

ACDモデルにおけるパラメータ修正の効果

高 英模

横浜国立大学 国際社会学研究科 グローバル経済専攻

目次

第 1 章 約定間隔と ACD モデル	3
1.1 約定間隔と価格の関係	3
1.2 ACD モデル	15
1.3 推定上の問題点	26
第 2 章 数値実験	33
2.1 トレンドのない場合	33
2.2 トレンドのある場合	40
2.3 ACD モデルの同時推定	45
第 3 章 ACD モデルの実証分析	59
3.1 ACD モデルの推定	62
3.2 ACD モデルの選択と診断	64
3.3 その他の銘柄による実証分析結果	66
第 4 章 UHF-GARCH モデルの実証分析	73
4.1 $\hat{\Psi}_i$ の修正	73
4.2 UHF-GARCH モデルの推定	74
第 5 章 非対称型 ACD モデルの実証分析	85
5.1 仲値の変化	85
5.2 生存分析とハザード	88
5.3 競合リスクモデル	90
5.4 非対称型 ACD モデルの推定と一期先予測	94

はじめに

Glosten and Milgrom (1985) は取引と価格変化のフレームワークをモデルとして初めて提案した。そのモデルを拡張することで, Easley and O'Hara (1992) と Diamond and Verrecchia (1987) は約定間の時間的間隔が, 単純な取引の無い時間帯ではなく, 投資家にとって特定の意味を持つ, 有用な情報であることを示した。Engle and Russell (1998) は GARCH モデルを転用することで, 約定時間による ACD(Autoregressive Conditional Duration) モデルを提案した。これは時系列データを利用したダイナミックモデルで, 約定間隔の実証分析を可能にした。

Engle and Russell (1998) は 1990 年 11 月から 1991 年 1 月までの 3 ケ月間の, NYSE(ニューヨーク証券取引所) における IBM 社の株式データを利用した。約定回数は 58,942 回で, 同じタイムスタンプのデータを取り除いた後の約定データ数は 52,405 とあり, 同一のタイムスタンプが付いた 11% のデータはモデル推定では利用せず, 除外している。一方, 高 (2012) では今日の高頻度化の影響を考慮して, 同じタイムスタンプの付いたデータを除外せずに“擬約定間隔”を作成して ACD モデルを推定し, 約定間隔の意味を仮説検定した。ここで言う擬約定間隔とは約定間隔を単純に等分割したものである。利用したデータは 2010 年 1 月における 14 日分で, 銘柄は日産自動車である。14 日間で約定回数は 71,810 回であったが, ゼロ約定間隔を除くと僅か 67% のデータを残すのみとなった。つまり, Engle and Russell (1998) による方法では, 実に 33% のデータが失われてしまうことになる。高 (2012) では擬約定間隔が真に有効であるか, その数理的な吟味は行っていない。そこで, 本論文では数値実験により擬約定間隔の有効性を確認した。

ここで, 高頻度取引を可能にした東京証券取引所 (JPX) のシステム“アローヘッド”と, その導入後の制度変更の動きを簡単に確認しておく。JPX は 2010 年 1 月からアローヘッドと呼ばれる売買システムの稼働を開始した。既に Engle and Russell (1998) の利用した 1990 年の取引データから, 20 年以上の時間が経過している。今日では Engle らの論じた高速取引のさらに上を行く, “超高速取引”の時代に入ったと言える。アローヘッドでは, 3 秒に一度注文をマッチングさせる, いわゆる“3 秒ルール”を撤廃し, ミリ秒単位での取引を可能とした。

取引時間については, 2011 年 11 月に従来 11 時までであった前場の現物取引時間を 11 時半まで延長した。2013 年 7 月には東京証券取引所と大阪証券取引所の現物市場が統合した。そして 2014 年 1 月に TOPIX100 の呼値を小さくした。TOPIX100 とは, TOPIX 構成銘柄のうち, 時価総額と流動性の高い 100 銘柄で構成される, 浮動株調整後の時価総額を指数化 (1998 年 4 月 1 日基準) したものである。2012 年には大きな変更はなされていないが, この年の 2 月, 241 銘柄が売買停止になるというシステム障害が発生したことが影響したと思われる。

JPX は世界的な市場間競争に対抗するため, アローヘッドの導入だけでなく, 流動性を高めるとい

う角度から、投資家の獲得に取り組んでいる。設備の更新や制度変更は一般の投資家にも直接的に影響を及ぼすものであるが、これと並行して高速取引に特化した限定的な投資家向けのサービスも拡充されている。その一つがコロケーションサービスと呼ばれるもので、取引におけるネットワーク通信の絶対的距離を短くし(コロケーションエリア)、通常、ミリ秒単位で行われる処理時間をさらにマクロ秒レベルで行うことのできる環境である。

“呼値”の更新も積極的に行われている。呼値とは指値注文を行う際の、株価の刻みのことあり、その刻みは値段の水準によって決まっている。例えば、アローヘッド稼働前の2009年の時点では40万円の価格がついた株式の取引価格は1000円単位(呼値)で変動させるという決まりになっていた。それが、2014年8月時点では500円となった。先に紹介したTOPIX100銘柄については、40万円の株の呼値は僅か50円である。また、株価には、あまりに急激な価格の変化を緩和する目的で制限値幅(一日)と更新値幅(一回)というものが設定されているが、逆に、こちらは拡大され、ボラティリティを増加させる傾向にある。

このように超高速な、高頻度取引環境が実現した今、約定間隔が従来通り、情報投資家にとって有用な情報の存在を示す意味を持つか否かという根本的な疑問が浮かぶ。そこでACDモデルの推定におけるゼロ約定間隔の処理方法という問題点を最初に吟味した上で、高速取引データを用いたACDモデルを用いて実証分析を行い、投資行動における約定間隔の意味を検証する。

最後に論文の構成を紹介する。第一章“約定間隔とACDモデル”では、約定間隔に特別な意味を持たせた先行研究と、その実証分析に利用するにACDモデルについて代表的な先行研究を紹介し、ACDモデルの推定上の問題点を示す。第二章“数値実験”では、ゼロ約定間隔を削除した場合と、等間隔の擬約定間隔を利用する場合のどちらが、より真のパラメータに近い推定値を得るか、乱数を用いたシミュレーションを実行する。続く第三章以降ではJFEホールディングス、京セラ、日産自動車、東京海上日動の4社の株価を用いてACDモデルの実証分析を行う。ここではゼロ約定間隔を削除した上でACDモデルを推定し、第二章で提案した修正方法によりパラメータを修正する。第四章ではUHF-GARCHモデルにおいて、期待約定間隔の修正の有無により、実証分析の結果が異なる事を示す。言い換えると、パラメータを修正せずに期待約定間隔を計算すると、実証分析において誤った結果を支持してしまう可能性があることを示す。最後の第五章では、仲値の変化する間隔に注目した二状態遷移モデル(非対称ACDモデル)を推定し、仲値変化方向の1期先予測に、パラメータ修正の与える影響を調査する。

第1章 約定間隔とACDモデル

ここでは約定間隔と ACD モデルの先行研究について述べる。株式市場に参加する投資家は、一般に情報投資家と非情報投資家に分けることができる。非公開の私的情報や優れた分析能力を利用して、株式の本源価値をいち早く求め、売買によって利益を得る者を情報投資家と呼ぶ。それとは逆に、一般に公開された情報を基に投資行動を行う、情動的優位性を持たない投資家は非情報投資家と呼ばれる。どちらの種類の投資家であれ、彼らは何らかの手段を用いて目的の株式に関する情報を得ようとする。Easley and O'Hara (1992) や Diamond and Verrecchia (1987) の主張は、取引の間隔 (約定間隔) すらも、投資家に一定の情報を提供していると言うものである。これらの論文は Glosten and Milgrom (1985) の順次取引モデルを利用している。

約定間隔に対する意味づけを実証分析するための方法を提供した研究の一つに Engle and Russell (1998) がある。リターンのボラティリティは時間変化するとしてモデル化した GARCH モデルの考え方を援用して ACD(Autoregressive Conditional Duration) モデルを提案した。

1.1 約定間隔と価格の関係

約定間隔と株価の価格調整の関係を考察した代表的な論文に Diamond and Verrecchia (1987) と Easley and O'Hara (1992) がある。これら 2 つの論文はどちらも Glosten and Milgrom (1985) が提案した標準的な順次取引のフレームワークを拡張したものである。よって、最初に Glosten and Milgrom (1985) の基本的なフレームワークを振り返ることからはじめる。

彼らの貢献は株式市場におけるスプレッドの決定メカニズムを示したことである。初めに論文で想定されている市場の構成を示す。

- 投資家の中には、一定割合 α ($0 < \alpha < 1$) だけ、未公開情報を入手したり、もしくは、優れた分析機能で他者の持たない情報を得る情報投資家 (informed trader) が存在する。情報投資家以外の投資家のことは非情報投資家 (uninformed trader) と呼び、明確に区別する。非情報投資家は一般の公開情報や、取引戦略上の理由で取引を行うものとする。
- スペシャリストと呼ばれる特別なディーラーが存在し、彼らと取引を行う市場 (ディーラー市場) を想定する。例えば、ニューヨーク証券取引所がこれに該当する。スペシャリストは自分の

担当する株式の流動性を維持することを目的とし、期待リターンはゼロで、リスク中立的であるとする。

- スペシャリストは情報投資家との取引による損失を考慮してビット-アスクを設定する。

スペシャリストは個別に発生する投資家からの注文に対して、1単位の株式をアスク、または、ビッド価格で取引する。アスクとビッドはスペシャリストが自由に設定できるものとする。もちろん、実際の株式市場では、投資家による指値注文も可能であるが、ここでは考慮しない。順次取引モデルでは株式の価値を V とし、値上がりした時のペイオフを \bar{V} 、値下がりした時のそれを \underline{V} とする。また、値上がりする確率を π ($0 < \pi < 1$) とし、値下がりする場合は $1 - \pi$ とする。

このような設定で、スペシャリストがどのようにビット-アスクを決定するか、その仕組みを見ていくことにする。図 1.1 の状態において投資家からの買い注文 (Buy) が発生する無条件確率 $\Pr(\text{Buy})$ は次ようになる。

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Buy}) &= \pi\alpha + \frac{1}{2}\pi(1-\alpha) + \frac{1}{2}(1-\pi)(1-\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(1 - (1 - 2\pi)\alpha)\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Sell}) &= 0 + \frac{\pi}{2}(1-\alpha) + \alpha(1-\pi) + \frac{1}{2}(1-\pi)(1-\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (1 - 2\pi)\alpha)\end{aligned}$$

したがって、仮に $\pi = 0.5$ の時、

$$\Pr(\text{Buy}) = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2 \times 0.5)\alpha) = 0.5$$

$$\Pr(\text{Sell}) = 0.5$$

つまり、値上がり、値下がりの確率が 0.5 の場合、買い注文と売り注文の発生確率は、情報投資家の割合に関係なく、どちらも 0.5 となる。

次にスペシャリストの予想 (belief) について考えることにする。例えば、一日の取引の開始時点において、図 1.1 の状況であるとする。朝一番に投資家からの買い注文が入ったとき、ペイオフ V が値上がりする確率 (スペシャリストの考え) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\pi_1(\text{Buy}) &= \Pr(\bar{V} | \text{Buy}) = \frac{\Pr(\bar{V}, \text{Buy})}{\Pr(\text{Buy})} \\ &= \frac{\pi\alpha + 0.5\pi(1-\alpha)}{0.5(1 - (1 - 2\pi)\alpha)} = \frac{\pi(1+\alpha)}{1 - (1 - 2\pi)\alpha}\end{aligned}\tag{1.1}$$

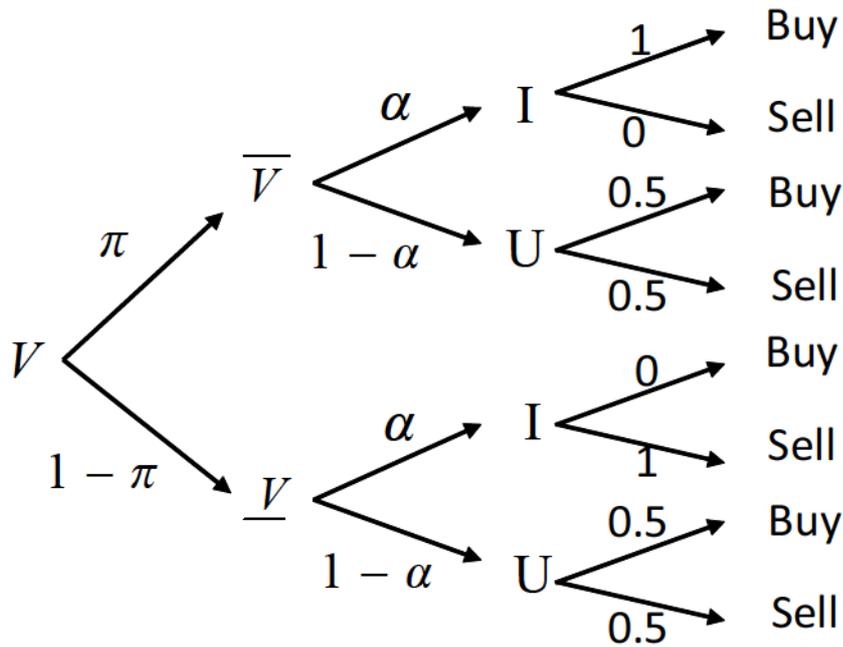


図 1.1: 順次取引型モデル

逆に、売り注文が発生した場合は、同様の考え方で、ペイオフの値下がりする確率は次のように求めることができる。

$$\pi_1(\text{Sell}) = \frac{\pi(1-\alpha)}{1+(1-2\pi)\alpha} \tag{1.2}$$

話を先に進める前に、 $\pi_1(\text{Buy})$ と情報投資家の割合 α の関係を考察する。すなわち、

$$\frac{\partial \pi_1(\text{Buy})}{\partial \alpha} = \frac{2\pi(1-\pi)}{(1-(1-2\pi)\alpha)^2} > 0$$

であるから、 $\pi_1(\text{Buy})$ は α の増加関数であることが分かる。つまり、情報投資家の割合が多くなるほど、最初買い注文が入った場合、スペシャリストはペイオフが上昇する確率を増やすことになる。

話を 1.1 式に戻す。スペシャリストは競争的であり、期待収益を 0 として自身の担当する株式の流動性を高めようとする。まず、第 1 回目の取引後の期待収益を次のように記述する。

$$E[p|\text{Buy}] = E[A - V|\text{Buy}]$$

A はアスク価格とし、確定的であるとすると、

$$\begin{aligned} E[A - V|\text{Buy}] &= A - E[V|\text{Buy}] \\ &= A - (\pi_1(\text{Buy})\bar{V} + (1 - \pi_1(\text{Buy}))\underline{V}) \end{aligned}$$

期待収益0の仮定から,

$$\begin{aligned}
 A &= E[V|\text{Buy}] = \pi_1(\text{Buy})\bar{V} + (1 - \pi_1(\text{Buy}))\underline{V} \\
 &= \frac{\pi(1+\alpha)}{1 - (1-2\pi)\alpha}\bar{V} + \left(1 - \frac{\pi(1+\alpha)}{1 - (1-2\pi)\alpha}\right)\underline{V} \\
 &= \frac{1}{1 - (1-2\pi)\alpha} \{ \pi(1+\alpha)\bar{V} + (1-\alpha)(1-\pi)\underline{V} \} \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

となり, A を $\alpha, \pi, \bar{V}, \underline{V}$ で表現できることが分かる.

アスク価格と同じ考え方をいれれば, ビット価格 B も同様に求めることができ, 次のようになる.

$$B = \frac{1}{1 + (1-2\pi)\alpha} \{ \pi(1-\alpha)\bar{V} + (1+\alpha)(1-\pi)\underline{V} \} \tag{1.4}$$

よって, スプレッド $A - B$ は,

$$A - B = \frac{4\pi(1-\pi)\alpha(\bar{V} - \underline{V})}{1 - (1-2\pi)^2\alpha^2}$$

となる. 参考までに, 上昇確率 $\pi = 0.5$ の場合,

$$A - B = \alpha(\bar{V} - \underline{V})$$

スプレッドの大きさは情報投資家の割合に単純に比例することが分かる.

今後は, 一日の時間の流れを考えてみる. スペシャリストは取引を行う度に 1.3 式と 1.4 式を更新する. 仮に, $k-1$ 回目の上昇確率を π_{k-1} とすると,

$$\begin{aligned}
 \pi_k(\text{Buy}; \pi_{k-1}) &= \frac{\pi_{k-1}(1+\alpha)}{1 - (1-2\pi_{k-1})\alpha} \\
 \pi_k(\text{Sell}; \pi_{k-1}) &= \frac{\pi_{k-1}(1-\alpha)}{1 + (1-2\pi_{k-1})\alpha}
 \end{aligned}$$

となるので, 同様にアスクとビット, そしてスプレッドを求めることができる.

ここで, 実際の取引において発生する手数料 c を考慮することにする. 手数料が加わることによって, A と B は一般的に次のようになる.

$$A = E[V|\text{Buy}] + c$$

$$B = E[V|\text{Sell}] - c$$

この事を踏まえた上で, 非情報投資家の効用 U について考えてみる.

$$U = \rho xV + C$$

ρ は現在消費と将来消費 (株式への投資) の代替率である. ρ は投資家ごとに異なるが, その分布は既知であるとする. x は株式の枚数, C は現在の消費である. ρ が大きい場合, 将来消費を選好し, 現時点

で株式をより多く購入すると考える。現在消費と将来の消費を選好できる状態にあることを弾力的であるということにする。このような条件下で非情報投資家の効用の期待値は次のように求められる。

$$E[U] = E[\rho x V + C] = \rho x E[V] + C$$

よって、スペシャリストの提示した価格について、次のような投資行動を取ることが分かる (ここでは $x = 1$ とする)。

i) $\rho E[V] > A$ なら, $E[U]$ が大きくなるので, 株式を購入。

ii) $\rho E[V] < B$ なら, $E[U]$ が大きくなるので, 株式を売却。

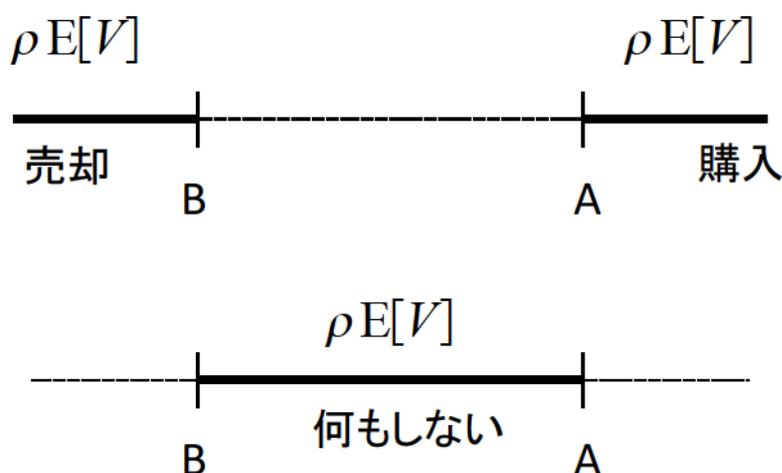


図 1.2: 非情報投資家の投資行動

スペシャリストはこのような状況下で、情報投資家との取引によって生じた損失を回復できるようにスプレッドを設定する。ここで重要なことは、非情報投資家が弾力性を有しているので、将来消費を選好することも十分にあり得る。つまり、スペシャリストはスプレッドをできるだけ小さくせざる得ないという状況になる。

以上のように、Glosten and Milgrom (1985) はスペシャリストがスプレッドを決定する仕組みを示した。次に、このモデルをベースにして、約定間隔が間接的に株価の調整速度に影響を与えることを示した Diamond and Verrecchia (1986) を見ることにする。彼らは投資家に空売り禁止の制約を掛けると、私的情報、特に悪いニュースに対する価格調整速度が遅くなることを示した。また、約定間隔は、収益に負のバイアスを掛ける事を明らかにした。結果として、空売りの利回りが急騰する状況は、悪いニュースの存在を示すものとした。

具体的なモデルについて説明する前に、市場に関する仮定をここで確認しておく。これから説明する仮定は基本的に Glosten and Milgrom (1985) のそれと同じである。マーケットメーカー (投資家に気配を提示するディーラー) はリスク中立的であり、在庫の費用や制約は負っていない。そして、各取引における期待収益はゼロとする。一方の投資家はリスク中立的で、情報投資家と非情報投資家の2種類が存在し、その数は無限であると仮定する。情報投資家は真のリスク資産の価値を知っているが、非情報投資家は一般に知られている公開情報から価値を推測するものとする。リスク資産価値の事前分布はベルヌーイ分布で、確率 0.5 でそれぞれ 1 または 0 になるものと仮定する。基本的に情報投資家はリスク資産の価値が過少評価されていれば購入し、逆に過大評価されていれば、売却するものとする。つまり、アスク価格がリスク資産の条件付き期待値よりも低ければ、過少評価であり、逆にビッド価格よりも高ければ過大評価の状態である。マーケットメーカーは投資家と取引を行うディーラーのことであるが、スペシャリストのように特定の銘柄の取引を担当するという役割はない。

マーケットメーカーが情報投資家とだけ取引するような事態になれば、マーケットメーカーの期待収益がゼロという仮定は成立しない。そこで、公開情報によってのみ取引を行う非情報投資家の取引動機についても簡単に説明する。彼らは情報の質での優位性ではなく、単なる消費意欲や税金対策などのため、または、他の投資機会を利用するためにリスク資産の売買を行うものとする。マーケットメーカーはこれら非情報投資家との取引を通じて、情報投資家との取引で生じた損失を回復するものとする。

前述のようにモデルの基本構造は Glosten and Milgrom (1985) と同じであるが、時点 T の消費 C_T の効用を $\rho \times C_T$ として時間概念を導入する。そして投資行動として単純なリスク資産の売買だけでなく、空売り¹と、なんのアクションもとらないという選択肢を与える。

ただし、空売りについてはその費用に留意するという条件をつける。具体的に言うと、i) 空売りに費用はかからない、ii) 売却手取金の制約¹がある、そして、iii) 空売りが禁止されているという3つの状況を仮定する。費用が一切発生しない場合、即座に利益を確保できる。売却手取金の制約がある場合は、実際の利益を手にするまでタイムラグが生じる。そして、空売りが禁止されていたり、その費用が異常に高い場合は何のアクションも取れない。すべての投資家をこの3種類の状況のいずれかに属するものとし、その比率を c_1, c_2, c_3 とする。したがって、常に $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ となる。投資家をこれらに分類するにあたっては、情報投資家、非情報投資家を区別する必要はない。

改めて、これら3種類の状況にある投資家の投資行動を整理しておく。

¹反対取引が実行されるまで、売却手取金を受け取れないとするもの。

費用	Bad News を得た 情報投資家	$\rho = 0$ の 非情報投資家	その他の 投資家
c_1 : 費用ゼロ	実行	実行	実行せず
c_2 : 手取金制約	実行	実行せず	実行せず
c_3 : 禁止または相応の費用	実行せず	実行せず	実行せず

表 1.1: 投資家の種類と空売り実行の関係

c_1 に属する投資家は株式を所有していない場合、消費目的 ($\rho = 0$) または、悪いニュースに対して空売りを実行する。 c_2 の投資家は制約の都合上、消費を実行したり、利益を再投資することができない。 唯一、情報投資家の場合は空売りを実行する。 なぜなら、 $\rho = 1$ (時間選好なし) で、利回りがゼロであるとする、例え、制約があろうと空売りを拒む理由にはならない。 逆に、非情報投資家で消費を目的 ($\rho = 0$) とする場合、売却手取金の入手までには時間がかかってしまうので、空売りは実行しない。 そして、最後の c_3 に属する投資家は様々な理由で、空売りを禁止されているものとする。 これは情報、非情報投資家の両方に適用される。

これらの設定で取引フローの一部を次に示す。

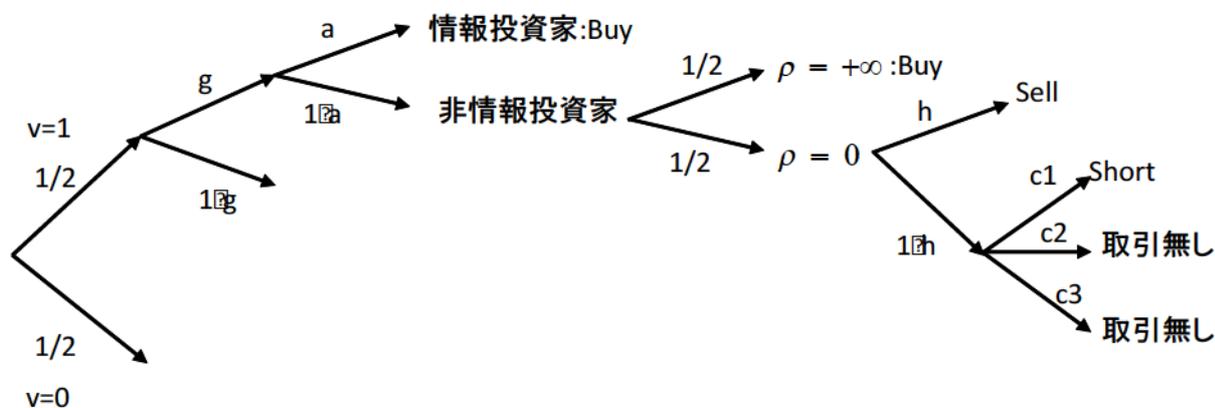


図 1.3: Diamond and Verrecchia の取引フローの一部

フローで利用した記号の意味は表 1.2 の通りである.

