

博士論文

企業倒産リスクの評価と管理

Evaluation and management of corporate default risk

横浜国立大学大学院  
国際社会科学研究科

稲生 剛士  
Inao Tsuyoshi

2015年3月  
March 2015

# 目次

1	<b>序論</b>	3
1.1	研究背景 . . . . .	3
1.2	研究のねらい . . . . .	4
2	<b>先行研究</b>	8
2.1	倒産強度過程のモデル化 . . . . .	8
2.2	同時生存確率の導出と応用 . . . . .	11
2.3	コピュラ関数 . . . . .	16
2.4	ネットによる期待エクスポージャー . . . . .	18
2.5	CCP によるカウンターパーティ・リスクの減少 . . . . .	23
3	<b>企業倒産リスク評価 1</b>	29
3.1	Markov switching を導入した確率過程の先行研究 . . . . .	29
3.2	Markov switching を取り入れた CIR 型強度過程 . . . . .	31
3.3	生存確率 . . . . .	32
3.4	CDS . . . . .	33
3.5	数値実験 . . . . .	34
4	<b>企業倒産リスク評価 2</b>	41
4.1	同時生存確率 . . . . .	41
4.2	Basket CDS . . . . .	42
4.3	CDO . . . . .	50
4.4	数値実験 . . . . .	52
5	<b>中央清算機関によるリスク管理</b>	58
5.1	清算機関の概要 . . . . .	58
5.2	中央清算機関に関する先行研究 . . . . .	62
5.3	ネットによる期待損失 . . . . .	68
5.4	中央清算機関による期待損失 . . . . .	69
5.5	正規分布による期待損失分析 . . . . .	70
5.6	数値実験 . . . . .	74

5.7	ネット CCP によるリスクの減少 . . . . .	76
6	結論	84

# 1 序論

## 1.1 研究背景

2000年前後のアメリカでは、低所得者やローン審査の通らない層、いわゆる信用力の低い層向けに対しての住宅ローンであるサブプライムローンの貸し付けを金融機関が取り扱うようになり、利用者を徐々に増やしていった。これが2006年まで続き、住宅購入の増加から住宅価格は上昇し続けていった。

サブプライムローンは信用力の低い層向けにより高金利であった。よって金融機関は債務者返済リスクを負うことになるが、サブプライムローンは金融証券として他の金融機関や投資家へ売買することができるため、ローリスクハイリターンの証券であった。

また、ローンを借りる債務者にとっては、住宅価格の上昇によって、価格上昇分を担保にさらなる融資を受けることができるなど、住宅ブームは加熱していった。

しかし、2006年になると住宅価格は緩やかな伸びへと変化していった。それに伴い行き過ぎた住宅ローンから利払い返済の延滞が顕著となった。さらに住宅が余り始め、住宅バブルの崩壊へとつながっていくことになる。

2007年では、返済の滞った住宅ローンの一部は不良債権化し、金融機関の資金繰りは鈍化していった。またアメリカ株価の下落とドル安が資金繰りに拍車をかけ、資金繰りに失敗した金融機関は経営破綻へとさらに追い込まれていく事態へとなっていくことになる。この2007年のサブプライムローン問題はアメリカ国内全土に広がっていくことになる。

またこのサブプライムローン問題がアメリカのみの問題だけではなく、世界中に広がり、世界的な金融危機となった大きな理由は、サブプライムローン自体が金融商品として証券化されたことにある。この金融商品はアメリカのみならず欧州など世界中の金融機関や投資家に売買されていたため、住宅バブルの崩壊により証券価値は低下し、影響が世界中へと広がっていった。

2008年3月には、アメリカ第5位の大手投資銀行のベアー・スターンズが経営破綻を発表、同年9月にはおよそ6000億ドルの負債を抱えたアメリカ第4位の投資銀行のリーマン・ブラザーズが経営破綻した。これにより、リーマン・ブラザーズが発行している金融資産を保有する企業、取引先への連鎖的な不良債権が増えたこと、アメリカ経済に対する不安などから世界的な金融市場の悪化を波及的に招くこととなった。

日本の株式市場においては、アメリカ向けの外需の収益悪化により、平時の半値以下に日経平均は下落する影響を受けた。さらに、金融商品にかわる新たな投資先として日本円

が注目され、円買いが進んだ結果急激な円高を生むこととなった。

そのため外需依存の大きな日本経済は、為替リスクをも同時に影響を受け、輸出企業はさらなる収益悪化が続くことになった。そのため株式市場への悪影響はすぐさま好景気へと復活するのではなく、長い間持続的に不景気の状態が続いていくこととなる。

日米以外の国では、ロシアを中心とした新興株式市場での株価下落も大きく、ヨーロッパのアイスランドやバルト三国では国家的な財政破綻の危機にさらされています。また、2010年にはギリシャの財政危機を始め、ヨーロッパの国家的な財政危機や高い失業率は今現在も続いている。

2008年の金融危機による世界的な不況は、過去にも存在し近年で言えば1990年代末期のITバブルも同様であった。これは、アメリカのマイクロソフト社のwindows 95によってパーソナルコンピュータが世界的に普及し始めたことにより、IT関連株に対して世界的な注目が集まったことが始まりであった。しかし、利上げを契機にIT関連株は急落し、IT企業が次々に倒産していくことで若者の失業者が増加し、アメリカの社会的経済的な不況へとつながっていった。

将来への金融危機として、アメリカ合衆国の財政危機も挙げられている。アメリカ合衆国の債務不履行は2008年の金融危機を超える世界的な不況の可能性が考えられる。

また、金融危機以来、相対のデリバティブ取引において取引相手に対するカウンターパーティ・リスクなどが昨今注目を集めている。現にリーマン・ブラザーズと相対取引契約を行った投資家がカウンターパーティ・リスクに晒されたことが問題となった。

そのようなカウンターパーティの倒産リスクを受けた企業は自社の倒産リスクが高まり、さらに、自社と取引を行っている企業にも倒産リスクが高まることとなる。このような連鎖的に波及する倒産リスクを管理する必要性が近年高まっており、中央清算することによってこれを解決しようとする動きが見られている。

さらに、今後の金融市場において、金融商品の多様な証券化と、新興市場やグローバル化を初めとしたさらなる金融商品の流動化に対して、連鎖的なリスクを回避していこうという世界的な取り組みも行われており、リスク管理の新たな展望を期待する声が高まっている。

## 1.2 研究のねらい

そのような金融危機以来の企業の倒産に関するリスクについての評価と管理を行おうとしているのが今回の論文の狙いである。

具体的に、1つ目の倒産リスクの評価に関しては企業のデフォルト確率が、バランスシートなどのようなメカニズムから発生するのではなく、外生的な関数や確率モデルによって発生するようなモデルを考える。一般に、前者を構造型モデルと呼ばれ、後者を誘導型モデルと呼ばれている。この論文において、我々は誘導型モデルを主にして新たなモデルとその応用について研究を行った。

まず、誘導型モデルの先行研究として、Duffie and Garleanu (2001) の basic Affine モデルを2章で紹介する。このモデルは企業の倒産強度過程が CIR 型金利モデルにポワソン過程の和によって表現されたモデルである。ポワソン過程を加えることによって不確実なデフォルト確率の急激な上昇と、平均回帰速度によって緩やかに平均回帰水準に戻っていくことを表現したモデルである。これによって、金融危機などの急激で不確実な倒産確率の上昇をポアソン過程によって表し、その状況から緩やかに平均回帰水準に回復していく状況を表現することが目的となっている。また、ジャンプによってモデル化を行うことで解析解を求めやすくしている。

また、論文では企業の倒産強度過程からある一定期間までの生存確率を導出している。この生存確率を用いた金融派生商品の一つとして近年注目されている CDO の価格について研究がされている。CDO は複数企業全体から損失毎に優先劣後構造を持つ証券であり、その価格評価に関しては企業間の相互依存関係を評価することが重要となる。この相互依存関係を表現するモデルとして正規コピュラがしばしば利用されている。しかし、正規コピュラの変数は相関係数のみであり、金融危機などが発生したときに企業間相関が高まって同時に倒産が起きやすくなることを表現出来ていないことが従来から指摘されている。この点、正規コピュラ以外のコピュラ関数を用いたリスクの評価を行った研究として2章3節で詳しく説明する。また、新谷, 山田, 吉羽 (2010) では日本、米国、欧州の株価指数を金融危機前後の期間に区切って、最も当てはまりの良いコピュラ関数を研究している。この研究から期間と景気状況によって当てはまりの良いコピュラ関数が異なるという結果を得ている。

複数企業をプールとする金融証券として CDO 以外に (first to default) Basket CDS がある。これは、ある決まった満期までに複数企業の中で倒産が起きなければ Basket CDS の買い手は売り手に固定金額 (プレミアム) を支払い、倒産が起きたときに売り手から買い手に損失額を支払うような金融証券である。この場合も複数企業間の倒産に関しての相互依存関係の評価が重要となる。相互依存関係と Basket CDS プレミアムとの関係について研究した論文として Kijima , Motomiya and Suzuki (2010) がある。この論文では、回帰水準が確定関数である Hall and White モデルを企業の倒産強度過程とした上で Basket CDS 価格を導出し、企業間相関との関係を調べたところどのような相関を取って

も価格はほとんど変化しないという結果を得ている。

上記のことを踏まえて、我々は倒産強度過程のモデル化から考えることにした。Duffie and Garleanu (2001) による倒産強度過程を CIR 型でモデル化することによって、倒産強度が負にならない構造を利用したいと考えた。また、ポワソン過程によって不確実なデフォルトの急激な上昇を表現するのではなく、今回我々が考えたモデルは平均回帰水準がある推移確率によってスイッチングするモデルを考えたい。例えば金融危機などの不景気の状態では高い平均回帰水準とし、好景気の状態では低い平均回帰水準とすることで、それらの状況がある推移確率によってスイッチングするモデルとした。

大きなリスク変動を basic Affine 過程におけるポワソン過程ではなくスイッチングによって表現した理由の一つは、景気が悪くなる状況がある一定期間持続するという現実社会を表現したいということからきている。basic Affine 過程でも平均回帰速度を小さくすることで持続性を表現出来るが、急激に景気が悪くなりゆるやかに景気が良くなるモデルになり、少々現実とは異なると思われる。あることを契機に好景気と不景気が移行し合い、それが持続するという景気循環の波を表現したかった為にスイッチングを用いたモデルを提案した。

3章においては我々の Markov switching を取り入れた CIR 倒産強度過程モデルにおける生存確率と CDS 価格について紹介する。また、switching を取り入れた誘導型モデルの先行研究についても紹介する。さらに、景気によってデフォルト確率が一定期間持続することを Duffie and Garleanu のモデルと比較して分析を行った。また、我々のモデルにおける分布の裾が厚くなっていることをコピュラ関数や Duffie and Garleanu のモデルと比較した数値実験を示す。

4章では複数企業における Markov switching を取り入れた CIR 倒産強度過程を用いたリスク評価を行う。最初に Basket CDS 価格と CDO 価格を導出するために同時生存確率を計算する。数値実験では企業間の倒産強度の相関と前記の価格との関係について分析を行う。我々の景気状況がスイッチするモデルにおける相関と Basket CDS 価格の分析においては相関と現在の景気によって価格が変化することを示す。

もう一つの企業倒産リスクの管理については、相対デリバティブ取引におけるカウンターパーティの倒産リスクに着目した期待損失について考える。相対取引における通常のネットティングによる期待損失と、ある決まった資産における中央清算を行ったときの期待損失の計算を行い、期待損失を軽減するための資産数とカウンターパーティ数との関係を研究した論文として Duffie and Zhu (2011) を 2章で紹介する。

この中央清算を行う事による1番のメリットは連鎖的な倒産リスクを回避することが挙げられる。しかし、この中央清算の参加者は倒産した企業の損失分を他の生存参加者が分割して補填することが行われる。よって中央清算に加入した自社の期待損失は、他社の倒産したときの補填額によって我々は計算を行った。その企業の倒産による損失分を計算することで、通常のネットィングによる損失分と比較する事で、損失が軽減される割合を発見することが我々の目的である。5章において、それらの計算式と取引資産が正規分布に従うと仮定したときの計算結果を導出する。この点、Duffie and Zhu (2011) も同様な計算を行っているが、我々はその拡張として、複数資産間の相関を取り入れた。さらに中央清算に加入した参加者の期待損失で、他社参加者とのエクスポージャーによる割合によって計算を行うことでより実情に合わせた形で計算を行った。これにより複数資産にまたがるような中央清算機関によって自社の期待損失が軽減される場合があるということを紹介する。



## 2 先行研究

### 2.1 倒産強度過程のモデル化

倒産強度過程のモデル化を行った先行研究として Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations : Duffie and Garleanu (2001) を紹介する。この論文における企業の倒産強度過程を CIR 過程とし、さらにジャンプ過程を加えたモデルである。その強度過程におけるある将来時点までに生存する確率の解析的な解を与えている。

また、企業間の相関関係を持たせるために、倒産強度過程がすべての企業に共通する過程と個別企業特有に変動する過程の 2 つに分解できると仮定した。これを利用してモデルにおける相関関係と CDO 価格との関係性を議論している。

#### 2.1.1 CIR + ジャンプ過程と生存確率

時刻  $t$  における原資産のデフォルト強度を  $\lambda(t)$ 、デフォルト時刻を  $\tau$  とする。時刻  $t$  でのデフォルトに関する条件の下、時刻  $t$  から微小時間  $\Delta t$  の間にデフォルトする近似的な条件付き確率は

$$P_t\{\tau < t + \Delta t\} \cong \lambda(t)\Delta t \quad (1)$$

$\lambda$  が確率過程に従うとし、時刻  $t$  から  $t + s$  までの生存確率は

$$P_t\{\tau > t + s\} = E_t^Q \left[ \exp \left\{ \int_t^{t+s} -\lambda_u du \right\} \right], \quad s > 0$$

$E_t$  は時刻  $t$  における全ての情報に関する条件付き期待値を表している。デフォルト強度  $\lambda$  が次の確率微分方程式を持っていると仮定する。

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t + \Delta J_t \quad (2)$$

$\Delta J_t$  は純粋なジャンプ過程で、ブラウン運動と独立とする。また、 $J$  はジャンプ幅  $\mu$  の指数分布に従い、ジャンプの生起率  $l$  はポアソン過程に従うと仮定し、 $\mu$  と  $l$  は独立とする。パラメータは  $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l)$  であり、この確率過程を特にベーシックアフィン過程と呼ぶことにする。 $\kappa$  は平均回帰率である。また長期平均は  $\bar{m} = \theta + (l\mu)/\kappa$  となる。つまり、デフォルト強度過程が CIR 型金利過程とジャンプ過程の 2 つの不確実性により表現したモデルである。ジャンプ過程を取り入れたことにより急激なデフォルト確率の上昇が起こりうることを想定したモデルを提唱している。Duffie and Kan (1996) の結果から次の計算

ができる。

$$P_t\{\tau > t + s\} = E_t^Q \left[ \exp \left\{ \int_t^{t+s} -\lambda_u du \right\} \right] = e^{\alpha(s) + \beta(s)\lambda(t)}, \quad s > 0 \quad (3)$$

係数  $\alpha(s)$  と  $\beta(s)$  については次の微分方程式に従う。

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= m\beta(s) + l \frac{\mu\beta(s)}{1 - \mu\beta(s)} \\ \beta'(s) &= n\beta(s) + \frac{1}{2}p\beta(s)^2 + q \\ \alpha(0) &= v \\ \beta(0) &= u \end{aligned}$$

式 (3) の生存確率は  $u = v = 0, n = -\kappa, p = \sigma^2, q = -1, m = \kappa\theta$  とした場合であり、解析的に求めることが出来る。

### 2.1.2 相関関係

Duffie and Garleanu (2001) の強度過程に企業間の相関関係を持たせるために、共通項と個別項に分解できると仮定する。次の定理は共通項と個別項がそれぞれベーシックアフィン過程であるとし、その和の過程もまたベーシックアフィン過程であることを示している。

#### Proposition1

$X$  と  $Y$  は独立なベーシックアフィン過程とし、パラメータは  $(\kappa, \theta_X, \sigma, \mu, l_X)$ 、 $(\kappa, \theta_Y, \sigma, \mu, l_Y)$  とする。このとき  $X + Y$  もまたベーシックアフィン過程  $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l)$  であり、かつ  $l = l_X + l_Y$ 、 $\theta = \theta_X + \theta_Y$  である。

$N$  個の原資産がそれぞれベーシックアフィン過程に従うデフォルト強度  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  によって表されるデフォルト時刻  $\tau_1, \dots, \tau_N$  を持っているとする。ここで相関を考えるために 2 つの状態変数を用いて、

$$\lambda_i = X_C + X_i \quad (4)$$

で表されるとする。 $X_C$  は  $(\kappa, \theta_C, \sigma, \mu, l_C)$  のベーシックアフィン過程に従い、 $X_i$  は  $(\kappa, \theta_i, \sigma, \mu, l_i)$  のベーシックアフィン過程に従い、 $X_1, \dots, X_N, X_C$  は独立であるとする。Proposition1 より  $\lambda_i$  もベーシックアフィン過程であり、 $l = l_C + l_i$  かつ  $\theta = \theta_C + \theta_i$  である。 $X_i$  と  $X_C$  との相関係数は

$$\rho = \frac{\theta_C}{\theta_C + \theta_i}$$

となり、平均回帰水準の比率になる。

### 2.1.3 同時生存確率

全ての資産数が  $N$  個あり、 $d_j$  を資産  $j$  が時刻  $T$  までにデフォルトする事象とする ( $d_j = \{\tau_j < T\}$  かつ  $d_j^C = \{\tau_j > T\}$  とする)。  $M$  を時刻  $T$  までのデフォルト数とする。ここで、デフォルト時刻の無条件同時分布の対称性を仮定する。このとき  $k$  個の資産がデフォルトする確率は

$$P\{M = k\} = {}_N C_k P\{d_1 \cap \dots \cap d_k \cap d_{k+1}^C \cap \dots \cap d_N^C\} \quad (5)$$

ここで  $q(k, N) = P\{d_1 \cap \dots \cap d_k \cap d_{k+1}^C \cap \dots \cap d_N^C\}$  として、確率  $p_j = P\{d_1 \cup \dots \cup d_j\}$  を最初から  $j$  までのなかで少なくとも 1 つはデフォルトする確率とする。

$$q(k, N) = \sum_{j=1}^N (-1)^{(j+k+N+1)} {}_k C_{N-j} p_j$$

証明は Duffie and Garleanu (2001) にある。

これより、ストップングタイム  $\tau_1, \dots, \tau_j$  の first-to arrive  $\tau^{(j)} = \min(\tau_1, \dots, \tau_j)$  は  $X_1, \dots, X_N, X_C$  の独立性を用いることにより

$$\begin{aligned} p_j &= 1 - P\{\tau^{(j)} > T\} \\ &= 1 - P\{\tau_1 > T, \dots, \tau_j > T\} \\ &= 1 - E^Q [P_T\{\tau_1 > T\} \times \dots \times P_T\{\tau_j > T\}] \\ &= 1 - E^Q \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{i=1}^j \lambda_i(t) dt \right\} \right] \\ &= 1 - e^{\alpha_C(T) + \beta_C(T) X_C(0) + j\alpha_i(T) + j\beta_i(T) X_i(0)} \end{aligned} \quad (6)$$

係数  $\alpha_C, \beta_C$  は  $l = l_C, \theta = \theta_C$  として、 $\alpha_i, \beta_i$  は  $l = l_i, \theta = \theta_i$  としたものである。

