離関数とインプット距離関数のどちらを使うかを選択する必要がある。Morey & Morey (1994) はインプットをファンドのリターンとし、アウトプットをファンドのリスクと仮定することでファンドのパフォーマンスを分析している。Malmquist Index の場合、リスクを一定にしたリターンの最大化 (図1で見ると B に該当) か、リターンを一定にしたリスクの最小化 (図1で見ると A に該当) による

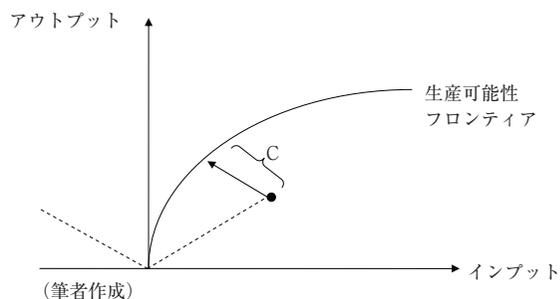


図2 Luenberger Index

パフォーマンス評価となる。しかしそれは投資家にとっても上述したファンドの運用目的からしても現実的な評価手法とは言えない。

一方、Luenberger Index は、距離関数を求める際に、インプット距離関数とアウトプット距離関数を選択する必要がない。Luenberger (1992) によって提案された短縮関数 (shortage function) によって、インプットの節約とアウトプットの増大の両方を考慮できるようになったためである (この関数は指向性距離関数 (directional distance function) としても知られる)。インプットかアウトプットのどちらかを所与とする必要が無く、図2で見ると C のように測定が可能である。よってリスクの減少とリターンの増加を同時に考慮できる Luenberger Index のほうが現実的であると考へ、本稿ではこちらを採用した。次節でより詳細な説明を行う。

2-2. Luenberger Index によるファンド分析への応用

図3を参考に本稿で用いるモデルを説明する。上述したように本稿では Luenberger Index を用いてファンドのパフォーマンスを評価する。Morey & Morey (1999) と同じくインプット (小さいほど望ましいもの) をファンドのリスクとし、アウトプット (大きいほど望ましいもの) を平均リターンとする。なお、本稿におけるリターンとリスクという概念は通常

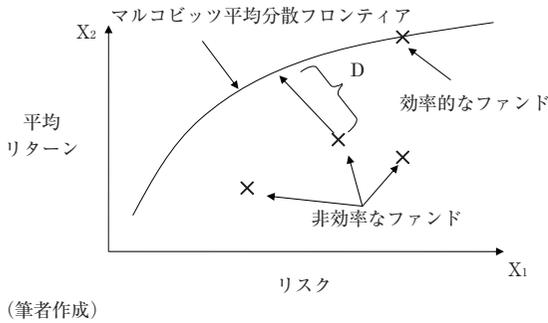


図3 Luenberger Indexによる
ファンドパフォーマンスの分析

のファイナンスにおける分析で利用されている概念を用いる。リターンとは一定期間に得られた収益をその開始時点で投資した額に対する比率(利回り)で表したものであり、本稿ではファンドの基準価格を用いる。リスクとは未来に対して予想されるその利回りの不確実性の大きさを表し、過去の利回りの分散から求められる。マルコビッツ平均分散ポートフォリオはポートフォリオを選択する際に期待収益率(リターン)の極大化とその分散(リスク)の最小化を同時に目指す多目的最大化問題として定式化したものである(Markowitz, H., 1952, 1959)。よって、図3にあるように横軸にリスク、縦軸にリターンをとってそれらを平面上にプロットしていったときに表される曲線が効率的フロンティアとなる。ここで、DMUをファンドと仮定し、効率的なポートフォリオを組んだファンドと非効率的なポートフォリオを組んだファンドが存在すると仮定する。

ここで、フロンティア上にあるファンドは効率的な運用がされており、それより下にあるものはすべて非効率的な運用がされているといえる。よってファンドごとのパフォーマンスを比較する場合、その評価はフロンティアまでの距離に近いほど高い。本稿ではLuenberger Indexをファイナンスに応用した、Briec, Kerstens and Lesourd (2004)の平均分散ポートフォリオの最適化モデルを用いてこの距離を