変数	定義
v	資産価値 (0 または 1)
g	一人の投資家が取引を希望する確率
a	取引に応じた投資家が情報投資家である確率 全投資家の内に情報投資家が占める割合に等しい
h	投資家が既に株式を有している確率 全投資家の内に株式を有している投資家が占める割合に等しい
c_i	空売りに対して費用 i に直面している投資家の確率 全投資家の内に、情報/非情報投資家に関係なく、当該費用に直面している投資家の割合に等しい
ρ	非情報投資家の投資行動に影響を与える流動性パラメータ $\rho = 0$ の時は売却. $\rho = +\infty$ の時は購入を希望する
q_v^A	資産価値が v の時に A という投資行動を取る確率
P_t^A	時点 t において A の投資行動を行う時の資産価格, または, 条件付き期待値

表 1.2: 投資行動に関する記号の一覧

仮に情報投資家が良いニュースを入手した場合 ($v = 1$), 即座に株式を購入する. 逆に悪いニュースを入手した時 ($v = 0$), 確率 h で株式をすでに所有しているとすれば, 直ぐに株式を売却する. 株式を持っていない場合 ($1 - h$), 彼が c_1 または c_2 カテゴリの投資家であれば, 空売りを実行する. つまり, 情報投資家が何の投資行動も起こさないということは, 彼が c_3 タイプの投資家であることを示している. これらの設定から, 投資家の取りえる投資行動の確率は表 1.3 のようにまとめることができる.

観察可能な投資行動	$v = 1 (q_v^A)$ の時の条件付き確率	$v = 0 (q_0^A)$ の時の条件付き確率
購入	$\frac{1}{2}g(1+a)$	$\frac{1}{2}g(1-a)$
売却	$\frac{1}{2}g(1+a)(h + [1-h]c_1)$	$\frac{1}{2}g(1+a)(h + [1-h]c_1) + ga(1-h)c_2$
行動なし	$1 - g + \frac{1}{2}g(1-h)(1-a)(c_2 + c_3)$	$1 - g + \frac{1}{2}g(1-h)[(1-a)(c_2 + c_3) + 2ac_3]$

表 1.3: 観察可能な投資家行動の条件付き確率

このような設定下で、情報に対する価格調整速度の考察を次のような考え方を用いて行う。まずはじめに、価格が投資家に対して情報価値を有する (informative) までに要する取引回数というものを考える。株価が完全に情報価値を有する時の価格の事後尤度を $P_t/(1-P_t)$ とする。株価自体は、単化のため 0 または 1 の値を取ると仮定しているので、この尤度は 0 または $+\infty$ となる。仮に、株価が上昇する場合の尤度を $\Psi = P^H/(1-P^H)$ 、下落する場合、 $\Phi = P^L/(1-P^L)$ とする。この時、 $\log P_t/(1-P_t)$ が $\log \Psi$ を越えるか、もしくは、 $\log \Phi$ を下回れば、情報価値を持つと考え、これは非情報投資家にとってもペイオフの情報を提供するものと考ええる。

投資家の投資行動 Ω には、売却、購入、空売り、静観するという選択肢があるとした。以降、具体的な選択肢を A とし、次のように定義する。

$$A_N = \frac{P_N}{1-P_N}, \quad Z^A = \log \left(\frac{q_1^A}{q_0^A} \right)$$

そして確率変数 \tilde{Z} の実現値を Z^A とする。確認の意味で述べておくと、 q_v^A で A は投資行動、 v は 0 または 1 の値を指す。さらに、価格の事後尤度が初めて $\log \Psi$ または $\log \Phi$ の境界に達するまでに必要な取引回数を確率変数 \tilde{N} で示す。ワルドのレンマを利用すると、その期待値は次のようになる。

$$E(\tilde{N}) = \frac{E(\log(\tilde{A}_N))}{E(\tilde{Z})}$$

ここで、 $\log \tilde{A}_N$ が近似的なベルヌーイ変数であるとする、 v に関する条件付き期待値を次のように考えることができる。

$$E[\log(\tilde{A}_N) | v=0] \cong \frac{1-\Phi}{\Psi-\Phi} \log \Psi + \frac{\Psi-1}{\Psi-\Phi} \log \Phi$$

$$E[\log(\tilde{A}_N) | v=1] \cong \frac{\Psi(1-\Phi)}{\Psi-\Phi} \log \Psi + \frac{\Phi(\Psi-1)}{\Psi-\Phi} \log \Phi$$

さらに、

$$E[\tilde{Z} | v=v] = \sum_{A \in \Omega} q_v^A Z^A = \sum_{A \in \Omega} q_v^A \log \left(\frac{q_1^A}{q_0^A} \right)$$

これらを利用して、目的の投資回数を次のように定義できる。

$$\bar{N}_0 = E[\tilde{N} | v=0] \cong \frac{\frac{1-\Phi}{\Psi-\Phi} \log \Psi + \frac{\Psi-1}{\Psi-\Phi} \log \Phi}{\sum_{A \in \Omega} q_v^A \log \left(\frac{q_1^A}{q_0^A} \right)}$$

$$\bar{N}_1 = E[\tilde{N} | v=1] \cong \frac{\frac{\Psi(1-\Phi)}{\Psi-\Phi} \log \Psi + \frac{\Phi(\Psi-1)}{\Psi-\Phi} \log \Phi}{\sum_{A \in \Omega} q_v^A \log \left(\frac{q_1^A}{q_0^A} \right)}$$

ここに示した様に投資回数は投資行動 A に影響されることが分かる。

丁寧な計算を行えば、費用なしで空売りが実行できるカテゴリの投資家にとって、 \bar{N}_1 と \bar{N}_0 はともに、空売り禁止されている投資家の比率の増加関数になっていることが分かる。同様に、悪いニュー

スの場合の \bar{N}_0 と、良いニュースの場合の \bar{N}_1 はともに売却手取金の制約がある投資家の比率に対して減少関数となっていることが分かる。

Diamond and Verrecchia (1987) の主張は、空売り制約は私的情報が公開情報へと変化して行く速度に影響を与えるというものである。特に、悪いニュースに対しては無条件の情報効率性を減少させることを強調している。最後に Diamond and Verrecchia (1987) のポイントをここに示しておく。

- (1) 空売りにかかる費用を少なくできれば、私的情報、特に悪い情報に対する調整速度を改善できる。
- (2) 同じく、空売りにかかる費用を少なくできれば、一般情報の公開日における超過収益の分布の負方向への偏りを和らげることができ、絶対値で超過収益を小さくする効果がある。
- (3) 空売りにかかる経費としての利子が急騰する背後には、悪い情報がある。
- (4) 空売り禁止の制約がある情報投資家は、悪いニュースに対して投資機会を失うので、取引の無い時間は悪いニュースの存在を意味する。つまり、取引の無い時間帯は超過収益に下方向の圧力を掛けることになる。

Glosten and Milgrom (1985) のモデルは約定の間隔という時間概念をモデルに一切、持ち込んでいないが、Diamond and Verrecchia (1987) では、それをモデルに取り込み、私的情報がリスク資産の価格に与える影響の解析に役立てた。

次は、これとは異なった角度から約定間隔についての提案を行った Easley and O'Hara (1992) の研究を見ることにする。Glosten and Milgrom (1985) のモデルは、取引の発生を前提に取引のフローを示しているが、この研究では取引が確率的に発生するものとし、そのトリガーとして情報事象 (information event) という考え方を導入している。資産価格は情報事象の発生によって変化すると考える。また、投資家の投資行動として、Diamond and Verrecchia (1986) で用いた「何もしない」という選択肢を与えている。

投資家と取引を行うのはマーケットメーカであり、彼は先に紹介した2つの論文と同じくリスク中立的である。話を簡単にするためにマーケットメーカーは一人と想定するが、競争的環境にあるものと仮定する。資産価格は確率変数 V で表現する。情報事象の発生による価格変化を ψ と定義する。 ψ は二つの値 L または H をとるものとし、その確率は $\delta > 0$ および $1 - \delta > 0$ とする。よって、リスク資産の情報事象に対する条件付き期待値は $E[V|\psi = L] = \underline{V}$ 、または、 $E[V|\psi = H] = \bar{V}$ となる。情報事象が発生しない場合は $\psi = 0$ であり、リスク資産の期待値は無条件期待値として、 $V^* = \delta \underline{V} + (1 - \delta) \bar{V}$ と書ける。

さらに、情報イベントの不確実性をはっきりモデルで表現するために、当日の取引開始前に情報事象が発生する確率を α ($0 < \alpha < 1$) と設定する。投資家については、ここでも情報投資家と非情報投

資家の存在を仮定する。しかし、ここでは非情報投資家について売り手と買い手の割合を $\gamma, 1 - \gamma$ と設定する。そして、時点 t において非情報投資家の買い手が株式を購入する確率を $\epsilon^B > 0$, 逆に非情報投資家の売り手が株式を売却する確率を $\epsilon^S > 0$ と定義する。

このような設定の下で情報事象が発生した時の、マーケットメーカーの行動について考えてみる。マーケットメーカーにとって、情報事象の発生により、取引の一定割合 μ ($0 < \mu < 1$) が当該の情報を得た情報投資家からの注文であると考えられる事は自然なことである。したがって、すべての注文が情報投資家からののものであれば、 $\mu = 1$ となる。そして、取引は日中を通じて行われるものとする。取引は離散的な間隔を持って実行されるので、ここでは、その間隔を $t = 1, 2, \dots$ とする。この間隔の利用方法は Diamond and Verrecchia (1986) と同じであり、やはり、約定の発生していない状態に注目することを意図した設定である。

実際に、取引の無い時間帯がどのように発生するのか、そのメカニズムを次のように説明している。それは非情報投資家が気配を確認し、ポートフォリオ上の理由から取引を行わないと決定した時である。非情報投資家の行動であるから、情報事象の発生に関係なく、この取引の無い状態は発生する。先に示した確率変数を利用して、取引の発生しない確率を示すと、 $\gamma(1 - \epsilon^S) + (1 - \gamma)(1 - \epsilon^B)$ となる。情報事象が発生したという条件の下だと、この確率は $(1 - \mu)[\gamma(1 - \epsilon^S) + (1 - \gamma)(1 - \epsilon^B)]$ と小さくなる。したがって、取引が発生しない状態を観測した時点で、マーケットメーカーは新しい情報が存在しない、という事を考慮する必要がある。

これらの基本的な考え方を利用して、株式の価格変化の様子を示すことができる。まず、マーケットメーカーと非情報投資家はバイジアン立場にあって、情報により、前述の確率を更新するものとする。つまり、1) 情報事象がいつ発生するのか、2) 情報事象の内容は良いニュースなのか、悪いニュースなのか、そして 3) 誰が情報投資家なのかは、事後的にしか分からないものとする。最初の2つの疑問については、一日の取引を観察することによって、結果的に知ることしかできない。そして、マーケットメーカーは、その結果から、自分の考え方を更新し、気配や価格を調整する。

実際、一日の取引の開始にあたり、気配をどのように計算すべきか、具体的をここに示す。まず、マーケットメーカーは起こりえる取引の種類を考慮して資産の条件付き期待値を求めなければならない。まず、下限価値 \underline{V} の条件付き確率を求める。情報事象が発生しない場合であれば、この確率は δ のままで変化しない。もし、情報事象が発生し、そのシグナルが小さければ (L)、 $\Pr\{V = \underline{V}\}$ は 1 である。逆にシグナルが大きければ (H)、確率はゼロになる。つまり、マーケットメーカーの情報事象の発生確率の更新式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta(Q) = \Pr\{V = \underline{V}|Q\} &= 1 \cdot \Pr\{\psi = L|Q\} + \\ &0 \cdot \Pr\{\psi = H|Q\} + \delta \Pr\{\psi = 0|Q\} \end{aligned}$$

ここで Q は取引の発生を示すものとする。この式で利用している条件付き確率はベイズ公式を利用

して次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \Pr\{\psi = X|Q\} \\ = \frac{\Pr\{\psi = X\} \Pr\{Q|\psi = X\}}{\Pr\{\psi = L\} \Pr\{Q|\psi = L\} + \Pr\{\psi = H\} \Pr\{Q|\psi = H\} + \Pr\{\psi = 0\} \Pr\{Q|\psi = 0\}} \end{aligned}$$

例として, シグナル L で売り注文 (S) が発生する確率 $\Pr\{\psi = L|S\}$ を示した. $\Pr\{\psi = L\} = \alpha\delta$ であり, $\Pr\{S|\psi = L\} = (\mu + (1 - \mu)\gamma\epsilon^S)$ となる. $\Pr\{S|\psi = H\}$ と $\Pr\{S|\psi = 0\}$ も同様に計算できることから,

$$\Pr\{\psi = L|S\} = \frac{\delta(\alpha\mu + \alpha(1 - \mu)\gamma\epsilon^S)}{(\delta\alpha\mu + (1 - \alpha\mu)\gamma\epsilon^S)}$$

さらに, $\Pr\{\psi = 0|S\}$ については $\Pr\{\psi = 0\} = 1 - \alpha$ であり, $\Pr\{S|\psi = 0\} = \gamma\epsilon^S$ なので,

$$\Pr\{\psi = 0|S\} = \frac{\alpha(1 - \mu)\gamma\epsilon^S}{(\delta\alpha\mu + (1 - \alpha\mu)\gamma\epsilon^S)}$$

結果として売り注文が発生した時, マーケットメーカーの δ は次のように更新される.

$$\delta_1(S_1) = \delta \left[\frac{\alpha\mu + \epsilon^S\gamma(1 - \alpha\mu)}{\delta\alpha\mu + \epsilon^S\gamma(1 - \alpha\mu)} \right] > \delta$$

この計算の結果, マーケットメーカーは売り注文が到着することによって, リスク資産の価値が \underline{V} に近づく確率を増やすことが分かる. これらの条件付き期待値を利用して, オープニング時のビットが次のようになることを示している.

$$E[V|S_1] = b_1 = \frac{\delta\underline{V}(\alpha\mu + \epsilon^S\gamma(1 - \alpha\mu)) + (1 - \delta)\bar{V}\epsilon^S\gamma(1 - \alpha\mu)}{\delta\alpha\mu + \epsilon^S\gamma(1 - \alpha\mu)}$$

一方, 買い注文に対するアスクは次のようになる.

$$\begin{aligned} E[V|B_1] &= a_1 \\ &= \frac{\delta\underline{V}(\epsilon^B(1 - \gamma)(1 - \alpha\mu)) + (1 - \delta)\bar{V}(\alpha\mu + \epsilon^B(1 - \gamma)(1 - \alpha\mu))}{(1 - \delta)\alpha\mu + \epsilon^B(1 - \gamma)(1 - \alpha\mu)} \end{aligned}$$

以上のような考え方に基づいて決定されたアスクとビットの一日の最初の値が日中を通して, 約定価格とともに変化する. それは前述のように, 約定と約定の時間的間隔において価格調整のメカニズムが働くからに他ならない.

それでは, 時点 t におけるビットアスクはどのように決定されるのか, その仕組みを考える事にする. 時点 t において投資家は買い (B) と売り (S) の気配を確認するか, または, 何も投資行動をとらない (N). この状態を $Q_t \in [B, S, N]$ と表すことにする. 取引時間中にマーケットメーカーは市場の取引を観察し, 時点 t においては $Q^{t-1} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-1})$ という情報を得ている. 時点 t におけるマーケットメーカーの価格変化に対する考え方 (beliefs) は, それぞれ, 下がる時, 上がる時, 何もしない時で $\rho_{Lt} = \Pr\{\psi = L|Q^{t-1}\}$, $\rho_{Ht} = \Pr\{\psi = H|Q^{t-1}\}$, $\rho_{0t} = \Pr\{\psi = 0|Q^{t-1}\}$ と表すことができる.

したがって、時刻 t におけるマーケットメーカーのビッドは次のようになる。

$$b_t = \Pr\{\psi = L|Q^{t-1}, S\} \underline{V} + \Pr\{\psi = H|Q^{t-1}, S\} \bar{V} + \Pr\{\psi = 0|Q^{t-1}, S\} V^*$$

この式からも明らかなように、価格変化に対する「考え方 (belief)」によって価格は決定するので、その「考え方」の確率過程を調べる必要がある。確率過程の調べ方の一つに、任意の時点で、情報事象が約定の発生確率に与える影響を考察するという方法がある。前述のように、情報事象が発生していない時、約定の発生しない確率は $\gamma(1 - \epsilon^S) + (1 - \gamma)(1 - \epsilon^B)$ であり、逆に、情報事象が発生した時に約定が発生しない確率は $(1 - \mu)[\gamma(1 - \epsilon^S) + (1 - \gamma)(1 - \epsilon^B)]$ で小さくなる。これは情報投資家が必ず取引に参加することによる。つまり、約定の発生は情報事象の発生と正の相関を持つ。したがって、マーケットメーカは、この理由により「考え方」を更新する。

Easley and O'Hara (1992) は任意の時点 t において取引の無い場合、情報が存在しないという確率が大きくなり、価格の上下変化を示す確率は小さくなるとしている。つまり、マーケットメーカーは実際の取引と同様、取引の無い状態 (約定間隔) からも、価格に関して学習できる事を示している。

まとめると、不確実性を持った情報事象という存在を仮定した時、取引が無い状態 (約定間隔) は、マーケットの参加者に新しい情報がない、という情報を提供していることになる。つまり、約定間隔という時間が価格過程に対して、外生的ではないということを示している。

1.2 ACD モデル

約定の発生間隔は不規則である。この不規則性をモデル化し、約定間隔の持つ意味を実証分析したのが Engle and Russell (1998) である。計量経済学における時系列データの分析は日次、週次、月次など、一定の間隔で観測されるデータを分析するものが殆どある。彼らの提案した ACD (Autoregressive conditional duration) モデルは、不規則な約定間隔を点過程 (point process) に従う確率変数として取り扱うものである。一回の取引に付随する出来高、株価、スプレッドなどの情報を点過程のマーク (mark) とする。

最初に、ACD モデルの基本的な設定を述べる。まず、午前 0 時から始まる一日の時間を秒単位で表し、ある特定の銘柄の約定について考える。 i 番目の売買取引が成立した時点を t_i とすると、約定間隔 τ_i は $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ と書くことができる。約定時点の差を取ることで、秒単位のタイムスタンプが同じ場合、 τ_i の値はゼロとなる。Engle and Russell (1998) ではゼロの値を取る約定間隔をゼロ約定間隔 (zero duration) と呼び、モデルの推定では利用していない。つまり、分析対象から除外して、ゼロでない値だけを利用した。また、モデルで利用する約定間隔は後述する方法で τ_i から日中のトレンドを除いた x_i を用いる。

x_i の条件付き期待値 $E(x_i|H_i)$ は 1.9 式に示す無条件期待値とは明らかに異なる $x_i/E(x_i|H_i)$ の

分布は i.i.d. であり, 次に示す (1.5) 式を満たすものと仮定する. $E(x_i|H_i)$ は $t-1$ 時点に利用可能な全ての情報を示し, 過去の x_i の値を含むものとする.

$$x_i = \Psi_i \epsilon_i \quad (1.5)$$

ϵ_i は次の条件を満たす正の値を取る確率変数である.

$$E(\epsilon_i) = 1 \quad (1.6)$$

$$\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 \quad (1.7)$$

ここで $E(x_i|H_i) = \Psi_i$ と置き, これを期待約定間隔と呼ぶ. ACD モデルは次に示すように, 期待約定間隔 Ψ_i の自己回帰モデルである.

$$\Psi_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} \quad (1.8)$$

係数については $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1$ という条件があり, $\alpha = 0$ の時は $\beta = 0$ となる. ϵ_i の密度関数としてはポアソン, 指数, ガンマ, ワイブルなど正の値をとる密度関数が考えられる.

約定間隔 x_i の期待値と分散

x_i の真のモデルが 1.8 式で与えられているとする. この時, x_i の期待値と分散は,

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \\ \text{Var}(x_i) &= \mu_x^2 \sigma^2 \frac{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 \sigma^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる.

Proof. 1.5 式より任意の $k > 0$ について,

$$E(x_i^k) = E(\Psi_i^k \epsilon_i^k) = E(\Psi_i^k) E(\epsilon_i^k) \quad (1.10)$$

$k = 1$ の場合, 1.8 式に 1.5 式の関係代入して,

$$\Psi_i = \omega + \alpha \Psi_{i-1} \epsilon_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} \quad (1.11)$$

両辺の期待値を取る.

$$E(\Psi_i) = \omega + \alpha E(\Psi_{i-1} \epsilon_{i-1}) + \beta E(\Psi_{i-1})$$

$$E(\Psi_i) = \omega + \alpha E(\Psi_{i-1}) + \beta E(\Psi_{i-1})$$

Ψ_i の無条件期待値を $\mu_x = E(\Psi_i)$ とすると,

$$\begin{aligned}\mu_x &= \omega + \alpha\mu_x + \beta\mu_x \\ (1 - \alpha - \beta)\mu_x &= \omega\end{aligned}$$

$$\therefore \mu_x = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

x_i の分散は, $\text{Var}(x_i) = E(x_i^2) - \mu_x^2$ であるから, まず, 1.10 式で $k = 2$ として,

$$E(x_i^2) = E(\Psi_i^2) E(\epsilon_i^2)$$

とする. $E(\Psi_i^2)$ と $E(\epsilon_i^2)$ を順番に求めて行くことにする. 最初に簡単な $E(\epsilon_i^2)$ から考えることにする.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\epsilon_i) &= E(\epsilon_i^2) - \{E(\epsilon_i)\}^2 \\ &= E(\epsilon_i^2) - 1\end{aligned}$$

ϵ_i の分散を σ^2 として,

$$E(\epsilon_i^2) = 1 + \sigma^2$$

次に $E(\Psi_i^2)$ を計算する. まず, 1.11 式の両辺を二乗する.

$$\begin{aligned}\Psi_i^2 &= \omega^2 + \alpha^2 \epsilon_{i-1}^2 \Psi_{i-1}^2 + \beta^2 \Psi_{i-1}^2 + 2\omega\alpha\epsilon_{i-1}\Psi_{i-1} + 2\omega\beta\Psi_{i-1} + 2\alpha\beta\epsilon_{i-1}\Psi_{i-1}^2 \\ &= \omega^2 + (\alpha^2 \epsilon_{i-1}^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\epsilon_{i-1}) \Psi_{i-1}^2 + 2\omega(\alpha\epsilon_{i-1} + \beta) \Psi_{i-1}\end{aligned}$$

両辺の期待値を取る.

$$E(\Psi_i^2) = \omega^2 + (\alpha^2(1 + \sigma^2) + \beta^2 + 2\alpha\beta) E(\Psi_{i-1}^2) + 2\omega(\alpha + \beta)\mu_x$$

$E(\Psi_i^2) = E(\Psi_{i-1}^2)$ として,

$$E(\Psi_i^2) = \frac{1}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2\sigma^2} (\omega^2 + 2\omega(\alpha + \beta)\mu_x)$$

よって,

$$\begin{aligned}\text{Var}(x_i) &= E(x_i^2) - \mu_x^2 \\ &= E(\Psi_i^2) E(\epsilon_i^2) - \mu_x^2 \\ &= E(\Psi_i^2) (1 + \sigma^2) - \mu_x^2\end{aligned}$$

これに上で求めた $E(\Psi_i^2)$ を代入して整理すると,

$$\text{Var}(x_i) = \mu_x^2 \sigma^2 \frac{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2\sigma^2}$$

となる. ■

約定間隔 x_i の自己相関

また, x_i の自己相関についても次の形で求めている. 基本的な考え方は時系列モデル ARMA(1,1) に変形し, その自己相関を求めるという方法である. 1.8 式の両辺に x_i を加えて,

$$\Psi_i + x_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} + x_i$$

$$x_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} + x_i - \Psi_i$$

ここで $u_i = x_i - \Psi_i$ とおく. この u_i はマルチンゲール階差である.

$$x_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta (x_{i-1} - u_{i-1}) + (x_i - \Psi_i)$$

$$x_i = \omega + (\alpha + \beta) x_{i-1} + u_i - \beta u_{i-1} \quad (1.12)$$

1.12 式は ARMA(1,1) モデルの形になっているので, 自己相関は次のように表現できる.

$$\rho_1 = \frac{\alpha(1 - \beta^2 - \alpha\beta)}{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta}, \quad \rho_n = (\alpha + \beta) \rho_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (1.13)$$

注目すべきは, ACD モデルの定式化に誤りが無いとすると, x_i の自己相関がモデルパラメータの α と β のみで表現できることである. 2つのパラメータが ρ_1 に対して及ぼす影響をここで確認しておく. それぞれ, 偏微分すると次のようになる.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha} = \frac{2\alpha\beta(\alpha\beta + \beta^2 - 2) + (\beta^2 - 1)^2}{(1 - \beta^2 - 2\alpha\beta)^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \beta} = \frac{\alpha^2(\beta^2 + 1)}{(1 - \beta^2 - 2\alpha\beta)^2} \quad (1.15)$$

これらの式から ρ_1 は β については増加関数であることが分かる.

調整間約定間隔 τ_i のトレンド

約定間隔 x_i は実際に観測した値を利用するものではない. 市場では, 開始時と終了時に活発な取引が行われる. JPX のように昼休みがある市場では, 前場の終了時や, 後場の開始時にも同じ傾向が見られる. よって, これらの時間に依存した傾向を次式のようにして除去する方法を採用している. 実際に観測される約定間隔を τ_i とすると,

$$x_i = \frac{\tau_i}{\phi(t_{i-1})} \quad (1.16)$$

$$\phi(t_i) = a + bt_i \quad (1.17)$$

Engle and Russell (1998) では $\phi(t_{i-1})$ としてキュービックスプライン関数を利用している. 取引時間内の1時間ごとにノードを設定し, その単位時間のスプラインの定数項が, 標本平均に一致するようにした. 一方, Engle (2000) では線形スプラインを利用してトレンドを除去している.