数値実験として式 (5) のデフォルト確率と相関係数における関係と、CDO とジャンプとの関係について分析を行っている。

資産数は 100 とし、各パラメータは  $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l) = (0.6, 0.02, 0.141, 0.2, 0.1)$  とする。相関を 0.1 と 0.9 としたときの累積確率分布について、低い相関の時は 60 以上デフォルトする確率は 1 % で、高い相関の時は 12 % であった。

また CDO とジャンプについては、長期平均が同じパラメータセットにおいてでも、ジャンプ生起率が低い場合メザニンやシニアにおいてスプレッドが低くなり、ジャンプ生

起率が高い場合にはスプレッドが高くなることが示されている。

## 2.2 同時生存確率の導出と応用

同時生存確率の導出とその応用についての先行研究として Valuation of a Credit Swap of the Basket Type : Kijima (2000) を紹介する。この論文では、満期での情報が分かったとき全ての企業間の倒産強度が互いに独立とする条件付き独立を仮定することにより、容易に同時生存確率が計算できる事を示している。さらに、その同時生存確率を用いて、市場で取引が盛んに行われているデリバティブの1つである basket CDS についての価格を導出している。また、basket CDS 価格と倒産強度の企業間相関について分析を行っており、相関が変化しても basket CDS 価格はほとんど変化しないという結果を示している。

ここでは、条件付き独立の紹介と basket CDS 価格の導出方法を紹介する。Kijima (2000) の論文では倒産強度過程が Hull and White モデルに従う時の同時生存確率の導出している。

### 2.2.1 条件付き独立

各  $i$  に対して、 $h_i(t)$  を倒産強度過程とし、 $\tau_i$  をデフォルト時刻とする。このとき、各  $i$  の生存確率を以下のように仮定する。

$$P\{\tau_i > t_i | \mathcal{F}_T\} = e^{-\int_t^{t_i} h_i(s) ds}, t \leq t_i < T \quad (7)$$

時刻  $T$  までのフィルトレーション  $\mathcal{F}_T = \sigma(h_i(t), t < T; i = 1, \dots, n)$  とする。

倒産強度過程  $h_i(t)$  は独立ではないかもしれないが、デフォルト時刻  $\tau_i$  に条件付き独立を仮定する。

$$P\{\tau_0 > t_0, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_T\} = \prod_{i=0}^n P\{\tau_i > t_i | \mathcal{F}_T\}, T \geq \max_i t_i \quad (8)$$

(7) 式より

$$P\{\tau_0 > t_0, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_T\} = \exp \left\{ -\sum_{i=0}^n \int_t^{t_i} h_i(s) ds \right\}$$

よって、時刻  $t$  における同時生存確率は次のように書ける。

$$P\{\tau_0 > t_0, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_t\} = E_t \left[ \exp \left\{ -\sum_{i=0}^n \int_t^{t_i} h_i(s) ds \right\} \right]$$

### 2.2.2 basket CDS 価格

次に、basket CDS 価格について考える。企業数を  $n$  社とする。年率の固定支払い額を  $U$  とし、時刻を  $t \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$  と分割し各  $t_i$  において支払うものとする。マネーマーケットアカウントを次のようにする。

$$B(t, T) = \exp \left\{ \int_t^T h_0(u) du \right\}, t \leq T$$

first to default を  $\tau = \min_i \tau_i$  とする。このとき、買い手から売り手に支払う価格は

$$R_B = U \sum_{j=1}^m E_t \left[ \frac{1_{\{\tau > t_j\}}}{B(t, t_j)} \right] \quad (9)$$

一方、企業  $i$  の満期  $T$  における現時点時刻  $t$  の社債価格を  $v_i(t, T)$  とする。また、損失率を  $L_i$  とする。この時、売り手から買い手に支払われる価格は

$$R_A = E_t \left[ \frac{1}{B(t, \tau)} \sum_{i=1}^n L_i(\tau) v_i(\tau, T_i) 1_{\{\tau = \tau_i \leq T\}} \right] \quad (10)$$

となる。社債価格について、満期  $T$  の割引債券の  $t$  時点価格を  $v_0(t, T)$  とし、

$$v_0(t, T) = E_t \left[ \exp \left\{ - \int_t^T h_0(u) du \right\} \right] = P\{\tau_0 > T | \mathcal{F}_t\}$$

企業  $i$  の満期  $T_i$  の社債価格は、 $\tau_i > T_i$  の時 1 を受け取り、 $\tau_i \leq T_i$  のとき回収率  $\delta_i$ ,  $0 \leq \delta_i < 1$  を受け取る。よって、

$$\begin{aligned} v_i(t, T_i) &= E_t \left[ B^{-1}(t, T) (1_{\{\tau_i > T_i\}} + \delta_i 1_{\{\tau_i \leq T_i\}}) \right] \\ &= \delta_i v_0(t, T_i) + (1 - \delta_i) E_t \left[ \exp \left\{ - \int_0^{T_i} h_0(u) du - \int_0^{T_i} h_i(u) du \right\} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

スワップ契約より  $R_A = R_B$  としたときの premium は

$$U = \frac{E_t \left[ \frac{1}{B(t, \tau)} \sum_{i=1}^n L_i(\tau) v_i(\tau, T_i) 1_{\{\tau = \tau_i \leq T\}} \right]}{\sum_{j=1}^m E_t \left[ \frac{1_{\{\tau > t_j\}}}{B(t, t_j)} \right]}$$

となる。

### 2.2.3 ガウシアンモデル

企業の倒産強度過程に Hull and White(1990) の拡張 Vasicek に従うと仮定する。

$$dh_j(t) = (\phi_j(t) - a_j h_j(t))dt + \sigma_j dz_j(t), \quad 0 \leq t \leq T_j, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$

$\phi_j(t)$  は  $t$  に関する確定関数であり、 $a_j$  と  $\sigma_j$  は定数である。また、 $z_j(t)$  はリスク中立確率  $P$  の下で標準ブラウン運動であり、

$$dz_i(t)dz_j(t) = \rho_{ij}dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

であるとする。この時、(12) は解くことができ、

$$h_i(s) = h_i(t)e^{-a_i(s-t)} + \int_t^s \phi_i(u)e^{-a_i(s-u)}du + \sigma_i \int_t^s e^{-a_i(s-u)}dz_i(u), \quad t \leq s \leq T_i \quad (13)$$

### Theorem 1

ガウシアンモデルにおける同時生存確率は

$$S_t(t_0, t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ - \sum_{i=0}^n M_i(t, t_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n C_{ik}(t; t_i, t_k) \right\}$$

where

$$M_i(t, T) = h_i(t) \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} + \int_t^T \phi_i(s) \frac{1 - e^{-a_i(T-s)}}{a_i} ds$$

$$C_{ij}(t; u, v) = \rho_{ij} \frac{\sigma_i \sigma_j}{a_i a_j} \left[ s - \frac{e^{-a_i(u-s)}}{a_i} - \frac{e^{-a_j(v-s)}}{a_j} + \frac{e^{-a_i(u-s) - a_j(v-s)}}{a_i + a_j} \right]_{s=t}^{u \wedge v}$$

$u \wedge v = \min\{u, v\}$  となる。

### 証明

強度過程 (13) 式から累積倒産強度を導く。

$$\int_t^T h_i(s)ds = h_i B_i(t, T) + \hat{A}_i(t, T) + \sigma_i \int_t^T B_i(s, T)dz_i(s)$$

where

$$B_i(t, T) = \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i}$$

$$\hat{A}_i(t, T) = \int_t^T \phi_i(s) \frac{1 - e^{-a_i(T-s)}}{a_i} ds$$

従って、累積倒産強度は正規分布に従う。よって平均と共分散を求めれば同時生存確率が計算される。

$$M_i(t, T) \equiv h_i(t)B_i(t, T) + \hat{A}_i(t, T)$$

$$C_{ij}(t; u, v) \equiv \sigma_i \sigma_j \int_t^{u \wedge v} B_i(s, u) B_j(s, v) \rho_{ij} ds$$

ガウシアンモデルにおける basket CDS 価格を求める。\$R\_B\$ は (9) 式より

$$R_B = U \sum_{j=1}^m E_t \left[ e^{-\int_t^{t_j} h_0(u) du} E_T[1_{\{\tau > t_j\}}] \right] = U \sum_{j=1}^m S_t(t_j, t_j, \dots, t_j)$$

となる。一方 \$R\_A\$ については \$\tau\_i\$ の条件付き独立より次が成立する。

$$P_T\{s < \tau_i \leq s + ds, \tau_j > s \text{ for all } j \neq i\} = h_i(s) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^s h_i(u) du \right\} ds$$

よって (10) 式に代入して

$$R_A = \sum_{i=1}^n E_t \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s h_0(u) du} L_i(s) v_i(s, T_i) P_T\{s < \tau_i \leq s + ds, \tau_j > s \text{ for all } j \neq i\} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n E_t \left[ \int_t^T h_i(s) \exp \left\{ - \sum_{i=0}^n \int_t^s h_i(u) du \right\} L_i(s) v_i(s, T_i) ds \right]$$

社債価格 (11) 式を代入して、2つの項に分解する。さらに、Fubini の定理を用いる。

$$R_A = R_A^1 + R_A^2$$

$$R_A^1 = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_t^T E_t \left[ h_i(s) L_i(s) \exp \left\{ - \int_t^{T_i} h_0(u) du - \sum_{i=1}^n \int_t^s h_i(u) du \right\} \right] ds \quad (14)$$

$$R_A^2 = \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \int_t^T E_t \left[ h_i(s) L_i(s) \exp \left\{ - \int_t^{T_i} h_0(u) du - \int_t^{T_i} h_i(u) du - \sum_{k \neq 0, i} \int_t^s h_k(u) du \right\} \right] ds \quad (15)$$

## Theorem 2

ガウシアンモデルにおける \$R\_A^1\$ と \$R\_A^2\$ はそれぞれ以下のように与えられる。

$$R_A^1 = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_t^T L_i(s) \left\{ m_i(s) - \rho_{i0} \frac{\sigma_i \sigma_0}{a_0} J_{i0}(s, T_i) - \sum_{k=1}^n \rho_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{a_k} J_{ik}(s, s) \right\} S_t(T_i, s, \dots, s) ds$$

$$R_A^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_t^T L_i(s) \left\{ m_i(s) - \sum_{k \in \{0, i\}} \rho_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{a_k} J_{ik}(s, T_i) - \sum_{k \neq 0, i} \rho_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{a_k} J_{ik}(s, s) \right\} K_i(s) ds$$

where

$$K_i(s) = S_t(t_0, t_1, \dots, t_n) \text{ with } t_0 = t_i = T_i \text{ and } t_j = s \text{ for } j \neq 0, i$$

$$m_i(s) = h_i(t) e^{-a_i(s-t)} + \int_t^s \phi_i(u) e^{-a_i(s-u)} du$$

$$J_{ik}(s, t_k) = \left[ \frac{e^{-a_i(s-u)}}{a_i} - \frac{e^{-a_i(s-u)-a_k(t_k-u)}}{a_i + a_k} \right]_{u=t}^{s \wedge t_k}$$

### 証明

確率変数  $Y$  を次のように置く。

$$Y = \sum_{i=0}^n \int_t^{t_i} h_i(u) du$$

$X = h_i(s)$  とする。ここで  $(X, Y)$  を同時正規確率変数とすると、Kijima(1999) から

$$E_t [f(X) e^{-Y}] = E_t [e^{-Y}] E_t [f(X - C_t[X, Y])] \quad (16)$$

が成立する。ただし、 $f(x)$  は任意の関数で、 $C_t$  は時刻  $t$  の条件付き共分散である。

これより  $E_t [e^{-Y}] = S_t(t_0, t_1, \dots, t_n)$  であり、 $f(x) = x$  で、共分散は

$$\begin{aligned} C_t[h_i(s), Y] &= \sigma_i \sum_{k=0}^n \sigma_k E_t \left[ \int_t^s e^{-a_i(s-u)} dz_i(u) \int_t^{t_k} B_k(v, t_k) dz_k(v) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \rho_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{a_k} J_{ik}(s, t_k) \end{aligned}$$

$h_i(s)$  の期待値を  $m_i(s)$  とすると

$$m_i(s) = h_i(t) e^{-a_i(s-t)} + \int_t^s \phi_i(u) e^{-a_i(s-u)} du$$

よって、(16) 式に戻して

$$E_t [h_i(s) e^{-Y}] = \left\{ m_i(s) - \sum_{k=0}^n \rho_{ik} \frac{\sigma_i \sigma_k}{a_k} J_{ik}(s, t_k) \right\} S_t(t_0, t_1, \dots, t_n)$$



## 2.2.4 数値実験

4つの倒産強度過程を用意し、それぞれガウシアンモデルに従うと仮定する。相関係数を3つのケースに分けて考える。1つ目はすべて正の相関である。2つ目は1つの強度が他の強度に対して負の相関を持っている場合である。3つ目は無相関である場合である。この3つのケースにおいて、basket CDS 価格  $U$  を算出し、結果を比較したところほぼ同じような数値となった。よって、ガウシアンモデルにおける相関係数が basket CDS 価格に与える影響は小さいと考えられる。

## 2.3 コピュラ関数

basket CDS 価格や CDO など複数資産を原資産とした価格分析において、各原資産間の相互依存関係の評価が重要になってくる。各原資産のデフォルト時刻の分布関数を周辺分布にもつ、同時分布関数に関して、相互依存関係と周辺分布の2つに分離するコピュラ関数を考える。

実務において、ポートフォリオのリスク管理や CDO 評価などにおいて最もよく利用されるコピュラが正規コピュラである。正規コピュラのパラメータは資産間の相関のみである。この相関を変化させることにより、各資産の分布全体の依存度合いを変化させることができるが、各資産の分布の裾での依存度合いを変化させることはできない。このことは、金融危機などによって、各資産が依存度合いを強めつつ同時に分布の裾が厚くなることを表現することができない。よって、正規コピュラは金融危機などのリスクが大きく変化する局面を考慮することが難しいということを示している。

そのようなリスクが高まり、分布の裾が厚くなるようなコピュラ関数についても研究されている。ここでは、コピュラの種類をいくつか挙げ、それらの特徴を挙げることにする。

### 2.3.1 コピュラの種類

任意の確率変数  $X_1, \dots, X_n$  とし、それぞれの周辺分布を  $F_1, \dots, F_n$  とする。この時、同時分布関数  $F$  は

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \\ &= P\{F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)\} \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \end{aligned}$$

$C$  をコピュラ関数という。各確率変数  $X_i$  を周辺分布関数  $F_i$  によって変換を行うと、 $U_i = F_i(X_i)$  は  $[0, 1]$  の一様分布に従う。よって、コピュラ関数は多変量一様確率変数

$(U_1, \dots, U_n)$  の同時分布関数と考えることができる。

コピュラの種類として、以下を挙げる。

$$\begin{aligned} \text{正規コピュラ } C(u_1, \dots, u_n) &= \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \\ \text{t コピュラ } C(u_1, \dots, u_n) &= \mathbf{t}_v(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \\ \text{クレイトンコピュラ } C(u_1, \dots, u_n) &= \left( \sum_{j=1}^n u_j^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-1/\alpha} \end{aligned}$$

$\Phi$  は相関行列  $\Sigma$  の  $n$  変量標準正規分布関数、 $\Phi$  は 1 変量標準正規分布関数、 $\mathbf{t}_v$  は自由度  $v$  相関行列  $\Sigma$  の  $n$  変量 t 分布関数、 $t_v$  は自由度  $v$  の 1 変量 t 分布関数である。

### 2.3.2 裾依存性

コピュラ間を比較する場合に分布の一部の相互依存関係を抽出する指標として裾依存性がある。同時分布の上側の裾か下側の裾かがあるが、ここでは下裾依存性を紹介する。2 変量同時分布に従う確率変数  $(X_1, X_2)$  とその周辺分布  $F_1, F_2$  とする。このとき、ある  $u \in [0, 1]$  の下裾依存性  $\lambda_L(u)$  は次のようになる。

$$\lambda_L(u) \equiv P\{F_2(X_2) < u | F_1(X_1) < u\} \quad (17)$$

コピュラ関数を用いると次のように書き換えられる。

$$\lambda_L(u) = \frac{P(F_2(X_2) < u, F_1(X_1) < u)}{P\{F_1(X_1) < u\}} = \frac{C(u, u)}{u}$$

下裾依存係数は次のようになる。

$$\lambda_L \equiv \lim_{u \rightarrow 0+} \lambda_L(u) \quad (18)$$

正規コピュラ、t コピュラ、クレイトンコピュラについての下裾依存性はまとめると以下のようになる。

コピュラ	下裾依存性	下裾依存係数
正規コピュラ	$\frac{\Phi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(u))}{u}$	0
t コピュラ	$\frac{\mathbf{t}_v(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(u))}{u}$	$2t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{1+\rho}} \right)$
クレイトン	$(2 - u^\alpha)^{-1/\alpha}$	$2^{-1/\alpha}$

正規コピュラの下裾依存係数は 0 であるので、相関を変化させても金融危機などのリスクが高まるような局面を想定しにくい関数であることが分かる。

新谷, 山田, 吉羽 (2010) では 2000 年 1 月から 2009 年 9 月までの米国、日本、欧州の株価インデックスを用いてどのコピュラ関数の当てはまりが良いかを分析している。これによると全期間による推計では自由度の小さい  $t$  コピュラや反転ガンベルコピュラの当てはまりがよく、各国間で強い下裾依存性が見られている。また、期間を金融安定期と金融危機期に分けそれぞれコピュラを当てはめた場合には、安定期には  $t$  コピュラよりも正規コピュラによる当てはまりがよく、金融危機期では  $t$  コピュラのほうが当てはまりが良い結果が得られている。よって、金融危機発生の可能性を考えると下裾依存性の高いコピュラを用いる必要があると結論づけている。

## 2.4 ネットによる期待エクスポージャー

相対取引におけるカウンターパーティ・リスクについての研究として Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA Allocations : Pykhtin and Rosen (2010) を紹介する。将来カウンターパーティの倒産によって発生する損失額として、期待エクスポージャーがある。資産間でネットを行い、その総期待エクスポージャーが個別資産の期待エクスポージャーの和することが出来ることを証明している。さらに、期待エクスポージャーの導出において、資産の価格変動を正規分布と仮定することにより簡単に導出できること例として示している。

### 2.4.1 期待エクスポージャー

1 つの銀行 (カウンターパーティ) に対して  $N$  個のデリバティブ契約のポートフォリオを考える。ポートフォリオの中で最も長い満期を  $T$  とする。カウンターパーティのリスク中立デフォルト確率を  $P(t) \equiv Pr\{\tau \leq t\}$  とする。 $i$  番目の証券価格を  $V_i(t)$  とする。ポートフォリオの価格は