求め、ファンドのパフォーマンスを評価する。次節で用いたモデル式を簡潔に説明する。

2-3. 平均分散ポートフォリオの最適化モデル

Briec, Kerstens and Lesourd (2004)の平均分散ポートフォリオの最適化モデルを説明する。ファンドがポートフォリオを組む期間 t に選ぶ資産を i, j , その種類を n , 収益率を R とすると、各期間の資産ごとの期待リターンは $E[R_i^t], i \in \{1, \dots, n\}$, 平均分散行列 Ω は、 $\Omega_{i,j}^t = Cov[R_i^t, R_j^t], i, j \in \{1, \dots, n\}$ とおける。ここで、ポートフォリオに組み込む資産の比率 $x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$ はとおける。

ここで $(\sum_{i=1}^n x_i^t = 1)$ とする。ここから期間 t におけるファンドのリターンは $R^t(x^t) = \sum_{i=1}^n x_i^t R_i^t$ となるため、このファンドの期待リターンと分散は以下ようになる。

$$E[R^t(x^t)] = \mu^t(x^t) = \sum_{i=1}^n x_i^t E[R_i^t] \quad (1.1)$$

$$Var[R^t(x^t)] = E[(R^t(x^t) - \mu^t(x^t))^2] = \sum_{i,j} x_i^t x_j^t Cov[R_i^t, R_j^t] \quad (1.2)$$

マルコビッツの平均分散ポートフォリオの概念を数式で定義すると以下の式になる。

$$DR^t = \left\{ (Var, E) \in R_+^2 : \exists x^t \text{ with } Var \geq Var[R^t(x^t)], E \leq E[R^t(x^t)] \right\} \quad (1.3)$$

短縮関数は、分析においてある単位(たとえばファンド)から効率的フロンティアまでの距離を表す(Luenberger, 1995)。本研究ではBriec, Kerstens and Lesourd (2004)の平均分散ポートフォリオの最適化モデルを元に短縮関数 S_g^t をパフォーマンス指標とし

て用いる²⁾。期間 t における方向ベクトルを $g^t = (-g_V^t, g_E^t) \in (-\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 、観測されたファンドを x^t とする。このベクトル g^t を用いてファンドごとの効率値 $S_{g^t}^t$ を測定する。期間 t において $S_{g^t}^t$ はポートフォリオ x^t に対して以下のように表すことができる。

$$S_{g^t}^t(x^t) = \sup \left\{ \delta; \left(\text{Var} \left[R^t(x^t) \right] - \delta g_V^t, E \left[R^t(x^t) \right] + \delta g_E^t \in DR^t \right) \right\} \quad (1.4)$$

この式は、観測された点からマルコピッツフロンティア上に移動するために必要な方向ベクトルの係数 δ の上限値を示している。つまり $S_{g^t}^t(x^t) = 0$ ならばそのファンドは効率的であり、マルコピッツフロンティア上にあることを意味する。また、 $S_{g^t}^t(x^t) > 0$ ならばそのファンドは非効率的であることを意味し、フロンティアに対してリターンの増加とリスクの減少が同時にあと何%可能なのかを表す(図3で見るとDに該当)。よって $S_{g^t}^t(x^t)$ が0に近いほど効率的であるといえる。例えば $S_{g^t}^t(x^t) = 0.05$ のファンドであればフロンティアまで必りターンの増加とリスクの減少が5%必要であることを意味する。

本稿ではこのモデルの実用例として米国とEUの二地域で得られたファンドのデータを用いてそれぞれの地域でFoFを組んだと仮定し、同モデルを用いてカテゴリごとに $S_{g^t}^t(x^t)$ (以下PE: Portfolio Efficiency) を求め、比較を行う。

3. データ

本稿で用いるファンドデータはブルームバーク (Bloomberg, <http://www.bloomberg.com/>) から取得した。これらのデータはすべて、手数料と配当を考慮した値を用い実質化されている。利用する期間は1997年1月から2006年12月までの10年間の月ごとのデータが整合的に得られる1656本をサンプルファンドとした。

表1 各地域のファンドカテゴリと本数

| カテゴリ | ファンド数 (本) | |
|-----------------|-----------|-----|
| | 米国 | EU |
| Agg Growth | 19 | - |
| Blue Chip | 16 | 45 |
| Emerging | 37 | 80 |
| Env | 4 | 13 |
| Equity Income | - | 31 |
| Geography | 240 | 192 |
| Growth | 302 | 129 |
| Growth & Income | 46 | 113 |
| Index | 18 | 79 |
| Market | 3 | - |
| Sector | 113 | 88 |
| SRI | 29 | 33 |
| Value | - | 26 |
| 合計 | 827 | 829 |

(筆者作成)