ACD モデルの推定

(1.8) 式のパラメータを最尤推定するためには次に示す要領で関数変換を行う必要がある。今, x_i の分布関数と密度関数を F_x, f_x , 攪乱項 ϵ_i の累積密度関数と密度関数を F_ϵ, f_ϵ とする。(1.5) 式から次のような関係式を導くことができる。

$$\begin{aligned} F_x(x_i) &= P(X_i \leq x_i) = P(\Psi_i \epsilon_i \leq x_i) \\ &= P\left(\epsilon_i \leq \frac{x_i}{\Psi_i}\right) = F_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

これを微分して,

$$f_x = \frac{d}{dx} F_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right) = f_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right) \cdot \Psi_i^{-1} \quad (1.19)$$

よって, 対数尤度関数 $l(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^n \ln f_x(x_i | H_i; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\ln f_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}; \theta_2\right) - \ln \Psi_i \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

θ は推定に利用する全てのパラメータを指し, (1.8) 式の ω, α, β をまとめて θ_1 , 密度関数のパラメータを $\theta_2, \theta = (\theta_1, \theta_2)$ とする。例えば, 密度関数に次に示す指数関数を用いた場合, 尤度関数は次のようにして求める。

$$f_E = \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{c}\right)$$

期待値 $c = 1$ と仮定²することによって $l(\theta)$ は (1.20) 式より次のようになる。

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^n \left[\ln f_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}; \theta_2\right) - \ln \Psi_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(\exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right) \right) - \ln \Psi_i \right] \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{\Psi_i} + \ln \Psi_i \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

このように指数関数を用いると, 密度関数のパラメータ θ_2 を推定する必要はなく, (1.8) 式のパラメータ θ_1 のみ, 推定することになる。

推定に当たって f_ϵ として適切な密度関数を選択することになるが, 我々には2つの選択肢があるので, それをここで確認する。一つは Engle and Russell[1998] のように真の密度関数と思われるものを用いて最尤推定量 (Maximum Likelihood Estimator:MLE) を求めるものであり, もう一つは, 仮の密度関数を用いて擬似最尤推定量 (Quasi-Maximum Likelihood Estimator:QMLE) を求めるというものである。Engle[2000] は QMLE を用いている。

² $c \neq 1$ の場合, ϵ_i/c としてデータの変換を行う。

QMLEは仮の密度関数を用いても、データ量が十分大きければ推定値が正しい値に一致するという、最尤法の一致性を利用するものである。QMLEによるパラメータ推定量は、最尤法を用いた場合と同じものになるが、標準誤差の計算方法は異なる。最尤推定値 θ_1 に対する擬似最尤値を θ_1^0 、分散を $V_q(\theta_1^0)$ とするとその分布は次のように記述できる。

$$\tilde{\theta}_1 = N(\theta_1^0, V_q(\theta_1^0)) \quad (1.22)$$

Bollerslev and Wooldridge[1992]によれば、 $V_q(\theta_1^0)$ は $\frac{1}{N}A^{-1}BA^{-1}$ として推定できる。

$$A = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left(\frac{\partial^2 \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \quad (1.23)$$

$$B = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left(\left[\frac{\partial \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta} \right]' \right) \quad (1.24)$$

(1.23) 式の

$$E \left(\frac{\partial^2 \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right)$$

は、推定した θ の下でのヘッセ行列であり、(1.24) 式の

$$E \left(\left[\frac{\partial \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \ln f_x(x_i|H_i; \theta)}{\partial \theta} \right]' \right)$$

は、勾配の外積である。これらを使って計算した次式の対角成分の平方根が擬似最尤推定量の標準誤差となる。

$$\frac{1}{N}A^{-1}BA^{-1}$$

QMLEの場合、密度関数の吟味と推定後の診断に労力を費やす必要はない。

Engle and Russell (1998) が実際に利用したデータは1990年11月1日から1991年1月31日までのIBM社の株式である。この間で取引停止のあった日や、取引開始時間の大きな遅れがあった日を除き、61日間の約定データを利用した。1時点あたりの約定回数を1としてカウントした場合、彼らの約定データは52,405個、実際の約定は58,942回である。したがって、同じタイムスタンプの付いた6,537個(約11%)のデータは除外され、ACDモデルの推定では利用していない。実証分析においては1.5式の ϵ に関し、ワイブル分布を用いたWACD(1,1)およびWACD(2,2)モデル推定を行っている。ワイブル分布を推定した後で、シェイプパラメータ γ について、 $\hat{\gamma} = 1$ の仮説検定を行い、指数分布でなくワイブル分布を選択した事が報告されている。

ACDモデルはARMAモデルと同様に、ラグの大きさは当てはまりの良さで決定する。つまり、一般形はACD(m, q)と書くことができる。

$$\Psi_i = \omega + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \Psi_{i-j}$$

価格期間の ACD モデル

取引が活発に、集中して行われる状況は、情報投資家に起因するのか、それとも、非情報投資家に起因するのか、その原因を調べるために、この ACD モデルで約定間隔の代わりに、価格変化に要した時間を利用した ACD モデルも提案されている。Easley and O'Hara (1992) によれば、取引数は情報事象の発生と、情報投資家の増加により増えていくものとされている。結果としてビットアスクスプレッドが増加し、価格のボラティリティが大きくなるという主張である。Engle and Russell (1998) は約定間隔を利用した ACD モデルの他に、株価の価格変化に要する時間を利用して、Easley and O'Hara (1992) の主張を検証した。

価格が変わらない期間を価格期間 (Price Duration) とし、価格情報は次に示す仲値 (midprice) とした。

$$p_i = \frac{bid_i + ask_i}{2}$$

bid_i は時点 t_i におけるビット価格で、 ask_i はアスク価格である。この仲値の従う確率過程は、薄型点過程 (thinned point process) と呼ばれている。この p_i は、先の“約定”には限定されない。つまり、最良気配を利用した仲値も利用し、それらの中での変化時間を計る。気配の変化については閾値定数 c を考え、 $[-c, c]$ の範囲を超えたときに価格変化と定義している。実際の設定では 2 ティック分の $c = \$0.25$ を採用した。

価格期間の ACD モデルにおける大きな特徴はデータ数が激減することである。実際に、3 ヶ月間の IBM データでゼロ約定を除いた約定データは 52,405 個であるが、価格変化データは僅か、1347 個に過ぎない。また、価格変化に要した平均時間は 15 分弱、そして一日当たりの価格変化の平均回数は 25.5 回、最小時間は 1 秒、最大は約 3 時間とある。価格変化時間の分布は指数分布に従うものの、標準偏差が平均の 1.43 倍であり、過分散となっている。価格期間の Ljung-Box 統計量は 72 で自己相関の存在を示唆し、すべての自己相関係数は正となった。

p_i についても約定間隔同様、日中の変動パターンが存在すると考えられるので、トレンドを除去した上で価格時間による ACD モデルを推定する。Engle and Russell (1998) の利用した 4 つの EACD モデルの構成を以下に示す。

$$\begin{aligned}\Psi_i &= \omega + \sum_{j=1}^2 \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \Psi_{i-j} + \gamma_1 Z_1 \\ \Psi_i &= \omega + \sum_{j=1}^2 \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \Psi_{i-j} + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 \\ \Psi_i &= \omega + \sum_{j=1}^2 \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \Psi_{i-j} + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4 + \gamma_5 Z_5 \\ \Psi_i &= \omega + \sum_{j=1}^2 \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \Psi_{i-j} + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4\end{aligned}$$

Z_1 は1秒当たりの取引数(取引密度), Z_2 はスプレッド, Z_3 は出来高を約定数で除したもの, Z_4 と Z_5 はともに Z_1 と同じく1秒当たりの取引数であるが, スプレッドの大きさによって2種類に分けたものである. Z_4 がスプレッドが大ききもので, Z_5 は小さいものである. このように, 説明変数としてスプレッドや取引密度を追加して価格変化への影響を考察した. 取引密度を追加したモデルでは負の有意な値を得ている. つまり, 活発な取引は, 価格変化の速度を上げる, ということである. この事はボラティリティを大きくすることと同義である. つまり, Easley and O'Hara (1992) の主張を仮説検定を用いて支持する結果となった.

UHF-GARCH モデル

Engle (2000) はACDモデルとGARCHモデルを利用して, 再び, Easley and O'Hara (1992) の仮説を検証した. データはEngle and Russell (1998) と同じものを利用している. ここでのポイントは, ACDモデルで推定した期待約定間隔 Ψ_i を, 新たにUHF-GARCHモデルの説明変数として利用し, 瞬間収益率と約定間隔の仮説検定を行ったところにある. 結果から先に言えば, 約定間隔 x_i や期待約定間隔 Ψ_i が大きくなれば, 瞬間収益率のボラティリティが低下し, Easley and O'Hara (1992) を再び裏付けることとなった.

最初にEngle and Russell (1998) と同じくゼロ約定間隔を取り除いた x_i を作成する. GARCHモデルにならって, 1.8式をACD(1,1)モデルと呼ぶ. Engle (2000) では, ACD(1,1)モデルに加えて, 所謂, コンポーネントGARCHモデルに対応したACD(2,2)を推定している. コンポーネントGARCHモデルはボラティリティをロングラン成分と, ショートラン成分に分けたモデルである. それをACDモデルに持ち込み, ACD(2,2)モデルを推定した. 結果として彼らの用いたデータではACD(2,2)が優れていると結果になった.

Engle and Russell (1998) では, 約定間隔が価格形成に及ぼす影響を検証するため, 価格変化に要した時間間隔を用いてPACDモデルによる実証分析を行った. しかし, Engle (2000) ではGARCHモデ

ルを用いて、約定間隔とボラティリティの関係性をモデル化した。そのモデルは高頻度 (Ultra-High-Frequency) データを用いた GARCH モデルなので、UHF-GARCH モデルと呼ばれている。 $i - 1$ 時点から i 時点までのリターンを r_i とする。その条件付き分散を次のように定義する。

$$V_{i-1}(r_i|x_i) = h_i$$

瞬間収益率の分散は、過去のリターンと約定間隔同様、現在の約定間隔によって決まると考える。ボラティリティは普通、一定間隔で観測した価格情報によって求められる。ここでは、収益率と、その約定間隔が一回の取引ごとに“規則的”に観測されるものとする。次に、収益率の瞬間のボラティリティを次のように定義する。

$$V_{i-1}\left(\frac{r_i}{\sqrt{x_i}}|x_i\right) = \sigma_i^2$$

一回の取引におけるリターンと、瞬間のリターンの分散の関係は次のようになる。

$$h_i = x_i \sigma_i^2$$

したがって、 $i - 1$ 時点での予測分散は

$$E_{i-1}(h_i) = E_{i-1}(x_i \sigma_i^2)$$

この瞬間収益率についても日中のトレンドが存在すると考えて、トレンドは除去する。つまり、瞬間収益率をその約定間隔の平方根で除し、線形なトレンド関数を利用して調整を行う。GARCH モデルはリターンの平均推定式とボラティリティの2つの式からなる。それを援用した ACD モデルでは瞬間収益率により平均推定式と、瞬間ボラティリティの2つの式でモデルを推定する。最初に、収益率の平均推定式は ARMA(1,1) モデルに従うとして次のようにした。 e はイノベーションである。

$$r_i/\sqrt{x_i} = \rho r_{i-1}/\sqrt{x_{i-1}} + e_i + \phi e_{i-1} \quad (1.25)$$

上式の右辺には検証を目的とする変数を追加できる。例えば、説明変数として現時点の x_i を導入すれば、その符号によって仮説を検定できる。具体的に言えば、 x_i の係数として負の値が推定されれば、約定間隔が長いほど、収益率が低下することになり、“取引の無い状態は、悪い情報の存在を示す”という Diamond and Verrecchia の仮説を支持することになる。

標準的な GARCH モデルの分散推定式は次の通りである。

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha e_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2$$

これを 22 ページに示した約定間隔による ACD モデルと同じように、瞬間収益率のボラティリティに影響を与えられと考えられる変数を用いた推定する。平均推定式は共通で、次のように設定する。

$$r_i/\sqrt{x_i} = kx_i + \rho r_{i-1}/\sqrt{x_{i-1}} + e_i + \phi e_{i-1} \quad (1.26)$$

先に述べたように瞬間収益率に対して、約定間隔 x_i の及ぼす影響を読み取ることができる。分散推定式は4つのパターンで推定した。

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha e_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2 + \gamma_1 (1/x_i) + \gamma_2 (x_i/\Psi_i) + \gamma_3 LongVol_{i-1} + \gamma_4 (1/\Psi_i)$$

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha e_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2 + \gamma_1 (1/x_i)$$

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha e_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2$$

$$\sigma_i^2 = \omega + \alpha e_{i-1}^2 + \beta \sigma_{i-1}^2 + \gamma_1 (1/x_i) + \gamma_2 (x_i/\Psi_i) + \gamma_3 LongVol_{i-1} + \gamma_5 Spread_{i-1} + \gamma_6 Size_i$$

$1/x_i$ は約定間隔の逆数なので、 γ_1 が正の時、約定間隔が長くなれば、ボラティリティが低下することを示している。これは Easley and O'Hara 仮説を検証に利用する。観測した調整済み約定間隔を期待約定間隔で除した x_i/Ψ_i は、約定間隔における“ショック”と位置づけている。 γ_2 はすべてのモデルで負になっており、約定間隔がその期待値よりも長い場合、ボラティリティを低下させることを示している。 $LongVol$ は別途求めた、瞬間収益率のロングランボラティリティ ξ_i で、次式のように定義している。

$$\xi_i = 0.005 (r_{i-1}^2/x_{i-1}) + 0.995\xi_{i-1}$$

これは、 r^2/x をパラメータ 0.995 で指数関数平滑化することを示している。このような設定で、UHF-GARCH モデルを推定し、Easley and O'Hara 仮説と Diamond and Verrecchia の仮説を検証し、前者を支持する実証結果を得ている。

Log-ACD モデル

1.8 式は推定においてパラメータに非負制約を課していないので、推定値が負になることがある。つまり、期待約定間隔 Ψ_i が負になりえる。Bauwens and Giot (2000) はこの問題を避けるために次のような定式化を行った。最初に、1.3 式を次のように考える。

$$x_i = \exp(\psi_i) \epsilon_i$$

ψ_i は期待約定間隔の対数値である。

$$\Psi_i = \exp(\psi_i)$$

そして ACD モデルとして、次の2つの定式化を提案した。

$$\begin{aligned} \psi_i &= \omega + \alpha \ln \epsilon_{i-1} + \beta \psi_{i-1} \\ &= \omega + \alpha \ln x_{i-1} + (\beta - \alpha) \psi_{i-1} \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned}\psi_i &= \omega + \alpha \epsilon_{i-1} + \beta \psi_{i-1} \\ &= \omega + \alpha (x_{i-1} / \exp \epsilon_{i-1}) + \beta \psi_{i-1}\end{aligned}$$

Log-ACD モデルの利点は, パラメータに直接, 非負制約を設定せずとも, Ψ_i が正であることが保証されていることである. この Log-ACD モデルは一般的に関数 $g(\cdot)$ を利用して次のように表現する.

$$\psi_i = \omega + \alpha g(\epsilon_{i-1}) + \beta \psi_{i-1}$$

もちろん, $g(\epsilon_{i-1})$ は $\ln \epsilon_{i-1}$ または, ϵ_{i-1} である. Log-ACD モデルの無条件期待値と, 自己相関は次のようになる. ただし, 以下の計算を行うためには $|\beta| < 1$ を必要条件とする.

$$\begin{aligned}E(x_i) &= \mu_x = E(\epsilon_i) \exp\left(\frac{\omega}{1-\beta}\right) \prod_{j=1}^{\infty} E(\exp(\alpha \beta^{j-1} g(\epsilon_i))) \\ \rho_n &= \frac{E(\epsilon_i) E(\epsilon_i \exp(\alpha \beta^{n-1} g(\epsilon_i))) \prod_{j=1}^{n-1} E(\epsilon_i \exp(\alpha \beta^{j-1} g(\epsilon_i))) \prod_{j=1}^{\infty} E(\epsilon_i \exp(\alpha (1+\beta^n) \beta^{j-1} g(\epsilon_i)))}{E(\epsilon_i^2) \prod_{j=1}^{\infty} E(\exp(2\alpha \beta^{j-1} g(\epsilon_i))) - \{E(\epsilon_i)\}^2 \prod_{j=1}^{\infty} E(\exp(\alpha \beta^{j-1} g(\epsilon_i)))^2} \\ &= -\frac{\mu_x^2}{\sigma_x^2}, \quad \text{for } n \geq 1\end{aligned}$$

その他の ACD モデル

ACD モデルにはその後, 複数の拡張型モデルが提案されている. GARCH モデルの拡張と同じ方向性を持ったものとして Dufour and Engle (2000a) による EXACD(Exponential ACD) モデルがある. Log-ACD モデルは調整済み約定間隔が非常に短い場合, ほぼ $\log(0)$ となり, 非常に大きな負の値を取ってしまう. この影響を回避するために次に示す EXACD モデルを提案した.

$$\ln \psi_i = \omega + \sum_{j=1}^m [\alpha_j \epsilon_{i-j} + \delta_j |\epsilon_{i-j} - 1|] + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \psi_{i-j}$$

これらの ACD モデルの拡張形はモデルの非線形性を示すものである. Zhang *et al.* (2001) は TGARCH モデルの ACD モデル版として次に示す k レジームの TACD(m,q) モデルを提案した.

$$\begin{cases} x_i = \psi_i \epsilon^{(k)} & \text{if } x_{i-1} \in R_k \\ \psi_i = \omega^{(k)} + \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j^{(k)} \psi_{i-j} \end{cases}$$

ここで $R_k = [r_{k-1}, r_k], k = 1, 2, \dots, K$ で $K \in \mathbb{Z}^+$ であるとする. K はレジーム数である. そして, r_k は $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_K = \infty$ を満たす閾値である.

GARCHモデルの拡張に確率的ボラティリティを導入したモデルがあるように、ACDモデルにおいても同様のアプローチが採用されている。Bauwens and Veredas (2004) は条件付きの確率的約定間隔モデルを提案している。ACDモデルでは Ψ_i を確定的な変数として定式化していたが、SCD(stochastic conditional duration)モデルではそれを潜在変数として扱う。つまり、 Ψ_i は市場において観測できない情報を持つ変数と考える。

$$x_i = \Psi_i \epsilon_i$$

$$\ln \Psi_i = \omega + \beta \ln \Psi_{i-1} + u_i \quad |\beta| < 1$$

ここで、 ϵ_i は観測可能な約定間隔の不確実性であり、 u_i は条件付き約定間隔の不確実性である。この2つの確率変数について次のような仮定をおく。

$$\epsilon_i | F_{i-1} \sim iid p(\epsilon_i) \text{ かつ } u_i | F_{i-1} \sim iid N(0, \sigma^2) \text{ で } u_i \text{ と } \epsilon_i \text{ は独立}$$

標準的なACDモデルとは異なり、 u_i についても分布を仮定する。すなわち、SCDモデルは混合モデルである。よって、標準的なACDモデルの推定に比べると、より高度な推定手法を用いることになる。

1.3 推定上の問題点

Engle and Russell (1998) や Engle (2000) を始めとする先行研究では、基本的に同じタイムスタンプのついた約定データは“ゼロ約定間隔”としてデータから除外した上で、ACDモデルを推定している。その時の問題点をここで示す。まず、次の表に示すような取引の状況を考える。

時刻 (秒単位)	約定情報
$t-1$	D_{k-2}, D_{k-1}
t	D_k
$t+1$	—
\vdots	\vdots
$t+h-1$	—
$t+h$	D_{k+1}, \dots, D_{k+n}
$t+h+1$	—
$t+h+2$	D_{k+n+1}

表 1.4: 高頻度データの約定パターン

この約定パターンの例では、時点 $t-1$ で 2 回、 $t+h$ では n 回の約定が発生している。過去の研究では、これらの複数回約定部については、1 回のみ約定あるとしてモデル推定を実行した。アローヘッド稼働前の JPX では“3 秒ルール”により投資家からの注文が処理されていたので、約定間隔にバイアスがかかる状態であったので、そもそも ACD モデルの推定には不向きであったと言える。しかし、現在、“3 秒ルール”は撤廃され、リアルタイムの取引が実行されているので、ようやく、ACD モデルの推定に適した環境になったと考えられる。

しかし、我々が一般的に入手できる約定データは秒単位のタイムスタンプが付いたものしかない。つまり、秒単位未満の時間情報は付与されていない。高 (2012) では 1 秒間に n 回の約定が発生している $t+h$ 時点の場合、 $1/n$ とする仮想的な約定間隔を作成し、これを‘擬約定間隔’と呼んだ。これにより、データを失うことなく、推定が可能になると考えた。しかし、この方法は極めて簡易的であり、直感的なものである。1 秒未満の時間のことではあるが、複数回、同じ約定間隔が発生していると考えるのは、むしろ難しい。宇野・柴田 (2012) ではアローヘッド稼働後の取引は小口、高頻度化していることが報告されている。この事を考慮すると、今日のマーケットは無視されてしまうゼロ約定間隔が大量に作成される状況にあると考えられる。

次の問題点はスプライン関数の推定である。例として、日産自動車の株価を利用して ACD モデルの推定を行った高 (2012) の約定間隔の様子を図 1.4 に示す。

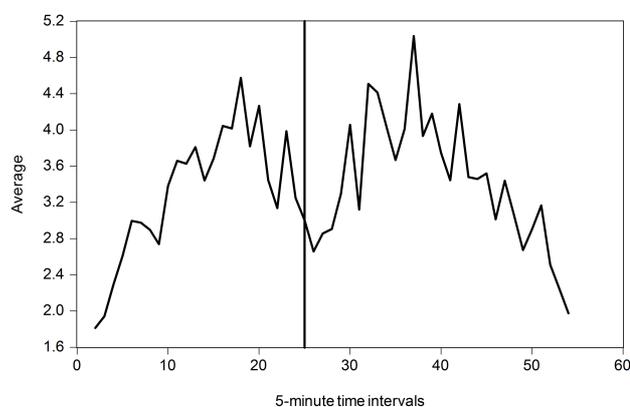


図 1.4: トレンド調整前の τ_i の 5 分間平均

20 日間の約定データの 5 分平均を計測したものである。明らかに、前場の取引開始直後や後場の終了間際に短くなっている様子が伺える。トレンド関数を推定する際は最初にノットと呼ばれるポイントを設定する。前場では 9:00,9:30,10:00,10:30,11:00,11:30, 午場では 12:30,13:00,13:30,14:00, 14:30,15:00 をノットとする。トレンド関数はこの 30 分の区間ごとに推定する。推定したトレンド関数の理論値

を利用して1.16式の要領で x_i を作成する.トレンドを除去した x_i の5分平均の値は図1.5のようになり,トレンドが消失していることが分かる.

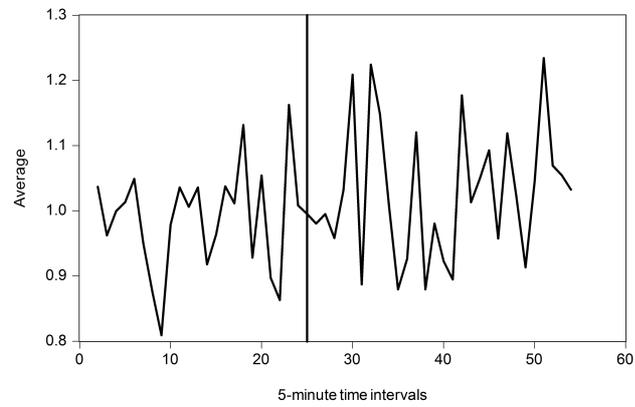


図 1.5: トレンド調整後の x_i の 5 分平均

推定された日中のトレンド関数は図 1.6 のようになる.