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(t)$$

ネットイングしない総エクスポージャーは

$$E(t) = \sum_{i=1}^N \max\{0, V_i(t)\}$$

ネットティング後の総エクスポージャーは

$$E(t) = \max\{V(t), 0\}$$

担保を  $C(t)$  とする。その時エクスポージャーは

$$E(t) = \max\{V(t) - C(t), 0\} \quad (19)$$

担保について、信用極度額  $H$  を導入する。これは、自社が相手に無担保でお金を貸し出せる額で定義され、カウンターパーティの信用水準 (格付け) によって決められる。信用水準が高いと信用極度額は高まる性質を持ち、実務ではよく用いられる。 $H \rightarrow 0$  でポートフォリオの全額を担保され\*1、 $H \rightarrow \infty$  で無担保となる。瞬時に担保が追加されるならば、

$$C(t) = \max\{V(t) - H, 0\} \quad (20)$$

実際は、担保が差し出されるのに時間差  $\delta t$  が生じるので

$$C(t) = \max\{V(t - \delta t) - H, 0\}$$

となる。単純化するため (20) 式で議論する。

カウンターパーティがデフォルトする時刻を  $\tau$ 、回収率  $R$ 、 $D(t)$  を確率的割引ファクターとすると、銀行倒産時の割り引かれた損失は

$$L = 1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R)E(\tau)D(\tau) \quad (21)$$

1 方向カウンターパーティ CVA は (21) 式に期待値をとることで求められる。

$$CVA = (1 - R) \int_0^T \hat{e}^*(t) dP(t) \quad (22)$$

$$\hat{e}^*(t) \equiv E[D(t)E(t)|\tau = t]$$

CVA は期待損失額ととらえることが出来る。 $\hat{e}^*(t)$  はデフォルト条件付き割り引かれた期待エクスポージャー (EE) と呼ばれる。

---

\*1 金融危機後は信用極度額が 0 となるケースが増えた (森田 2010)

## 2.4.2 個別エクスポージャーと総エクスポージャーの関係

個別エクスポージャーの CVA の和が (22) の CVA となる。

$$CVA = \sum_{i=1}^N CVA_i$$

これを示すためには以下を示す必要がある。

$$\begin{aligned} \hat{e}^*(t) &= \sum_{i=1}^N \hat{e}_i^*(t) \\ CVA_i &= (1 - R) \int_0^T \hat{e}_i^*(t) dP(t) \end{aligned}$$

ネットしない場合には自明であるが、ネットしたエクスポージャーでも成立することを示す。

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  のベクトルとする。この  $\alpha_i$  はウェイトであり、 $i$  番目の証券の価格について  $V_i(\alpha_i, t) = \alpha_i V_i(t)$  を定義する。このとき、ネット後のエクスポージャーは

$$E(\boldsymbol{\alpha}, t) = \max \left( \sum_{i=1}^N V_i(\alpha_i, t), 0 \right) = \max \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i(t), 0 \right)$$

また、

$$\hat{e}_i^*(\boldsymbol{\alpha}, t) = E[D(t)E(\boldsymbol{\alpha}, t)|\tau = t] = E \left[ D(t) \max \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i(t), 0 \right) \middle| \tau = t \right]$$

証券  $i$  の割り引かれた期待エクスポージャーを次のように定義する。

$$\hat{e}_i^*(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\hat{e}^*(\mathbf{1} + \delta \cdot \mathbf{u}_i, t) - \hat{e}^*(t)}{\delta} = \left. \frac{\partial \hat{e}^*(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}$$

微分と期待値を交換して

$$\hat{e}_i^*(t) = E \left[ D(t) \left. \frac{\partial E(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}} \middle| \tau = t \right] \quad (23)$$

エクスポージャーの偏微分の部分は

$$\left. \frac{\partial E(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \max(V(\boldsymbol{\alpha}, t), 0) \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}} = \left. \frac{\partial V(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} 1_{\{V(\boldsymbol{\alpha}, t) > 0\}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}} = V_i(t) 1_{\{V(t) > 0\}}$$

これより、(23) 式にもどして和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \hat{e}_i^*(t) &= \sum_{i=1}^N E [D(t)V_i(t)1_{\{V(t)>0\}}|\tau = t] \\ &= E [D(t)V(t)1_{\{V(t)>0\}}|\tau = t] = E [D(t) \max(V(t), 0)|\tau = t] = \hat{e}^*(t) \end{aligned} \quad (24)$$

担保を考えたエクスポージャーは (19)、(20) 式から

$$\begin{aligned} E(t) &= \max\{V(t) - C(t), 0\} \\ &= (V(t) - \max\{V(t) - H, 0\})1_{\{V(t) - \max\{V(t) - H, 0\} > 0\}} \\ &= (V(t)1_{\{V(t) \leq H\}} + H1_{\{V(t) > H\}})1_{V(t) > 0} \\ &= V(t)1_{\{1 < V(t) \leq H\}} + H1_{\{V(t) > H\}} \end{aligned} \quad (25)$$

4章の同様の議論によって結果として割り引かれた期待エクスポージャーは次のようになる。

$$\hat{e}_{i,H}^*(t) = E [D(t)V_i(t)1_{\{0 < V(t) \leq H\}}|\tau = t] \quad (26)$$

$$\hat{e}_H^*(t) = H \cdot E [D(t)1_{\{V(t) > H\}}|\tau = t] \quad (27)$$

$$\hat{e}^*(t) = \sum_{i=1}^N \hat{e}_{i,H}^*(t) + \hat{e}_H^*(t) \quad (28)$$

担保を考えた期待エクスポージャー (28) 式を個別の証券の期待エクスポージャーに振り分ける事を考える。

$$\hat{e}^*(t) = \sum_{i=1}^N \hat{e}_i^*(t)$$

### 2.4.3 正規分布によるエクスポージャーの計算

証券  $i$  の価格を次のように定義する。

$$V_i(t) = \mu_i(t) + \sigma_i(t)X_i$$

$X_i \sim N(0, 1)$  であり、相関は  $Corr(X_i, X_j) = r_{ij}$  とする。ただし、 $r_{ii} = 1$  とする。このとき、ネットした証券価格  $V(t) = \sum V_i(t)$  は

$$V(t) = \mu(t) + \sigma(t)X \quad (29)$$

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \quad , \quad \sigma^2(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_{ij} \sigma_i(t) \sigma_j(t)$$

$\rho_i(t)$  を  $V_i(t)$  と  $V(t)$  の相関係数とする。

$$\rho_i(t) = \frac{Cov(V_i(t), V(t))}{\sigma_i(t)\sigma(t)} = \frac{\sum_{j=1}^N Cov(V_i(t), V_j(t))}{\sigma_i(t)\sigma(t)} = \sum_{j=1}^N r_{ij} \frac{\sigma_j(t)}{\sigma(t)}$$

この相関係数と、 $X$  と独立な標準正規確率変数  $Z_i$  を用いて、 $X_i$  を再表現すると

$$X_i = \rho_i(t)X + \sqrt{1 - \rho_i^2(t)}Z_i$$

ネットした証券価格は

$$V(t) = \mu(t) + \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)\rho_i(t)X + \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)\sqrt{1 - \rho_i^2(t)}Z_i$$

エクスポージャーとデフォルト時刻は独立であると仮定する。このとき、デフォルト条件付き期待エクスポージャーは無条件期待エクスポージャーとなる。(25) 式に (29) 式を代入して

$$\begin{aligned} e(t) &= E \left[ [\mu(t) + \sigma(t)X] 1_{\{0 < \mu(t) + \sigma(t)X < H\}} \right] + H \cdot E \left[ 1_{\{\mu(t) + \sigma(t)X > H\}} \right] \\ &= \int_{-\frac{\mu(t)}{\sigma(t)}}^{\frac{H - \mu(t)}{\sigma(t)}} [\mu(t) + \sigma(t)x] \phi(x) dx + H \int_{\frac{H - \mu(t)}{\sigma(t)}}^{\infty} \phi(x) dx \\ &= \mu(t) \left[ \Phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right) - \Phi \left( \frac{\mu(t) - H}{\sigma(t)} \right) \right] + \sigma(t) \left[ \phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right) - \phi \left( \frac{\mu(t) - H}{\sigma(t)} \right) \right] \\ &\quad + H \Phi \left( \frac{\mu(t) - H}{\sigma(t)} \right) \end{aligned}$$

$\phi(\cdot)$  は標準正規密度関数、 $\Phi(a) = Pr\{X \leq a\}$  は標準正規分布関数

無担保期待エクスポージャーは  $H \rightarrow \infty$  とすることで計算される。

$$e(t) = \mu(t)\Phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right) + \sigma(t)\phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right)$$

個別の期待エクスポージャーは

$$e_i(t) = \mu_i(t)\Phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right) + \sigma_i(t)\rho_i(t)\phi \left( \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} \right)$$

## 2.5 CCPによるカウンターパーティ・リスクの減少

CCPを導入することにより相対取引におけるカウンターパーティ・リスクの変化を研究した論文として Does a Central Clearing Counterparty Reduce Counterparty Risk? : Duffie and Zhu (2011) を紹介する。主に、通常のネットティングによるカウンターパーティ・リスクとの比較を行っている。それにより、どのメンバー数と資産数になれば CCP を導入する方がリスクが減少するかを具体的な数字を用いて研究している。

### 2.5.1 CCP 導入前によるネットティングの効果

$N$  人のカウンターパーティを仮定し、以下“ディーラー”と呼ぶことにする。CCP の導入によってディーラー間のポジションが更新されることを“クリアリング (清算)”と呼ぶことにする。また、デリバティブのクラスは  $K$  個あると仮定する。このデリバティブクラスは、例えばクレジット、金利、外貨、コモディティ (先物)、株式などである。

ディーラー  $i$  がディーラー  $j$  に対する、あるデリバティブクラス  $k$  における総エクスポージャーを  $X_{ij}^k$  とする。ネットティングと担保差し入れを行う前とする。

$$X_{ij}^k = -X_{ji}^k \quad (30)$$

この論文における次のような仮定を入れる。全てのエクスポージャー  $X_{ij}^k$  は、全ての資産クラスとディーラーに関して同じ分散  $\sigma$  を持つと仮定する。また、(30) のような明らかな関係 ( $i$  から  $j$  と  $j$  から  $i$ ) を除き、資産クラス間やディーラー間 ( $i$  から  $j$  と  $i$  から  $n$  のペアに関して) では独立と仮定する。簡単化のために、全てのディーラーのペア間でエクスポージャーの分布は対称であるとする。よって平均  $E[X_{ij}^k] = 0$  も仮定する。この論文では対称性をゆるめないが、非対称の場合はモンテカルロなどにより得られる。

市場の構成からネットティングの効果の自然な測度 (ものさし) は、担保差し入れ前、ネットティング後の総期待エクスポージャーのディーラー間の平均である。この平均が低ければ、ネットティングでより効果を上げられる。ディーラー  $i$  における、CCP 導入前のネットティングの効果は

$$\phi_{N,K} = (N-1)E \left[ \max \left( \sum_{k=1}^K X_{ij}^k, 0 \right) \right]$$

正規分布を仮定すると、

$$\phi_{N,K} = (N-1)\sigma\sqrt{\frac{K}{2\pi}}$$



証明

ネットティング後の分布独立な正規分布の和なので

$$Y = \sum_{k=1}^K X_{ij}^k \sim N(0, K\sigma^2)$$

あとは期待値をとればいい。

$$\begin{aligned} E \left[ \max \left( \sum_{k=1}^K X_{ij}^k, 0 \right) \right] &= E [Y \cdot 1_{\{Y>0\}}] \\ &= \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi K\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2K\sigma^2} \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K\sigma^2}} \int_0^{\infty} -K\sigma \cdot \frac{-y}{K\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2K\sigma^2} \right\} dy \end{aligned}$$

### 2.5.2 CCP 導入による効果

1つのデリバティブクラス  $K$  に1つの CCP を導入することを考える。クラス  $K$  の全てのポジションは、この CCP によって更新される。ディーラー  $i$  の期待エクスポージャーは

$$\gamma_N = E \left[ \max \left( \sum_{j \neq i} X_{ij}^K, 0 \right) \right] = \sqrt{\frac{N-1}{2\pi}} \sigma$$

ディーラー  $i$  以外の  $N-1$  人との期待エクスポージャーで、他の  $K-1$  個のデリバティブのクラスは CCP を導入せず  $\phi_{N,K-1}$  のままである。平均ディーラー期待エクスポージャーは

$$\phi_{N,K-1} + \gamma_N$$

1つのデリバティブのクラスに1つの CCP を導入することがネットティングの効果を改善するという事は以下と同値である。

$$\gamma_N + \phi_{N,K-1} < \phi_{N,K} \Leftrightarrow K < \frac{N^2}{4(N-1)} \quad (31)$$

1つの CCP の導入によって、資本が CCP に極端に集中するため、CCP の潜在的な失敗によってディーラー間の連鎖的なリスクを持っている。このリスクは今までのディーラー間の連鎖的なリスクよりも致命的なリスクとなりうる。この CCP の失敗による連鎖的なリスクは集中化によるリスクであり、今回のモデルには考えていない。

一般に、平均期待エクスポージャーの減少における CCP の成功は、注意して緩和すべきである集中リスクの上昇によって行われることになる。

他のデリバティブのクラスよりもエクスポージャーが大きい、ある 1 つの中央清算されたデリバティブのクラスを認めたネットティングの効果を考えることで一般化される。クラス  $K$  のデリバティブはクリアリングしたものとす。そのエクスポージャーとそれ以外のデリバティブのクラスのエクスポージャーの比を

$$R = \frac{E [\max (X_{ij}^K, 0)]}{E [\max (\sum_{k < K} X_{ij}^k, 0)]}$$

例えば、全てのクラスが等質の期待エクスポージャーならば、 $R = 1/\sqrt{K-1}$  であり、クラス  $K$  が他の 2 倍なら  $R = 2/\sqrt{K-1}$  である。等質な期待エクスポージャーの資産クラスの場合において次の結果が得られる。

### Proposition 1

1 つのデリバティブのクラスに 1 つの CCP を導入することで平均期待エクスポージャーを減少させるということは

$$R > \frac{2\sqrt{N-1}}{N-2}$$

導出方法は (31) 式を変形して

$$\sqrt{\frac{1}{K-1}} > \frac{2\sqrt{N-1}}{N-2}$$

例えば、 $N = 11$  人のディーラーとする。これは CDS の CCP を構成する ICE の清算会員の数である。ICE の構成メンバーは Bank of America, Barclays Capital, Citigroup, ... などである。このとき CCP によりクラス  $K$  のネットティングの効果を改善するには  $R$  は少なくとも 70 % である。 $N = 26$  で  $R = 41.7\%$  であるが、実現するのは難しいであろう。

### 2.5.3 相関とエクスポージャーとの関係

資産クラス  $k$  と  $m$  に相関を加える。全ての  $k$  と  $m$  に関して、エクスポージャー  $X_{ij}^k$  と  $X_{ij}^m$  に相関  $\rho$  を加える。 $\sum_{k=1}^K X_{ij}^k$  の分散は

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E \left[ \left( \sum_{k=1}^K X_{ij}^k \right)^2 \right] - E \left[ \sum_{k=1}^K X_{ij}^k \right]^2 \\ &= E \left[ \sum_{k=1}^K (X_{ij}^k)^2 \right] + E \left[ 2 \sum_{k < l} X_{ij}^k X_{ij}^l \right] \\ &= K\sigma^2 + K(K-1)\rho\sigma^2\end{aligned}$$

よって、CCP 導入前の平均期待エクスポージャーは

$$\phi_{N,K} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma (N-1) \sqrt{K(1+(K-1)\rho)}$$

クラス  $K$  のみに CCP を導入すると

$$\gamma_N + \phi_{N,K-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \left( \sqrt{N-1} + (N-1) \sqrt{(K-1)(1+(K-2)\rho)} \right)$$

CCP 導入による平均期待エクスポージャーの減少分を以下で定義する。

$$\theta(N, K) = \phi_{N,K} - (\gamma_N + \phi_{N,K-1})$$

### Proposition 2

CCP の導入によって平均期待エクスポージャーが減少するということは

$$\theta(N, K) > 0 \Leftrightarrow \beta_K > \frac{1}{\sqrt{N-1}} \quad (32)$$

$$\beta_K = \frac{1 + 2\rho(K-1)}{\sqrt{K(1+(K-1)\rho)} + \sqrt{(K-1)(1+(K-2)\rho)}}$$

相関が増加すると CCP によるネットティングの有益性を増加させる。これは資産クラス間で正に相関しているならディーラー間でのネットティングは有益ではないからである。

#### 2.5.4 複数の CCP によるエクスポージャー

1つの資産クラス  $K$  に対して、(アメリカとヨーロッパのように)2つの CCP グループが存在することについて考える。グループ A には  $M$  人のディーラーが、グループ B には  $N - M$  人のディーラーがいるとする。ディーラーについて同グループに  $i, n$  がいて、他グループに  $j$  がいるとすると、この時期待エクスポージャーの比を定義する。

$$q = \frac{E[\max(X_{ij}^k, 0)]}{E[\max(X_{in}^k, 0)]}$$

クラス  $K$  以外の資産クラスは、双方向ネットティングをし続けるとする。クラス  $K$  については同グループ内でクリアリングを行い、他グループとは双方向ネットティングのままであるとする。

2つの CCP によるグループ A 内での総期待エクスポージャーは

$$\phi_{M,K-1} + q\phi_{N-M+1,K} + \gamma_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \left( (M-1)\sqrt{K-1} + q(N-M)\sqrt{K} + \sqrt{M-1} \right)$$

$M = N/2$  とすると、平均総期待エクスポージャーは次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\phi_{M,K-1} + q\phi_{N-M+1,K} + \gamma_M + \phi_{N-M,K-1} + q\phi_{M+1,K} + \gamma_{N-M}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \left( \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \sqrt{K-1} + \frac{qN}{2}\sqrt{K} + \sqrt{\frac{N}{2} - 1} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

同様に、1つの CCP による総期待エクスポージャーについて考える。グループ A 内の CCP による期待エクスポージャーは

$$\begin{aligned} \gamma_M^A &= E \left[ \max \left( \sum_{j=1}^M X_{ij}^K + q \sum_{j=M+1}^N X_{ij}^K \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \sqrt{\frac{N(1+q^2)}{2} - 1} \end{aligned}$$

により計算されるので、総期待エクスポージャーは

$$\begin{aligned} & \phi_{M,K-1} + q\phi_{N-M+1,K-1} + \gamma_M^A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \left( (M-1)\sqrt{K-1} + q(N-M)\sqrt{K-1} + \sqrt{\frac{N(1+q^2)}{2} - 1} \right) \end{aligned}$$

よって1つの CCP による平均総期待エクスポージャーは

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \left( \left( \frac{N(1+q)}{2} - 1 \right) \sqrt{K-1} + \sqrt{\frac{N(1+q^2)}{2} - 1} \right) \quad (34)$$

CCP が無いときの期待エクスポージャーは

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \left( \frac{N(1+q)}{2} - 1 \right) \sqrt{K} \quad (35)$$

これより、2つの CCP が1つの CCP よりも効果的であるとは

$$\Theta(N, K, N/2) = CCP_1 - CCP_2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{K} + \sqrt{K-1} > \frac{1}{q} \left( \sqrt{\frac{N}{2} - 1} + \sqrt{\frac{N(1+q^2)}{2} - 1} \right) \quad (36)$$

また、1つの CCP が CCP が無いときよりも効果的であるとは

$$\delta(N, K, q) = CCP_0 - CCP_1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{K} + \sqrt{K-1} > \frac{\frac{N(1+q)}{2} - 1}{\sqrt{\frac{N(1+q^2)}{2} - 1}} \quad (37)$$

このことから、全てのディーラーにとって1つの CCP の導入が効果的であるときはいつでも、CCP を分割するよりも1つの CCP であるほうが効果的であることがいえる。