リターンは、基準価格の各月の収益率を平均した値を使用し、リスクも同様に各期間のリターンから求めた標準偏差を用いた。

表1に米国、EUごとにファンドカテゴリとそこに含まれるファンド数を示す。Agg GrowthとはAggressive Growthのことであり、産業の市場が小さく設立まもない会社や地域を対象に投資するファンドである。分析に用いたファンド数は米国では19本で、EUでは0本である。

Blue Chipとは収益性、成長性、安定性の揃った優良企業を投資対象としたファンドである。米国においてはニューヨーク株式市場の代表的な株価インデックスであるダウ工業株30種平均に採用されている銘柄が該当する。米国では16本、EUでは45本を分析に用いた。

EmergingとはEmerging Marketのことであり、成長の初・中期段階に位置する国や地域の市場、新興成長市場(国)を対象としたファンドである。高い成長が期待されている反面、急激なインフレ、政権交代、通貨暴落などといった、政治、経済、社会情勢に関するリスク

もある。米国では37本、EUでは80本のファンドを分析に用いた。

EnvとはEnvironmentally Friendlyのことであり、評価機関によって環境に配慮していると認められている有価証券を投資対象としたファンドである。米国で4本、EUで13本を分析に用いた。

Equity & Incomeは配当の期待できる企業に主に投資してインカム・ゲインの獲得を目指すファンドである。分析に用いたファンドはEUで31本である。米国でこのカテゴリーに該当するファンドのデータは得られなかった。

Geographyは地政学リスクを主に考慮するファンドである。地政学リスクとは、特定の地域における政治や軍事的緊張が経済の行方を不透明にするリスクのことである。米国では240本、EUでは192本を分析に用いた。

Growthはキャピタル・ゲインの期待される企業を主な投資対象とするファンドである。分析に用いたファンド数は米国で302本、EUでは129本である。Growth & Incomeは安定した配当が期待できる成長企業を投資対象としたファンドである。米国では46本、EUでは116本を分析に用いた。

Indexとは、例えば日本においては日経平均株価や東証株価指数(TOPIX)、米国においてはダウ平均株価やS&P500といった株価指数(インデックス)と、ファンドの基準価格が同じ値動きをすることを目指した運用をするファンドのことである。通常はベンチマークとする株価指数に採用されている銘柄群と全く同様の銘柄構成を採り、各企業の株式のファンドへの組み入れ比率も、株価指数への影響度に比例した割合となっている。分析に用いたファンド数は米国では18本、EUでは79本である。

Marketとはマーケット・ニュートラル(市場中立型)のことで、市場に対して中立なポジションを取る運用手法をとるファンドのことである。分析に用いたファンド数は米国で3本である。

Sectorとは、例えば金融サービス、ヘルスケア、天然資源、テクノロジー、公益など、特定の業種や分野に投資してキャピタル・ゲインの獲得を追及するファンドのことである。米国では113本、EUでは88本を分析に用いた。

SRIとは、Socially responsible Sector fundのことで、社会的責任行動を評価機関によって認められている有価証券を投資対象としたファンドである。米国では29本、EUでは33本を分析に用いた。

Valueは、ある企業の利益や資産などから、同業他社と比べて優れているのにもかかわらず、市場に低く評価されていると思われる株に投資するファンドである。分析に用いたファンド数はEUで26本である。

カテゴリーごとのリターンとリスクの平均値を表2、表3に、それらをプロットしたものを図4、図5に示す。これらより、効率的なファンドと非効率的なファンドが存在し、効率的なフロンティアが存在していることが分かる。

4. 分析結果と考察

分析結果から得られたPEの値をカテゴリーごとに平均したものを米国、EUごとに表4、5に示す。上述したように、PEはフロンティアまで必要なリスクの減少とリターンの増加の割合である。よってカテゴリーで比較した場合、PEの値が小さいものほどパフォーマンスの高いファンドが多く含まれているといえる。

はじめに米国の結果について説明する。カテゴリーごとにみると、米国のファンドで仮定したFoFのうち最もパフォーマンスが低いものはPEが0.83のGeographyである。平均するとフロンティアまで約83%リスクの減少とリターンの増加が必要であり、フロンティアから最も離れている。また、PEの分散も他のカテゴリーに比べて小さいことから、フロンティアからの乖離が同程度であると考えられる。この結果は言い換えると他のファンドと比較した場合、同程度のリスクをとって