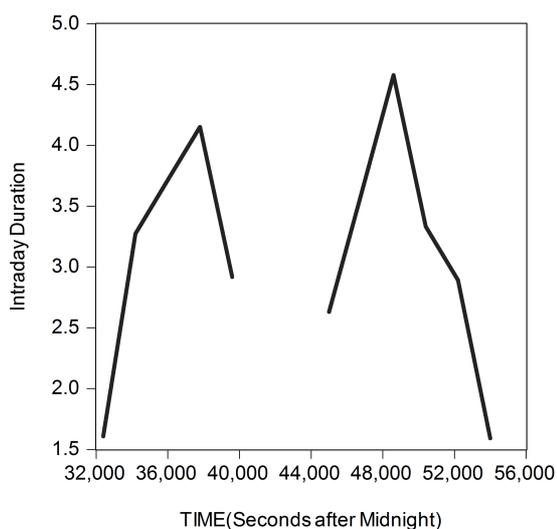


図 1.6: OLS で推定したトレンド関数

Engle and Russell (1998) を始めとする研究では、ここに示したのと同じようにスプライン関数の推定を最初に行い、その後、1.16 式を利用してトレンド成分を削除し、調整後の約定間隔を求めている。しかし、Engle (2000) でも触れているように本来、スプライン関数と ACD モデルは同時推定を行うべきである。例えば、22 ページで紹介した Engle (2000) では ACD モデルで推定した $\hat{\psi}_i$ や、トレンドを除去した x_i を説明変数として UHF-GARCH に持ち込んで実証分析を行っている。これは ACD モデルの推定結果が正しいことが前提となっている。よって、ACD モデルの推定で改善点が見つかれば、それは直接、実証結果にも影響を与えるものである。

実際、ACD モデルのサーベイ論文である Pacurar (2008) でもここで挙げた 2 点を将来的な“課題”として取り上げている。要約すれば、トレンド除去の方法は推定に大きな影響を与えるが、まだ、十分に研究されていない。そして、ゼロ約定間隔の扱いに関しては、それを単純に削除してしまうことが主流であるが、研究者間での合意には至っていないとしている。

本研究では、トレンド削除の方法については、新たな提案は含んでいないが、最尤法による同時推定による推定精度の向上を試みる。また、ゼロ約定間隔の削除については、均等間隔の擬約定間隔の利用と、ゼロ約定間隔の削除による方法を、仮想データで比較を行し、ゼロ約定間隔の取り扱い方に関する新たな知見の獲得を目指す。

約定間隔とモデルパラメータの関係

本研究の目的はここに示した2つの問題点をクリアしてACDモデルのパラメータを精緻に推定することである。これらの問題点をクリアするための工夫を施す上で、重要な点をここで確認する。それは、トレンド調整後の約定間隔 x_i の自己相関構造を変化させないことである。具体的に言えば、 x_i がACDモデルに従う場合、その自己相関は1.13式に示すように α と β によって決定するからである。例えば、秒単位までしか分からない τ_i のデータ精度をミリ秒単位まで何らかの方法で向上させたとしても、トレンド除去後の x_i の自己相関が真のそれと変化してしまっは意味がない。また、ゼロ削除で捨て去るのではなく、なんらかの方法で活かしたとしても、同様である。ACDモデルのパラメータを精緻に推定するとは、言い換えれば、 x_i の自己相関構造を、いかにして真のそれに近づけるかということになる。

ここで、ACDモデルのパラメータ α と β のと x_i の自己相関の関係を確認しておく。自己相関の計算式は1.13式である。

図1.7からも明らかなように、 α を固定して β を徐々に増やすと、自己相関の減衰速度は遅くなることが分かる。一方で、 α を大きくすると、自己相関の値が全体的に大きくなる。

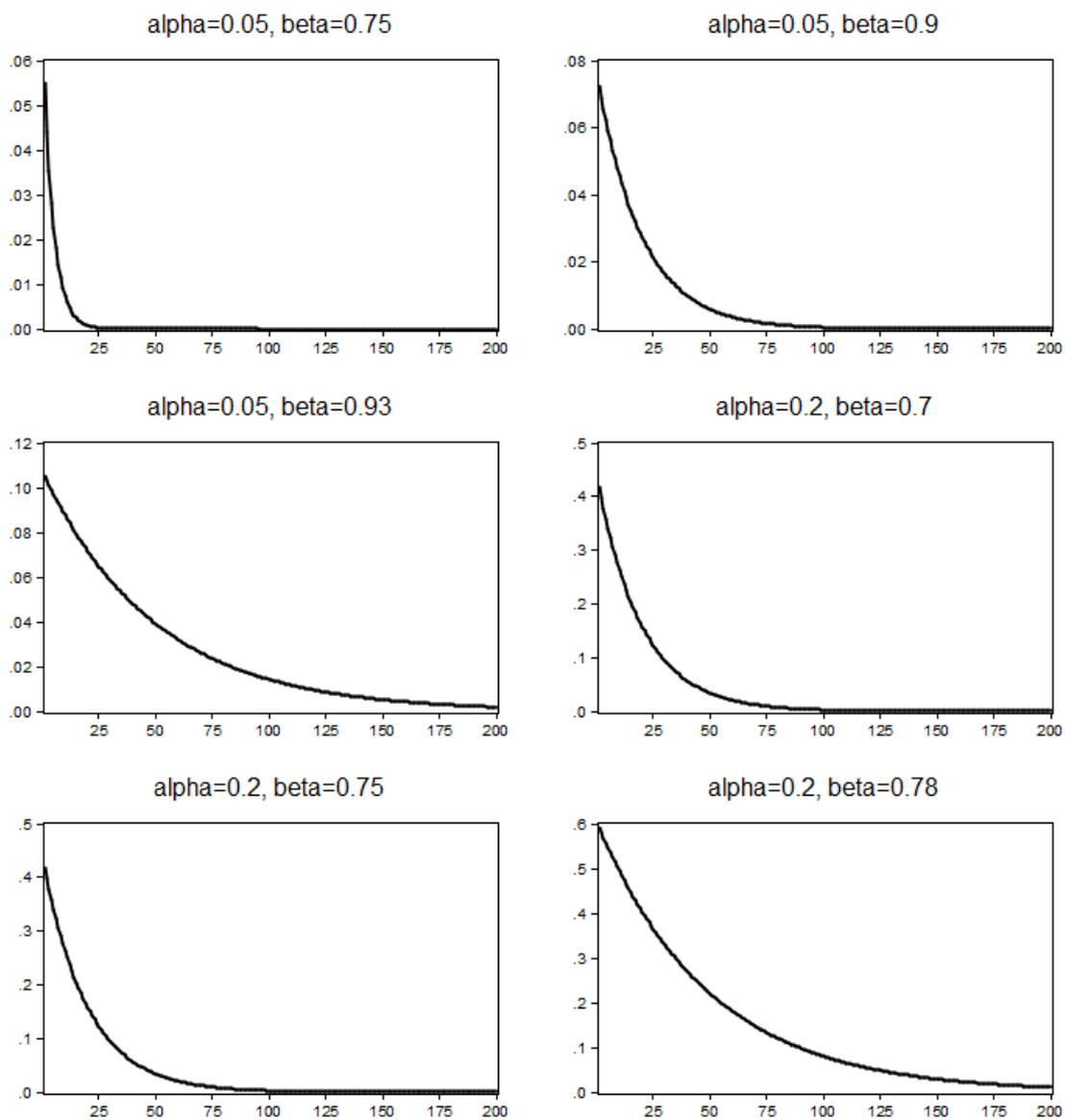


図 1.7: ACD モデルの自己相関

第2章 数値実験

ACD モデルの推定において高 (2012) で提案した擬約定間隔 (均等間隔) を利用する方法が実際に, Engle and Russell (1998) らの利用したゼロ約定間隔の削除に比べて優れているのか, 数値実験によって検証する. 仮想データの作成は 15 ページ, “ACD モデル” の項で述べた設定を利用する. 1.5 式の ϵ_i は期待値 1 の指数分布とする.

- 最初に, 話を簡単にするために日中のトレンドは無いものとして, 4 通りのパラメータパターンを使って, 乱数による数値実験を行う. これにより, ゼロ約定間隔の削除や, 擬約定間隔の効果を検証する. Engle and Russell (1998) はゼロ約定間隔を削除している.
- ACD モデルの推定には日中のトレンドを, 如何に除去すべきかという問題がある. よって, 仮想データの作成において日中のトレンドを設定する. ACD モデルとトレンド関数のパラメータを最尤法によって同時推定することの効果を確認する. Engle and Russell (1998) は同時推定は行っていない.

2.1 トレンドのない場合

ここではトレンドの無い仮想データを作成し, ゼロ約定間隔の削除と, 擬約定間隔利用の効果について吟味する. つまり, 1.17 式において $a = 0, b = 1$ として仮想データを作成する. 仮想データは次の 4 つのタイプ (表 2.1) を作成する. タイプ I と II, それからタイプ III と IV は ω の値だけが異なっている. ω の違いは“データ整形過程”でのゼロ約定間隔の数に影響する. タイプ I で *obs.* とあるのは, データ整形後, ゼロ約定間隔を削除した場合, 元データの 41% しか約定間隔のデータが残らないことを意味している. 乱数を利用して作成される仮想的約定間隔は実数値である. その小数点以下を切り上げて, 整数化する処理の事を“データ整形過程”と呼ぶことにする.

ρ_1 は式 1.13 から求めた x_i の一次の自己相関である. 表 2.1 から, ρ_1 が大きいほど, 消失するデータの多い事が分かる.

	データの特徴	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	obs.
I	x_i の無条件期待値が短く, 自己相関が弱い	0.05	0.2	0.7	0.5	0.321	41%
II	x_i の無条件期待値が長く, 自己相関が弱い	0.1	0.2	0.7	1	0.321	59%
III	x_i の無条件期待値が短く, 自己相関が強い	0.05	0.5	0.4	0.5	0.727	34%
IV	x_i の無条件期待値が長く, 自己相関が強い	0.1	0.5	0.4	1	0.727	49%

表 2.1: 仮想データの4つのタイプ

タイプ I

タイプ I データによる ACD モデルの推定結果を表 2.2 に示す. カッコ内は標誤差である. 最初にベンチマークの値は設定値にほぼ等しく, 推定上の手順に誤りのないことが分かる. 表中の $E(x_i)$ は 1.9 式による x_i の無条件期待値, ρ_1 は 1.13 式に 1 次の自己相関係数である. これから, 推定したパラメータから計算した値である. 一方, $AC(1)$ は 2.1 式¹を使って求めた一次の自己相関の実現値である. データの個数は obs. にあり, ゼロ約定間隔として削除したデータが 62,338 個あり, 59% を失っている事が分かる.

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	$AC(1)$	obs.
設定値	0.05	0.2	0.7	0.5	0.321	—	105,000
ベンチマーク	0.048 (0.001)	0.196 (0.003)	0.706 (0.004)	0.497 -	0.317 -	0.302 -	105,000 -
ゼロ削除	0.214 (0.011)	0.194 (0.007)	0.629 (0.013)	1.220 -	0.260 -	0.254 -	42,662 -
均等間隔	0.069 (0.001)	0.747 (0.005)	0.170 (0.004)	0.851 -	0.880 -	0.436 -	105,000 -

表 2.2: 推定値の変化 (タイプ 1)

擬約定間隔として均等間隔を利用した場合, α と β の値がほぼ入れ替わる結果になっており, ここでは擬約定間隔の利用が不適當であることが分かる. 念のため, ここで利用したソフトウェアの自己相関の計算式を記す.

$$AC(1) = \frac{\sum_2^N (x_i - \bar{x})(x_{i-1} - \bar{x})}{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.1)$$

¹EViews での定義式

参考までに、 k 次の自己相関の定義式は次式である.

$$AC(k) = \frac{\sum_{k+1}^N (x_i - \bar{x})(x_{i-k} - \bar{x}_{i-k}) / (N - k)}{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2 / N} \quad (2.2)$$

タイプ II

ベンチマークについては、これも設定値にはほぼ等しく、誤りのない事がわかる.

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	$AC(1)$	$obs.$
設定値	0.1	0.2	0.7	1.0	0.321	—	105,000
ベンチマーク	0.096 (0.002)	0.196 (0.003)	0.706 (0.004)	0.994 -	0.317 -	0.302 -	105,000 -
ゼロ削除	0.232 (0.008)	0.195 (0.004)	0.664 (0.008)	1.652 -	0.279 -	0.274 -	62,903 -
均等間隔	0.118 (0.002)	0.328 (0.003)	0.559 (0.005)	1.064 -	0.518 -	0.361 -	105,000 -

表 2.3: 推定値の変化 (タイプ 2)

タイプ I と同じく、 α と β についてはゼロ削除の方が、均等間隔よりも設定値に近い値を得ている.

タイプ III

タイプ 3 の場合、ACD モデルの係数に何の制約もかけないと、均等間隔の推定で $\alpha + \beta < 1$ の条件を満たさなかった. よって、ここでは、1.8 式に次のような制約を掛けた.

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} \\ &= \omega + @logit(c(2)) x_{i-1} + (1 - @logit(c(2))) \times @logit(c(3)) \Psi_{i-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

つまり、関数 $@logit = \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)}$ を使って、 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha + \beta < 1$ という制約を推定式に設定した. 推定値の標準誤差はデルタ法を用いて求めた. ω について $\omega > 0$ という制約条件があるが、ここでは非負条件を満たしていたので、推定時に制約は課していない.

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	$AC(1)$	<i>obs.</i>
設定値	0.05	0.5	0.4	0.5	0.727	—	105,000
ベンチマーク	0.049 (0.000)	0.507 (0.004)	0.395 (0.004)	0.517 -	0.739 -	0.714 -	105,000 -
ゼロ削除	0.192 (0.011)	0.512 (0.012)	0.363 (0.011)	1.556 -	0.705 -	0.703 -	34,711 -
均等間隔	0.012 (0.002)	0.888 (0.181)	0.111 (0.012)	12 -	0.998 -	0.720 -	105,000 -

表 2.4: 推定値の変化 (タイプ 3)

ここでもゼロ削除の方が設定値に近い推定値を得ている。ゼロ削除では 66% のデータが消失している (表 2.1) が, $AC(1)$ を目安とした時の自己相関の性質は, ゼロ削除と均等間隔のどちらにも引き継がれている。

タイプ IV

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	$AC(1)$	<i>obs.</i>
設定値	0.1	0.5	0.4	1.0	0.727	—	105,000
ベンチマーク	0.099 (0.001)	0.507 (0.004)	0.395 (0.004)	1.035 -	0.739 -	0.714 -	105,000 -
ゼロ削除	0.263 (0.009)	0.502 (0.008)	0.365 (0.008)	2.000 -	0.687 -	0.708 -	52,320 -
均等間隔	0.062 (0.003)	0.804 (0.102)	0.195 (0.010)	62 -	0.998 -	0.717 -	105,000 -

表 2.5: 推定値の変化 (タイプ 4)

タイプ 4 の場合も係数制約なしでは $\alpha + \beta < 1$ の条件を満たすことはできなかったため, タイプ III と同様の設定を施した。やはり, パラメータ α と β はゼロ削除の方が優れている。

数値実験の結論

以上, 4つのパターンの数値実験の結果をまとめると, 擬約定間隔を作成すれば x_i の無条件期待値は小さくなるが, その推定値は設定値から, 大きく乖離してしまった. それに対し, 既存の約定情報を破棄してしまうゼロ削除は自己相関構造を維持し, α と β の推定値でも優れることが分かった.

自己相関の変化

前述のように x_i は ACD モデルに従う場合, x_i の一次の自己相関係数とモデルパラメータ α, β は 1.13 式の関係にある. なぜ, ゼロ削除を行った x_i が原データ (ベンチマーク) の自己相関をある程度, 復元できているのか, 4つのデータタイプにおいて詳細にトレースした. ここではデータを加工する過程で, その呼び方を変えているので, 最初に図 2.1 を用いて, データの加工と呼び方を確認しておく.

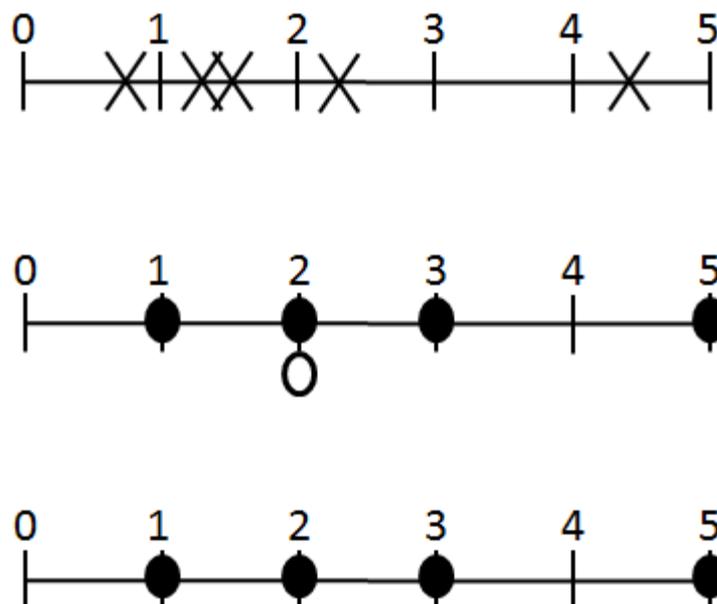


図 2.1: データの加工とゼロ約定間隔

一番上がベンチマークで, バツ印が約定時点を示している. 中段は, タイムスタンプを整数化した状態 (整数型) であり, 中空はタイムスタンプの重複を示す. 一番下の図は, 中空データ (ゼロ約定間隔) を削除した状態を示す.

表 2.6 は $AC(1)$ が 0.321 のタイプ I とタイプ II の自己相関 $AC(1)$ の詳細である.

タイプ I	AC (1)	分子	分母
ベンチマーク	0.302	11482	37973
整数型	0.090	4859 (42.3%)	53791 (141.6%)
ゼロ削除	0.524	4100 (35.7%)	16113 (42.4%)
タイプ II	AC (1)	分子	分母
ベンチマーク	0.302	45931	151895
整数型	0.224	37888 (82.4%)	168777 (111.1%)
ゼロ削除	0.274	27375 (59.6%)	99749 (65.6%)

表 2.6: タイプ I(短・弱) の自己相関の変化

ここでは整数化したときに、分母にくらべ分子の値が小さくなっている。例えば、分子は 4859 で元の 11482 の 42.3% 程度の値になっている。一方、分母は逆に 53791 で 141.6% と、大きくなっている。図 2.1 の中段の白抜きのある状態で、 $AC(1)$ は大きく変化している。つまり、 $42.3/141.6 = 0.29$ で自己相関が大きく減少している。これは、 α と β が大きく変化することを意味する。しかし、ゼロ削除を行うと、分子分母の値は元の値に比べ、35.7% と 42.4% になり、 $35.7/42.4 = 0.841$ で自己相関が若干弱くなっている程度まで復元している。

次に自己相関 $AC(1)$ が 0.727 のタイプ III とタイプ IV を考察する。表 2.7 では整数型でも自己相関はあまり変化せず、その結果、ゼロ削除でも自己相関が維持されていることが分かる。

タイプ III	AC (1)	分子	分母
ベンチマーク	0.714	356486	499346
整数型	0.684	351324 (98.5%)	513491 (102.8%)
ゼロ削除	0.703	317675 (89.1%)	451573 (90.4%)
タイプ IV	AC (1)	分子	分母
ベンチマーク	0.714	1425947	1997388
整数型	0.705	1479428 (103.7%)	2013201 (100.7%)
ゼロ削除	0.708	1339064 (93.9%)	1890054 (94.6%)

表 2.7: タイプ III(短・強) の自己相関の変化

結果として、ゼロ削除における分子分母の縮小割合は相関が強いほどバランスし、相関係数が大きく変化しないということが分かる。ただし、第三章の実証分析で利用する実際のデータはタイプ I や

IIに類するものである.

$\hat{\omega}$ の修正

数値実験よりゼロ約定間隔を削除しても自己相関が維持される傾向にあることが分かった. ここではゼロ削除の推定値を $\hat{\alpha}_z$ と $\hat{\beta}_z$ として, バイアスのかかった $\hat{\omega}_z$ の修正方法を提案する. 真の ACD モデルを 1.8 式とする時, ゼロ約定間隔を削除したデータセット x_i^z は次式を満たす.

$$E(x_i^z) = \frac{\hat{\omega}_z}{1 - \hat{\alpha}_z - \hat{\beta}_z} = \frac{\sum_{i=1}^z x_i^z}{z} \quad (2.4)$$

$\hat{\omega}_z$ はゼロ削除による上方バイアスのかかった値である. z はゼロ約定間隔を削除した時のデータの個数である. 一方, すべてのデータを利用したバイアスのかかっていないデータでは, 次のようになる. $Full$ はゼロ約定間隔を削除していない, 全ての約定間隔データの関数である.

$$E(x_i^{Full}) = \frac{\tilde{\omega}}{1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{Full} x_i^{Full}}{Full} \quad (2.5)$$

ここで分析期間中の約定間隔の時間の総和は, ゼロ削除でも, $Full$ でも等しいので, $\sum_{i=1}^z x_i^z = \sum_{i=1}^{Full} x_i^{Full}$ である. 数値実験の結果より, $\tilde{\alpha} \simeq \hat{\alpha}_z, \tilde{\beta} \simeq \hat{\beta}_z$ となので,

$$\frac{\hat{\omega}_z}{\tilde{\omega}} = \frac{Full}{z}$$

$$\tilde{\omega} = \omega' \frac{z}{Full}$$

となる. この時,

$$V(\omega) = V\left(\omega' \frac{z}{Full}\right) = \left(\frac{z}{Full}\right)^2 V(\omega')$$

となる.

これで各タイプの $\hat{\omega}$ を修正した結果を表 2.8 に示す.

	修正前	修正後	ベンチマーク
タイプ I	0.214 (0.011)	0.087 (0.004)	0.497 -
タイプ II	0.232 (0.008)	0.139 (0.005)	0.096 -
タイプ III	0.192 (0.011)	0.063 (0.003)	0.049 -
タイプ IV	0.263 (0.009)	0.131 (0.004)	0.099 -

表 2.8: ω の修正結果

表 2.8 から明らかなように、本論文で提案する方法によってパラメータ修正を行うことで、 $\hat{\omega}$ をベンチマークにより近づけることができる。更なる修正方法の探求は今後の課題とする。

2.2 トレンドのある場合

トレンドの無い仮想データの結果を受けて、次にトレンドのあるモデルの数値実験を行う。ここでは、トレンド関数と ACD モデルを同時推定する計算式に誤りがなく、プログラミングコードの正しさを確認する事を目的とする。したがって、数値実験によるシミュレーション計算はタイプ I と III についてのみ行う。

トレンド関数の設定値

日中のトレンド関数として利用した線形スプラインの傾きは表 2.9 に示すように、簡単化のため、前場と後場で同じものを利用した。トレンド関数の t_i は午前 0 時から始める秒単位の値である。したがって、午前 9 時は $t_i = 32400$ となる。

区間	a	$b \times 10^4$	区間	a	$b \times 10^4$
1. 9:00-9:30	-26	8.6	6. 12:30-13:00	-36.836	8.6
2. 9:30-10:00	-6.164	2.8	7. 13:00-13:30	-9.692	2.8
3. 10:00-10:30	-17.684	6.0	8. 13:30-14:00	-25.244	6.0
4. 10:30-11:00	27.676	-6.0	9. 14:00-14:30	35.236	-6.0
5. 11:00-11:30	15.796	-3.0	10. 14:30-15:00	19.576	-3.0

表 2.9: 線形スプラインの設定値

日中の線形トレンドを図で示すと, 図 2.2 のようになる.

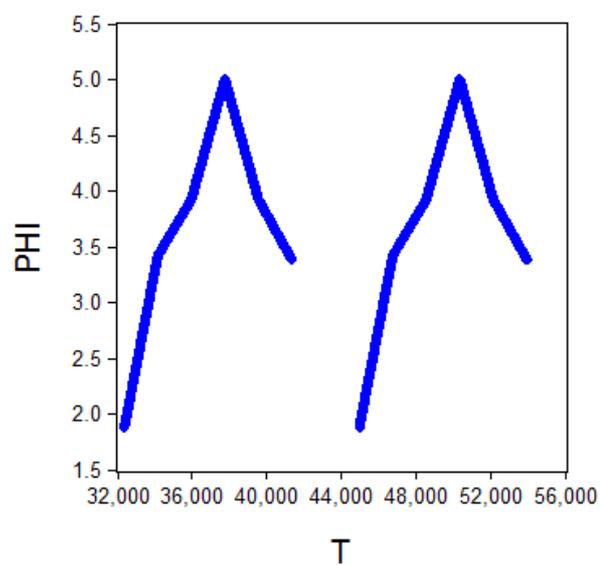


図 2.2: 仮想データのトレンド関数

仮想約定データの分布

表 2.9 の設定値と指数分布の乱数により 15 日分の約定データ (タイプ I と III) を作成した. 乱数作成に利用した乱数キー (seed) と, 各日の約定個数を表 2.10 に示す. 乱数キーは各データタイプにおいて共通である.

	date1	date2	date3	date4	date5
前場	1234	123	12	123456	12345
後場	12340	1230	120	1234560	123450
	date6	date7	date8	date9	date10
前場	6	7	8	9	10
後場	60	70	80	90	100
	date11	date12	date13	date14	date15
前場	11	16	13	14	15
後場	110	160	130	140	150

表 2.10: 乱数作成のキー

表 2.11 に示すタイプ I の 15 日間の合計は 150,758 個である. 一方、タイプ III の 15 日間の合計は 154,065 個である.

	date1	date2	date3	date4	date5
タイプ I	9485	10179	9726	9769	9661
タイプ III	7565	9389	9812	9761	10137
	date6	date7	date8	date9	date10
タイプ I	10415	10122	10131	10487	10151
タイプ III	11212	10592	10990	11513	10508
	date11	date12	date13	date14	date15
タイプ I	9964	9973	10280	10261	10154
タイプ III	10526	10612	10549	9950	10949

表 2.11: タイプ I と III のデータ数 (obs.150,758)

仮想データの要約統計量は表 2.12 のようになった。 x_i の期待値は両方とも設定値に近い。

		μ	σ	min	max	ρ_1
タイプ I	τ	1.789	2.312	$1.53e - 05$	82.2	0.346
	x	0.497	0.617	$4.61e - 06$	19.2	0.323
タイプ III	τ	1.750	5.378	$1.04e - 05$	470.3	0.640
	x	0.488	1.441	$2.31e - 06$	97.2	0.647

表 2.12: タイプ I と III の要約統計量

自己相関は表 2.13 に示す。ACD モデルのパラメータ (ω, α, β) と x_i の自己相関は 1.13 式から分かるように密接な関係にある。前場と後場の自己相関に大きな変化がないので、タイプ I における推定値 α と β は安定していると考えられる。また、 τ_i と x_i の自己相関はほぼ等しい。次にタイプ III のデータについて考察する。タイプ III でも、 τ_i と x_i の自己相関がほぼ等しい。2 変数の相関が既知の場合、その両方を定数倍しても相関は変わらない。式 1.16 から分かるように x_i と τ_i はほぼ、線形関係にある。よって、 x_i と τ_i の自己相関はほぼ等しくなることが分かる。

	タイプ I		タイプ III	
	obs	ρ_1	obs	ρ_1
前場	75765	0.347	76796	0.648
後場	74993	0.346	77269	0.629
一日	150758	0.346	154065	0.640

表 2.13: タイプ I と III の自己相関

x_i が ACD モデルの仮定を満たしていると仮定すると、実証分析において、観測可能な τ_i の実現自己相関を観察することで、ACD モデルのパラメータ α と β の安定度を理解することができる。その意味で、表 2.13 から明らかのように、タイプ III のデータを前場と後場に分けて考えると、 ρ_1 の値は若干異なっているので、ACD モデルの α と β は、タイプ I に比べ、標準誤差が若干大きくなることが予想される。

データの加工

ここでは仮想データ (τ_{org}) を市販データと同じ形に加工し、調整前約定間隔 τ_i の要約統計量と自己相関がどのように変化するか見てゆく。

データの加工を次の要領で行う。

1. 日中の約定時点を小数点以下を切り上げて整数化する。
2. 整数化した時点データの差分を取り、約定間隔 (τ_{int}) を作成する。ただし、昼休み、翌日にかけて時間間隔などデータを修正する。
3. τ_{int} のうち、タイムスタンプが同じで0の値を取るデータを削除し、新たに τ_z を作成する。これは Engle and Russell (1998) などで利用されているデータタイプである。タイプ I で削除されるゼロ約定間隔の個数は 40,786 個 (約 27%)、タイプ III は 56,814 個 (約 36%) である。
4. τ_{int} の同一時点における複数回約定データを単純に、時間を均等割りして、新たに τ_{eq} を作成する。

タイプ I データの詳細

このようにして加工したタイプ I データの要約統計量を表 2.14 に示す。 τ_{org} は加工前のデータである。データはゼロ約定間隔を含み、 ρ_1 は仮想データの実現値である。加工データに含まれるゼロ約定間隔の個数は 40,786 個でデータ全体の約 27% である。