### 3 企業倒産リスク評価 1

この章では、1つの企業における倒産リスクと評価について考える。複数企業に関する倒産リスクについては次章に回すとする。

企業の倒産強度過程を CIR 型の確率過程であると仮定する。また、企業の倒産強度過程が個別項と共通項に分解できると仮定する。この個別項はその企業特有の変動を表現し、共通項は社会全体の変動を表現しようと考えたものである。さらに、共通項における平均回帰水準がある推移強度によって変化する Markov switching を取り入れた CIR 型強度過程を提案する。これによって経済全体の景気変動を平均回帰水準の変化によって表現しようと考えたものである。

この Markov switching を取り入れた CIR 型強度過程の生存確率を紹介する。この生存確率から CDS 価格を計算する。

#### 3.1 Markov switching を導入した確率過程の先行研究

Hansen and Poulsen (2000) は連続型確率過程として、Vasicek 型金利モデルを仮定し、さらに平均回帰水準に 2 レジームのスイッチングを導入したモデルを提案した。

$$dr(t) = \kappa(\theta(t-) - r(t-))dt + \sigma dW(t)$$

where  $\kappa, \sigma > 0$

$$d\theta(t) = (\theta^H - \theta^L) (\mathbf{1}_{\{\theta(t-)=\theta^L\}} - \mathbf{1}_{\{\theta(t-)=\theta^H\}}) dN(t)$$

ブラウン運動  $W$  とポアソン過程  $N$  は独立で、ポアソン過程の強度  $\lambda$  とする。このモデルは平均回帰水準の  $\theta^H$  と  $\theta^L$  の推移確率強度が同じ  $\lambda$  で記述される。

このモデルに 1つのマルチンゲール測度の存在を仮定することにより、ゼロクーポン債価格を導出している。

Landen (2000) はより一般的な連続型確率過程から考えている。リスク中立測度  $Q$  の下で金利の確率微分方程式は以下に従うと仮定する。

$$dr_t = a(t, r_t, X_t)dt + b(t, r_t, X_t)dW_t$$

$W$  は  $d$  次元標準ウィナー過程、 $X$  は  $m$  次元マルコフ過程である。収益率  $a$  と拡散項  $b$  は確率的な関数であり一般化させている。このモデルは Hansen and Poulsen (2000) を

拡張したモデルとなっているが、債券価格の解析解の計算が難しくなるという点が指摘されている。

Elliott and Nishide (2014) では金利モデルとしてよく利用される Vasicek モデルと CIR モデルに対して、平均回帰水準にのみスイッチングを導入した。上記の 2 つの論文との違いは、Hansen and Poulsen (2000) の平均回帰水準に複数のレジームを仮定し、かつ推移確率強度を一般化した点で拡張を行っている。また、Landen (2000) のブラウン運動を 1 つとし、レジームを平均回帰水準のみを仮定した点で特殊形であるが、債券価格を求めていることができるところが異なっている。

Vasicek 型のモデルでは

$$dr = \kappa(\theta_t - r)dt + \sigma dw$$

$w$  はリスク中立確率の下、1 つのブラウン運動である。

平均回帰水準  $\theta$  は  $n$  次元マルコフ連鎖  $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_t, t \geq 0\}$  によって決められる。 $\mathbf{z}$  は状態が  $i$  の時に要素  $i$  に 1 をとるベクトル  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$  により構成される。平均回帰水準が取る値を  $\Theta = (\theta^1, \dots, \theta^n)'$  として、時刻  $t$  での平均回帰水準は  $\theta_t = \langle \Theta, \mathbf{z}_t \rangle$  によって書く。また、 $\mathbf{z}$  の推移確率強度は

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

where  $\gamma_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$  and  $\sum_j \gamma_{ij} = 0$

$\gamma_{ij}$ ,  $i \neq j$  はレジーム  $i$  から  $j$  へ推移する強度である。ブラウン運動  $w$  と  $\mathbf{z}$  は独立と仮定する。

$\mathbf{z}$  は次の確率微分方程式に従う。

$$d\mathbf{z} = \Gamma' \mathbf{z} dt + d\mathbf{m}$$

$\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_t, t \geq 0\}$  は  $n$  次元マルチンゲール過程とする。

また、CIR 型のモデルでは

$$dr = \kappa(\theta_t - r)dt + \sqrt{\sigma} dw$$

として、同様に平均回帰水準にスイッチングを導入したモデルを提案している。

さらに、Elliott and Nishide (2014) はそれぞれのモデルに対して債券価格公式を導出している。Vasicek 型の債券価格は、

$$p(t, \tau, r, \mathbf{z}) = \langle \Phi(t, \tau; e^{-\kappa(\tau-t)} \mathbf{z}, \mathbf{1}) \rangle \\ \times \exp \left\{ -\frac{1 - e^{-\kappa(\tau-t)}}{\kappa} r + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\kappa} \right)^2 \left( (\tau - t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(\tau-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(\tau-t)}}{2\kappa} \right) \right\}$$

$\Phi(t, \tau; \eta)$  は  $n \times n$  行列で、 $\Theta$  を  $i$  番目の要素が  $\theta^i$  とした対角行列として、次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{d\Phi(u, t; \eta)}{dt} = (\Gamma' - (1 - \eta e^{\kappa t})\Theta)\Phi(u, t; \eta)$$

$\Phi(u, u, \eta) = I$  (identity matrix) とする。

CIR 型の債券価格公式は今回用いるため後述とする。

### 3.2 Markov switching を取り入れた CIR 型強度過程

企業  $i = 1, \dots, n$  のデフォルト強度過程  $\lambda_i$  は共通項 (common)  $X_C$  と個別項 (idiosyncratic)  $X_i$  を持っていて、次の CIR 型の確率過程に従っているものとする。

$$dX_C(t) = \kappa(\theta_C(t) - X_C(t))dt + \sigma\sqrt{X_C(t)}dW_C(t) \quad (38)$$

$$dX_i(t) = \kappa(\theta_i - X_i(t))dt + \sigma\sqrt{X_i(t)}dW_i(t) \quad (39)$$

$\kappa, \sigma, \theta_i$  は定数である。 $W_C$  と  $W_i, i = 1, \dots, n$  はリスク中立確率の下ブラウン運動で互いに独立であると仮定する。

ここで、 $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_t, t \geq 0\}$  を  $d$  次元ベクトルのマルコフ連鎖とする。 $\mathbf{z}$  は集合  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ ,  $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^d$  ( $\mathbf{e}_j$  は  $j$  番目の要素が 1 でそれ以外は 0 であるベクトル) から生成されるとする。平均回帰水準  $\theta_C(t)$  が  $\{\theta_{C1}, \dots, \theta_{Cd}\}$  の  $d$  個の要素からなるとすれば、 $\theta_C(t) = \langle \theta_C, \mathbf{z}_t \rangle$ ,  $\theta_C = (\theta_{C1}, \dots, \theta_{Cd})'$  と表現される。マルコフ連鎖  $\mathbf{z}$  の推移確率行列は

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d1} & \cdots & \gamma_{dd} \end{pmatrix} \quad (40)$$

$\gamma_{ij} \geq 0, i \neq j, \sum_j \gamma_{ij} = 0$  と仮定する。また、ブラウン運動と確率過程  $\mathbf{z}$  は独立であると仮定する。

次に、各資産のデフォルト強度  $\lambda_i(t)$  は

$$\lambda_i(t) = X_C(t) + X_i(t) \quad (41)$$



と、共通項と個別項の和で表現される。このとき、 $\lambda_i$  は

$$\begin{aligned} d\lambda_i(t) &= \kappa(\theta_i(t) - \lambda_i(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda_i(t)}dW(t) \\ \theta_i(t) &= \theta_C(t) + \theta_i \end{aligned} \quad (42)$$

これは、

$$\begin{aligned} d\lambda_i(t) &= dX_C(t) + dX_i(t) \\ &= \kappa((\theta_C(t) + \theta_i) - (X_C(t) + X_i(t)))dt + \sigma(\sqrt{X_C(t)}dW_C(t) + \sqrt{X_i(t)}dW_i(t)) \end{aligned}$$

となり、拡散項は

$$\begin{aligned} \sqrt{X_C(t)}dW_C(t) &\sim N(0, tX_C(t)) \\ \sqrt{X_i(t)}dW_i(t) &\sim N(0, tX_i(t)) \end{aligned}$$

かつ  $W_C, W_i$  が独立なので

$$\sqrt{X_C(t)}dW_C(t) + \sqrt{X_i(t)}dW_i(t) \sim N(0, t(X_C(t) + X_i(t)))$$

より (42) 式が言える。

確率過程  $\mathbf{z}$  は次の確率微分方程式に従っている。

$$d\mathbf{z} = \Gamma' \mathbf{z} dt + d\mathbf{m} \quad (43)$$

$\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_t, t \geq 0\}$  は  $d$  次元ベクトルのマルチンゲール過程とする。

### 3.3 生存確率

現在時点  $t$ 、将来時点  $T$  までの共通項  $X_C$  に対する次の期待値は以下に従う。

$$E_t \left[ e^{-\int_t^T X_C(s) ds} \right] = \langle \Phi(t, T; e^{\rho(T-t)}) \mathbf{z}, \mathbf{1} \rangle \times \exp \left\{ -\frac{2(e^{\rho(T-t)} - 1)}{(\kappa + \rho)(e^{\rho(T-t)} - 1) + 2\rho} X_C(t) \right\} \quad (44)$$

$\rho = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$  とし、 $\Phi(t, T; \eta)$  は  $d \times d$  正方行列で次の微分方程式に従う。

$$\frac{d\Phi(u, t; \eta)}{dt} = \left( \Gamma' - \frac{2\kappa(\eta e^{-\rho t} - 1)}{(\kappa + \rho)(\eta e^{-\rho t} - 1) + 2\rho} \Theta \right) \Phi(u, t; \eta) \quad (45)$$

$\Phi(u, u; \eta) = I$  (Identity) である。証明は Elliott and Nishide (2014)。

これを用いて、企業  $i$  の倒産強度  $\lambda_i$  の生存確率は、 $X_i$  と  $X_C$  が独立により

$$E_t \left[ e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} \right] = E_t \left[ e^{-\int_t^T X_i(s) ds} \right] \times E_t \left[ e^{-\int_t^T X_C(s) ds} \right] \quad (46)$$

よって、(44) 式を  $p_C(t, T, X_C(t))$  と置くと

$$E_t \left[ e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} \right] = \left[ \frac{2\rho e^{\frac{1}{2}(\kappa+\rho)(T-t)}}{(\kappa+\rho)(e^{\rho(T-t)}-1)+2\rho} \right]^{\frac{2\kappa}{\sigma^2}\theta_i} \\ \times \exp \left\{ -\frac{2(e^{\rho(T-t)}-1)}{(\kappa+\rho)(e^{\rho(T-t)}-1)+2\rho} X_i(t) \right\} \times p_C(t, T, X_C(t)) \quad (47)$$

と書くことができる。

### 3.4 CDS

CDS はプロテクションの買い手がプロテクションの売り手に定期的な支払いを行い、売り手は default が起きたら  $(1 - \bar{f})$  を支払う契約である。Brigo and Morini(2005) の手順に従い、 $S_i(t)$  を  $T_j, j = 1, \dots, m$  に時間を分割し  $T_m = T$  までに売り手に定期支払いを行ったときの単位時間あたり (年率) の額とする。買い手の割引ペイオフ  $\pi(t, S_i(t)), t < T$  は、 $D(t, T_j)$  を割引ファクターとして

$$\pi(t, S_i(t)) = (1 - \bar{f}) \sum_{j=1}^m D(t, T_j) 1_{\{T_{j-1} < \tau_i \leq T_j\}} - \sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) 1_{\{\tau_i > T_j\}} S_i(t) \quad (48)$$

第一項はデフォルトにより売り手から支払われる金額を表し、第二項はデフォルトまで買い手が売り手に定期支払いの総額をあらわしている。その差し引きが買い手のペイオフとなる。金利を定数とし、割引ファクター  $D(t, T_j) = e^{-r(T_j-t)}$  とする。企業  $i$  の生存確率を (47) 式から  $p_i(t, T, \lambda_i(t)) = E_t[e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds}]$  と置く。リスク中立測度の下で、満期  $T$ 、CDS プレミアム  $S_i(t)$  の  $t$  時点価格は

$$CDS(t, S_i(t), T) = E_t [\pi(t, S_i(t))] \\ = (1 - \bar{f}) \sum_{j=1}^m D(t, T_j) \{p_i(t, T_{j-1}, \lambda_i(t)) - p_i(t, T_j, \lambda_i(t))\} \\ - \sum_{j=1}^m S_i(t) D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) p_i(t, T_j, \lambda_i(t)) \quad (49)$$

これより、fair rate  $S_i(t)$  とは、CDS がゼロとなる価値となる  $S(t)$  のことで、

$$S_i(t) = (1 - \bar{f}) \frac{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) \{p_i(t, T_{j-1}, \lambda_i(t)) - p_i(t, T_j, \lambda_i(t))\}}{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) p_i(t, T_j, \lambda_i(t))} \quad (50)$$

この CDS 価格は  $(T_{j-1}, T_j]$  の間に企業のデフォルトが発生した場合には、プレミアムは  $T_{j-1}$  までの間買い手から売り手へ定期支払が行われ、 $T_j$  でデフォルトの判定を行いその期で売り手から買い手に決済が行われる。

Kijima (2000) のモデルでは、 $(T_{j-1}, T_j]$  の間に企業のデフォルトが発生した場合には、プレミアムは  $T_{j-1}$  までの間買い手から売り手へ定期支払が行われ、売り手から買い手への決済は倒産と同時に行われる。

### 3.5 数値実験

ここでは Markov switching を取り入れた CIR 型倒産強度過程の数値実験として、Duffie and Garleanu (2001) におけるモデルであるベーシックアフィン過程との比較分析を中心に行う。

実際のデータを用いてスイッチングモデルに対して数値実験を行った先行研究として以下の論文を挙げる。

1 つ目は実際のデータを用いて、様々な確率過程モデルにスイッチングを導入し推定を行った論文として Zhou and Mamon (2012) がある。この論文では、Vasicek, CIR, Black-Karasinski の 3 つの金利モデルに 2 つのレジームを導入した。CIR のみでいえば平均回帰水準、平均回帰速度、拡散項にそれぞれレジームを導入した。それから疑似最尤法を用いて各パラメータの計算方法を提示している。

推定においてはカナダのゼロクーポン債 1986 年から 1995 年の利回りを用いて行っており、結論として、レジームが無いよりも 2 レジームの方が、よりフレキシブルで、よりフィットし (AIC を計算し、当てはまりの良いモデルである)、予測のパフォーマンスが良い (2 乗平均誤差が小さい) 結果が出ている。

もう 1 つの論文で、Alexander and Kaeck (2008) では、iTraxx index CDS 日次データに対して回帰分析を行った。具体的には、iTraxx index CDS の差分を被説明変数として、説明変数を 1 期前の CDS の差分 (自己回帰項)、VStoxx(Dj Eurostoxx 50 のオプションをもとにしたインプライドボラティリティ index) の差分  $\Delta V_t$ 、株価収益率  $R$ 、5 年スワップレート  $PC_{1,t}$ 、10 年スワップレートと 2 年スワップレートの差  $PC_{2,t}$  をとっている。

また、それぞれの説明変数に状態変数  $S_t = 1 \text{ or } 2$  を導入し、推移確率は

$$Prob\{S_t = j | S_{t-1} = i\} = p_{ij} \quad (51)$$

とする。回帰モデルとして

$$\Delta CDS_t = \beta_{S,0} + \beta_{S,1}\Delta CDS_{t-1} + \beta_{S,2}\Delta V_t + \beta_{S,3}R_t + \beta_{S,4}PC_{1,t} + \beta_{S,5}PC_{2,t} + \epsilon_{S,t}$$

2004年から2007年までの満期5年ヨーロッパのiTraxx index CDS日次データを用いた結果として、CDSの変動が大きくなる状態において、インプライドボラティリティの影響がCDSの変動に強く影響を受けていることがわかる。同様に、株価収益率も反対方向に強く影響を受けているという結果が得られた。また、レジーム無しの回帰モデルと有りの回帰モデルにおけるAICを比較し、レジームを導入した方が当てはまりが良くなる結果を得ている。

これらの分析から、実際のCDSの変動はレジームを導入し回帰分析を行った方が、モデルの当てはまりが良くなり、CDSの変動をよく捉えることができると結論づけている。

### 3.5.1 経路比較

Markov switchingを取り入れたデフォルト強度過程とDuffie and Garleanuのベシクアフィン過程の2つについてパスを生成する。パラメータについてベシクアフィン過程は $(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l, \rho) = (0.6, 0.02, 0.141, 0.1, 0.2, 0.5)$ とする。このとき長期平均は0.0533(約20年でデフォルトする)となる。この長期平均と一致するようにMarkov switchingを取り入れたデフォルト強度過程のパラメータを決定し、 $(\kappa, \theta_{C1}, \theta_{C2}, \theta_i, \sigma, \gamma_{12}, \gamma_{21}) = (0.6, 0.005, 0.07, 0.0158, 0.141, 0.2, 0.2)$ のように定めた。Figure 3.1とFigure 3.2はこれらのパラメータを入れたときのシミュレーション結果である。

Figure 3.1 : Basic affine

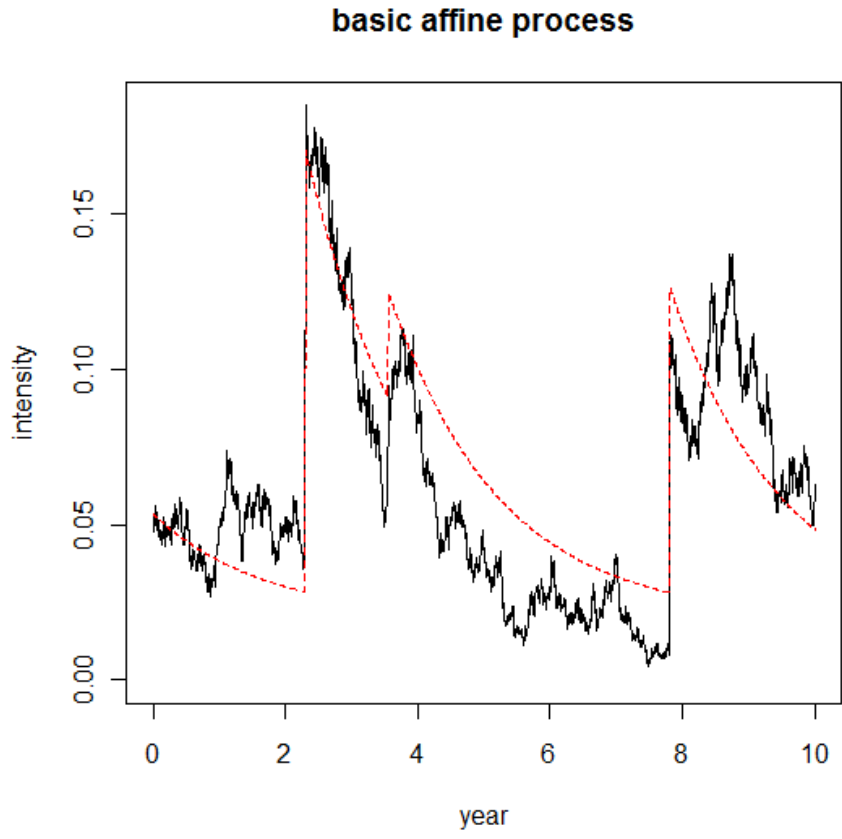
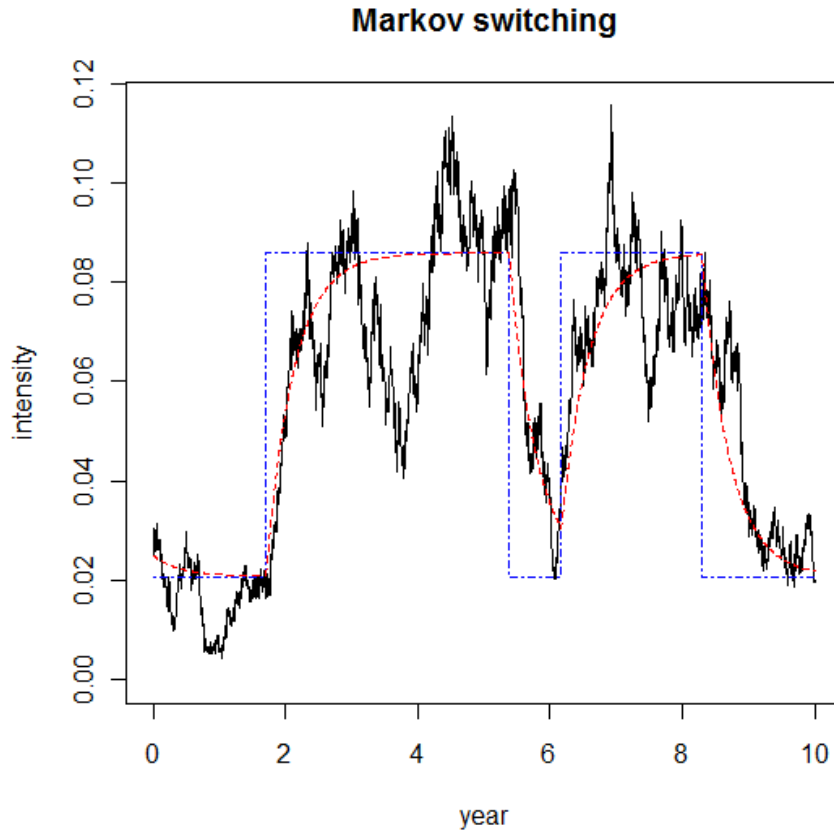