表2 米国ファンドのリスクとリターン平均

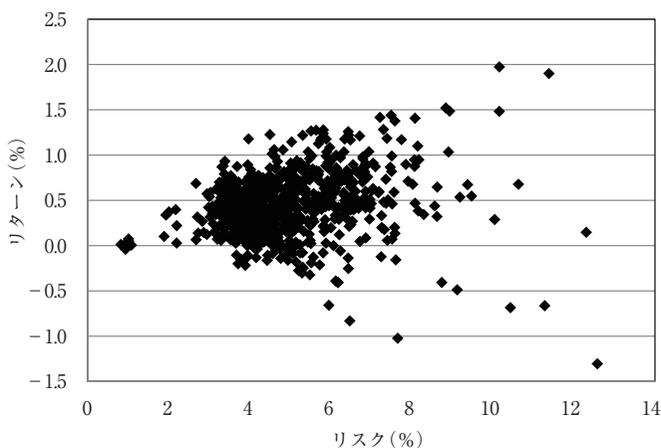
| | Agg Growth | Blue Chip | Emerging | Env | Geography | Growth | Growth & Income | Index | Market | Sector | SRI | Total |
|------|------------|-----------|----------|------|-----------|--------|-----------------|-------|--------|--------|------|-------|
| リターン | 0.45 | 0.34 | 0.70 | 0.85 | 0.51 | 0.36 | 0.26 | 0.48 | 0.65 | 0.63 | 0.11 | 0.45 |
| リスク | 6.75 | 7.24 | 6.14 | 6.75 | 4.77 | 5.21 | 4.01 | 3.94 | 4.22 | 5.39 | 3.85 | 5.04 |

(筆者作成)

表3 EUファンドのリスクとリターン平均

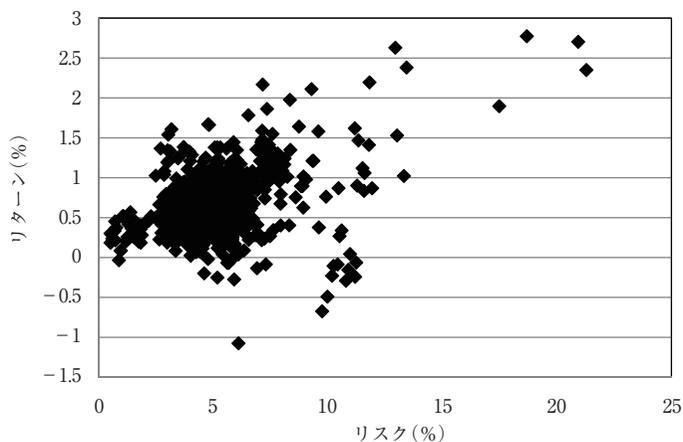
| | Blue Chip | Emerging | Env | Equity Income | Geography | Growth | Growth & Income | Index | Sector | SRI | Value | Total |
|------|-----------|----------|------|---------------|-----------|--------|-----------------|-------|--------|------|-------|-------|
| リターン | 0.48 | 0.83 | 0.52 | 0.48 | 0.60 | 0.71 | 0.61 | 0.98 | 0.66 | 0.40 | 0.71 | 0.67 |
| リスク | 4.53 | 6.77 | 5.99 | 3.50 | 5.48 | 4.54 | 4.17 | 7.89 | 5.58 | 3.60 | 4.37 | 5.27 |

(筆者作成)



(筆者作成)

図4 米国



(筆者作成)

図5 EU

表4 米国

| | PE | PE の分散 | 個数 |
|-----------------|------|--------|-----|
| Agg Growth | 0.71 | 0.29 | 19 |
| Blue Chip | 0.67 | 0.32 | 16 |
| Emerging | 0.72 | 0.32 | 37 |
| Env | 0.65 | 0.45 | 4 |
| Geography | 0.83 | 0.25 | 240 |
| Growth | 0.75 | 0.30 | 302 |
| Growth & Income | 0.70 | 0.31 | 46 |
| Index | 0.46 | 0.32 | 18 |
| Market | 0.22 | 0.14 | 3 |
| Sector | 0.82 | 0.40 | 113 |
| SRI | 0.72 | 0.29 | 29 |
| Total | 0.74 | 0.11 | 827 |

(筆者作成)