	μ	σ	min	max	ρ_1	obs
τ_{org}	1.789	2.312	$1.53e - 05$	82.2	0.346	150758
τ_{int}	1.789	2.348	0.000	82.0	0.321	150758
τ_z	2.453	2.435	1.000	82.0	0.335	109972
τ_{eq}	1.789	2.279	0.125	82.0	0.368	150758

表 2.14: タイプ I 加工データの要約統計量

表 2.14 の情報を整理しておこう。ベンチマークに相当するのは τ_{org} であり、 τ_{int} はモデル推定には利用しない。 μ で評価すると、ベンチマークに一番近いのは τ_{eq} で、 ρ_1 で評価すると、 τ_z である。

タイプ III データの詳細

タイプ I データの要約統計量を表 2.15 に示す。加工データに含まれるゼロ約定間隔の個数は 56,814 個でデータ全体の約 36% である。

	μ	σ	min	max	ρ_1	obs
τ_{org}	1.750	5.378	$1.04e - 05$	470.3	0.640	154065
τ_{int}	1.750	5.393	0.000	470.0	0.634	154065
τ_z	2.772	6.576	1.000	470.0	0.633	97241
τ_{eq}	1.750	5.369	0.083	470.0	0.643	154065

表 2.15: タイプ III 加工データの要約統計量

タイプ I の推定と同様、この表から予測できることを挙げておこう。

- τ_z はゼロ約定間隔を削除しているので約定間隔の期待値が大きくなっている (2.772) ので ω は大きくなる。自己相関は若干、変化している (0.633) ので、 α と β も設定値から乖離する。
- τ_{eq} の期待値と設定値はほぼ一致しておる (1.750)。自己相関の変化は τ_z よりも小さいので、 α と β は τ_z よりも設定値に近くなる。

2.3 ACD モデルの同時推定

ACD モデルの推定には最尤法推定を用いる。ここでは、尤度関数と初期値の設定方法、そして、最尤推定の段階的な実行方法について述べる。

尤度関数の仕様

表 2.9 に示した 10 期間において同時推定を行う。最初に式 1.17 に示したトレンド関数の仕様を示す。前場の線形スプライン関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \phi_m(t_i) = & \left(\sum_{i=1}^5 d_i \right) \tilde{a}_1 + \left(d_1 t_i + \left(\sum_{i=2}^5 d_i \right) t_i \right) \tilde{b}_1 \\
 & + \left(d_2 (t_i - t_1) + \left(\sum_{i=3}^5 d_i \right) (t_2 - t_1) \right) \tilde{b}_2 + \left(d_3 (t_i - t_2) + \left(\sum_{i=4}^5 d_i \right) (t_3 - t_2) \right) \tilde{b}_3 \\
 & + (d_4 (t_i - t_3) + d_5 (t_4 - t_3)) \tilde{b}_4 + d_5 (t_i - t_4) \tilde{b}_5
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

同様に、後場は、

$$\begin{aligned}\phi_a(t_i) &= \left(\sum_{i=6}^{10} d_i \right) \tilde{a}_6 + \left(d_6 t_i + \left(\sum_{i=7}^{10} d_i \right) t_i \right) \tilde{b}_6 \\ &+ \left(d_7 (t_i - t_6) + \left(\sum_{i=8}^{10} d_i \right) (t_7 - t_6) \right) \tilde{b}_7 + \left(d_8 (t_i - t_7) + \left(\sum_{i=9}^{10} d_i \right) (t_8 - t_7) \right) \tilde{b}_8 \\ &+ (d_9 (t_i - t_8) + d_{10} (t_9 - t_8)) \tilde{b}_9 + d_{10} (t_i - t_9) \tilde{b}_{10}\end{aligned}$$

ここに示したスプライン関数は Engle (2000) の方式を利用したものである。区間ごとに異なる仕様の線形スプライン関数を接続したものとなっている。スプラインの結び目は一般にノットと呼ぶ。隣接する2つの直線はノットにおいてつながるため、推定するパラメータは約半数になる。例えば、表2.9に示した第一ノットでの2つのスプラインは次のようになる。

$$a_1 + b_1 t_1 = a_2 + b_2 t_1$$

$$a_2 = a_1 + b_1 t_1 - b_2 t_1$$

切片は第一区間だけ求めれば、残りの区間の値は、他の推定値から計算できる。

次に、 d_i は表2.9に示した区間を示すダミー変数である。当該区間では1、それ以外の区間では0を取る。 t_i は i 番目の約定が発生した時点 (秒単位) である。このような設定により、パラメータを推定するACDモデルと対数尤度関数 LL は次のようになる。

$$\Psi_i = \omega + \alpha \left(\frac{\tau_{i-1}}{\phi(t_{i-2})} \right) + \beta \Psi_{i-1} \quad (2.7)$$

$$LL = - \sum \left\{ \frac{\tau_i}{\Psi_i \phi(t_{i-1})} + \log \Psi_i + \log \phi(t_{i-1}) \right\}$$

ここで、 $\phi(t_i) = \phi_m(t_i) + \phi_a(t_i)$ である。

初期値の設定と推定ステップ

最尤推定を用いて2.7式の対数尤度を最大化するために、最初に各パラメータの初期値を求める必要がある。初期値は次のような手法により定めることにする。

1. 最小二乗法によりスプライン関数のパラメータ $(\mathbf{a}_0^k, \mathbf{b}_0^k)$ を求め、1.16式より調整済み約定間隔 $\{x_i\}$ を得る。これによりスプライン関数の初期値を求める。 k は各区間 (1 ~ 10) を示す。

$$(\mathbf{a}_0^k, \mathbf{b}_0^k, \{x_i\})$$

2. 1で求めた初期値を利用して、最尤法によるACDモデルおよびスプライン関数の推定値を得る。

$$(\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mathbf{a}}^k, \hat{\mathbf{b}}^k)$$

タイプ I の推定結果

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	LL
設定値	0.05	0.2	0.7	0.5	0.321	—
ベンチマーク	0.042	0.198	0.698	0.412	0.316	-220995.1
ゼロ削除 (τ_z)	0.156	0.198	0.675	1.233	0.294	-202083.3*
等間隔 (τ_{eq})	0.042	0.252	0.638	0.389	0.402	-219739.3

表 2.16: タイプ I の推定結果

* τ_z による ACD モデルはデータ数が異なるので、 LL によるモデルの相対評価には利用できない。

タイプ III の推定結果

	ω	α	β	$E(x_i)$	ρ_1	LL
設定値	0.05	0.5	0.4	0.5	0.727	—
ベンチマーク	0.027	0.499	0.399	0.272	0.640	-172182.6
ゼロ削除 (τ_z)	0.09	0.485	0.378	0.662	0.667	-171710.7*
等間隔 (τ_{eq})	0.026	0.311	0.536	0.175	0.450	-180001.9

表 2.17: タイプ III の推定結果

x_i の自己相関の程度に関係なく、特徴はトレンドのない場合と同じである。つまり、 $E(x_i)$: 等間隔の方がベンチマークに近くはなるが、 α と β の推定値はゼロ削除の方が優れている。トレンドが無い時の数値実験の結果を使って、ゼロ削除の ω が修正すると、タイプ I は $0.156 \times \frac{109972}{150758} \simeq 0.1137$, $0.09 \times \frac{97241}{154065} \simeq 0.056$ となる。自己相関の弱いタイプ I は修正の程度は、タイプ III に比べ小さい。

数値実験の結論

データの自己相関を考慮して 2 セットのパラメータセットにより数値実験を行った。どちらもトレンドが無い場合と同じく、ゼロ約定間隔を削除し、パラメータ修正をすることが妥当であることが確認できた。

タイプIの推定結果の詳細

以下には、トレンドのある2つのタイプの仮想データにおいて、タイプIデータの整形過程で推定結果どのように変化したか、その詳細を参考情報として示す。

タイプIの推定 (ベンチマーク)

タイプIのデータ τ_{org} ($\omega = 0.05, \alpha = 0.2, \beta = 0.7$) の推定結果を順番に示す。表 2.18 は最初に OLS でトレンド関数を単独で推定し、次に、ACD モデルを QML で推定した結果である。表 2.19 は、単独に推定した結果を初期値として利用した同時推定の結果である。両者を比較すると分かるように、同時推定により ω をより正確に推定できたので、結果として $E(x_i)$ が大きく改善された。自己相関 ρ を決定する α と β はほぼ等しい。

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-11.02	3.69
2.	-6.164	2.8	-7.34	2.62
3.	-17.684	6.0	-4.26	5.86
4.	27.676	-6.0	13.411	-2.91
5.	15.796	-3.0	6.48	-1.16
6.	-36.836	8.6	-17.87	4.18
7.	-9.692	2.8	-8.34	2.14
8.	-25.244	6.0	-7.20	1.91
9.	35.236	-6.0	11.63	-1.83
10.	19.576	-3.0	14.06	-2.3

	ω	α	β
設定値	0.05	0.2	0.7
推定値	0.102	0.198	0.698
(S.E)	(0.002)	(0.002)	(0.003)

表 2.18: タイプ I:OLS と QML で別個に推定した結果

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-24.60	8.32
2.	-6.164	2.8	-18.37	6.50
3.	-17.684	6.0	-8.41	3.73
4.	27.676	-6.0	20.99	-4.05
5.	15.796	-3.0	30.83	-6.53
6.	-36.836	8.6	-44.06	10.29
7.	-9.692	2.8	-15.87	4.26
8.	-25.244	6.0	-26.75	6.50
9.	35.236	-6.0	37.51	-6.25
10.	19.576	-3.0	32.91	-5.37
		ω	α	β
	設定値	0.05	0.2	0.7
	推定値	0.042	0.198	0.698
	(S.E)	(0.079)	(0.002)	(0.003)

表 2.19: タイプ I の同時推定の結果

ここで, 推定値より求めた無条件期待値は $E(x_i) = 0.412$ で, 自己相関は $\rho_1 = 0.316$ である.

タイプ I データの整形

タイプスタンプを整数化 (切り上げ) して, 市販データと同じ形に整形したデータの分布を表 2.20 に示す. 例えば, 1 秒間の約定回数 2 とは, 同一時点 (秒単位) において約定が 2 回発生していることを示す.

1 秒間の 約定回数	個数	割合	累積の 割合
1	79594	52.80	52.80
2	45152	29.95	82.75
3	17406	11.55	94.29
4	6060	4.02	98.31
5	1935	1.28	99.59
6	462	0.31	99.90
7	133	0.09	99.99
8	16	0.01	100.00
合計	150758	100.00	100.00

表 2.20: タイプ I の同一秒の約定回数

タイプ I の推定 (ゼロ約定削除)

ゼロ約定間隔を削除した τ_z (*obs.109972*) による推定結果を表 2.21 に示す.

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-6.70	2.48
2.	-6.164	2.8	-6.56	2.44
3.	-17.684	6.0	-0.62	0.79
4.	27.676	-6.0	6.71	-1.15
5.	15.796	-3.0	10.66	-2.15
6.	-36.836	8.6	-13.09	3.2
7.	-9.692	2.8	-3.69	1.19
8.	-25.244	6.0	-9.87	2.46
9.	35.236	-6.0	14.40	-2.36
10.	19.576	-3.0	9.84	-1.27
		ω	α	β
ベンチマーク		0.042	0.2	0.698
推定値		0.156	0.198	0.675
(S.E)		(0.435)	(0.004)	(0.008)

表 2.21: タイプ I:ゼロ削除の推定結果

タイプ I の推定 (均等間隔)

次は均等間隔データ τ_{eq} による推定結果を表 2.22 示す.

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-28.78	9.63
2.	-6.164	2.8	-21.87	7.61
3.	-17.684	6.0	-11.02	4.60
4.	27.676	-6.0	24.95	-4.92
5.	15.796	-3.0	35.92	-7.69
6.	-36.836	8.6	-50.98	11.83
7.	-9.692	2.8	-19.42	5.09
8.	-25.244	6.0	-31.56	7.59
9.	35.236	-6.0	43.61	-7.33
10.	19.576	-3.0	38.27	-6.31
		ω	α	β
ベンチマーク		0.042	0.2	0.698
推定値		0.042	0.252	0.638
(S.E)		(0.069)	(0.003)	(0.004)

表 2.22: タイプ I:均等間隔の同時推定結果

タイプ III の推定結果の詳細

タイプ III データの整形過程で推定結果どのように変化したか、その詳細をここで示す。

タイプ III の推定 (ベンチマーク)

タイプ III のデータ $\tau_{org} (\omega = 0.05, \alpha = 0.5, \beta = 0.4)$ の推定結果を表 2.23 に示す。これは OLS と QML によりスプライン関数と ACD モデルの個別に推定した結果である。トレンド関数の傾きは前場と後場で、それぞれ 1 区間だけ符号条件が一致しないところがある。この推定結果を初期値として利用し、同時推定を実行した結果を表 2.24 に示す。同時推定により、 ω をより正確に推定できたので、結果として $E(x_i)$ が大きく改善された。自己相関 ρ を決定する α と β は、ほぼ変わっていない。

同時推定により、トレンド関数の符号条件はすべて一致し、 ω も大きく改善された。しかし、同時推定の結果、ACD モデルの α と β は個別に推定する場合よりも乖離してしまった。

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-14.19	4.64
2.	-6.164	2.8	-4.093	1.68
3.	-17.684	6.0	-14.65	4.62
4.	27.676	-6.0	28.16	-6.71
5.	15.796	-3.0	0.24	0.342
6.	-36.836	8.6	-21.62	4.98
7.	-9.692	2.8	-7.94	2.06
8.	-25.244	6.0	2.55	-0.10
9.	35.236	-6.0	3.45	-0.27
10.	19.576	-3.0	8.96	-1.33
		ω	α	β
	設定値	0.05	0.5	0.4
	推定値	0.103	0.500	0.400
	(S.E)	(0.001)	(0.003)	(0.003)

表 2.23: タイプ III:OLS と QML で別個に推定した結果

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-42.53	14.19
2.	-6.164	2.8	-18.00	7.02
3.	-17.684	6.0	-29.93	10.33
4.	27.676	-6.0	52.22	-11.40
5.	15.796	-3.0	24.98	-4.52
6.	-36.836	8.6	-66.12	15.44
7.	-9.692	2.8	-26.05	6.88
8.	-25.244	6.0	-40.24	9.80
9.	35.236	-6.0	64.48	-10.98
10.	19.576	-3.0	31.71	-4.71
		ω	α	β
	設定値	0.05	0.5	0.4
	推定値	0.027	0.499	0.399
	(S.E)	(0.116)	(0.003)	(0.003)

表 2.24: タイプ III の同時推定の結果

ここで, 推定値より求めた無条件期待値は $E(x_i) = 0.272$ で, 自己相関は $\rho_1 = 0.725$ である.

タイプ III データの整形

タイプスタンプを整数化 (切り上げ) して, 市販データと同じ形に整形したデータの分布を表 2.25 に示す.

1 秒間の 約定回数	個数	割合	累積の 割合
1	64213	41.68	41.68
2	38852	25.22	66.90
3	23196	15.06	81.95
4	13464	8.74	90.69
5	7230	4.69	95.39
6	3756	2.44	97.82
7	1946	1.26	99.09
8	808	0.52	99.61
9	687	0.25	99.86
10	110	0.07	99.93
11	55	0.04	99.97
12	48	0.03	100.00
合計	150758	100.00	100.00

表 2.25: タイプ III の同一秒の約定回数

タイプ III の推定 (ゼロ約定削除)

ゼロ約定間隔を削除した τ_z (*obs.97251*) による推定結果を表 2.26 に示す.

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-12.55	4.75
2.	-6.164	2.8	-9.00	3.72
3.	-17.684	6.0	-5.32	2.69
4.	27.676	-6.0	18.28	-3.55
5.	15.796	-3.0	11.30	-1.79
6.	-36.836	8.6	-23.53	5.84
7.	-9.692	2.8	-5.58	2.01
8.	-25.244	6.0	-15.93	4.14
9.	35.236	-6.0	26.49	-4.28
10.	19.576	-3.0	7.64	-0.66
		ω	α	β
ベンチマーク		0.027	0.499	0.399
推定値		0.09	0.485	0.378
(S.E)		(0.455)	(0.007)	(0.007)

表 2.26: タイプ III:ゼロ削除の推定結果

タイプ III の推定 (均等間隔)

次は均等間隔データ τ_{eq} による推定結果を表 2.27 示す.

区間	設定値		推定値	
	a	$b \times 10^4$	\hat{a}	$\hat{b} \times 10^4$
1.	-26	8.6	-32.26	11.60
2.	-6.164	2.8	-15.54	6.42
3.	-17.684	6.0	-22.81	8.72
4.	27.676	-6.0	48.19	-10.07
5.	15.796	-3.0	20.88	-3.17
6.	-36.836	8.6	-54.77	13.33
7.	-9.692	2.8	-14.90	4.82
8.	-25.244	6.0	-39.79	9.73
9.	35.236	-6.0	63.19	-10.5
10.	19.576	-3.0	21.86	-2.59
		ω	α	β
ベンチマーク		0.027	0.499	0.399
推定値		0.026	0.311	0.536
(S.E)		(0.049)	(0.002)	(0.003)

表 2.27: タイプ I:均等間隔の同時推定結果

第3章 ACDモデルの実証分析

第二章の数値実験の結果を用いて、実際の株価データによる ACD モデルの実証分析を行う。ここで利用するデータは JFE ホールディングス (JFE)、京セラ (KYC)、日産自動車 (NSN)、そして東京海上日動 (TMN) の 4 つの銘柄である。期間は 2012 年 10 月と 11 月の 41 日分を利用した。翌 12 月に衆議院選挙が実施されるが、11 月の株価には、まだ大きな変動は見られない。表 3.1 にこの 2 ヶ月間の各銘柄の価格に関する情報を示す。

	JFE	KYC	NSN	TMN
最高値	1,201	7,300	752	2,204
最安値	941	6,270	639	1,844
中央値	1,071	6,700	684	2,048
変動係数	0.05	0.03	0.04	0.04
呼値	1 円	10 円	1 円	1 円
平均約定回数/日	4,412	1,110	4,530	3,158
全約定回数	180,922	45,549	185,757	129,484
調整前約定間隔	4.07	16.20	3.97	5.69

表 3.1: 株価の要約統計量

約定回数では NSN が最も多く、一日の平均約定回数は約 4,530 回である。、価格の高く呼値が 10 円である KYC では他の銘柄の 1/3 から 1/4 の取引しかないと分かる。価格についての変動係数はほぼ等しいので、この期間における価格変動の大きさは、ほぼ同程度であると考えられる。41 日の観測期間の取引総時間は 738,000 秒 (= 18,000 × 41) なので、トレンド調整前の平均約定間隔はこれを全約定回数で除したものになる。その結果、トレンド調整前の平均約定間隔は NSN が 3.97 秒、最も長い KYC が 16.2 秒となっている。

次に約定間隔のトレンドを見ることにする。一日の時間軸 (午前 9 時から午後 3 時) を 5 分刻みに分け、その間の平均的な約定間隔をプロットしたものを図 3.1 から 3.4 に示す。これらの図を見ると、

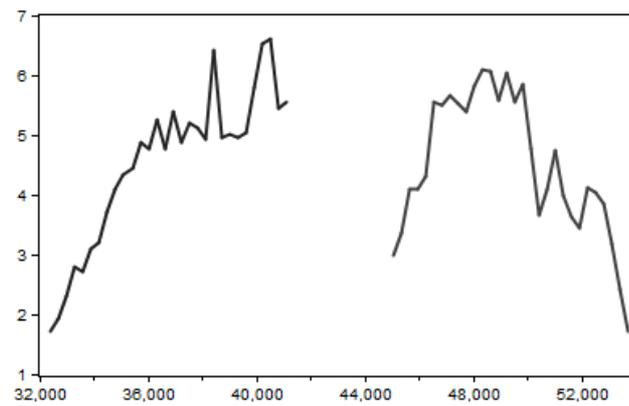


図 3.1: 5 分ごとの平均約定間隔 (JFE)

前場と後場で、取引開始直後に約定間隔が短く、時間経過とともに長くなる様子が見て取れる。また、取引時間の終了直線にも活発な取引が行われている。

図の縦軸は約定間隔(秒単位)、横軸は 32400 秒(午前 9 時) から 54000 秒(午後 3 時)のまでの取引時間を示す。図 3.1 の JFE は前場の終了近くでも、約定間隔が短くなっていない。

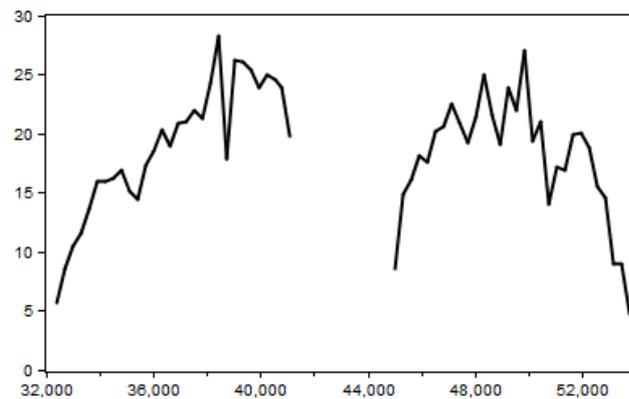


図 3.2: 5 分ごとの平均約定間隔 (KYC)

図 3.2 の KYC は今回取り上げた 4 つの銘柄の中で最も価格が高く、呼値も 10 円となっているため、調整前の約定間隔は他の銘柄に比べて長くなっている。それでも、日中のトレンドは見て取れる。

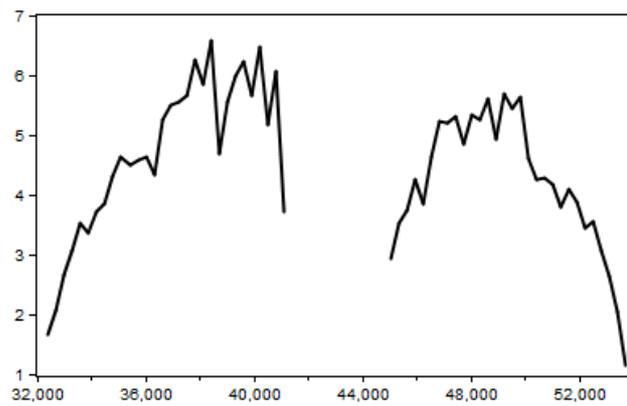


図 3.3: 5 分ごとの平均約定間隔 (NSN)

NSN(図 3.3) は一日の平均約定回数が、この 4 銘柄の中では最も多い。特に前場の終了間際で、約定が急速に増えていることが分かる。

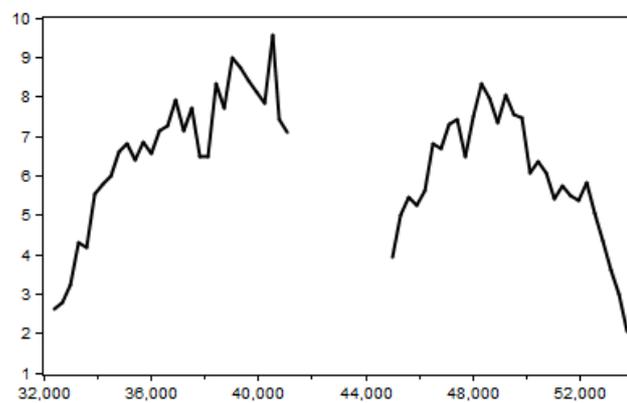


図 3.4: 5 分ごとの平均約定間隔 (TMN)

TMN(図 3.4) は、JFE や NSN より約定回数が少ないため、平均約定間隔がやや長めになっている。

ゼロ約定間隔削除

ゼロ約定間隔の削除前後のデータの基本的な情報を表 3.2 に示す.

	JFE	KYC	NSN	TMN
全約定回数	180,922	45,549	185,757	129,484
ゼロ削除後の約定数	86,798	24,536	104,249	63,921
削除後の残存率 (%)	47.9	53.8	56.1	49.3
ゼロ削除後の調整前約定間隔の平均	8.5	30.0	7.0	11.5

表 3.2: ゼロ削除時の約定間隔

表 3.2 の情報について整理する. ゼロ約定間隔が一番多含まれるのは JFE で, 残存率が 47.9% となっている. 実に 52% ほどの約定情報を破棄したことを示している. NSN は残存率 56% で, 44% の情報を破棄しており, 半分近くの情報が失われている. 日中のトレンドを含んだ状態での約定間隔の平均は, 約定回数の最も少ない KYC が最も長く 30 秒, 逆に最も短いのは NSN で 7 秒となっている.

3.1 ACDモデルの推定

ここまでの議論において ACD モデルの攪乱項 ϵ_i の分布は指数分布であるとして話を進めてきた. 当然のことながら, これは他の確率分布であっても構わない. ここではワイブル分布をもう一つの選択肢と考え, 2つの密度関数を比較してより当てはまりのよいものを真のモデルとして選択することにする. 最初に指数分布を利用した EACD モデルの推定結果を表 3.3 に示す. カッコ内は z 値である.

ω	α	β	$LogL$	AIC
0.0037	0.0530	0.9382	-263742.4	6.0782
(2.44)	(50.33)	(750.10)		

表 3.3: JFE の EACD(1,1) モデルの推定結果

この時, 同時推定したトレンド関数 $\phi(t_i) = a + bt_i$ の推定結果は表 3.4 の通りである. 隣接するトレンド関数は接続されているため, 次の関係が成り立ち, 二変数 a, b の内, ひとつは確定的に求めら

れる.

$$a_1 + b_1 t_i = a_2 + b_2 t_i$$

表 3.4 のカッコ内の値は z 値である.