Figure 3.2 Markov switching



赤点線はノイズを取り除いた ( $\sigma = 0$ ) もので、この点線がパスの移動する方向となっている。Figure 3.2 の青点線は regime 変化による回帰平均  $\theta$  の値である。Figure 3.1 の方を見るとジャンプが起きたあと急激に平均回帰していくことがわかる。デフォルト強度の数値が高いところを維持しにくいところがベーシックアフィン過程の1つの欠点であると言える。これを改善しようとしたモデルが Figure 3.2 の Markov switching を用いてデフォルト強度の高水準と低水準の持続を表現してみた。また、regime の変化に対して約 0.5 年ほどでゆっくりとパスが変化していることが見て取れる。これは  $\kappa$  の値に依存して変化するスピードが決定されるためである。

### 3.5.2 CDS 価格

CDS 価格を (50) 式を用いて計算する。パラメータの値は前節のものを使う。CDS の固定支払い期間は四半期ごとに行うとし、満期を 5 年とする。また、回収率  $\bar{f} = 0.5$  とした。

Table 3.1 : CDS 価格

	basic affine	Markov swiching (regime 1)	Markov swiching (regime 2)
5 年生存確率	0.8384410	0.8566619	0.6929351
CDS 価格	0.01775202	0.01533572	0.03190104

Table 3.1 ではベーシックアフィン過程と Markof swiching を取り入れた強度過程における CDS 価格である。共に強度  $\lambda$  の長期平均は 0.0533 で同じである。括弧内の regime は初期の状態を表し、regime 1 は好景気から始めた場合 ( $\theta_C(t) = \theta_{C1}$ ) であり、regime 2 は不景気から始めた場合 ( $\theta_C(t) = \theta_{C2}$ ) である。CDS 価格を比べると、regime 2 の方が 1 よりも約 2 倍大きい。これは、現状が不景気である場合にはその状況がある一定期間持続するというモデル上の特性からくるものであるためである。そのため、長期平均が同じ倒産強度であっても、中期的には今の状態が継続すると予期されるために CDS 価格が大きくなったのであると考えられる。ベーシックアフィン過程では Markof swiching の regime 1 より若干高い程度であった。ジャンプにより倒産強度が上がるが、すぐに平均に回帰を行うためであると考えられる。

### 3.5.3 裾依存性

CDO のプライシングにおいて、複数の債券を使ってプライシングを行うため注意すべき事がある。それは、なにかしらの金融ショック (リーマンショックなど) が発生した場合にある程度数 (もしくは全て) の企業のデフォルト確率が大きくなるということである。正規コピュラによりプライシングを行った場合、多変量正規分布の分散共分散行列の相関は一定とするため、景気が安定期の時にはよいプライシングを行うことが出来るが、金融にショックが起こった場合にリスクを低く評価してしまうことが問題となっている。このように何かしらの金融ショックに対してデフォルト相関が大きくなるような指標として分布の裾に着目した裾依存性というものがある。

2 変量の確率変数  $X_1, X_2$  を考える。確率変数  $X_1$  の分布を  $F_1$  とし、 $X_2$  を  $F_2$  とする。このとき水準  $u \in [0, 1]$  の下裾依存性を次のように定義する。

$$\lambda_L(u) = P\{F_2(X_2) < u | F_1(X_1) < u\}$$

Table 3.2 は水準  $u = 0.05, 0.01$  としたときの下裾依存性の数値を表したものである。

Table 3.2 : 下裾依存性

	u=0.05	u=0.01
正規コピュラ	0.1573252	0.04549768
t(3) コピュラ	0.2383394	0.1834302
t(6) コピュラ	0.2003578	0.1158905
t(20) コピュラ	0.1709657	0.06609073
Clayton コピュラ	0.1624270	0.1017753
basic affine	0.3250274	0.2144653
Markov switching	0.4221552	0.2728797

Table 3.2 の結果において、正規コピュラと t コピュラの相関を 0.15 とした。コピュラ間で比較を行うために順位相関を一致させる必要がある。このためにケンドールのタウを用いて順位相関を一致するように Clayton コピュラの同時分布を決定するパラメータを決定した。具体的なコピュラの具体的な計算方法と、パラメータとケンドールのタウの関係は新谷・山田・吉田 (2010) にある。しかし、動的モデルのベーシックアフィン過程と Markov switching を取り入れた強度過程はパラメータが多いためにパラメータが決定できないので単純比較は出来ない。今回は先の数値実験を行った際のパラメータを用いてパスを発生させ、裾依存を推定した結果を記すことにした。

コピュラにおいて t 分布を用いた下裾依存性は他のコピュラよりも大きな数値が出てくることが分かる。具体的には水準  $u \rightarrow 0$  としたときの t コピュラの裾依存は 0 とはならない。正規コピュラの場合は  $u \rightarrow 0$  で 0 になる。ただし、t 分布は上裾依存性も同様に大きい数値が出てくる ( $u \rightarrow 1$  で 0 にならない)。上裾依存は小さく、下裾依存のときに正規と比べて大きな数値が出てくるのが Clayton コピュラである。CDO プライシングにおいては t コピュラがショックを表現でき、自由度を適当に選べるため扱いやすいモデルであると言われている。

次に Table 3.2 の下 2 つについて考える。ベーシックアフィン過程の下裾依存性は  $u = 0.01$  としても大きな数値が出てきた。これは共通項にジャンプ過程を含んでいるため、共通項でジャンプが発生したときに 2 変量間に大きな相関が生じたためだと思われる。Markov switching の方は regime 変化があるために裾依存が大きく抽出されたと考えられる。今回のパラメータにおいてジャンプの発生率は 0.2 なので 5 年で平均 1 回のジャンプが発生する。regime 変化も遷移確率が 0.2 なので 5 年で平均 1 回発生するためどちらの場合もショックが平均で 1 度発生するものとしている。若干 Markov switching の方が高いのはジャンプの幅が確率的であり小さいジャンプの場合もあるためであること



が1つと、共通項の regime1 と 2 の差を今回は大きめに取っているため下裾依存が大きく出てきたのがもう1つであると思われる。

## 4 企業倒産リスク評価 2

この章では、Markov switching を取り入れた倒産強度過程にしたがう各企業において、複数企業のデフォルト確率について考えていく。まず、複数企業がある一定期間以内において全て生存する確率である同時生存確率を計算する。同時生存確率から複数企業のプールから一定期間内に 1 つでもデフォルトが発生した場合にトリガーが引かれる basket 型 CDS の premium を算出する。その premium と企業間相関との関係をしめすことで、Markof switching を取り入れた強度過程の特性について考えていく。

### 4.1 同時生存確率

$\tau_i$  を企業  $i$  のデフォルト時刻とする。また、企業数に関して  $i = 1, \dots, n$  とする。リスク中立確率の下、次の同時生存確率を考える。

$$S_t(t_1, \dots, t_n) = P \left\{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \middle| \mathcal{F}_t \right\}, t < t_i \leq T, \forall i \quad (52)$$

フィルトレーション  $\mathcal{F}_T = \sigma(X_i(t), X_C(t), t < T; i = 1, \dots, n)$  とする。

$T \geq \max_i t_i$  において、Kijima (2000) に従い、 $\tau_i$  に条件付き独立を仮定する。

$$P \left\{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \middle| \mathcal{F}_T \right\} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^{t_i} \lambda_i(s) ds \right\} \quad (53)$$

時刻  $T$  までの倒産強度に関する情報が与えられた時、同時生存確率は各々の生存確率の積で書けるということである。

(41) を代入して

$$P \left\{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \middle| \mathcal{F}_t \right\} = E \left[ \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^{t_i} X_i(s) ds - \sum_{i=1}^n \int_t^{t_i} X_C(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ブラウン運動が独立なので  $X_C, X_i, i = 1, \dots, n$  は互いに独立である。よってそれぞれの期待値の積の形で書き表すことができる。

$$P \left\{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \prod_{i=1}^n E \left[ e^{-\int_t^{t_i} X_i(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \times E \left[ e^{-\sum_{i=1}^n \int_t^{t_i} X_C(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

特に、 $t_1 = \dots = t_n = T$  のとき、

$$P \left\{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \prod_{i=1}^n E \left[ e^{-\int_t^T X_i(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \times E \left[ e^{-\int_t^T n X_C(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (54)$$

と表すことができる。  $X_C$  の項の期待値を計算するにあたり、  $nX_C$  の確率微分方程式から (44) に適用していく。

$nX_C$  の確率微分方程式は

$$d(nX_C(t)) = \kappa(n\theta_C(t) - (nX_C(t)))dt + \sqrt{n}\sigma\sqrt{nX_C(t)}dW_C(t)$$

よって、(44) から (54) の  $X_C$  項の期待値は次のように表すことができる。

$$E \left[ e^{-\int_t^T nX_C(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \langle \Phi(t, T; e^{\hat{\rho}(T-t)}) \mathbf{z}, \mathbf{1} \rangle \times \exp \left\{ -\frac{2(e^{\hat{\rho}(T-t)} - 1)}{(\kappa + \hat{\rho})(e^{\hat{\rho}(T-t)} - 1) + 2\hat{\rho}} nX_C(t) \right\} \quad (55)$$

$\hat{\rho} = \sqrt{\kappa^2 + 2n\sigma^2}$  であり、  $\Phi(u, t; \eta)$  は次に従う。

$$\frac{d\Phi(u, t; \eta)}{dt} = \left( \Gamma' - \frac{2\kappa(\eta e^{-\hat{\rho}t} - 1)}{(\kappa + \hat{\rho})(\eta e^{-\hat{\rho}t} - 1) + 2\hat{\rho}} n\Theta \right) \Phi(u, t; \eta)$$

$\Phi(u, u; \eta) = I$  である。

(55) を  $\hat{p}_C(t, T, nX_C(t)) = E \left[ e^{-\int_t^T nX_C(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$  とする。(54) の  $X_i$  項は CIR 型金利モデルの債券価格と同じになるので、同時生存確率は次のように書くことができる。

$$S_t(T, \dots, T) = \left[ \frac{2\rho e^{\frac{1}{2}(\kappa+\rho)(T-t)}}{(\kappa + \rho)(e^{\rho(T-t)} - 1) + 2\rho} \right]^{\frac{2\kappa}{\sigma^2} \sum_i \theta_i} \times \exp \left\{ -\frac{2(e^{\rho(T-t)} - 1)}{(\kappa + \rho)(e^{\rho(T-t)} - 1) + 2\rho} \sum_i X_i \right\} \times \hat{p}_C(t, T, nX_C(t)) \quad (56)$$

## 4.2 Basket CDS

Basket CDS は複数銘柄を参照した CDS のことであり、ある企業にクレジットイベントが発生した場合に決済が行われ CDS は終了するという仕組みです。より高い投資リターンを求める投資家の需要に基づいて構成され、近年注目を集めている金融商品の一つです。プロテクションの売り手に関しては通常、構成銘柄のそれぞれのスプレッドの和よりも低く設定されます。例えば first to default Basket CDS のスプレッドに関して、参照企業 A のスプレッドが 0.6 %、参照企業 B のスプレッドが 0.5 % の場合 0.6 % ~ 1.10 % の間に設定されます。この企業の相関が強い場合には 0.6 % に近づき、弱い場合には 1.10 % に近づきます。よって、Basket 型の CDS 評価の場合には複数企業間の相関が重要な役割を果たすことになる。

#### 4.2.1 first to default Basket CDS

Kijima (2000) と Brigo and Morini (2005) の手順に従い、first to default Basket CDS の価格を導出する。企業  $n$  社の倒産強度過程を考え、取引時間を  $t \leq T_1 \leq \dots \leq T_m = T$  と分割する。first to default Basket CDS のキャッシュフローは次の通りである。

- (i) 各  $T_j$  において  $n$  社のうちどこもデフォルトしていない。この時、時刻  $T_j$  で買い手から売り手へ  $U(t)$  を支払う。
- (ii)  $(T_{j-1}, T_j]$  で企業  $i$  が初めてデフォルトする。この時、売り手から買い手へ  $1 - \bar{f}_i$  を支払う。

この設定の下で、買い手のペイオフの現在価値は

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (1 - \bar{f}_i) D(t, T_j) 1_{\{T_{j-1} < \tau_i \leq T_j\}} 1_{\{\tau = \tau_i\}} - \sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) 1_{\{\tau_1 > T_j, \dots, \tau_n > T_j\}} U(t) \quad (57)$$

$\tau = \min_i \tau_i$  である。第一項は企業  $i$  が初めて倒産した際に売り手から買い手に支払われるキャッシュフローで、第二項はすべての企業が生存していたときに買い手から売り手に支払うキャッシュフローである。この式に期待値  $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$  を取ることにより、それぞれのキャッシュフローの期待値の総和はゼロとなる。よって期待値を取って  $= 0$  と置き、 $U(t)$  について解いたのが CDS プレミアムである。金利を定数と仮定し\*2、(57) 式の第 2 項の期待値は

$$U(t) \sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) S_t(T_j, \dots, T_j)$$

同時生存関数  $S_t(t, \dots, t)$  は (56) 式を代入すればいい。次に (57) 式の第 1 項の期待値は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (1 - \bar{f}_i) D(t, T_j) E \left[ 1_{\{T_{j-1} < \tau_i \leq T_j\}} 1_{\{\tau = \tau_i\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (1 - \bar{f}_i) D(t, T_j) \left\{ E \left[ 1_{\{\tau_i \leq T_j\}} 1_{\{\tau = \tau_i\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] - E \left[ 1_{\{\tau_i \leq T_{j-1}\}} 1_{\{\tau = \tau_i\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

$\tau_i$  が条件付き独立から

$$P \left\{ s < \tau_i \leq s + ds, \tau_k > s \text{ for all } k \neq i \middle| \mathcal{F}_T \right\} = \lambda_i(s) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^s \lambda_i(u) du \right\} ds$$

\*2 確定関数でもよい

(58) 式の第 1 項の期待値に代入すると、

$$\begin{aligned} E \left[ 1_{\{\tau_i \leq T_j\}} 1_{\{\tau = \tau_i\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E \left[ \int_t^{T_j} P \left\{ s < \tau_i \leq s + ds, \tau_k > s \text{ for all } k \neq i \middle| \mathcal{F}_T \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[ \int_t^{T_j} \lambda_i(s) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^s \lambda_i(u) du \right\} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

第 2 項も同様である。もし、 $\bar{f}_1 = \dots = \bar{f}_n = \bar{f}$  と同じ回収率であれば積分されるので、より簡潔に表現できる。(58) 式は

$$\begin{aligned} (1 - \bar{f}) \sum_{j=1}^m D(t, T_j) E \left[ \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^{T_{j-1}} \lambda_i(s) ds \right\} - \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_t^{T_j} \lambda_i(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ = (1 - \bar{f}) \sum_{j=1}^m D(t, T_j) \{ S_t(T_{j-1}, \dots, T_{j-1}) - S_t(T_j, \dots, T_j) \} \end{aligned}$$

よって、first to default Basket CDS 価格は

$$U(t) = (1 - \bar{f}) \frac{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) \{ S_t(T_{j-1}, \dots, T_{j-1}) - S_t(T_j, \dots, T_j) \}}{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) S_t(T_j, \dots, T_j)} \quad (59)$$

同時生存確率  $S_t$  のみで表現することができる。この CDS 価格の導出において我々の Markov switching を取り入れた CIR 型強度モデルである必要はなく、同時生存確率が導出されればどのようなモデルであってもプレミアムを計算することができる。

回収率について Kijima (2000) では企業  $i$  について時間に関する確定的な関数を用いて Basket CDS 価格を導出している。我々は回収率を全て一定と仮定したことにより、単純な形で書き表すことができ、後述の数値実験においてもこの式を用いることにする。

本論文において回収率とデフォルト確率 (デフォルト強度) の間に相関は無いものとして計算を行ったが、回収率とデフォルト確率との相関について記述した論文として山下、吉羽 (2010) がある。これは負の相関があると仮定した上で担保付貸出の期待損失評価を行っている。この論文は理論モデルの構築のみではあるが、回収率とデフォルト確率の間に負の相関があることは金融危機以降の近年において指摘されている点である。

#### 4.2.2 second to default Basket CDS

second to default Basket CDS は初めて 2 社のクレジットイベントが発生した場合に決済が行われる商品である。ノーテーションとして企業  $i$  の生存確率を取り除いた、企業

$i$  以外の同時生存確率  $S_{-i}$  を以下で定義しておく。

$$S_{-i}(T) = P\{\tau_1 > T, \dots, \tau_{i-1} > T, \tau_{i+1} > T, \dots, \tau_n > T | \mathcal{F}_t\} = E_t \left[ e^{-\int_t^T \sum_{k \neq i} \lambda_k(s) ds} \right] \quad (60)$$

固定支払いの期間を  $t = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_m = T$  と分割し、各  $T_j$  において以下のキャッシュフローを行うとする。

- (i) 各  $T_j$  において  $n$  社のうち 1 社以下のデフォルト (全て生存か 1 社のみデフォルト) である。この時、時刻  $T_j$  で買い手から売り手へ  $U(t)$  を支払う。
- (ii)  $(T_{j-1}, T_j]$  で企業 2 社  $(i_1, i_2)$  が初めてデフォルトする。この期間で 2 社が同時にデフォルトするか、 $T_{j-1}$  前に 1 社がデフォルトしていて  $(T_{j-1}, T_j]$  に 1 社がデフォルトするかどちらかである。この時、売り手から買い手へ  $1 - \bar{f}$  を支払う。

回収率  $\bar{f}$  については、以降すべての参照銘柄について共通と仮定する。この下でプロテクションの買い手にとっての現在価値は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m (1 - \bar{f}) D(t, T_j) \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}, T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}, T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j\}} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j, T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} \right\} \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} > \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}\}} \right\} \\ & \quad - \sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_1 > T_j, \dots, \tau_n > T_j\}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i\}} \right\} U(t) \end{aligned} \quad (61)$$

$\tau^{(2)}$  は  $\tau_1, \dots, \tau_n$  の中で小さい方から 2 番目までの集合とする。(61) 式の 1, 2 行目は買い手にとって受け取る側の現在価値、3 行目は支払いの現在価値である。和記号

$\sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n = \sum_{i_1 < i_2}$  と同じである。受け取る側の定義関数はまとめることができ、

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}, T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}, T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j\}} + \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j, T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} \\ & = \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}} \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}} \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j\}} + \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_1} \leq T_j\}} \mathbf{1}_{\{T_{j-1} < \tau_{i_2} \leq T_j\}} \\ & = \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}} (\mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}}) + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}} (\mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}}) \\ & \quad + (\mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}}) (\mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}}) \\ & = \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_j\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}} \end{aligned} \quad (62)$$

よって (61) 式は

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m (1 - \bar{f}) D(t, T_j) \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_j\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_j\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_{j-1}\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_{j-1}\}} \right\} \\
& \quad \times \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} > \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}\}} \right\} \\
& \quad - \sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau_1 > T_j, \dots, \tau_n > T_j\}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i\}} \right\} U(t)
\end{aligned} \tag{63}$$

両辺に期待値を取る。その操作において次の計算が必要となる。

$$\begin{aligned}
& E_t \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq T_j\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_2} \leq T_j\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{i_1} \leq \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}\}} \right] \\
& = E_t \left[ \int_t^{T_j} \int_t^u P \left\{ s < \tau_{i_1} \leq s + ds, u < \tau_{i_2} \leq u + du, \tau_k > u \text{ for all } k \neq i_1, i_2 \mid \mathcal{F}_T \right\} \right]
\end{aligned} \tag{64}$$

where  $t \leq s < u \leq T_j$ .