表5 EU

| | PE | PE の分散 | 個数 |
|-----------------|------|--------|-----|
| Blue Chip | 0.79 | 0.30 | 45 |
| Emerging | 0.68 | 0.36 | 80 |
| Env | 0.37 | 0.28 | 13 |
| Equity Income | 0.59 | 0.36 | 31 |
| Geography | 0.52 | 0.29 | 192 |
| Growth | 0.55 | 0.19 | 129 |
| Growth & Income | 0.73 | 0.45 | 113 |
| Index | 0.56 | 0.27 | 79 |
| Sector | 0.65 | 0.26 | 88 |
| SRI | 0.60 | 0.28 | 33 |
| Value | 0.63 | 0.29 | 26 |
| Total | 0.62 | 0.17 | 829 |

(筆者作成)

いても Geography のほうがリターンが小さい、または、同程度のリターンは得られるが、Geography のほうがリスクを大きくとっていることを意味している。このような結果となった理由として Geography の特徴と、同時多発テロの影響が考えられる。Geography は上述したように地政学リスクを主に考慮したファンドである。よって、政治や地理的条件、戦争や

大災害などが原因で景気が悪化するリスクを低く抑えようとすることから、そういったリスクがもともと小さい地域を対象に多くの地域に分散投資していると考えられる。しかし米国で2001年に起きた同時多発テロは地政学リスクが比較的小さいと考えられていた米国で発生し、その影響が広範囲に及んだため、ポートフォリオに組み込まれている銘柄の多くがマイ

ナスのパフォーマンスだったと考えられる。そのため Geography のパフォーマンスが低かったと考えられる。

米国のカテゴリーで次にパフォーマンスが低いのは Sector の 0.82 である。PE の平均値は Geography とほとんどかわらないが、分散の値が大きいといえる。上述したように、Sector は特定の産業に特化して投資するファンドである。そのため産業ごとの違いがそれぞれのファンドのパフォーマンスに影響したため分散が大きくなったと考えられる。また、同産業に特化することからリスク分散が効率的にできなかったため、パフォーマンスが悪かったと考えられる。

次にパフォーマンスが低いカテゴリーは PE が 0.75 の Growth である。Growth は成長株に投資し、キャピタル・ゲインを得ることを目的としたファンドである。本研究の 2000 年は成長株と思われていた IT 産業の株価が暴落した時期であり、当時、Growth はその特徴から IT 産業の銘柄をポートフォリオに多く組み入れていたと考えられる。そのため暴落の影響がパフォーマンスの低さに反映されたと考えられる。

逆に最もパフォーマンスの優れていたカテゴリーは PE が 0.22 の Market である。分散が小さいことから、多くのファンドがフロンティアの近くに位置していると考えられる。Market はその特徴から市場全体の値動きに左右されず、銘柄選定効果（アルファ）のみを積み上げていくリターン特性を持つため、最もリスクが低く安定した運用手法の一つとされている。また、伝統的な資産クラスとの相関が低いいため、既存の伝統的ポートフォリオに追加した際に得られる分散効果が最も高いと言われており、以上のことから安定したリターンを得ることができたのではないかと考えられる。

Market の次にパフォーマンスが高いカテゴリーは Index で、PE が 0.46 であった。2001 年の同時多発テロ以降、2006 年まで S&P500

やダウは上向きのトレンドであったことからリスクをこちらも同様に安定的にリターンが得られたと考えられる。Index の次にパフォーマンスの高いカテゴリー BlueChip で PE は 0.67 であった。ポートフォリオが主に Index に採用される優良株で構成されていることと、景気が上向きのトレンドであったことから、Index と同様にリスクを小さく抑えつつ安定したリターンが得られたため、パフォーマンスが高かったと考えられる。以上の結果から米国で FoF を組む場合、Market の中でのカテゴリーを中心に、または複数のカテゴリーを横断して考える場合は平均的には Market, Index, Blue Chip のウェイトを高め、Geography や Sector に該当するファンドのウェイトを減らしたほうがパフォーマンスの高いポートフォリオを組むことができると考えられる。

次に EU の結果について説明する。EU のファンドで仮定した FoF のうち平均的に最もパフォーマンスの低いカテゴリーは Blue Chip で PE が 0.79 であった。これはフロンティアまでにリスクの減少とリターンの増加が約 79% 同時に必要であることを表している。欧州の代表的な Index である FTSE100 はアメリカに比べてより多様な国籍の企業から指標が作られていることから、Blue Chip として組まれたポートフォリオによっては地域ごとの特色が反映されやすいため、PE の分散が大きくなったと考えられる。