区間	a	$b \times 10^3$	区間	a	$b \times 10^3$
1.	-167.31	5.42	6.	-300.17	7.00
	(-2.31)	(2.33)		(-2.34)	(2.34)
2.	-129.27	4.31	7.	-65.25	1.98
	-	(2.23)		-	(1.49)
3.	-75.71	2.82	8.	343.18	-6.42
	-	(1.82)		-	(-2.33)
4.	-44.80	2.00	9.	-26.65	0.91
	-	(1.45)		-	(1.07)
5.	289.45	-6.43	10.	378.67	-6.84
	-	(-2.27)		-	(-2.37)

表 3.4: JFE の EACD(1,1) モデルのトレンド関数

一方, ワイブル分布を利用した時の WACD モデルの推定結果を表 3.5 に示す. 3.1 式の c は EACD モデルと同じく 1 と仮定する.

$$f_W(\epsilon) = \frac{\theta}{c} \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{\theta-1} \exp\left[-\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^\theta\right] \tag{3.1}$$

ω	α	β	θ	$LogL$	AIC
0.0039	0.0521	0.9377	0.9592	-263602.8	6.0750
(2.24)	(46.05)	(678.3)	(345.8)		

表 3.5: JFE の WACD(1,1) モデルの推定結果

トレンド関数の推定値は表 3.6 の通りである.

区間	a	$b \times 10^3$	区間	a	$b \times 10^3$
1.	-156.65 (-2.11)	5.09 (2.13)	6.	-290.57 (-2.15)	6.77 (2.16)
2.	-118.99 -	3.99 (2.03)	7.	-57.41 -	1.78 (1.32)
3.	-68.15 -	2.58 (1.64)	8.	325.92 -	-6.09 (-2.13)
4.	-37.70 -	1.77 (1.27)	9.	-28.33 -	0.93 (1.03)
5.	269.33 -	-5.97 (-2.08)	10.	352.39 -	-6.36 (-2.16)

表 3.6: JFE の WACD(1,1) モデルのトレンド関数

3.2 ACDモデルの選択と診断

表 3.3 と 3.5 に示した 2 つの ACD モデルの推定値を比較する。 $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ については、目立つような違いはない。3.1 式に示すワイブル分布の密度関数における $\hat{\theta}$ も、かなり 1 に近い値を示している。AIC から判断すれば、WACD モデルが優れていることが分かるが、さらに尤度比検定によって両者の有意差を検定する。ワイブル分布において $\theta = 1$ という制約を掛けたものが指数分布となるので帰無仮説は $\hat{\theta} = 1$ とし、検定統計量は次のようになる。

$$LR \text{ stat.} = 2 \times (-263602.8 + 263742.4) = 279.2$$

この値が自由度 1 のカイ二乗分布に従うので、帰無仮説は棄却される。つまり、ワイブル分布を用いた WACD モデルを利用すべきことが分かる。

ACDモデルの診断

ACD モデルの推定においては 1.5 式において ϵ_i が i.i.d. であるという仮定があった。Engle and Russell (1998) では、このことを検証するために次に示す 3 つの方法を利用している。

1. $\hat{\epsilon}_i$ の自己相関がゼロであることを Ljung-Box 統計量で確認する
2. $\hat{\epsilon}_i$ をトレンド調整後の x_i から作成したダミー変数のラグ項に回帰し、予測力がない事を示す。
3. $\hat{\epsilon}_i$ を指数分布として場合には、過分散か否かを仮説検定し、ワイブル分布を利用した時は $\hat{\theta} = 1$ の仮説検定を行う。

Engle and Russell (1998) では自己相関がラグ 15 までの範囲でないことを確認している。また、回帰モデルによる予測力の調査では、モデルの決定係数が 0.003 で、予測力がないもとしている。ACD モデルの仮定によれば、 $\hat{\epsilon}_i$ は指数分布に従い、平均と分散は一致するしているが、仮説検定の結果、これを棄却している。ここでは、尤度比検定で選択した WACD に関してこれらの診断を行った。

コレログラム

WACD モデル推定後に $\hat{\epsilon}_i$ を求め、その自己相関を見ると、1 次のラグが 0.04 で最も大きい。自己相関の値としては小さいが有意である。つまり、条件 1 は満たしていないことになるが、自己相関係数が 0.04 と小さいので、モデルの定式化への影響は小さいと判断できる。

予測力

Engle and Russell (1998) では調整済み約定間隔 x_i を 24 の区間に分ける。つまり、(0, 0.1), (0.1, 0.2), ..., (1.9, 2.0) と最初の 20 区間は 0.1 刻みにし、残りは (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, ∞) とし、それぞれダミー変数を作成する。そこで、 $\hat{\epsilon}_i$ をこれらのダミー変数のラグ項に回帰する。結果として、説明力のあるモデルが得られると、1 期前の x_i の値で、当期の ϵ_i がある程度、予測可能なことになる。Engle and Russell (1998) では、この回帰式の決定係数が 0.003 となり、モデルの説明力がほとんどないと報告している。WACD モデルにおいて、この要領でダミー変数の作成と回帰分析を行ったところ、 $R^2 = 0.0029$, $adj.R^2 = 0.0026$ となり、Engle and Russell (1998) と同じく、予測力がないという結論を得た。

仮説検定

WACD モデルにおけるワルド検定の結果を次に示す。

$H_0 : \hat{\theta} = 1$			
検定統計量		df	prob.
$\chi^2_{(1)}$	215.65	1	0.000

表 3.7: WACD モデルのワルド検定

帰無仮説を棄却できた。つまり条件 3 では尤度比検定と同じく、ワイブル分布を支持する結果を得た。

パラメータ修正

WACDモデルの $\hat{\omega}_w$ を修正する.

$$\hat{\omega}_{wc} = \frac{86798}{180922} \times 0.0039 = 0.00187$$

x_i の修正

1.8式が真のモデルであるとする、次の式が成り立つので、修正した x'_i も同様に小さくなること
が分かる.

$$E(x'_i) = \frac{\hat{\omega}_{wc}}{1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}}$$

すなわち、 $x'_i = c \times x_i$ として簡単に求めることができる。cは修正項の $\frac{ZERO}{Full}$ である。日中のトレンドを削除した後の約定間隔(5分平均)の様子を図3.5に示す。

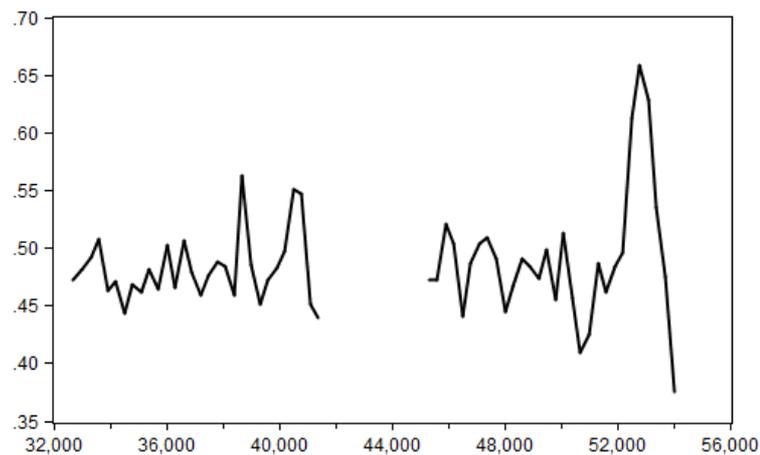


図 3.5: トレンドを削除し、 $\hat{\omega}$ を修正した x_i の5分平均(ワイブル分布:JFE)

3.3 その他の銘柄による実証分析結果

京セラ (KYC), 日産自動車株 (NSN), 東京海上ホールディングス (TMN) の実証分析結果を順番に示す。カッコ内はz値である。

KYC のモデル推定

まず, EACD と WACD モデルの推定結果を表 3.8 に示す.

	ω	α	β	θ	$LogL$	AIC
EACD	0.0034 (2.12)	0.0574 (29.72)	0.922 (340.8)	-	-105318.7	8.5895
WACD	0.0035 (1.38)	0.0542 (19.54)	0.916 (202.4)	0.810 (178.6)	-104297.8	8.5063

表 3.8: KYC の ACD(1,1) モデルの推定結果

尤度比検定の検定統計量は,

$$LR \text{ stat.} = 1020.9$$

となり, ワイブル分布による WACD を利用することを示している. よって, WACD のこの時のトレンド関数の推定結果を表 3.9 に示す.

区間	a	$b \times 10^3$	区間	a	$b \times 10^3$
1.	-2385.8 (-1.38)	75.3 (1.38)	6.	-2601.2 (-1.35)	60.4 (1.36)
2.	600.44 -	-11.9 (-1.00)	7.	-110.1 -	7.24 (0.56)
3.	-1148.9 -	36.6 (1.28)	8.	1082.2 -	-17.2 (-1.01)
4.	-1000.8 -	32.7 (1.21)	9.	339.8 -	-2.56 (-0.24)
5.	3853.4 -	-89.8 (-1.36)	10.	5085.6 -	-93.4 (-1.38)

表 3.9: KYC の WACD(1,1) モデルのトレンド関数

表 3.9 において有意となっている係数はない. ACD モデルと同時に推定したトレンド関数については JFE の場合に 10/12 個は有意であった. しかし, ここでは有意な推定値は得られなかった.

残差に関する考察について報告する.WACDモデル推定後の $\hat{\epsilon}_i$ の自己相関はQ-統計量によれば有意であるが,1次のラグが最大で,その値は0.034と小さい.また回帰分析による診断手法では $adj.R^2 = 0.0037$ となり,予測力はないと理解できる.

パラメータ修正

WACDモデルの $\hat{\omega}_w$ を修正する.

$$\hat{\omega}_{wc} = \frac{24536}{45549} \times 0.0035 = 0.00188$$

x_i の修正

日中のトレンドを削除した後の約定間隔(5分平均)の様子を図3.6に示す.

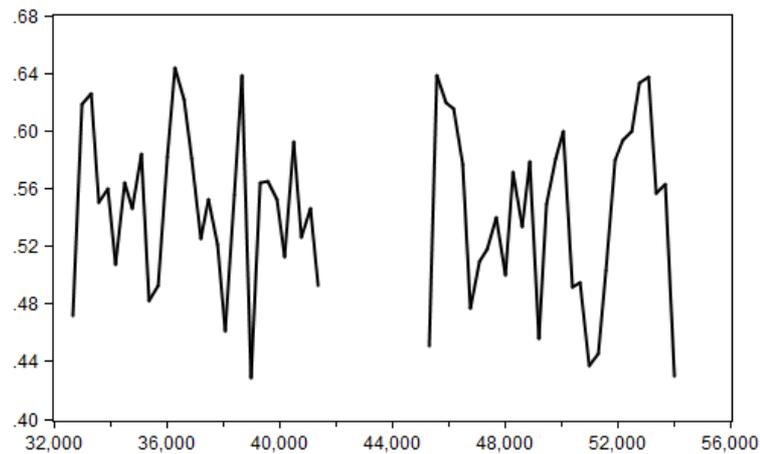


図 3.6: トrendを削除し、 $\hat{\omega}$ を修正した x_i の5分平均(KYC)

NSN のモデル推定

EACD と WACD モデルの推定結果を表 3.10 に示す. カッコ内は z 値である.

	ω	α	β	θ	$LogL$	AIC
EACD	0.0029 (2.54)	0.0466 (52.70)	0.9495 (1001.9)	—	−293360.2	5.6288
WACD	0.0025 (2.81)	0.0469 (56.83)	0.9503 (1092.5)	1.0345 (405.3)	−293251.7	5.6268

表 3.10: NSN の ACD(1,1) モデルの推定結果

尤度比検定の検定統計量は,

$$LR \text{ stat.} = 108.5$$

となり, ワイブル分布による WACD を利用すべきことを示している. よって, ワイブル分布を利用した時のトレンド関数の推定値を表 3.11 に示す.

区間	a	$b \times 10^3$	区間	a	$b \times 10^3$
1.	−135.16 (−2.77)	4.29 (2.78)	6.	−52.66 (−2.03)	1.36 (2.19)
2.	−28.72 -	1.82 (1.78)	7.	−30.76 -	0.90 (1.64)
3.	−59.91 -	2.04 (2.22)	8.	48.32 -	−0.72 (−1.35)
4.	−42.53 -	1.58 (1.86)	9.	47.63 -	−0.71 (−1.36)
5.	325.9 -	−7.71 (−2.80)	10.	217.2 -	−3.96 (−2.73)

表 3.11: NSN の WACD(1,1) モデルのトレンド関数

WACDモデル推定後の $\hat{\epsilon}_i$ の自己相関はQ-統計量によれば有意であるが、1次のラグが最大で、その値は0.061と小さい。また回帰分析による診断手法では $adj.R^2 = 0.0033$ となり、予測力はないと理解できる。

パラメータ修正

WACDモデルの $\hat{\omega}_w$ を修正する。

$$\hat{\omega}_{wc} = \frac{104249}{185757} \times 0.0025 = 0.00140$$

x_i の修正

日中のトレンドを削除した後の約定間隔(5分平均)の様子を図3.7に示す。

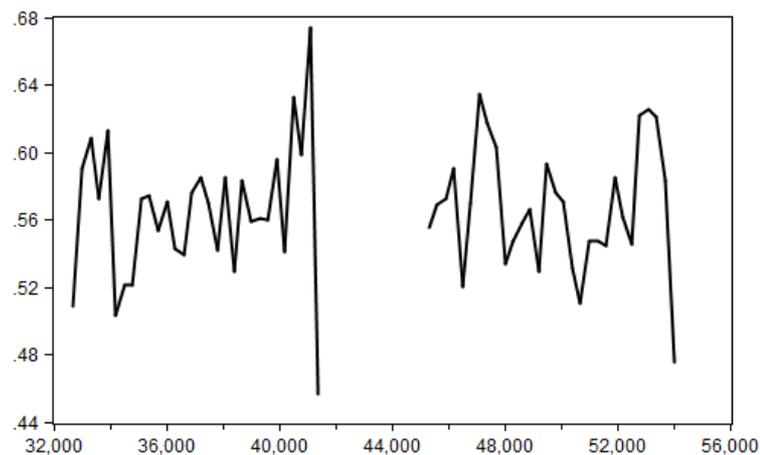


図 3.7: トレンドを削除し、 $\hat{\omega}$ を修正した x_i の5分平均(NSN)

TMNのモデル推定

EACDとWACDモデルの推定結果を表3.12に示す。カッコ内は z 値である。

	ω	α	β	θ	$LogL$	AIC
EACD	0.0028 (4.45)	0.0306 (33.00)	0.9593 (724.8)	—	−215254.8	6.7365
WACD	0.0031 (3.59)	0.0295 (26.48)	0.9581 (560.9)	0.897	−214556.8	6.7147

表 3.12: TMN の ACD(1,1) モデルの推定結果

尤度比検定の検定統計量は,

$$LR \text{ stat.} = 1396$$

となり, ワイブル分布による WACD を利用すべきことを示している. よって, WACD のトレンド関数の推定結果を表 3.13 に示す.

区間	a	$b \times 10^3$	区間	a	$b \times 10^3$
1.	−401.17 (−3.52)	12.8 (3.54)	6.	−392.50 (−3.29)	9.30 (3.34)
2.	−98.69 —	3.99 (2.33)	7.	−144.27 —	4.00 (2.21)
3.	52.27 —	−0.20 (−0.13)	8.	271.77 —	−4.55 (−2.33)
4.	−153.27 —	5.23 (2.42)	9.	96.86 —	−1.08 (−0.78)
5.	389.75 —	−8.47 (−2.93)	10.	839.09 —	−15.2 (−3.57)

表 3.13: TMN の WACD(1,1) モデルのトレンド関数

表 3.13 において有意となっている係数は 10/12 個となっており, JFE よりも多い. 残差に関する考察について報告する. WACD モデル推定後の $\hat{\epsilon}_i$ の自己相関は Q-統計量によれば有意であるが, 1 次のラグが最大で, その値は 0.021 と小さい. また回帰分析による診断手法では $adj.R^2 = 0.0020$ となり, 予測力はないと理解できる.

パラメータ修正

WACDモデルの $\hat{\omega}_w$ を修正する.

$$\hat{\omega}_{wc} = \frac{63921}{129484} \times 0.0031 = 0.00153$$

x_i の修正

日中のトレンドを削除した後の約定間隔(5分平均)の様子を図3.8に示す.

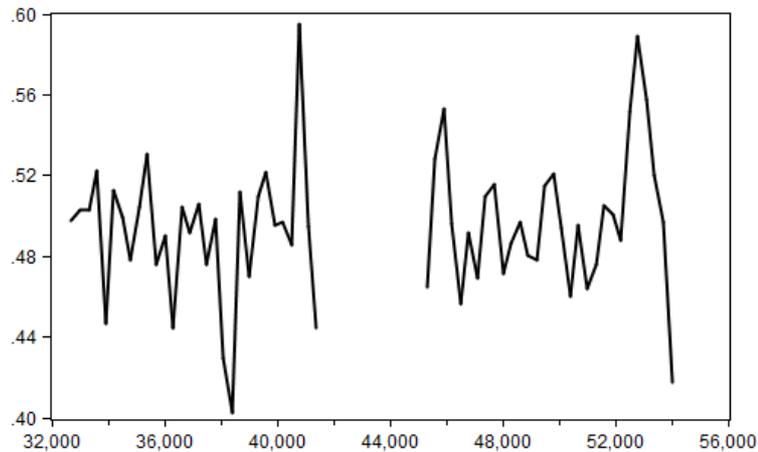


図 3.8: トレンドを削除し、 $\hat{\omega}$ を修正した x_i の5分平均(TMN)

実証分析の結果

4つの銘柄を用いて行ったACDモデルの推定の結果、どれもワイブル分布によるモデルが優れていることが分かった。ゼロ約定間隔は4つの銘柄で約50%程度存在するので、結果としてワイブル分布を用いて推定した $\hat{\omega}$ の修正値 ω_{wc} は推定値の約半分程度になった。 x_i の無条件期待値の計算式を考えると、 x_i や Ψ_i も同程度に小さくなる。次の第四章では、UHF-GARCHモデルによるイントラデイボラティリティに、この修正作業が与える影響について実証分析する。

第4章 UHF-GARCHモデルの実証分析

Engle (2000) の提案した UHF-GARCH モデルは高速取引における瞬間収益率のボラティリティと約定間隔の関係を実証分析するためのツールである. Engle (2000) では最初に ACD モデルを推定し, そこで得た x_i とその期待約定間隔 Ψ_i を UHF-GARCH モデルの説明変数として用いた実証分析を行っている. しかし, 本論文の第二章“数値実験”で問題提起したように, ACD モデルのパラメータには修正の余地がある. 本章の目的はパラメータ ω , トレンド削除後の約定間隔 x_i , そして期待約定間隔 Ψ_i を修正することにより, UHF-GARCH モデルの実証分析に与える影響を考察することである.

4.1 $\hat{\Psi}_i$ の修正

第三章で述べたように x_i の修正は $\hat{\omega}$ 同様, 簡単なものであったが, $\hat{\Psi}_i$ の修正は 4.1 を満たす必要がある. 4.1 式の $\omega_{wc}, x'_i, \Psi'_i$ はそれぞれ修正後の値を示しているが α と β は変わらない.

$$\Psi'_{i+1} = \omega_{wc} + \alpha x'_i + \beta \Psi'_i \quad (4.1)$$

まず, 初期値については次のように考える.

$$\Psi'_0 = x'_0 / \epsilon_0$$

$$x'_0 = E(x'_i)$$

$$\epsilon_0 = E(\hat{\epsilon}_i)$$

これにより, 次のように計算して逐次的に $\{\Psi'_i\}$ を求める.

$$\Psi'_1 = \hat{\omega}_{wc} + \hat{\alpha} x'_0 + \hat{\beta} \Psi'_0$$

$$\Psi'_2 = \hat{\omega}_{wc} + \hat{\alpha} x'_1 + \hat{\beta} \Psi'_1$$

...

$$\Psi'_n = \hat{\omega}_{wc} + \hat{\alpha} x'_{n-1} + \hat{\beta} \Psi'_{n-1}$$

4.2 UHF-GARCH モデルの推定

WACD モデルにおいてパラメータ修正を行い、その結果として得た x'_i と Ψ'_i を利用して4銘柄の UHF-GARCH モデルを推定した。

JFE の UHF-GARCH モデル

修正した x'_i と Ψ'_i の分布を確認しておく。 $\{x_i\}$ は修正後、修正項 c により単純に小さくなるが、 $\{\hat{\Psi}_i\}$ は上述の修正方法により、 $\{x_i\}$ とは異なる変化を見せている。

	x_i	x'_i	$\hat{\Psi}_i$	$\hat{\Psi}'_i$
平均	1.008	0.4836	0.4095	0.4352
中央値	0.5440	0.2609	0.3929	0.4179
最大値	20.0343	9.6115	1.4196	1.4672
最小値	0.0839	0.0402	0.1048	0.0682
標準偏差	1.2813	0.6147	0.1424	0.1646

表 4.1: JFE の調整済み約定間隔 (ワイブル分布)

表 4.1 を用いて Engle (2000) と同じく次に示す3つのモデルを推定した。 e_i は Engle (2000) と同じく ARMA(1,1) とする。

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.2)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 \quad (\text{model1})$$

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.3)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3 / x'_i \quad (\text{model2})$$

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.4)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3 / x'_i + \gamma_4 \left(\frac{x'_i}{\Psi'_i} \right) \quad (\text{model3})$$

表 4.2 に推定結果を示す. model1 は最も簡単な UHF-GARCH モデルである. model1c とあるように, 最後に“c”がついている列は修正値を用いたものである. model2 は分散推定式に $1/x_i$ を追加した. これにより約定間隔の長さとのボラティリティの関係を考察する. model3 にはショックを示す x_i/Ψ_i を追加した. これらの結果を見ると, モデルの拡張に伴って, AIC が段階的に減少する傾向を維持している. x_i と Ψ_i は第三章の WACD モデルから得たものである. 表 4.2 のカッコ内は標準誤差である.

	model1	model1c	model2	model2c	model3	model3c
	4.2 式	4.2 式	4.3 式	4.3 式	4.4 式	4.4 式
*** 1%, ** 5%, *10%						
MEAN						
k	-0.0078*** (0.0015)	-0.0163*** (0.0032)	-0.0069*** (0.0011)	-0.0144*** (0.0023)	-0.0069*** (0.0010)	-0.0144*** (0.0023)
AR (1)	-0.1285*** (0.0214)	-0.1285*** (0.0214)	-0.0542** (0.0134)	-0.0542*** (0.0134)	-0.0540*** (0.0134)	-0.0540*** (0.0134)
MA (1)	-0.0489** (0.0215)	-0.0489** (0.0215)	-0.1004*** (0.0133)	-0.1004*** (0.0133)	-0.1006 (0.0133)	-0.1005 (0.0133)
VARIANCE						
γ_0	0.1262*** (0.0093)	0.1262*** (0.0093)	0.0278*** (0.0059)	0.0278*** (0.0059)	0.0445*** (0.0075)	0.0402*** (0.0088)
γ_1	0.0437*** (0.0022)	0.0437*** (0.0022)	0.0222*** (0.0012)	0.0222*** (0.0012)	0.0221*** (0.0012)	0.0221*** (0.0012)
γ_2	0.9219*** (0.0041)	0.9219*** (0.0041)	0.0010 (0.0012)	0.0010 (0.0012)	0.0016 (0.0011)	0.0013 (0.0012)
γ_3	—	—	1.1365*** (0.0063)	0.5452*** (0.0030)	1.1277*** (0.0067)	0.5412*** (0.0033)
γ_4	—	—	—	—	-0.0016*** (0.0004)	-0.0026* (0.0014)
AIC	4.0703	4.0703	3.6469	3.6469	3.6468	3.6469

表 4.2: WACD を利用した JFE の UHF-GARCH モデル

JFE の実証分析への影響

WACD モデルの推定結果を用いて、約定間隔がイントラデイの瞬間収益率において果たす役割と、 $\hat{\omega}$ の修正が実証分析に与える影響を整理すると次のようになる。特に、 $\hat{\omega}$ の修正に関する実証分析の結果の差異は次の4番に表れている。

1. UHF-GARCH モデルの平均推定式から約定間隔が長くなると、パラメータ k の符号が負になっているので、収益率は低下することが分かる (Diamond and Verrecchia (1987)).
2. model2/c,model3/c において UHF-GARCH モデルの分散推定式において $\gamma_1 + \gamma_2 < 0.025$ となり、ボラティリティの持続性は急激に失われ、 γ_2 の有意性も消失している (Engle (2000)).
3. 分散推定式において $1/x_i$ の係数 γ_3 が有意なので約定間隔 x_i が長くなると、ボラティリティは低下する (Easley and O'Hara (1992)).
4. 分散推定式において約定間隔のショック x_i/Ψ_i はボラティリティを小さくする方向に働く (Engle (2000)).

$\hat{\omega}$ の修正

JFE の model3c を見ると $\hat{\omega}$ の修正により、係数 γ_4 の有意性が弱まり、AIC の比較からショックの項が果たす役割がほとんどないことが分かる。

KYC の UHF-GARCH モデル

修正した x'_i と Ψ'_i の分布を表 4.3 で確認しておく。この場合も $\{\Psi_i\}$ の変化は $\{x_i\}$ とは異なる。

	x_i	x'_i	$\hat{\Psi}_i$	$\hat{\Psi}'_i$
平均	1.002	0.5398	0.1544	0.3717
中央値	0.5069	0.2730	0.1480	0.3514
最大値	20.7289	11.1661	1.0329	1.7674
最小値	0.0225	0.0121	0.0533	0.0144
標準偏差	1.3526	0.7286	0.0481	0.1502

表 4.3: KYC の調整済み約定間隔 (ワイブル分布)

KYC の UHF-GARCH モデルの推定結果は表 4.4 に示す.

	model1	model1c	model2	model2c	model3	model3c
	4.2 式	4.2 式	4.3 式	4.3 式	4.4 式	4.4 式
*** 1%, ** 5%, *10%						
MEAN						
k	-0.0021 (0.0198)	-0.0040 (0.0368)	-0.0021 (0.0023)	-0.0040 (0.0042)	0.0039 (0.0044)	-0.0030 (0.0040)
$AR(1)$	-0.0550 (0.0369)	-0.0550 (0.0369)	0.0117 (0.0189)	0.0117 (0.0189)	-0.1066*** (0.0188)	0.0124 (0.0190)
$MA(1)$	-0.1320*** (0.0364)	-0.1320*** (0.0364)	-0.1787*** (0.0180)	-0.1787*** (0.0180)	-0.1744*** (0.0172)	-0.1789*** (0.0181)
VARIANCE						
γ_0	0.4247*** (0.0110)	0.4247*** (0.0110)	0.1083*** (0.0106)	0.1083*** (0.0106)	0.7011*** (0.0011)	0.1417*** (0.0127)
γ_1	0.0326*** (0.0008)	0.0327*** (0.0008)	0.0182*** (0.0018)	0.0182*** (0.0018)	0.0905*** (0.0057)	0.0179*** (0.0018)
γ_2	0.8933*** (0.0024)	0.8933*** (0.0024)	0.0003 (0.0009)	0.0003 (0.0009)	0.0323*** (0.00423)	0.0002 (0.0009)
γ_3	—	—	0.9685*** (0.0095)	0.5217*** (0.0051)	0.5974*** (0.0058)	0.5140*** (0.0052)
γ_4	—	—	—	—	-0.0063*** (0.0005)	-0.0047*** (0.0007)
AIC	4.5431	4.5431	3.7993	3.7993	3.8770	3.7988

表 4.4: WACD を利用した KYC の UHF-GARCH モデル

KYC の実証分析への影響

WACD モデルの推定結果を用いて, 約定間隔がイントラデイの瞬間収益率において果たす役割と, $\hat{\omega}$ の修正が実証分析に与える影響を整理すると次のようになる. 特に, $\hat{\omega}$ の修正に関する実証分析の結果の差異は 2 番に表れている.