ここで条件付き独立から

$$\begin{aligned}
& P \left\{ s < \tau_{i_1} \leq s + ds, u < \tau_{i_2} \leq u + du, \tau_k > u \text{ for all } k \neq i_1, i_2 \mid \mathcal{F}_T \right\} \\
& = P \left\{ s < \tau_{i_1} \leq s + ds \mid \mathcal{F}_T \right\} P \left\{ u < \tau_{i_2} \leq u + du \mid \mathcal{F}_T \right\} P \left\{ \tau_k > u \text{ for all } k \neq i_1, i_2 \mid \mathcal{F}_T \right\} \\
& = \lambda_{i_1}(s) \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^s \lambda_{i_1}(x) dx - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} ds du, t \leq s < u \leq T
\end{aligned} \tag{65}$$

となる。代入して、

$$\begin{aligned}
& E_t \left[ \int_t^{T_j} \int_t^u \lambda_{i_1}(s) \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^s \lambda_{i_1}(x) dx - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} ds du \right] \\
& = E_t \left[ \int_t^{T_j} \left[ - \exp \left\{ - \int_t^s \lambda_{i_1}(x) dx \right\} \right]_t^u \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& = E_t \left[ \int_t^{T_j} \left( 1 - \exp \left\{ - \int_t^u \lambda_{i_1}(x) dx \right\} \right) \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& = E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] - E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right\} du \right]
\end{aligned} \tag{66}$$

(64) 式から (66) 式が導かれた。(64) 式は  $\tau_{i_1} \leq \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}$  の時である。 $\tau_{i_1} > \tau_{i_2} \in \tau^{(2)}$  の場合を足し合わせる事により求めることが出来る。(66) 式にその場合を足し合わせて、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& - E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& + E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_1}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_2} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& - E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_1}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& = \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n E_t \left[ \int_t^{T_j} \lambda_{i_2}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_1} \lambda_k(x) dx \right\} + \lambda_{i_1}(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i_2} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& - \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n E_t \left[ \int_t^{T_j} (\lambda_{i_1}(u) + \lambda_{i_2}(u)) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \quad (67)
\end{aligned}$$

(67) 式の和を取る。第 1 項は

$$E_t \left[ \sum_{i=1}^n \int_t^{T_j} \sum_{k \neq i} \lambda_k(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k \neq i} \lambda_k(x) dx \right\} du \right] = n - \sum_{i=1}^n E_t \left[ e^{-\int_t^{T_j} \sum_{k \neq i} \lambda_k(x) dx} \right] \quad (68)$$

(67) 式の第 2 項は

$$\begin{aligned}
& -(n-1) E_t \left[ \int_t^{T_j} \sum_{i=1}^n \lambda_i(u) \exp \left\{ - \int_t^u \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right\} du \right] \\
& = (n-1) E_t \left[ - \int_t^{T_j} \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right] - (n-1) \quad (69)
\end{aligned}$$

(68) 式と (69) 式を足し合わせると

$$(n-1) E_t \left[ - \int_t^{T_j} \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) dx \right] - \sum_{i=1}^n E_t \left[ e^{-\int_t^{T_j} \sum_{k \neq i} \lambda_k(x) dx} \right] + 1 = (n-1) S_0(T_j) - \sum_{i=1}^n S_{-i}(T_j) + 1 \quad (70)$$



(62) 式から

$$(n-1)(S_0(T_j) - S_0(T_{j-1})) - \sum_{i=1}^n (S_{-i}(T_j) - S_{-i}(T_{j-1}))$$

もう一つの固定支払い側の期待値をとる。この時、次を計算する。

$$\begin{aligned} & E_t \left[ 1_{\{\tau_1 > T_j, \dots, \tau_n > T_j\}} + \sum_{i=1}^n 1_{\{\tau_i \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i\}} \right] \\ &= S_0(T_j) + \sum_{i=1}^n E_t \left[ 1_{\{\tau_i \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i\}} \right] \\ &= S_0(T_j) + \sum_{i=1}^n E_t \left[ \left( 1 - e^{-\int_t^{T_j} \lambda_i(x) dx} \right) e^{-\int_t^{T_j} \sum_{k \neq i} \lambda_k(x) dx} \right] \\ &= S_0(T_j) + \sum_{i=1}^n S_{-i}(T_j) - nS_0(T_j) \\ &= \sum_{i=1}^n S_{-i}(T_j) - (n-1)S_0(T_j) \end{aligned}$$

まとめると、second to default Basket CDS 価格は

$$U(t) = (1-\bar{f}) \frac{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) \left\{ \sum_{i=1}^n \{S_{-i}(T_{j-1}) - S_{-i}(T_j)\} - (n-1) \{S_0(T_{j-1}) - S_0(T_j)\} \right\}}{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) \left\{ \sum_{i=1}^n S_{-i}(T_j) - (n-1)S_0(T_j) \right\}} \quad (71)$$

分母は、1社以下倒産する確率=全て生存する確率と  $n-1$ 社生存する確率の和によって表される。分子は、 $(T_{j-1}, T_j]$  に初めて2社倒産する確率=時刻  $T_{j-1}$  までに1社以下倒産する確率-時刻  $T_j$  までに1社以下倒産する確率によって計算することができる。

#### 4.2.3 $l$ th to default Basket CDS

前節の second to default Basket CDS 価格は  $n$ 社のプールの中で初めて2社デフォルトした場合であった。(71)式の分母と分子に着目すると、分母の  $S_{-i}(T_j)$  と  $S_0(T_j)$  の部分が、分子においては  $S_{-i}(T_{j-1}) - S_{-i}(T_j)$  と  $S_0(T_{j-1}) - S_0(T_j)$  に置き換わっている。これを踏まえて、一般的に  $n$ 社のプールの中で初めて  $l$ 社デフォルトした場合の Basket

CDS の価格について考える。ノーターションとして、以下を定義しておく。

$$\begin{aligned}
S_{-i_1, \dots, i_r}(T) &= P\{\tau_1 > T, \dots, \tau_{i_1-1} > T, \tau_{i_1+1} > T, \dots, \tau_{i_2-1} > T, \tau_{i_2+1}, \dots, \tau_{i_r-1} > T, \tau_{i_r+1} > T, \dots | \mathcal{F}_t\} \\
&= E_t \left[ e^{-\int_t^T \sum_{k \neq i_1, \dots, i_r} \lambda_k(s) ds} \right]
\end{aligned}$$

$l$  th to default Basket CDS のキャッシュフローは以下のようになる。

- (i) 各  $T_j$  において  $n$  社のうち  $l-1$  社以下のデフォルトである。この時、時刻  $T_j$  で買い手から売り手へ  $U(t)$  を支払う。
- (ii)  $(T_{j-1}, T_j]$  で企業  $l$  社が初めてデフォルトする。この時、売り手から買い手へ  $1-\bar{f}$  を支払う。

この時、 $l$  th to default Basket CDS 価格は次のようになる。

$$U(T) = (1 - \bar{f}) \frac{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) \sum_{r=0}^{l-1} (V_r(T_{j-1}) - V_r(T_j))}{\sum_{j=1}^m D(t, T_j) (T_j - T_{j-1}) \sum_{r=0}^{l-1} V_r(T_j)} \quad (72)$$

where

$$\begin{aligned}
V_r(T_j) &= E_t \left[ \sum_{i_1 < \dots < i_r} 1_{\{\tau_{i_1} \leq T_j, \dots, \tau_{i_r} \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i_1, \dots, i_r\}} \right] \\
&= {}_{n-r}C_0 \sum_{i_1 < \dots < i_r} S_{-i_1, \dots, i_r}(T_j) - {}_{n-(r-1)}C_1 \sum_{i_1 < \dots < i_{r-1}} S_{-i_1, \dots, i_{r-1}}(T_j) \\
&\quad + \dots + (-1)^r {}_n C_r S_0(T_j)
\end{aligned} \quad (73)$$

$V_r(T_j)$  は  $T_j$  までに  $n$  社の中で  $r$  社倒産する確率 ( $n-r$  社生存する確率) をあらわしている。

### 証明

キャッシュフローからプロテクションの買い手から売り手への固定支払金額の現在価値は  $T_j$  までに、全て生存する、1社倒産する、2社倒産する、 $\dots$ 、 $l-1$ 社倒産する確率の

和によって計算することができる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m U(t)D(t, T_j)(T_j - T_{j-1})E_t \left[ 1_{\{\tau_1 > T_j, \dots, \tau_n > T_j\}} \right. \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^n 1_{\{\tau_{i_1} \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i_1\}} \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n 1_{\{\tau_{i_1} \leq T_j, \tau_{i_2} \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i_1, i_2\}} \\
& \quad \vdots \\
& \quad \left. + \sum_{i_1 < \dots < i_{l-1}} 1_{\{\tau_{i_1} \leq T_j, \dots, \tau_{i_{l-1}} \leq T_j, \tau_k > T_j \text{ for all } k \neq i_1, \dots, i_{l-1}\}} \right]
\end{aligned}$$

和記号  $\sum_{i_1 < \dots < i_{l-1}} = \sum_{i_1=1}^{n-(l-2)} \dots \sum_{i_{l-1}=i_{l-2}+1}^n$  と同じである。よって (72) 式の分母は示される。

売り手から買い手への支払いについて考える。 $(T_{j-1}, T_j]$  で企業  $l$  社が初めてデフォルトする確率は、 $T_{j-1}$  で企業  $n - (l - 1)$  社以下倒産する確率から  $T_{j-1}$  で企業  $n - (l - 1)$  社以下倒産する確率を除くことにより計算される。

社数を増やすことにより、コンビネーションの計算では階乗を行うために数値が増大して計算負荷が大きくなる。コンピュータ関数を用いた計算では満期のみの情報で倒産が起きたかを乱数によって発生させるのみなので計算負荷は軽くなる。

### 4.3 CDO

Laurent and Gregory (2005) の CDO 価格計算式を紹介する。社数を  $n$  社とし、回収率を  $\bar{f}$  で等質とする。また、1 社あたりの額面を  $\frac{1}{n}$  の等質と仮定する。企業  $i$  のデフォルト時刻を  $\tau_i$  と表すこととする。この時、時刻  $t$  におけるデフォルト時損失は

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \bar{f}}{n} 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

例えば、 $n = 100$ 、 $f = 0.4$  として、トランシェを 5 % (アタッチメント) と 15 % (デタッチメント) の間とした場合、デフォルト社数が 9 社から 25 社となる。Laurent の論文よりトランシェ  $M(t)$  のアタッチメントを  $A_M$ 、デタッチメントを  $D_M$  とする。このとき、

トランシェの損失率は次のようになる。

$$M(t) = \frac{(L(t) - A_M)1_{[A_M, D_M]}(L(t)) + (D_M - A_M)1_{[D_M, 1]}(L(t))}{D_M - A_M}$$

$D(0, t)$  を満期  $t$  の時刻 0 における割引債とし、これを現在価値に表すとトランシェ  $M$  の CDO 価格となる。

$$E \left[ \int_0^T D(0, t) dM(t) \right]$$

これを部分積分する。また、金利  $r$  を一定とし、割引債  $D(0, t) = e^{-rt}$  と仮定すると、

$$e^{-rT} E[M(T)] + \int_0^T r e^{-rt} E[M(t)] dt \quad (74)$$

上記のように部分積分を行う事により少し計算が楽になるが、 $E[M(t)]$  の計算が必要になる。この計算において  $E[L(t)1_{[A_M, D_M]}(L(t))]$  と  $E[1_{[A_M, D_M]}(L(t))]$  の計算が必要になる。後者の計算は

$$\begin{aligned} E[1_{[A_M, D_M]}(L(t))] &= P\{A_M \leq L(t) \leq D_M\} \\ &= P\left\{ \frac{n}{1-f} A_M \leq \sum_{i=1}^n 1_{\{\tau_i \leq t\}} \leq \frac{n}{1-f} D_M \right\} \end{aligned}$$

社数で考えるとわかりやすい。上の確率の集合の中で、最小の社数を  $A$  社、最大の社数を  $D$  社と置く。また、 $N(t) = \sum 1_{\{\tau_i \leq t\}}$  とおく。

$$\begin{aligned} P\{A \leq N(t) \leq D\} &= P\{A \leq N(t)\} - P\{D+1 \leq N(t)\} \\ &= 1 - P\{N(t) \leq A-1\} - (1 - P\{N(t) \leq D\}) \\ &= P\{N(t) \leq D\} - P\{N(t) \leq A-1\} \end{aligned}$$

$P\{N(t) \leq D\}$  は  $D$  社以下デフォルトする確率である。これは、(73) 式から求めることが出来る。

$$P\{N(t) \leq D\} = \sum_{i=0}^D V_i(t)$$

よって、

$$P\{A \leq N(t) \leq D\} = \sum_{i=A}^D V_i(t)$$

もう一方の前者の計算は、

$$E[L(t)1_{[A_M, D_M]}(L(t))] = \frac{1-f}{n} \sum_{i=A}^D i \times V_i(t)$$

まとめると  $E[M(t)]$  は

$$E[M(t)] = \sum_{i=A}^D \frac{1-\bar{f}_i}{D_M - A_M} V_i(t) + \sum_{i=D}^n V_i(t)$$

これを (74) 式に代入することで求めることができる。

#### 4.4 数値実験

複数銘柄を原資産とする Basket CDS と CDO についての数値実験を行う。

Markov switching を取り入れた倒産強度過程の共通項の regime を 2 つと仮定し、regime 1 を好景気である状態とし、regime 2 を不景気であるとする ( $\theta_{C1} < \theta_{C2}$ )。また、基準とするパラメータを設定する。

Table 4.1 : Basic parameter

$\kappa$	$\sigma$	$\theta_{C1}$	$\theta_{C2}$	$\theta_i$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{21}$
0.6	0.141	0.01	0.06	0.015	0.2	0.2

長期平均  $\bar{m}_i$  は

$$\bar{m}_i \equiv \theta_C + \theta_i = \theta_{C1} \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}} + \theta_{C2} \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}} + \theta_i$$

Table 4.1 の長期平均は 0.05 となる。

相関係数  $\rho_i$  は  $\lambda_i$  と共通項  $X_C$  との相関とする。

$$\rho_i \equiv \frac{\theta_C}{\bar{m}_i} = \frac{\theta_{C1} \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}} + \theta_{C2} \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}}}{\theta_{C1} \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}} + \theta_{C2} \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}} + \theta_i}$$

$\rho_i$  が  $[0, 1]$  の範囲を取りうることになり、0 に近いほど強度  $\lambda_i$  は個別項の影響が強まるので無相関になる。反対に、1 に近づくほど共通項に依存するので互いに相関し合うようになる。以下数値実験においては、この相関と複数銘柄を原資産とする金融派生商品との関係について分析を行うが、長期平均を固定して相関  $\rho_i$  を変化させることを行う。

具体的には、長期平均が 0.05 と推移強度を固定する。これから  $\theta_i, \theta_{C1}, \theta_{C2}$  を決定する。この時、 $\theta_i$  の値は相関の式より決定されるが、 $\theta_{C1}, \theta_{C2}$  の値は決まらない。ここでは  $0.05 - \theta_i$  を  $\theta_{C1}$  に 20 %、 $\theta_{C2}$  に 80 % の割合で分配することでパラメータを決定した。

##### 4.4.1 同時生存確率と相関

Figure 4.1 は社数を 10 社とし、個別項の平均回帰水準  $\theta_i$  は全て同等と仮定する。この時の初期レジームが 1 と 2 の場合と共通項にレジームの無い CIR 過程をグラフに表して

いる。

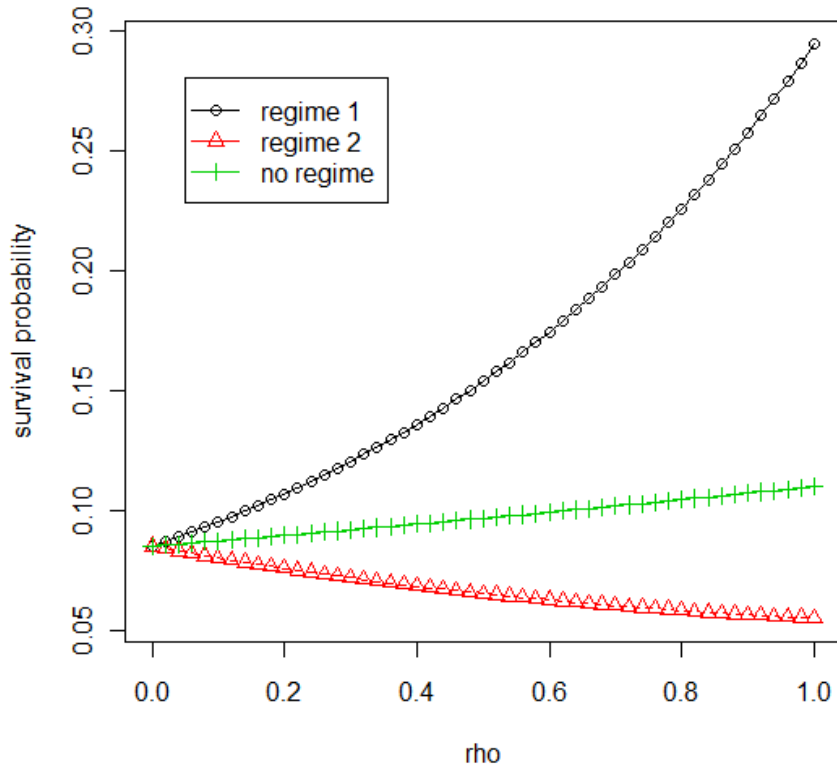


Figure 4.1 : 5 years survival probability vs  $\rho$

$\rho$ が高まれば $\theta_i$ から $\theta_C$ の割合、つまりスイッチに依存する過程になる。レジームの無い通常の CIR 過程は、相関が高まると少し同時生存確率が上昇する。初期レジームが 1 の場合は相関が高まると同時生存確率がレジームが無い場合よりも上昇幅が大きい。デフォルトが起きにくい状況からスタートするので、相関が強い方が生存確率は高まることが考えられる。レジーム 2、デフォルトが起きやすい状況からスタートすると、相関が高まるほど同時生存しにくくなる。