次にパフォーマンスが低いのは Growth & Income で PE が 0.73 であった。成長率の高い企業は再投資を優先させるため、配当性向が低くなると考えられる。一方配当性向の高い企業は成長のピークを超えている可能性があることから、配当収入を重視した Growth & Income は成長の鈍化した企業へ投資した可能性がある。そのためリターンが小さくなり、パフォーマンスの低下につながったと考えられる。次にパフォーマンスの低いカテゴリーは Emerging で、PE が 0.68 であった。上述したように新興

市場は政治的, 経済的リスクが大きいことから, リターンに比べてリスクが高すぎたのではないかと考えられる。

逆にパフォーマンスが高いカテゴリーは Env で PE が 0.37 であった。環境問題への世界的な関心によって, 環境技術の優れている企業や環境経営への取り組みが市場評価につながった結果, 高いパフォーマンスが得られたと考えられる。二つ目にパフォーマンスの高いカテゴリーは Geography で PE が 0.52 であり, パフォーマンスが低かった米国とは逆の結果が得られた。この理由として EU では米国に比べて同時多発テロの影響が小さく, 地政学リスクの分散が効果的にできていたと考えられる。以上の結果から EU で FoF を組む場合には, Env や Geography のウェイトを高め, Blue Chip や Growth & Income のウェイトを小さくしたほうがパフォーマンスの高いポートフォリオを組むことができると考えられる。

5. まとめ

本稿では FoF のポートフォリオを構成するファンドを選別するためのパフォーマンス評価のモデルとして, DEA の考え方を発展させた Bric, Kerstens and Lesourd (2004) の平均分散ポートフォリオの最適化モデルの実証結果を示した。先行研究にも DEA の考え方に基づいてパフォーマンスを評価した Morey & Morey (1999) があるが, リスクの減少かリターンの増加のどちらか一方しか考慮することができていなかった。本稿で紹介したモデルではそれらを同時に考慮できるため, より現実的にファンドの評価をすることが可能である。

また, Bric, Kerstens and Lesourd (2004) らは 26 本のサンプルファンドを用いてパフォーマンスの比較をしていたが, 本稿では米国で 827 本, EU で 829 本のサンプルファンドを用いてカテゴリーごとのパフォーマンスの比較を行った。その結果から, 両地域で FoF をそれぞれ仮定した場合, 米国では Market,

Index, Blue Chip のウェイトを高め, EU では Environmentally Friendly や Geography のウェイトを高めると, パフォーマンスの高いポートフォリオを組むことができることが示された。パフォーマンス分析をする上で, 本稿で紹介したモデルは扱いやすさの面でも精度の面でも有用であると思われる。

注

- 1) たとえば傘下のファンドがある株を売って別のファンドが同じ株を買っている場合, 個々のファンドは正しい判断であっても FoF としては無駄なことをしている可能性がある。
- 2) 上式の部分集合における基本的な性質は, Bric, Kerstens and Lesourd (2004) の中でマルコビッツ平均分散ポートフォリオとともに説明されているのでそちらを参照されたい。

参考文献

- Bric, W., K. Kerstens, J. B. Lesourd (2004), "Single Period Markowitz Portfolio Selection, Performance Gauging and Duality: A Variation on the Luenberger Shortage Function," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 120, pp. 1-27.
- Bric, W., K. Kerstens (2006), "Multi-horizon Markowitz Portfolio Performance Appraisals: A General Approach," *International Symposium on Banking and Monetary Economics*, vol. 23.
- Bric, W., C. Comes, K. Kerstens (2006), "Temporal Technical and Profit Efficiency Measurement: Definitions, Duality and Aggregation Results", *International Journal of Production Economics*, vol. 103, no.1, pp. 48-63.
- Farrell, M. J (1957), "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 120, no. 3.
- Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, vol. 7, no.1, pp. 77-91.
- Markowitz, H. (1959), "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", New York, John Wiley.
- Morey, M. R., R. C. Morey (1999), "Mutual Fund Performance Appraisals: A Multi-Horizon Perspective with Endogenous

- Benchmarking”, *Omega*, 27, 241–258.
- Luenberger, David G. (1992), “New Optimality Principles for Economic Efficiency and Equilibrium,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 75, no. 2, pp. 221–264.
- Luenberger, David G. and Robert R. Maxfield (1995), “Computing Economic Equilibria using Benefit and Surplus Functions,” *Computational Economics*, vol. 8, pp. 47–64.

[いとう ゆたか 東北大学大学院環境科学研究科博士課程後期]

[まなぎ しゅんすけ 東北大学大学院環境科学研究科准教授]

[まつだ あきみ 野村証券株式会社ポートフォリオ・コンサルティング部]