1. KYC の株式については平均推定式で約定間隔の推定値が有意にはならなかった。
2. model2/c と model3/c において, UHF-GARCH モデルの分散推定式において $\gamma_1 + \gamma_2$ は小さく, JFE 同様, ボラティリティの持続性は急激に失われている (Engle (2000)).
3. 分散推定式において $1/x_i$ の係数が有意なので約定間隔 x_i が長くなると, ボラティリティは低下する (Easley and O'Hara (1992)).
4. 分散推定式において約定間隔のショック x_i/Ψ_i はボラティリティを小さくする方向に働く (Engle (2000)).

$\hat{\omega}$ の修正

KYC の model3 において $\hat{\omega}$ を修正しない場合, ボラティリティのラグ項の係数 γ_2 は有意であるが, 修正した場合は有意にはならない. これは高頻度取引データの特徴と一致する.

NSN の UHF-GARCH モデル

修正した x'_i と Ψ'_i の分布を表 4.5 で確認する. この場合も $\{\Psi_i\}$ の変化は $\{x_i\}$ とは異なる.

	x_i	x'_i	$\hat{\Psi}_i$	$\hat{\Psi}'_i$
平均	1.0021	0.5624	0.6746	0.5602
中央値	0.5296	0.2972	0.6010	0.4948
最大値	23.7581	13.3333	2.5348	2.0628
最小値	0.1001	0.0562	0.1424	0.1051
標準偏差	1.3304	0.7466	0.3220	0.2693

表 4.5: NSN の調整済み約定間隔 (ワイブル分布)

ここでは model2 を 4.5 式, model3 は 4.6 式とする. ここでは新たに約定時の取引株数を 5 分位に分けた時のダミー変数 VD_i を用意した. 同一時点での約定は, 各約定の取引株数の総和とした. 売買によって, 符号を分けることはせず, 取引の活発を示す指標として位置づけた.

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.5)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3/x'_i + \gamma_4/VD_i \quad (\text{model2})$$

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.6)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3 / x'_i + \gamma_4 / VD_i + \gamma_5 \left(\frac{x'_i}{\Psi'_i} \right) \quad (\text{model3})$$

NSN の UHF-GARCH モデルの結果を表 4.6 に示す.

NSN の実証分析への影響

NSN における $\hat{\omega}$ の修正について表 4.6 を基に考察する.

1. NSN の model3/c において, 未修整の場合, 平均推定式の x_i の係数は有意にはならなかった. 逆に, 修正した場合は有意となった (Diamond and Verrecchia (1987)).
2. model2/c と model3c の分散推定式において γ_2 は小さく, ボラティリティの持続性は急激に失われている (Engle (2000)). ただし, 当てはまりの良い model3 では γ_2 は 0.5596 と大きくなっている.
3. 分散推定式において $1/x_i$ の係数が有意なので約定間隔 x_i が長くなると, ボラティリティは低下する (Easley and O'Hara (1992)).
4. 分散推定式において約定間隔のショック x_i/Ψ_i はボラティリティを小さくする方向に働く (Engle (2000)).

$\hat{\omega}$ の修正

未修正の model3 は説明変数としてショックを追加した時に, モデルの当てはまりが悪化しているが, 修正済みデータを利用して変化はない. しかし, ショックが AIC を改善するほどの効果は持っていない.

TMN の UHF-GARCH モデル

修正した x'_i と Ψ'_i の分布を確認する. この場合も $\{\Psi_i\}$ の変化は $\{x_i\}$ とは異なる.

TMN の UHF-GARCH モデルでは model2/c として約定間隔の逆数 $1/x'_i$ を, model3/c ではさらに, 期待約定間隔の逆数 $1/\Psi_i$ は次に示すように追加した.

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.7)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3/x'_i \quad (\text{model2})$$

$$rd_i = kx'_i + e_i \quad (4.8)$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_i^2 + \gamma_2 \sigma_i^2 + \gamma_3/x'_i + \gamma_4/\Psi'_i \quad (\text{model3})$$

TMN の UHF-GARCH モデルの推定結果を表 4.8 に示す.

model2/c と model3/c で γ_2 は有意ではない. 逆に, γ_3 はすべて有意になっている. また, model3c では γ_4 が有意となり, model3 との違いを示している.

TMN の実証分析への影響

TMN における $\hat{\omega}$ の修正について表 4.8 を基に考察する.

1. UHF-GARCH モデルの分散推定式において γ_2 は小さく, ボラティリティの持続性は急激に失われている (Engle (2000)).
2. 分散推定式において $1/x_i$ の係数が有意なので約定間隔 x_i が長くなると, ボラティリティは低下する (Easley and O'Hara (1992)).
3. 分散推定式において期待約定間隔 $1/\Psi_i$ は未修正の場合, 有意にはならない. Engle (2000) の利用した IBM 株式の場合, これは有意になっている.

$\hat{\omega}$ の修正

未修正の場合, $1/\Psi_i$ の係数は有意でないが, これを修正すると有意になる. ただし, いずれも, モデルの当てはまりを大きく改善させるほどの効果はない.

実証分析の結果

4つの銘柄による実証分析の結果, $\hat{\omega}$ の修正が顕著に表れたのは次の3点である.

- $\hat{\omega}$ の修正により, すべての UHF-GARCH モデルの平均推定式の係数 k は負になった. つまり, 約定間隔が長くなると, 瞬間収益率は小さくなる (Diamond and Verrecchia (1987)). ただし, その有意性は銘柄によって異なる.
- $\hat{\omega}$ の修正により, ボラティリティ項の持続性を示すラグ項の有意性が全てのモデルで失われた. これは高頻度取引データにおける特徴と一致する.
- 約定間隔のショック x_i/Ψ_i はモデルの当てはまりに対する貢献度は低いが, 未修整の場合は却ってモデルの当てはまりを悪くする場合がある.

本章では第三章の ACD モデルにおける修正の有無が, 瞬間収益率の実証分析に与える影響を考察した. 未修整の分析結果は投資家に誤ったシグナルを送る可能性のある事が分かった. 次の第五章では ACD モデルにおける修正方法を Bauwens and Giot (2003) の提案した非対称型 ACD モデルに応用し, 1 期先の仲値変化の予測力の向上を図る.

		*** 1%, ** 5%, *10%					
		model1	model1c	model2	model2c	model3	model3c
		4.2 式	4.2 式	4.5 式	4.5 式	4.6 式	4.6 式
MEAN							
k		-0.0025 (0.0039)	-0.0044 (0.0069)	-0.0052*** (0.0009)	-0.0093*** (0.0016)	-0.0071 (0.0123)	-0.0096*** (0.0016)
$AR(1)$		0.0010 (0.0091)	0.0010 (0.0091)	0.0504*** (0.0072)	0.0504*** (0.0072)	-0.0712* (0.0419)	0.0505*** (0.0073)
$MA(1)$		-0.3417*** (0.0085)	-0.3417*** (0.0085)	-0.3390*** (0.0065)	-0.3390*** (0.0065)	-0.0728* (0.0426)	-0.3384*** (0.0065)
VARIANCE							
γ_0		0.0316*** (0.0009)	0.0317*** (0.0009)	0.0688*** (0.0098)	0.0688*** (0.0098)	3.4200*** (0.1410)	0.0400*** (0.0116)
γ_1		0.0209*** (0.0003)	0.0209*** (0.0003)	0.0282*** (0.0015)	0.0282*** (0.0015)	0.0923*** (0.0051)	0.0282*** (0.0015)
γ_2		0.9697*** (0.0005)	0.9697*** (0.0005)	1.99E - 09 (32.5691)	3.87E - 09 (23.3398)	0.5596*** (0.0201)	2.49E - 11 (285.0532)
γ_3		-	-	1.1736*** (0.0066)	0.6586*** (0.0037)	-0.0475*** (0.0073)	0.6542*** (0.0041)
γ_4		-	-	-0.0430*** (0.0121)	-0.0430*** (0.0121)	-0.6416*** (0.0070)	0.0041*** (0.0127)
γ_5		-	-	-	-	-0.2231*** (0.0052)	-0.0038** (0.0017)
AIC		4.0068	4.0068	3.6671	3.6671	4.2426	3.6671

表 4.6: WACD を利用した NSN の UHF-GARCH モデル

	x_i	x'_i	$\hat{\Psi}_i$	$\hat{\Psi}'_i$
平均	0.9988	0.4930	0.2918	0.3840
中央値	0.5260	0.2597	0.2836	0.3729
最大値	20.0278	9.8869	0.9263	0.9255
最小値	0.0631	0.0311	0.1251	0.0455
標準偏差	1.2602	0.6221	0.0695	0.1104

表 4.7: TMN の調整済み約定間隔 (ワイブル分布)

*** 1%, ** 5%, *10%

	model1 4.2 式	model1c 4.2 式	model2 4.7 式	model2c 4.7 式	model3 4.8 式	model3c 4.8 式
MEAN						
k	-0.0120 (0.0093)	-0.0244 (0.0188)	-0.0096*** (0.0013)	-0.0194*** (0.0028)	-0.0096*** (0.0013)	-0.0194*** (0.0027)
$AR(1)$	-0.2256*** (0.0038)	-0.2256*** (0.0387)	-0.0824*** (0.0203)	-0.0824*** (0.0202)	-0.0827*** (0.0203)	-0.0832*** (0.0203)
$MA(1)$	0.1194*** (0.0394)	0.1194*** (0.0394)	-0.0245 (0.0203)	-0.0245 (0.0203)	-0.0250 (0.0203)	-0.0243*** (0.0204)
VARIANCE						
γ_0	0.2662*** (0.0071)	0.02662*** (0.0071)	0.0575*** (0.0059)	0.0575*** (0.0059)	0.0462*** (0.0169)	0.0258* (0.0135)
γ_1	0.0591*** (0.0011)	0.0591*** (0.0011)	0.0244*** (0.0013)	0.0244*** (0.0013)	0.0243*** (0.0013)	0.0240*** (0.0013)
γ_2	0.8592*** (0.0030)	0.8592*** (0.0030)	$5.99E - 10$ (48.0671)	$8.03E - 10$ (41.5388)	$8.59E - 11$ (129.4864)	$1.77E - 10$ (90.6404)
γ_3	—	—	0.8544*** (0.0055)	0.4218*** (0.0027)	0.8537*** (0.0056)	0.4204*** (0.0027)
γ_4	—	—			0.0035 (0.0051)	0.0133** (0.0053)
AIC	3.9652	3.9652	3.4799	3.4799	3.4799	3.4799

表 4.8: WACD を利用した TMN の UHF-GARCH モデル

第5章 非対称型 ACD モデルの実証分析

第三章では ACD モデルのパラメータ修正を行い、その結果として再計算した Ψ_i を第四章における UHF-GARCH モデルの推定で利用した。本章では、ACD モデルを応用した Bauwens and Giot (2003) における非対称型 ACD モデルにおいて、パラメータ修正の方法を適用し、その効果を検証する。Bauwens and Giot (2003) は高頻度取引における価格変化の方向 y_i (上昇・下落) と、価格変化の間隔 x_i による同時分布を提案した。そして、 x_i については Bauwens and Giot (2000) による Log-ACD モデルに従うものとした。ただし、この同時分布は 1 期前の y_{i-1} のみに依存するような条件付き分布 $(x_i, y_i | y_{i-1})$ であるとした。つまり、1 期前の価格変化時点の方向が、当期の同時分布に影響すると考えるものである。さらに、仲値の変化間隔のハザードは、上昇、下落によって異なるものとして、競合リスクモデルに従う Log-ACD モデルを提案した。本章における目的は、第二章で提案した ACD モデルのパラメータ修正が単純な ACD モデル以外でも有効である事を検証するものである。

5.1 仲値の変化

Bauwens and Giot (2003) の非対称型 ACD モデルは、約定および最良気配の仲値が変化した時間間隔を利用する。第三章で用いた約定間隔とは異なる。そこで、初めに約定を含む最良気配の仲値を求め、次に仲値の変化した間隔を求める。そこで、最初に 4 つの銘柄の仲値の変化間隔の個数とその平均間隔を確認する。

	JFE	KYC	NSN	TMN
株価の最高値	1,201	7,300	752	2,204
株価の最安値	941	6,270	639	1,844
呼値	1 円	10 円	1 円	1 円
約定間隔の個数	180,922	45,549	185,757	129,484
仲値変化間隔の個数	53,502	11,821	12,735	52,315
調整前の仲値変化の平均間隔 (秒)	13.77	61.57	57.55	14.10

表 5.1: 仲値変化間隔

データの個数は第三章の約定間隔に比べ、約 $1/4$ から $1/3$ になっているが、特に NSN は $1/10$ を下回っている。このことは、NSN において最良気配を含めた価格の変化が少ないことを示唆している。表 5.1 によれば、データの個数は約定間隔のそれに比べ、かなり少なくなっていることが分かる。次に仲値の変化をグラフで確認する。グラフの縦軸は仲値で、横軸はデータの個数 (仲値の変化間隔) を示す。

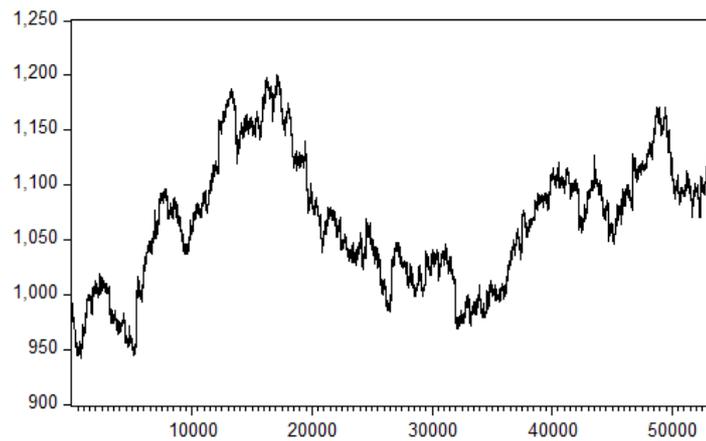


図 5.1: JFE の仲値変化

JFE の調整前仲値変化の間隔は 4 つの銘柄の中で最も短い。つまり、仲値の変化が頻繁に起こる事を意味している。

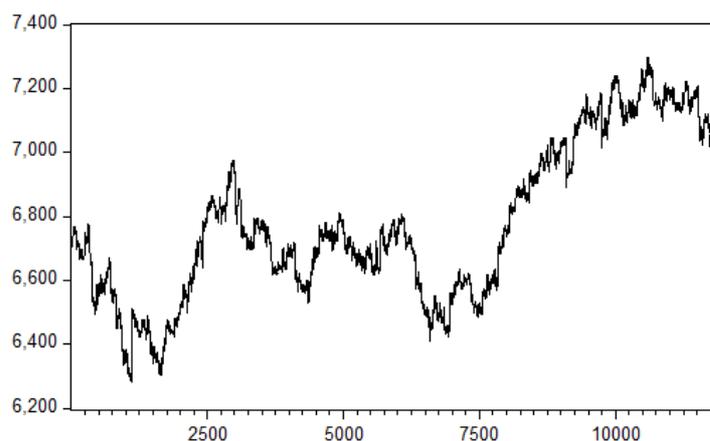


図 5.2: KYC の仲値変化

KYC は呼値が 10 円で他の銘柄に比べ大きい。よって、仲値の変化間隔 (調整前平均) も長く、60 秒を越えている。

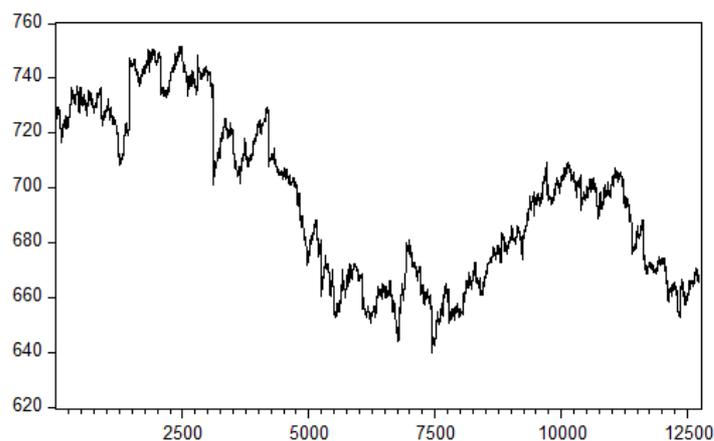


図 5.3: NSN の仲値変化

NSN の約定間隔数は 4 つの銘柄の中で最も多いにも関わらず、データ (仲値の変化間隔) 数はさほど多くない。株価の上下範囲は 100 円程度であることを考えると、約定回数に比べ、価格及び仲値の変動が少ない事が分かる。

最後に TMN の仲値変化を見る。4 銘柄の中でも期間中に上昇トレンドが見て取れる。調整前の変化間隔は 52,000 個程度で、JFE とほぼ同じような個数となっている。

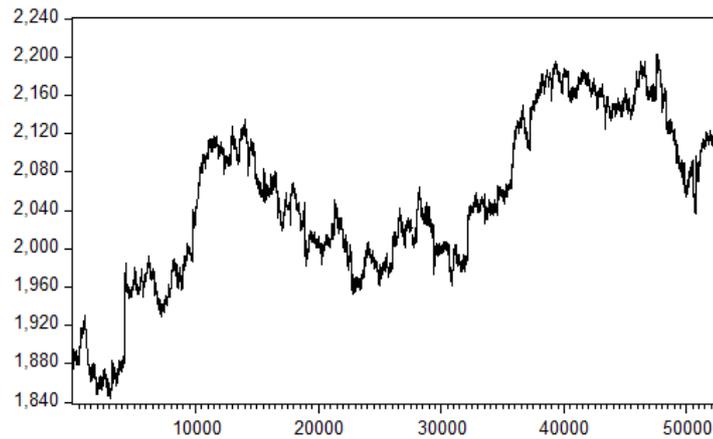


図 5.4: TMN の仲値変化

5.2 生存分析とハザード

Bauwens and Giot (2003) の提案した非対称型 Log-ACD モデルは、競合リスクモデルとして Log-ACD モデルを利用するというものである。よって、ここでは最初に競合リスクモデルの考え方を確認することから話を始める。競合リスクモデルとは生存分析において提案されたモデルである。まず、生存関数として知られるカプランマイヤー推定量の定義を次に示す。

$$\hat{S}(t) = \prod_{t^{(i)} \leq t} \frac{n_i - d_i}{n_i}$$

時点 $t^{(i)}$ の始期において n_i が生存数であり、 d_i は $t^{(i)}$ までに発生したイベント (死亡) 数である。従って、生存関数 $S(t)$ は生存率の積となっていることが分かる。医学領域において生存関数を考える場合、患者が転院などによって追跡不能になるケースがある。これはセンサード (打ち切り) データとして処理する。本研究では個々の価格変化をイベントとするので、センサードデータは存在しないが、統計上の考え方は同じである。典型的な生存分析は患者の死亡までの日数をカウントするものである。したがって、標本の生存日数は標本数が少ない場合、離散的な分布を示し、逆に標本数が多い場合は連続時間で考えることができる。連続時間の時の生存関数は次のように定義される。

$$S(t) = e^{-H(t)} \quad (5.1)$$

$H(t)$ は累積ハザード関数である。この累積ハザードに対応するハザード関数 $h(t)$ は、時点 t で生存している患者が、その時点 t 以降の区間でイベントの発生 (死亡) するリスクを意味している。両者の

関係は次のように定義されている.

$$H(t) = \int_0^t h(u) du$$

ここで $S(t) = 1 - F(t)$ の関係を用いて, 5.1 式を書き換えると,

$$1 - F(t) = e^{-H(t)}$$

t について微分し,

$$-f(t) = -h(t) \cdot e^{-H(t)}$$

結局,

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (5.2)$$

となることが分かる.

比例ハザードモデル

それでは次に $h(t)$ の具体的なモデルの例として, セミパラメトリック回帰モデルを用いてパラメータの推定方法を説明する. 最初にハザード関数を次のように定義する.

$$h(t, x, \beta) = h_0(t) r(x, \beta)$$

h_0 は基準ハザード関数と呼ばれるもので, そのリスクの分布によっていくつかの関数が提案されている. 例えば, 人の生存について考えると, 出生時と老齢期にはハザードが高くなっているような曲線が想像できる. 一般に, そのようなハザード関数はバスタブハザードと呼ばれる. つまり, 基準ハザードは分析対象によって, 合理的と思われるものを想定する. 変数 x には通常, 死亡などのイベントに影響を与えるリスク要因を利用する. 実際の推定に当たっては, ハザード比として次に示すハザード関数の比を求める.

$$\text{HR}(t, x_1, x_0) = \frac{h_0(t) r(x_1, \beta)}{h_0(t) r(x_0, \beta)} = \frac{r(x_1, \beta)}{r(x_0, \beta)}$$

結果として, 基準ハザード関数は約分され, 関数 $r(x, \beta)$ にみに依存することが分かる. つまり, モデル推定において先に述べた基準ハザードの選択に時間を費やす必要はない. 一般的に比例ハザードモデルとして利用する関数は Cox (1972) の提案した次のものである.

$$h(t, x, \beta) = h_0(t) \exp(x'\beta)$$

比例ハザードモデルのパラメータを推定するための尤度関数は次のように与えられる.

$$[f(t, x, \beta)]^c \times [S(t, x, \beta)]^{1-c}$$

ただし, $c = 0$ は打ち切りであり, 1 はイベントの発生を示す. したがって, n 個のデータが互いに独立であるとすると,

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^n \left\{ [f(t_i, x_i, \beta)]^{c_i} \times [S(t_i, x_i, \beta)]^{1-c_i} \right\}$$

となり, その対数尤度関数は,

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^n \{c_i \ln [f(t_i, x_i, \beta)] + (1 - c_i) \ln [S(t_i, x_i, \beta)]\} \quad (5.3)$$

となる. Cox (1972) は 5.3 式ではなく, その部分尤度関数というものを最大化する方法を提案している. ここでは代表的な比例ハザードモデルを利用して, パラメータ推定を行うための考え方を確認することが主目的なので, 比例ハザードモデルの部分尤度関数による推定の詳細には触れない. 後述する二状態の遷移 (非対称) 型 ACD モデルの推定において重要なことは, 以下に示すように密度関数がハザード関数と生存関数の積として与えられるということである.

$$f(t, x, \beta) = h(t, x, \beta) \times S(t, x, \beta) \quad (5.4)$$

さらに, 尤度関数を用いてパラメータ β の推定が可能であるという事である.

5.3 競合リスクモデル

複数の疾病を持つ患者の死亡という事象について考えてみる. 疾病 A により死亡した場合, 疾病 B によるイベントは観察できなくなってしまう. 例えば k 種類のハザードを考える場合, イベント別のハザード関数 $h_j(t)$ と全体のハザードの関係は次のようになる.

$$h(t) = \sum_{j=1}^k h_j(t)$$

したがって, イベントごとの密度関数は 5.4 式を利用すれば,

$$f_j(t, x, \beta) = h_j(t, x, \beta) \times S_j(t, x, \beta)$$

となる. Bauwens and Giot (2003) はこの疾病に相当する部分を, 仲値の上昇と下落のハザードに置き換えた. つまり, 仲値の上昇と下落は, それぞれ異なるパラメータを有するハザードに分けることができるものである.

二状態遷移モデル

二状態とは, すなわち, 仲値の上昇と下落の状態を指す. 仲値が変化する時間間隔 x_i と, 仲値の上昇, 下落を示す変数としてダミー変数 y_i の 2 つの変数の同時分布を考える.

- 仲値の変化間隔 x_i の経過時点で仲値が上昇した場合は $y_i = 1$
- 逆に, 間隔 x_i の経過時点で仲値が下落した場合は $y_i = -1$ とする.