#### 4.4.2 Basket CDS 価格と相関

企業を 10 社とし、相関係数との関係を調べてみた。回収率  $\bar{f} = 0.5$ 、金利は  $r = 0.01$  とした。定期支払の期間は四半期ごととし、支払い間隔は一定とした。この時の first to default Basket CDS 価格と相関との関係について分析を行った。

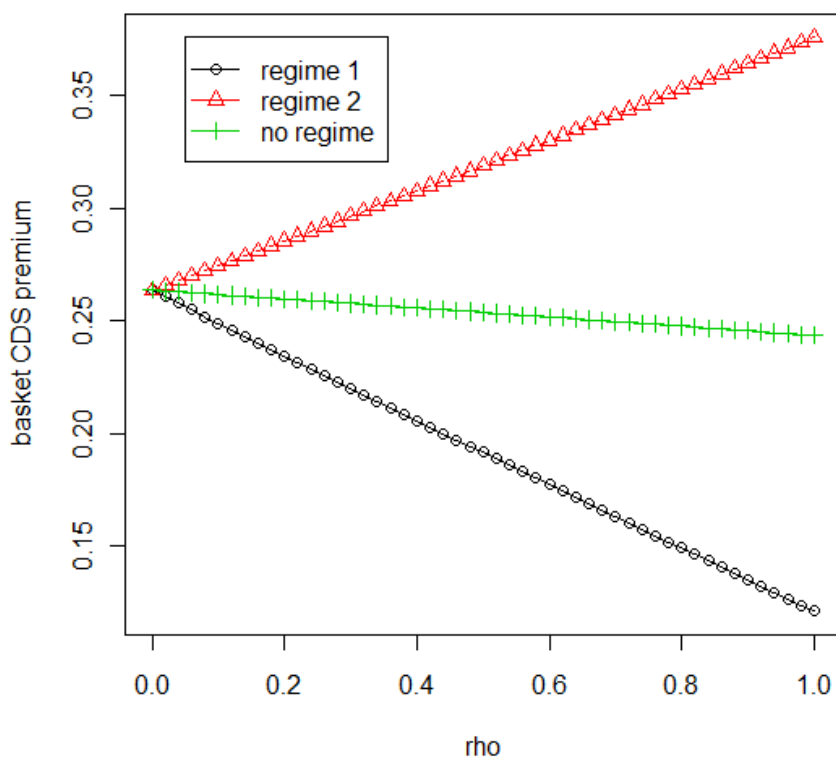


Figure 4.2 : 5 years basket CDS premium vs  $\rho$

Kijima(2000) のガウシアンモデルにおいて相関が変化しても basket CDS はほとんど変化しないことが知られている。スイッチの無い CIR 型強度過程においても相関に関してほとんど変化しない。レジームを取り入れた CIR 過程では初期レジームと相関によって価格が変化することが見て取れる。好景気である regime 1 は相関が高まると同時生存確率が上昇するという影響を受けて、Basket CDS 価格は相関が高まると減少する。不景気の場合には逆の変化が起こっている。

次に 1 社のみの倒産で決済が行われる first to default Basket CDS のみではなく、2 社の倒産によって決済が行われる second to default Basket CDS 価格についても考える。Figure 4.3 では、相関を 0 と 0.9 の 2 つの場合に分け、Markov switching を取り入れた CIR 型倒産強度過程と regime switching の無い CIR 型倒産強度過程を比較した。初期レジームは好景気のみであるとし、横軸に Basket CDS の参照企業の数を取っている。

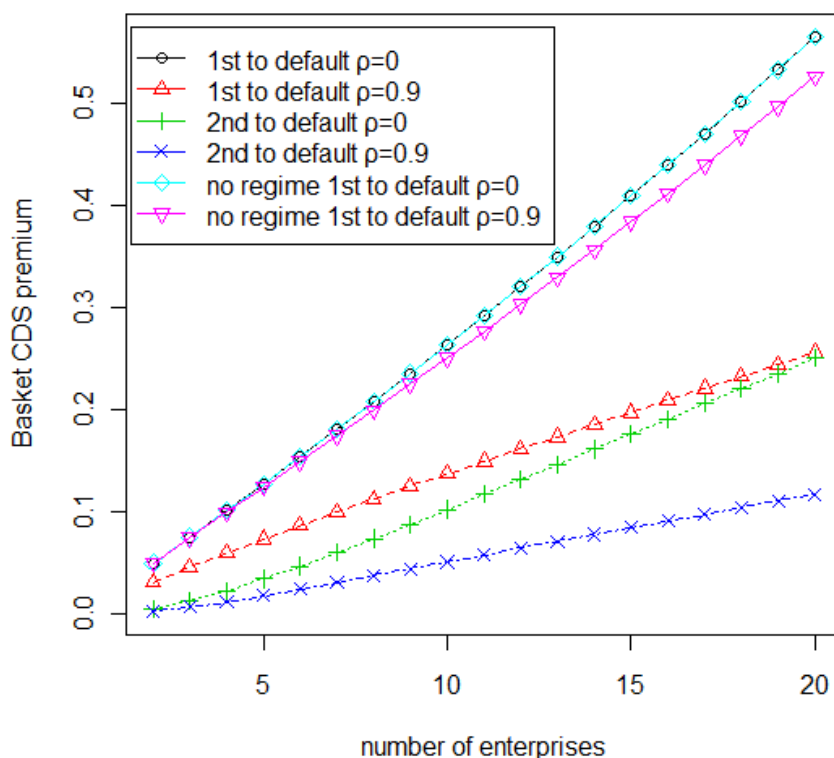


Figure 4.3 : first & second to default Basket CDS vs  $\rho$

横軸に参照企業数を取っているので倒産する可能性が高まるため価格は増加していく。first to default をみると Markov switching を取り入れた倒産強度の場合では、高い相関 ( $\rho = 0.9$ ) では低い相関 ( $\rho = 0$ ) と比べて約半分になった。通常の CIR 過程では相関によって価格はほとんど変化しなかった。これは、スイッチングによる景気変動が大きく影響しているものだと考えられる。企業間相関が高く景気が良い場合には倒産が起きにくく価格が下がったものと思われる。second to default Basket CDS 価格は参照企業の社数が増加すると、価格は指数的に増加している。参照企業数が増えると 2 社以上の倒産の可能性が高まるためであると考えられる。

#### 4.4.3 CDO 価格と相関

(74) 式を用いて 5 年満期の CDO 価格と相関について数値実験を行う。CDO プールの社数を 30 社、企業からの回収率を  $\bar{f} = 0.5$  で一律とする。優先劣後構造はエクイティ債、メザニン債、シニア債の 3 つに分け、そのトランシェ間の損失率は 5 % と 15 % と分割を



行くと仮定する。金利を  $r = 0.01$  と一定とした。Figure 4.4 では、現在のレジームを好景気 (regime 1) と不景気 (regime 2) の 2 つに分け、各トランシェごとの価格と相関を分析した。

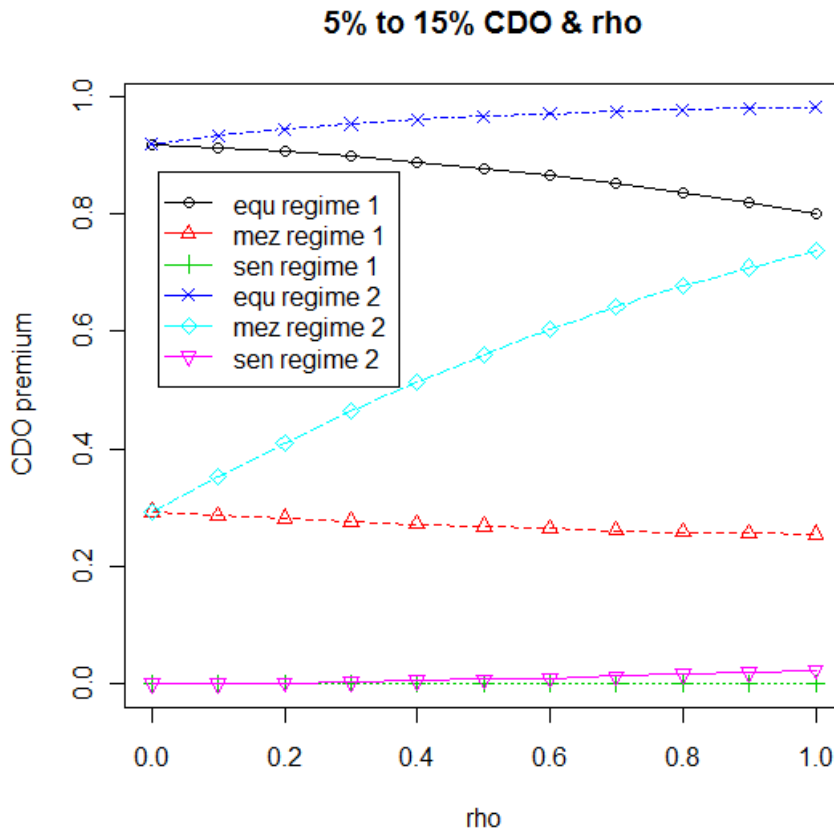


Figure 4.4 : 5 years CDO premium vs  $\rho$

好景気 (regime 1) である状況から始めた場合、エクイティは相関が高まると価格は若干減少した。これは、相関の弱い銘柄で CDO を組んだ場合に劣後債ほどリスクを受けやすいという特徴を反映している。反対に、シニアは相関が高まると価格は増加した。これは、今回の Markov switching モデルのレジームが不景気に変化した際に、相関が強いほど多くの倒産が発生し、劣後部のクッション以上の倒産が起きやすくなる部分を反映していると考えられる。メザニン債においては、今回は相関と共に若干減少しているが、トランシェ間の損失率を変化させる (例えば 10 % と 20 % にする) ことで相関と共に増加する場合もある。

不景気 (regime 2) から始めた場合には、エクイティは相関が高まると価格は少し増加した。モデルにおける中期的に不景気の状態が持続する効果から、相関の強い企業同士で

CDO を組み入れた場合に多くの倒産が起きやすくなるためである。このため、相関の弱い銘柄同士のほうがリスクを回避しやすかったのだと考えられる。同様に、メザニンも同じ理由から相関が高まると CDO 価格は上がっていく。

以上より、景気状況と相関によって CDO の価格が変化することが明らかとなった。特に景気の影響でエクイティ債とメザニン債は大きな変化をすることが見て取れた。よって、企業間相関のみではなく景気変動を捉えた CDO の価格付けが重要であることが分かった。

## 5 中央清算機関によるリスク管理

### 5.1 清算機関の概要

2008年以降発生した金融危機を教訓として、金融市場改革が世界的に行われるようになった。欧米の監督当局は、OTC(店頭)デリバティブ取引規制の強化として、清算整備や利用義務づけの制度化を打ち出した。

2009年9月のG20ピッツバーグサミットにおいて、2012年末までに、標準化された全ての店頭デリバティブ取引を清算機関で清算すること、清算機関で清算されないデリバティブ取引に関しては高い資本規制を課するという方針を発表した。この方針を受け、各国で金融取引に関する法整備化が行われるようになっていった。

米国は2010年7月にドット・フランク法が制定され、店頭デリバティブ取引に対する初の規制が行われるようになった。これに基づき、商品先物取引委員会(CFTC)と証券取引委員会(SEC)の監督当局が、デリバティブ規制の策定を行っていたが、規則策定期間が2012年以降にまでずれ込んでいた。しかし、2013年3月には新規制の下、IRSとCDSについて中央清算の義務付けられる事となった。

欧州は同年9月に店頭デリバティブ規制改革案が提出され、欧州連合理事会と欧州議会による交渉を経て、2012年2月に最終的な合意に至った。ここでは、店頭デリバティブ取引の清算義務とリスク管理義務が課されること、デリバティブ契約に対して報告義務が課されることなどが盛り込まれた。

日本においては、2010年5月に金融商品取引法等の一部を改正し、2012年11月にiTraxx Japan(日本企業50社のインデックスCDS)の国内清算機関での清算と、プレーンバナラ型の円建てIRSの国内外の清算機関での清算義務化がされた。

また、清算の対象となる金融商品はCDS、IRS、為替、先物など様々あるが、ここでは主にCDSとIRSの2つについて、清算機関の現状について概説を行う。

#### 5.1.1 CDS 清算機関

金融危機でとりわけ注目されたCDS取引について、当初欧米で5つの清算機関、日本では2つの清算機関が参入を表明した。欧米に関しては、米国系大手のインターコンチネンタル取引所グループ(ICE)、デリバティブ取引最大手のCMEグループ、欧米を跨ぐ取引所グループであるNYSEユーロネクスト、ドイツ証券取引所のユーレックス、欧州のLCHクリアネットの5つである。日本に関しては、日本証券クリアリング機構(JSCC)、

東京金融取引所の2つである。

米国 ICE は、ICE Trust を設立し清算サービスを 2009 年 3 月から開始した。CDS 清算実績は、サービス開始直後の 8 月時点で想定元本 1.8 兆ドル、2010 年で 10 兆ドルを超えていて、取引実績において群を抜いている。また、2009 年 7 月に欧州市場へ進出し、2013 年では NYSE ユーロネクストを買収し、取引総額で最大の取引所とクリアリングハウスとして運営を行っている。

また他の 4 社に関して、NYSE ユーロネクストは 2009 年 8 月に CDS 清算サービスの休止を決定している。CME も 2009 年 4 月以降 CDS 清算サービスに関して目立った発表をしていない。ユーレックスは 2009 年 7 月に CDS 清算サービスを開始し、店頭デリバティブ清算サービスの整備を行っている。LCH クリアネットは 2009 年 12 月から欧州圏内を中心に清算サービスを展開した。

日本における CDS 清算サービスとして、JSCC は 2011 年 7 月に CDS 清算サービスを開始している。日本において取引量は欧米と比べて少なく、清算範囲は 2014 年現在において複数企業を参照したインデックス CDS のみであり、今後シングルネーム CDS への範囲拡大が検討されている。

### 5.1.2 IRS 清算機関

大手金融機関同士の IRS 清算サービスは 1999 年から LCH クリアネットが提供しており、2011 年で約 300 兆ドルの実績を残している。他に、米国系では IDCG 社、CME グループがリーマンブラザーズの破綻以降の 2008 年から IRS 清算サービスを提供している。また、欧州ではユーレックスが IRS 清算サービスを 2011 年 3 月から開始を行っている。アジア圏内でもローカル通貨建ての IRS 清算サービスが提供されており、将来ドル建てやユーロ建てなど主要通貨での清算サービスが提供されることにより、清算機関同士が競い合う状況が生まれる可能性がある。

日本における IRS 清算サービスとして、日本円建ての IRS 規模の大きさから、LCH クリアネット社が既に大手金融機関に対して清算サービスを提供している。JSCC は 2012 年 10 月から IRS 清算サービスの提供を開始し、2015 年 9 月から外貨建て IRS 清算についても行う予定である。

### 5.1.3 中央清算機関の目的

清算機関とは、市場で成立した売買の清算処理を、売り手と買い手の間に入り行う機関のことを指す。具体的には、ある金融証券の売買を証券会社と投資家の間で取引を行ったとする。その成立した取引について、債務の引き受けを行い、さらにネットィングによっ

て効率的に債務の圧縮を行う。この債務の引き受けとネットィングを合わせて清算とい  
い、これを清算機関が行うことで、安全な決済と効率的なネットィングを実現することが  
できる。

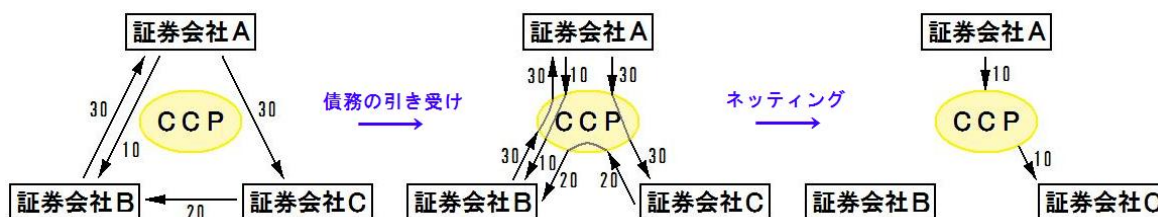


Figure 5.1 : 中央清算機関 (CCP) の概要

Figure 5.1 では中央清算機関の概要について示したものである。ある金融商品について証券会社 3 社の間で Figure 5.1 のような取引を行ったとする (左図)。証券会社 A と B の間では相互取引が行われているため、ネットィングによって B から A へ 20 の金融商品が受け渡されることになる。しかし、もし証券会社 B が倒産した場合には、買い手である A は 20 の金融商品が受け取れないことになる。同様に他の証券会社もリスクを負うことになる。

この倒産によって起こりうるリスクを軽減するために、清算処理を集中して行う事によって解決することが可能である (右図)。もし、証券会社 A が倒産したとしても、A からの買い手である C は中央清算機関から支払われることが担保されているので、倒産による流動性リスクを最小に抑えることができる。

また、もともと証券会社 A から C への金融商品は 30 であったが、清算を集約しネットィングを行う事で 10 に減らすことができる。このことから流動性リスク量自身も中央清算することで減らすことができる。

2010 年において OTC(店頭) デリバティブ市場は、取引所取引を含む全体のデリバティブ市場の約 9 割を占め、600 兆ドルを超えている。相対取引である OTC デリバティブは、取引量と取引者が増えると取引関係が複雑化し、決済リスクが高まる。また、取引所取引とは異なり取引に関する情報の入手が困難である。よって、中央清算機関 (CCP) を通じた清算により、システミックリスクを低減させ、かつ透明性を高める必要性が国際的に認識された。OTC デリバティブの規制目的として、

1. 透明性の向上
2. カウンターパーティリスクの削減 (システミックリスクの低減)

### 3. オペレーショナルリスクの削減 (事務的ミスの削減)

が挙げられている。今回我々の論文においては、2つ目のカウンターパーティリスクの削減のみに着目した論文となっている。

#### 5.1.4 中央清算機関の概要

ここではカウンターパーティリスクの削減、システミックリスクの低減のみに着目し、中央清算機関の概要を説明する。現在の中央清算機関は、ある特定の金融商品 (国債、商品先物、CDS など) に対して清算処理が行われている。日本証券クリアリング機構 (JSCC) の CDS 清算を例にすると、清算参加者 (CCP 利用者) にカウンターパーティ信用リスクを担保するため、証拠金を要求する。この証拠金はエクスポージャーの変動によって生じる損失をカバーするために用いられる。

また中央清算機関は、ある清算参加者がデフォルトした際に発生する損失をカバーするために、証拠金とは別にデフォルトファンド (清算基金) を設立しなければならない。デフォルトファンドの負担金は、CCP が清算参加者に対して保有しているエクスポージャーに比例して清算参加者に配分される<sup>\*3</sup>。