話を簡単にするため, 単純に2つのハザードを λ_i^+ と λ_i^- とし, その分布については考えないものとする. λ_i^+ は当期で上昇する場合のハザード, λ_i^- は逆に下落時のハザードとする. それらのハザードを1期前のダミー変数 I_{i-1}^+ と I_{i-1}^- を利用して次のように定義する. I_i^+ と I_i^- は y_i によって決まるものとする.

$$\lambda_i^+ = \eta_1 I_{i-1}^+ + \eta_2 I_{i-1}^-$$

$$\lambda_i^- = \eta_3 I_{i-1}^+ + \eta_4 I_{i-1}^-$$

I_{i-1}^+ は $y_{i-1} = 1$ の時に1となり, それ以外の時は0となる. 同じように, I_{i-1}^- は $y_{i-1} = -1$ の時, 1となり, それ以外の時は0となる. つまり, ハザードは I_{i-1}^+ と I_{i-1}^- によってのみ決定されると考える. $\eta_1 \sim \eta_4$ はパラメータである. この状態を整理すると次のようになる.

$$I_{i-1}^+ = \begin{cases} 1 & \text{if } y_{i-1} = 1 \\ 0 & \text{if } y_{i-1} = 0 \end{cases}$$

$$I_{i-1}^- = 1 - I_{i-1}^+$$

今, $y_i = 1$ と $y_i = -1$ で終了する間隔が互いに独立であり, 1期前の状態にのみ依存する x_i と y_i の同時密度が指数分布に従うとすると, その条件付き密度関数は次のように記述できる.

$$f(x_i, y_i | y_{i-1}) = (\lambda_i^+)^{I_i^+} e^{-\lambda_i^+ x_i} (\lambda_i^-)^{I_i^-} e^{-\lambda_i^- x_i} \quad (5.5)$$

例えば, $y_i = 1$ の時, $I_i^+ = 1$ で $I_i^- = 0$ となる. つまり, 尤度は x_i のみに依存することになる.

$$f(x_i, 1 | y_{i-1}) = \lambda_i^+ e^{-\lambda_i^+ x_i} \cdot e^{-\lambda_i^- x_i} \quad (5.6)$$

5.6式において $\lambda_i^+ e^{-\lambda_i^+ x_i}$ は上昇時の密度, $e^{-\lambda_i^- x_i}$ が下落時の生存関数である. この関数は5.4式に等しい.

この式から我々は1期前の状態(上昇または下落)から, 当期における遷移確率を次のような形で求めることができる.

	$y_i = +1$	$y_i = -1$
$y_{i-1} = +1$	$\pi_{1,1} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_3}$	$\pi_{1,-1} = \frac{\eta_3}{\eta_1 + \eta_3}$
$y_{i-1} = -1$	$\pi_{-1,1} = \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_4}$	$\pi_{-1,-1} = \frac{\eta_4}{\eta_2 + \eta_4}$

表 5.2: 2 状態遷移モデルの遷移確率

この計算は実際に 5.5 式を x_i について積分することで求めることができる。

$$\begin{aligned}
\int f(x_i, y_i | y_{i-1}) dx_i &= \int (\lambda_i^+)^{I_i^+} e^{-\lambda_i^+ x_i} (\lambda_i^-)^{I_i^-} e^{-\lambda_i^- x_i} dx_i = (\lambda_i^+)^{I_i^+} (\lambda_i^-)^{I_i^-} \int e^{-(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) x_i} dx_i \\
&= -\frac{(\lambda_i^+)^{I_i^+} (\lambda_i^-)^{I_i^-}}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} \left[e^{-(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) x_i} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{(\lambda_i^+)^{I_i^+} (\lambda_i^-)^{I_i^-}}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} \cdot (-1) = \frac{(\lambda_i^+)^{I_i^+} (\lambda_i^-)^{I_i^-}}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-}
\end{aligned}$$

例えば, $y_i = +1, y_{i-1} = +1$ の時, $I_i^+ = 1, I_{i-1}^+ = 1$ なので, $\lambda_i^+ = \eta_1, \lambda_i^- = \eta_3$. つまり, 遷移確率は次のようになる。

$$\pi_{1,1} = \frac{\eta_1 \cdot 1}{\eta_1 + \eta_3} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_3}$$

この設定では, 遷移確率はハザード関数のパラメータにのみ依存し, x_i には影響されない事が分かる。

非対称性の導入

Bauwens and Giot (2003) は同時分布のハザードが 1 期前の状態と, 同じく 1 期前の価格変化の間隔に依存するワイブル分布による Log-ACD モデルを提案した. 最初にワイブル分布の密度関数, ハザード関数, そして生存関数の関係について確認しておく. まず, ワイブル分布を次のように表記する.

$$f_W(\epsilon) = \frac{\gamma}{c} \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^\gamma\right]$$

分布関数は $F_W(\epsilon) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^\gamma\right]$ なので,

$$S_w(\epsilon) = 1 - F_W(\epsilon) = \exp\left[-\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^\gamma\right]$$

よって, ハザード関数は,

$$h_W(\epsilon) = f_W(\epsilon) / S_w(\epsilon) = \frac{\gamma}{c} \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{\gamma-1}$$

ここで, ACD モデルの仮定から $c = 1$, さらに $x_i = \Psi_i \epsilon_i$ の関係から次のような設定が可能である。

- x_i が $y_i = 1$ で終了する場合, 情報セット \mathcal{F}_{i-1} (ここでは y_{i-1}) を条件とする時のハザードを次のように考える. ただし, $y_i = 1$ で終了する場合の条件付き期待約定間隔は Ψ_i^+ と記すものとする.

$$h(x_i | y_i = 1, \mathcal{F}_{i-1}) = \frac{\gamma^+}{\Psi_i^+} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^+} \right)^{\gamma^+ - 1} \quad (5.7)$$

ここで, $\Psi_i^+ = \exp(\psi_i^+)$ であり, ψ_i^+ の自己回帰過程を次のように定義する.

$$\psi_i^+ = (\omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{i-1}^+) I_{i-1}^+ + (\omega_2 + \alpha_2 \epsilon_{i-1}^-) I_{i-1}^- + \beta^+ \psi_{i-1}^+ \quad (5.8)$$

もちろん, $x_i = \exp(\psi_i^+) \epsilon_i^+$ である.

- 逆に, x_i が $y_i = -1$ で終了する場合は

$$h(x_i | y_i = -1, \mathcal{F}_{i-1}) = \frac{\gamma^-}{\Psi_i^-} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^-} \right)^{\gamma^- - 1} \quad (5.9)$$

となり, ψ_i^- の自己回帰過程を次のように定義する.

$$\psi_i^- = (\omega_3 + \alpha_3 \epsilon_{i-1}^+) I_{i-1}^+ + (\omega_4 + \alpha_4 \epsilon_{i-1}^-) I_{i-1}^- + \beta^- \psi_{i-1}^- \quad (5.10)$$

ここでは $x_i = \exp(\psi_i^-) \epsilon_i^-$ となる.

以上の設定の場合, 5.5 式と同じ考え方を用いて, x_i と y_i の条件付き同時密度関数を 5.11 式のように定義する. これは仲値の変化間隔 x_i と価格変化の方向の条件付き分布を示している. ここでは ψ_i が仲値の変化方向によって 2 つの状態に分かれており, 競合リスクモデルの考え方から, その自己回帰過程を支配するパラメータは異なると考える.

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= \left[\frac{\gamma^+}{\Psi_i^+} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^+} \right)^{\gamma^+ - 1} \right]^{I_i^+} \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\Psi_i^+} \right)^{\gamma^+} \right) \\ &\times \left[\frac{\gamma^-}{\Psi_i^-} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^-} \right)^{\gamma^- - 1} \right]^{I_i^-} \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\Psi_i^-} \right)^{\gamma^-} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Bauwens and Giot (2003) はこの密度関数による対数尤度関数を最大化して非対称 Log-ACD モデルのパラメータを推定した. 彼らの利用したデータは Disney と IBM の 1996 年 9 月から 11 月までの 3 ケ月のデータであり, Disney 37,325, IBM は 34,321 個の最良気配データを利用 (約定を含む) している. 推定の結果, 彼らの得た考察をまとめると次のようになる.

1. β 値が大きく, 非対称 Log-ACD モデルでは自己回帰効果が強いことを示している.

2. γ 値はほぼ 1 に近く, IBM については $\gamma^+ = \gamma^-$ の対称性が確認でき, 特にディズニーでは $\gamma^+ = \gamma^- = 1$ も確認できた.
3. IBM については $y_i = 1$ の時, α_1 は α_2 よりも小さくなるが, ディズニーではほぼ等しい. 逆に $y_i = -1$ のとき, 両銘柄で α_3 は α_4 よりも大きい.
4. 1 時点当たりの取引回数, 1 回あたりの平均取引株数, スプレッドなどのラグ項を 5.8 式と 5.10 式に追加し, 仮説検定を実行した. その結果, Easley and O'Hara (1992) と整合的な結果を得たと報告している

5.4 非対称型 ACD モデルの推定と一期先予測

本研究におけるパラメータ修正の手法は ACD モデルを対象としたものなので, Log-ACD では利用できない. それは, Log-ACD の無条件期待値がモデルパラメータにより一意に決まらぬことによる. よって, 本研究では通常の ACD モデルを想定して 5.8 式と 5.10 式を次のように書き換える.

$$\Psi_i^+ = (\omega_1 + \alpha_1 x_{i-1}) I_{i-1}^+ + (\omega_2 + \alpha_2 x_{i-1}) I_{i-1}^- + \beta^+ \Psi_{i-1}^+ \quad (5.12)$$

$$\Psi_i^- = (\omega_3 + \alpha_3 x_{i-1}) I_{i-1}^+ + (\omega_4 + \alpha_4 x_{i-1}) I_{i-1}^- + \beta^- \Psi_{i-1}^-$$

密度関数を 5.11 式として 5.12 式のパラメータを同時推定する. もちろん, 5.12 式を推定後, パラメータの修正を行う訳であるが, その手法は約定間隔を利用した場合の方法と同じある. そこで重要なことは次の示す 4 つにカテゴリごとに, データの個数をカウントすることである. 前出の ACD のパラメータ修正は単純に全約定間隔とゼロ約定間隔の個数をカウントすれば良かったが, ここでは状態の遷移という現象を考慮するので, 遷移の組合せごとに個数を計測しておく必要がある.

	$y_i = +1$	$y_i = -1$
$y_{i-1} = +1$	N_{11}	N_{12}
$y_{i-1} = -1$	N_{21}	N_{22}

表 5.3: パラメータ修正に利用するデータ個数の計測パターン

表 5.3 に示す 4 つのカテゴリごとにデータの個数をゼロ間隔の削除前後でカウントし, ゼロ間隔を削除した状態で推定したモデルで修正を行う.

Bauwens and Giot (2003) では条件付き分布の 5.11 式より, $f(y_i|x_i, y_{i-1})$ を求めて価格の上下変化の的中率を調べている. つまり, $f(x_i, y_i|y_{i-1})$ から $f(y_i|x_i, y_{i-1})$ を求め, その値が 0.5 以上なら次の価格変化は上昇, 0.5 未満なら下落として, 理論値と実現値の比較を行っている. そこで, $f(y_i|x_i, y_{i-1})$ を次のように導出する. 最初に,

$$f(y_i|x_i, y_{i-1}) = \frac{f(x_i, y_i, y_{i-1})}{f(x_i, y_{i-1})} \quad (5.13)$$

分子については,

$$f(x_i, y_i, y_{i-1}) = f(x_i, y_i|y_{i-1}) f(y_{i-1})$$

と書けるので, これを 5.13 式に代入して,

$$\begin{aligned} f(y_i|x_i, y_{i-1}) &= \frac{f(x_i, y_i|y_{i-1}) f(y_{i-1})}{f(x_i, y_{i-1})} = \frac{f(x_i, y_i|y_{i-1}) f(y_{i-1})}{f(x_i|y_{i-1}) f(y_{i-1})} \\ &= \frac{f(x_i, y_i|y_{i-1})}{f(x_i|y_{i-1})} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ここで, $f(x_i|y_{i-1}) = \sum_{y_i=-1,1} f(x_i, y_i|y_{i-1})$ である. 計算を簡単に行うために 5.5 式を用いて, これを計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} f(x_i|y_{i-1}) &= \sum_{y_i=-1,1} f(x_i, y_i|y_{i-1}) \\ &= e^{-\lambda_i^+ x_i} \cdot \lambda_i^- e^{-\lambda_i^- x_i} + \lambda_i^+ e^{-\lambda_i^+ x_i} \cdot e^{-\lambda_i^- x_i} \\ &= (\lambda_i^+ + \lambda_i^-) e^{-(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) x_i} \end{aligned}$$

よって, 5.14 式は,

$$\begin{aligned} f(y_i|x_i, y_{i-1}) &= (\lambda_i^+)^{I_i^+} e^{-\lambda_i^+ x_i} (\lambda_i^-)^{I_i^-} e^{-\lambda_i^- x_i} \times \frac{1}{(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) e^{-(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) x_i}} \\ &= \frac{(\lambda_i^+)^{I_i^+} (\lambda_i^-)^{I_i^-}}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} \end{aligned}$$

これをワイブル分布のハザード関数で書き換えると, 次の条件付き分布を得る.

$$f(y_i|x_i, y_{i-1}) = \frac{\left[\frac{\gamma^+}{\Psi_i^+} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^+} \right)^{\gamma^+ - 1} \right]^{I_i^+} \left[\frac{\gamma^-}{\Psi_i^-} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^-} \right)^{\gamma^- - 1} \right]^{I_i^-}}{\frac{\gamma^+}{\Psi_i^+} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^+} \right)^{\gamma^+ - 1} + \frac{\gamma^-}{\Psi_i^-} \left(\frac{x_i}{\Psi_i^-} \right)^{\gamma^- - 1}} \quad (5.15)$$

二状態遷移モデルの推定結果

モデル推定の結果を順番に示す. 最初に JFE の推定結果を示す. 有意水準を 5% とすると, 対称性は $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4, \beta^+ = \beta^-$ で認められた.

	End State:price up		End State:price down		
	Coef	S.E	Coef	S.E	
ω_1	$3.54E-16$	$6.17E-5$	ω_3	0.0048	0.0022
ω_2	0.0076	0.0034	ω_4	0.0027	0.0014
α_1	0.0354	0.0017	α_3	0.0307	0.0018
α_2	0.0353	0.0017	α_4	0.0400	0.0020
β^+	0.9476	0.0021	β^-	0.9491	0.0219
γ^+	0.7797	0.0038	γ^-	0.7943	0.0040
AIC = 6.8596					

表 5.4: 2 状態遷移モデル JFE の推定結果

ここでは ω_1 には非負制約を設定した. この推定結果を基に 5.15 式を用いて各期において $f(y_i|x_i, y_{i-1})$ を計算し, 上昇 (UP) と下落 (DOWN) の的中率を求めた. ACD は修正前の的中率, Trend は上昇なら次も上昇, 下落なら次も下落, そして ACD_m はパラメータ修正を行ったものである.

	Obs.	ACD	Trend	ACD_m
UP	27281	13660 (50.0%)	13450 (49.3%)	17433 (63.9%)
DOWN	26220	12304 (46.9%)	12389 (47.2%)	17194 (65.5%)
TOTAL	53501	25964 (48.6%)	25839 (48.2%)	34627 (64.7%)

表 5.5: 2 状態遷移モデル JFE の的中率

修正前の ACD モデルで計算した確率による的中率は, トレンドのそれとほぼ同じである. しかし, パラメータを修正し, 再計算を行うと, JFE の的中率は TOTAL で比較すると 16 ポイント上昇している.

次に KYC の推定結果を表 5.6 に示す. 同時推定による ω はすべて有意ではない. 対称性が確認できたのは α_2 と α_4 , そして β と γ であった.

	End State:price up		End State:price down		
	Coef	S.E	Coef	S.E	
ω_1	0.0122	0.0152	ω_3	0.0016	0.0202
ω_2	0.0132	0.0164	ω_4	0.0031	0.0044
α_1	0.0423	0.0069	α_3	0.0746	0.0086
α_2	0.0747	0.0088	α_4	0.0899	0.0091
β^+	0.8710	0.0134	β^-	0.8538	0.0118
γ^+	0.6357	0.0076	γ^-	0.6413	0.0074
AIC = 9.3980					

表 5.6: 2 状態遷移モデル KYC の推定結果

KYC の的中率は表 5.7 の通りである.

	Obs.	ACD	Trend	ACD _m
UP	5736	2657 (46.3%)	2443 (42.5%)	4501 (78.4%)
DOWN	6084	2795 (45.9%)	2789 (45.8%)	4726 (77.6%)
TOTAL	11820	5452 (46.1%)	5232 (44.2%)	9227 (78.0%)

表 5.7: 2 状態遷移モデル KYC の的中率

ここでも的中率の傾向は先の JFE とほぼ同じである. 修正により TOTAL の的中率は 31.9 ポイント上昇した.

NSN の推定結果は表 5.8 の通りある. ここでも ω はすべて有意ではない. 対称性が存在するのは, γ だけであった.

	End State:price up		End State:price down		
	Coef	S.E	Coef	S.E	
ω_1	0.0850	0.2097	ω_3	0.1690	0.4134
ω_2	0.1140	0.2794	ω_4	0.2929	0.7143
α_1	0.0345	0.0054	α_3	0.0640	0.0084
α_2	0.0433	0.0060	α_4	0.0785	0.0100
β^+	0.8971	0.0118	β^-	0.8073	0.0185
γ^+	0.5860	0.0059	γ^-	0.5891	0.0074
AIC = 9.0194					

表 5.8: 2 状態遷移モデル NSN の推定結果

この時の的中率は表 5.9 のようになった. 修正により TOTAL の的中率は 23.2 ポイント上昇した.

	Obs.	ACD	Trend	ACD _m
UP	6462	4609 (71.3%)	2756 (42.6%)	6090 (94.2%)
DOWN	6272	4430 (70.6%)	2565 (40.8%)	5904 (94.1%)
TOTAL	12734	9039 (70.9%)	5321 (41.7%)	11994 (94.1%)

表 5.9: 2 状態遷移モデル NSN の的中率

最後に TMN の推定結果を表 5.10 に示す. ω については有意水準 10% で有意な値を得た. また, 対称性については有意水準を 5% とすると, すべてのパラメータで対称性が確認できた.

	End State:price up		End State:price down		
	Coef	S.E	Coef	S.E	
ω_1	0.0036	0.0020	ω_3	0.0116	0.0059
ω_2	0.0231	0.0115	ω_4	0.0110	0.0056
α_1	0.0507	0.0031	α_3	0.0486	0.0034
α_2	0.0559	0.0037	α_4	0.0540	0.0034
β^+	0.8933	0.0051	β^-	0.9009	0.0059
γ^+	0.8248	0.0041	γ^-	0.8270	0.0044
AIC = 7.0538					

表 5.10: 2 状態遷移モデル TMN の推定結果

TMN の的中率は表 5.11 の通りである. 修正により TOTAL の的中率は 30.4 ポイント上昇した.

	Obs.	ACD	Trend	ACD _m
UP	26566	13054 (49.1%)	13954 (52.5%)	20946 (78.8%)
DOWN	25748	10863 (42.1%)	13137 (51.0%)	18899 (73.3%)
TOTAL	52314	23917 (45.7%)	27091 (51.7%)	39845 (76.1%)

表 5.11: 2 状態遷移モデル TMN の的中率

実証分析の結果

ACD モデルの推定で用いた 4 つの銘柄で 2 状態の非対称型 ACD モデルを推定した. ω の修正方法を活用するため, Bauwens and Giot (2000) による Log-ACD モデルでなく, ACD モデルをそのまま用いた. JFE についてのみ, ω で負になるパラメータが存在したので非負制約を課した. Bauwens and Giot (2003) の実証分析の結果と比較して, 結論をまとめると次のようになる.

- β の推定値は大きく, 先行研究と同じく x_i の自己回帰効果が大きいことが分かる.
- γ は先行研究とは異なり, 1 とは離れた結果となった. 推定値は銘柄ごとに明らかに異なるが, 対称性は強い.

- α の対称性は一部でしか認められない.
- 未修正の的中率は NSN を除き, ほぼ先行研究と同じく 50% を下回る程度で, ほぼ, トレンド予測と同じある. しかし, 修正を施すと, 最低でも 16 ポイント, 最大だと 31 ポイントも大幅に改善されることが分かった.

本章では ACD モデルにおけるパラメータ修正の方法を非対称型 ACD モデルに適用した. その結果, 1 期先予測的中率を大きく向上させることができた.

まとめ

高速取引の実現した今日の取引データを用いて、約定間隔に注目した ACD モデルによる実証分析を行った。まず、Engle and Russell (1998) の提案した ACD モデルの推定におけるゼロ約定間隔の取扱いに着目した。Engle (2000) で利用した IBM の株価データは 1990 年 11 月から 1991 年 1 月にかけての 3 ヶ月分で、ゼロ約定間隔として削除されたのは全体の約 13% であった。一方、高 (2012) で利用した日産自動車のデータ (2010 年 1 月 12 日から 29 日) では 32% がゼロ約定間隔であった。この 32% という割合の大きさを考慮して擬約定間隔 (均等間隔) を作成し、データの欠落を防いだ上で ACD モデルの推定を行い、高速取引の市場における約定間隔の持つ意味を仮説検定したが、擬約定間隔の数理的な妥当性の検証は行っていなかった。

そこで、本論文第二章ではまず数値実験を用いて擬約定間隔 (均等間隔) の妥当性を検証した。その結果、均等間隔に作成した擬約定間隔の存在により、ACD モデルのパラメータのうち、 α と β は真値とは乖離した値を求めてしまい、逆に、多くの情報が欠落してしまうゼロ削除の方法ならば、 α と β は真値に近い値を得ることが分かった。さらに、データの個数を用いて残りのパラメータ ω を修正する方法を新たに提案した。この修正方法は一日の取引時間は一定 (午前 9 時から午後 3 時) であることだけを利用したシンプルなものである。ゼロ削除による推定値 α は真値にかなり近いが、それに比べると β の差異は若干大きい。この β の差異をさらに小さくすることは今後の課題の一つと考えている。

また、本論文ではモデル推定をできるだけ精緻に行うという目的のため、先行研究ではほとんど実施されていないトレンド関数と ACD モデルの最尤法による同時推定を行った。数値実験の結果、整形を行っていない仮想データではほぼ設定値に近い値を得て、尤度関数の定義とプログラミングの正確さを確認した。

つづく第三章では 2012 年 10 月と 11 月の実データ (JFE, KYC, NSN, TMN) を用いて、ACD モデルの推定とパラメータの修正を行った。

Engle (2000) は最初に ACD モデルを推定し、期待約定間隔 Ψ_i を求め、次にイントラデイのボラティリティをモデル化した UHF-GARCH モデルを推定した。つまり、平均推定式においては約定間隔 x_i 、分散推定式においては Ψ_i が有意であるか、ということ仮説検定した。そこで、第四章では ACD モデル推定後のパラメータ ω の修正の有無が、続く UHF-GARCH モデルの実証結果に差異を生じさせることを確認した。このことは Engle (2000) に沿った方法でイントラデイボラティリティ

の実証分析を行うと、誤った結果を支持してしまう可能性のあることを示唆するものである。

Bauwens and Giot (2003) は ACD モデルの“約定間隔”を“仲値の変化間隔”に置き換え、競合リスクモデルの考え方をを用いることで、仲値変化のハザードを上昇/下落の2つに分け、それぞれの ACD モデルを同時推定した。彼らの注目した仲値の上昇/下落を示すインジケータ変数と仲値の変化間隔の条件付き同時分布は、モデル推定後に1期先の仲値の上昇/下落の確率を我々に与えるものである。しかし、Bauwens and Giot (2003) で報告されている仲値変化方向の的中率は50%前後で、読者に驚きを与えるものではなかった。ところが、第二章で提案したパラメータ修正を用いることで、4つの銘柄における的中率を16～31ポイント向上させることができた。

これまで十分に検討されていなかった ACD モデルにおけるゼロ約定間隔の処理方法について、数値実験により丁寧な吟味を行い、新たに、パラメータの修正方法を提案したことが本論文の最大の特徴である。

参考文献

- [1] 宇野淳, 柴田舞 [2012], 「取引の高速化と流動性へのインパクト」. 『現代ファイナンス』 (31).
- [2] 宇野淳, 太田亘, 竹原均 [2011], 『株式市場の流動性と投資家行動—マーケット・マイクロストラクチャー理論と実証』 中央経済社.
- [3] 太田亘 [2014], 「取引システム高速化と始値形成」. 『現代ファイナンス』 (35).
- [4] 小西貞則, 越智義道, 大森裕浩 [2008], 『計算統計学の方法』 朝倉書店.
- [5] 森保洋 [2006], 「金先物市場の日中取引変動と取引時間間隔」, 経営と経済, 第 85 巻, 第 3・4 号
- [6] 渡部敏明 [2000], 『ボラティリティ変動モデル』 朝倉書店.
- [7] Bauwens,Luc.[2005],“Econometric analysis of intra-daily Trading activity of Tokyo Stock Exchange”.IMES Discussion Paper Series 2005-E-3.
- [8] Bauwens,Luc and Pierre Giot.[2000],“The logarithmic ACD Model:An application to bid-ask quote process of three NYSE stocks”. *Annales d'Economie et de Statistique* 60: 117-149.
- [9] Bauwens,Luc and Pierre Giot.[2001],“Econometric modeling of stock market intraday activity”.Kluwer Academic Publishers.
- [10] Bauwens,Luc and Pierre Giot.[2003],“Asymmetric ACD models:Introducing price information in ACD models”.*Empirical Economics*(28)
- [11] Diamond,Douglas and Robert E.Verrecchia.[1987],“Constraints on short-selling and asset price adjustment to private information”.*Journal of Financial Economics*(18)
- [12] Easley,David and Maureen O'Hara[1992],“Time and the process of security price adjustment”.*The Journal of Finance*,(47)
- [13] Engle,Robert and Jeffrey R.Russell.[1998], “Autoregressive conditional duration:A new model for irregularly spaced transaction data”.*Econometrica*, (66).
- [14] Engle,Robert[2000],“The econometrics of ultra-high-frequency data”.*Econometrica*, (68).

- [15] Glosten, Lawrence and Paul R. Milgrom. [1985], "Bid, ask transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders". *Journal of Financial Economics* (14).
- [16] Hasbrouck, Joel. [2007], "Empirical market microstructure". Oxford University Press.
- [17] Hosmer, Lemeshow and May. [2008], "Applied Survival Analysis: Regression Modeling of Time-to-Event Data", Second Edition, Wiley and Sons.
- [18] Pacurar, Maria. [2008], "Autoregressive conditional duration models in finance: A survey of the theoretical and empirical literature". *Journal of Economic Surveys* (22).
- [19] Tauchen, George and Mark Pitts. [1983], "The price variability-volume relationship on speculative markets". *Econometrica*, (51).
- [20] Tsay, Ruey. [2010], "Analysis of financial time series". Wiley.