しかし、清算参加者がデフォルトし、その清算参加者からの証拠金やデフォルトファンド以上の損失が発生した場合には、他の生存している清算参加者によって提供されているデフォルトファンドによって補われることになる。本論文ではここまでの損失が発生する場合を想定している。生存している清算参加者からのデフォルトファンド以上の損失については、ロスシェアリングや保険などによって市場流動性の急激な低下を抑制されることになる。また、デフォルトしていない清算参加者からの証拠金は、金融商品の価格変動リスクに利用されるためのものであり、他社のデフォルトによって発生した損失の補填に使うことは出来ない。

以上のことをまとめると、清算参加者がデフォルトした場合には CCP は、

1. デフォルトした清算参加者の証拠金
2. デフォルトした清算参加者からのデフォルトファンドの負担金
3. CCP の自己資本と金融リソース
4. デフォルトしていない清算参加者からのデフォルトファンドの負担金

---

<sup>\*3</sup> ISDA Japan CCP DMP ワーキンググループが提言しているデフォルトファンドの規模は、1. 最大のエクスポージャー、2.2 番目と 3 番目に大きなエクスポージャーの合計、のうちいずれか大きい方のエクスポージャーの清算参加者がデフォルトした場合でも CCP が耐えうる水準にしなければならないとある。

の順に発生した損失に充てなければならない。本研究は簡単化のために 1. デフォルトした清算参加者の証拠金 および 3.CCP の自己資本と金融リソースについては考えない。

## 5.2 中央清算機関に関する先行研究

中央清算機関 (CCP) に参加することによって直面するリスク量を計測することにより、CCP に参加しないときのリスク量と比較することが可能となる。CCP に参加によるリスク量をモデル化し計測を行った論文として Central Counterparty Risk : Arnsdorf (2012) を紹介する。

### 5.2.1 Central Counterparty Structure and Risk

#### Risk Waterfall

1. Variation Margin(**追加証拠金**): 毎日ポートフォリオの時価変動により受け取りや支払いを行う。値洗い。
2. Initial Margin(**初期証拠金**): CCP の清算参加者になるために入れる証拠金。自分がデフォルトした場合に損失を負担する。その企業の平時の信用水準から算出される。
3. CCP Equity(**CCP 拠出金**): デフォルトファンドや初期証拠金を超えて損失が発生した場合の金融リソース。
4. Default Fund: 全てのメンバーが負担する。担保されない損失のための相互保険である。

### 5.2.2 CCP Loss Model

清算参加者の CCP リスクをモデルする。

$N + 1$  人のカウンターパーティーを考え、メンバーを  $CM_k, k \in \{0, \dots, N\}$  とする。各時点  $t$  で、メンバー  $k$  の初期証拠金を  $M_k(t)$  とする。デフォルトファンドを  $D_k(t)$  とする。総デフォルトファンドを  $D_{tot}(t) \equiv \sum_{k=0}^N D_k(t)$  とする。CCP equity を  $E$  とする。

#### Portfolio losses

清算参加者のデフォルト時刻を  $t = \tau_k$  とする。参加者  $k$  のポートフォリオの価値を  $V_k(t)$  とする。デフォルトが起きた時のポートフォリオの清算期間を  $\Delta_l$  とする。通常 2

～5日となる。デフォルトが起きたときのポートフォリオの変動分は

$$\Delta V_k(\tau_k) = V_k(\tau_k + \Delta_l) - V_k(\tau_k)$$

これからの便宜上  $\Delta V_k$  は正とする。

倒産により損失が発生した場合、まず自分の初期証拠金とデフォルトファンドによって担保することになる。それを超えた非担保損失分は

$$U_k(\tau_k) \equiv (\Delta V_k(\tau_k) - M_k(\tau_k) - D_k(\tau_k))^+$$

これについて、最初は CCP equity cushion によって支払われる。残りは生存参加者に割り当てられる。

時刻  $t$  でデフォルトが起きたとき、資本再構成期間 (冷却期間)  $[t, t + \Delta_r]$  の間に全ての損失を負うことになる。現行制度は  $\Delta_r = 30$  日である。ここでは、倒産が  $t_i$  のみで起こるとし、 $t_i = t_0 + i\Delta_r$ ,  $t_n = T$  とする。

$\mathbf{s}$  は期間  $[t_{i-1}, t_i]$  に起こるデフォルトのシナリオ集合である。各  $j \in \mathbf{s}$  は  $t_{i-1} \leq \tau_j < t_i$ 。メンバー  $CM_0$  はデフォルトは起きないものとする  $0 \notin \mathbf{s}$ 。冷却期間の総超過損失は

$$L_{tot}(t_i; \mathbf{s}) \equiv \left( \sum_{j \in \mathbf{s}} U_j(\tau_j) - E \right)^+ \quad (75)$$

### Loss allocation

(75) 式の総超過損失が発生した場合、生存参加者に損失が割り当てられ、デフォルトファンドによって支払われる。この論文ではデフォルトファンドに比例して割り当てられるとする。 $CM_0$  の割り当て分は

$$A_0(t_i; \mathbf{s}) = \frac{D_0(t_i)}{D_{tot}(t_i) - \sum_{j \in \mathbf{s}} D_j(t_i)} \quad (76)$$

$$L_0(t_i; \mathbf{s}) = A_0(t_i; \mathbf{s}) L_{tot}(t_i; \mathbf{s})$$

冷却期間内でデフォルトが多くなると負担分は増加する。

### The CCP Counterparty Charge

期待超過損失は

$$\bar{L}_0(t_i) \equiv E[L_0(t_i; \mathbf{s})]$$

この期待値はシナリオとポートフォリオの損失分布の両方についてとっている。



デフォルトシナリオの総集合  $\mathcal{S}$  とし、 $CM_0$  を除いている。期待値は

$$\bar{L}_0(t_i) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s}; t_i) E[A_0(t_i; \mathbf{s}) | \mathbf{s}] E[L_{tot}(t_i; \mathbf{s}) | \mathbf{s}] \quad (77)$$

$P(\mathbf{s}; t_i)$  は  $[t_{i-1}, t_i]$  にシナリオ  $\mathbf{s}$  が起こる確率である。 $A_0$  は  $L_{tot}$  と独立とし、この2つの期待値を計算することで期待超過損失が求まる。期待超過損失が求まれば、CCP リスクは

$$C_0(T) = \sum_{i=1}^n Z(t_0, t_i) \bar{L}_0(t_i) \quad (78)$$

$Z$  は割引ファクターである。

### Expected Collateral Levels

証拠金とデフォルトファンドは市場の状況により変化する。清算参加者  $CM_k$  がデフォルトするシナリオにおいて、証拠金とデフォルトファンドは  $M_k^*$ ,  $D_k^*$  となる。それは今日の証拠金とデフォルトファンドにある重みをつけた数となる。

$$\begin{aligned} M_k^* &= \omega M_k(t_0) \equiv \omega M_k \\ D_k^* &= \omega D_k(t_0) \equiv \omega D_k \end{aligned}$$

$\omega$  は誤方向ファクターで、今日とストレスを受けた担保の比率である。これにより、(76) 式の割り当て比率は

$$\bar{A}_0(\mathbf{s}) \equiv E[A_0(t_i; \mathbf{s}) | \mathbf{s}] = \frac{D_0^*}{D_{tot}^* - \sum_{j \in \mathbf{s}} D_j^*} = \frac{D_0}{D_{tot} - \sum_{j \in \mathbf{s}} D_j}$$

時間の変数を減らすことができた。

### Portfolio Expected Loss

期待総損失の計算は、簡単のために  $E = 0$  として、

$$\begin{aligned}
E[L_{tot}(t_i; \mathbf{s}) | \mathbf{s}] &= E \left[ \left( \sum_{j \in \mathbf{s}} U_j(\tau_j) - E \right)^+ \middle| \mathbf{s} \right] \\
&= \sum_{j \in \mathbf{s}} E[U_j(\tau_j) | \mathbf{s}] \\
&= \sum_{j \in \mathbf{s}} E[(\Delta V_j(\tau_j) - M_j(\tau_j) - D_j(\tau_j))^+ | \mathbf{s}] \\
&= \sum_{j \in \mathbf{s}} E[(\Delta V_j(\tau_j) - M_j^* - D_j^*)^+ | \mathbf{s}] \\
&= \sum_{j \in \mathbf{s}} \bar{U}_j(\tau_j; \mathbf{s})
\end{aligned}$$

損失分布をパレート分布によってモデルする。  $k \in \mathbf{s}$ ,  $x \geq M_k^*$  において

$$P[\Delta V_k(t_i) > x | \mathbf{s}] = \hat{p}_k(\mathbf{s}, t_i) \left( \frac{M_k^*}{x} \right)^\alpha$$

損失が初期証拠金を超える確率

$$\hat{p}_k(\mathbf{s}, t_i) = P[\Delta V_k(t_i) > M_k^* | \mathbf{s}]$$

$\hat{p}_k(\mathbf{s}, t_i)$  は清算参加者がどのくらい倒産しても変わらないとする。かつ、時間にも依存しないとする。よって変数を落として、 $\hat{p}_k(\mathbf{s}, t_i) \equiv \hat{p}_k$  と仮定する。

条件付き期待損失は

$$\begin{aligned}
\bar{U}_k(t_i; \mathbf{s}) &\equiv \bar{U}_k = E[(\Delta V_k - M_k^* - D_k^*)^+ | \mathbf{s}] \\
&= \hat{p}_k \int_{M_k^* + D_k^*}^{\infty} (x - M_k^* - D_k^*) \alpha M_k^{*\alpha} x^{-(\alpha+1)} dx \\
&= \frac{\hat{p}_k}{\alpha - 1} \left( \frac{M_k^*}{M_k^* + D_k^*} \right)^\alpha (M_k^* + D_k^*) \\
&= \frac{\omega \hat{p}_k}{\alpha - 1} \left( \frac{M_k}{M_k + D_k} \right)^\alpha (M_k + D_k)
\end{aligned}$$

## Summing over Scenarios and the Exposure to Clearing Members

(77) 式の期待損失は書き換えられて

$$\begin{aligned}
\bar{L}_0(t_i) &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s}; t_i) \bar{A}_0(\mathbf{s}) \sum_{k \in \mathbf{s}} \bar{U}_k \\
&= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s}; t_i) \bar{A}_0(\mathbf{s}) \sum_{k=1}^N 1_{\{k \in \mathbf{s}\}} \bar{U}_k \\
&= \sum_{k=1}^N \bar{U}_k \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} 1_{\{k \in \mathbf{s}\}} P(\mathbf{s}; t_i) \bar{A}_0
\end{aligned}$$

$\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} 1_{\{k \in \mathbf{s}\}} P(\mathbf{s}; t_i)$  は  $CM_k$  が  $[t_{i-1}, t_i]$  期間にデフォルトする確率なので

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} 1_{\{k \in \mathbf{s}\}} P(\mathbf{s}; t_i) = \lambda_k(t_i) \Delta_r$$

$\lambda_k(t_i)$  はデフォルト強度であり、デフォルト確率  $P_k(t) = P[\tau_k < t]$  を用いて次のような関係になっている。

$$\lambda_k(t) = \frac{1}{1 - P_k(t)} \frac{dP_k(t)}{dt}$$

もし、 $\bar{A}_0(\mathbf{s})$  がシナリオに依存しないなら期待損失は各メンバーのデフォルト確率のみに依存する形となる。 $\bar{A}_0(\mathbf{s})$  がシナリオに依存する部分とそうでない部分に分離する。すべての  $k \in \mathbf{s}$  において

$$\begin{aligned}
\bar{A}_0(\mathbf{s}) &= \frac{D_0}{D_{tot} - \sum_{j \in \mathbf{s}} D_j} \\
&= \frac{D_0}{D_{tot} - D_k} (1 + B_k(\mathbf{s})) \\
B_k(\mathbf{s}) &\equiv \frac{\sum_{j \in \mathbf{s} \setminus \{k\}} D_j}{D_{tot} - \sum_{j \in \mathbf{s}} D_j}
\end{aligned}$$

$B_k(\mathbf{s})$  はシナリオ  $\mathbf{s}$  において2つ以上デフォルトしない限り0である。

期待損失は次のようになる。

$$\bar{L}_0(t_i) = D_0 \sum_{k=1}^N \frac{\bar{U}_k}{D_{tot} - D_k} (1 + \epsilon_k(t_i)) \lambda_k(t) \Delta_r$$

補正項は

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{\lambda_k(t) \Delta_r} \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s}; t) 1_{\{k \in \mathbf{s}\}} B_k(\mathbf{s})$$

$k$  がデフォルトしたとき、2つ以上デフォルトする確率である。

## Summary

CCP リスクのコストは (78) 式に代入して

$$C_0(T) = D_0 \sum_{i=1}^n Z(t_0, t_i) \sum_{k=1}^N \frac{\bar{U}_k \lambda_k(t_i) \Delta_r}{D_{tot} - D_k} (1 + \epsilon_k(t_i))$$

$\Delta_r \rightarrow 0$  とすると

$$C_0(T) = D_0 \sum_{k=1}^N \bar{E}_k \int_{t_0}^T \lambda_k(t) Z(0, t) dt$$

エクスポージャーは

$$\bar{E}_k \equiv \frac{\omega \hat{p}_k}{\alpha - 1} \left( \frac{M_k}{M_k + D_k} \right)^\alpha \frac{M_k + D_k}{D_{tot} - D_k} (1 + \epsilon_k)$$

### 5.2.3 Estimating the Wrong-Way Factor $\omega$

誤方向ファクターはデフォルトが起きた時刻での担保水準と今日の担保水準の比である。超過損失は正規確率変数  $X_t$  とある関数  $f_k$  によって  $\Delta V_k(t) = f_k(X_t)$  とする。 $X_t$  の分散を  $\sigma(t)$  とする。

担保水準を  $C_k(t)$  として、担保水準を超える確率は

$$p \equiv P[\Delta V_k(t-) > C_k(t)] = \Phi \left( -\frac{f_k^{-1}(C_k(t))}{\sigma(t-)} \right) \quad (79)$$

$\Phi$  は標準正規分布である。 $C_k$  をを超える確率は  $p$  であり、CCP によって全ての時間で固定される。(36) 式を  $C_k$  について解くと

$$C_k(t) = f_k(\sigma(t-)g) \quad , g = \Phi^{-1}(1 - p) \quad (80)$$

誤方向ファクターは  $\tau_k$  と  $t_0$  の担保水準の比によって表される。

$$\omega = \frac{C_k(\tau_k)}{C_k(t_0)} = \frac{f_k(\sigma(\tau_k-)g)}{f_k(\sigma(t_0)g)} \quad (81)$$

もし、 $f_k$  が線形なら

$$\omega = \frac{\sigma(\tau_k-)}{\sigma(t_0)} \quad (82)$$

我々の論文との比較について、CCP に超過損失が発生した場合にはそれぞれ生存参加者に比例配分される (76) 式を利用する。シナリオごとの倒産確率は、モデルが複雑となるため 2 期間モデルで簡単化を行った。ポートフォリオの価格  $V(t)$  についても、後の数値実験において正規分布を仮定して簡単化を行った。

### 5.3 ネットによる期待損失

証券のクラスを  $k = 1, \dots, K$  とする。証券のクラスは、為替や株や金利などの各原資産クラスによって構築された証券と定義される。

取引参加者が  $N$  人存在すると考える。時刻  $t$  において、メンバー  $i$  がメンバー  $j$  に対して取引する証券クラス  $k$  のポジションを  $V_{ij}^k(t)$  とする。ただし、 $V_{ij}^k(t) = -V_{ji}^k(t)$  としておく。また、ここでは担保については考えないとする。このとき、メンバー  $i$  がメンバー  $j$  に対して証券クラスによってネットを行ったときのポートフォリオの価格  $V_{ij}(t)$  は

$$V_{ij}(t) = \sum_{k=1}^K V_{ij}^k(t) \quad (83)$$

このとき、ある将来時点  $t$  において、 $j$  がデフォルトしたとき、自分が損失を受けるのは  $V_{ij}(t)$  が正の時であって、負の時は当然に支払わなければならない。 $\max\left\{\sum_{k=1}^K V_{ij}^k(t), 0\right\}$  をメンバー  $i$  から  $j$  に対するネットによるエクスポージャーと呼ぶ。

$\tau_j$  を  $j$  のデフォルト時刻とする。メンバー  $i$  がメンバー  $j$  のデフォルトにおける損失額は、そのネットしたエクスポージャーに損失比率  $(1 - R)$  を掛けることにより定義される。

$$1_{\{\tau_j \leq T\}}(1 - R) \max\left\{\sum_{k=1}^K V_{ij}^k(\tau_j), 0\right\} \quad (84)$$

回収率  $R$  は参加者ごとに対して一定であると仮定する。このデフォルト時損失額に割引因子  $D(t)$  を掛けて期待値を取ることにより、メンバー  $i$  が  $j$  のデフォルトに対するネットによる割引期待損失である。

$$(1 - R) \int_0^T E \left[ D(t) \max\left\{\sum_{k=1}^K V_{ij}^k(t), 0\right\} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (85)$$

また、メンバー  $j$  について和をとることにより、メンバー  $i$  のネットによる期待損失式が求まる。

$$L_i = (1 - R) \sum_{j \neq i} \int_0^T E \left[ D(t) \max\left\{\sum_{k=1}^K V_{ij}^k(t), 0\right\} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (86)$$

Pykhtin and Rosen(2010) より、(86) 式は資産に対してネットした期待損失であるが、個別資産ごとの期待損失の和に分解できることが証明されている。ここでは結論のみを述

べる。

$$L_i = \sum_{k=1}^K L_i^k \quad (87)$$

$$L_i^k = (1 - R) \sum_{j \neq i} \int_0^T E \left[ D(t) V_{ij}^k(t) \mathbf{1}_{\{V_{ij}(t) > 0\}} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (88)$$

#### 5.4 中央清算機関による期待損失

次にある一つの証券に中央清算機関 (以下 CCP と称す) を導入することを考える。K 番目の証券に CCP を導入するとする。この CCP にメンバーは、担保を入れなくて良いが、デフォルトファンドは拠出することを仮定する。デフォルトファンドは自社に損失が発生した場合には担保の代わりとして役割を果たす他に、他社に損失が発生し、かつその他社のデフォルトファンド以上に発生した損失 (超過損失) に対しては、自社のデフォルトファンドを補填するという 2 重の役割を持っている。

メンバー  $i$  が CCP に拠出するデフォルトファンドを  $DF_i^K(t)$  とする。CCP に加入したメンバーのことを清算参加者と呼ぶことにする。証券  $K$  に対して清算参加者  $j$  のポートフォリオの価格は

$$V_j^K(t) = \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(t) - DF_j^K(t) \quad (89)$$

ここで清算参加者  $j$  が倒産したとする。この時  $j$  が倒産したときの超過損失 (無担保損失) は

$$\max \left\{ \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(t) - DF_j^K(t), 0 \right\} \quad (90)$$

この超過損失が正のとき生存参加者から損失を補填するよう CCP に求められる。清算参加者  $i$  がこの超過損失を支払う分は、生存参加者のデフォルトファンドに比例する形で分配することを仮定する。よって、清算参加者  $i$  が  $j$  のデフォルトに対する損失額は

$$\mathbf{1}_{\{\tau_j \leq T\}} \frac{DF_i^K(\tau_j)}{\sum_{l \neq j} DF_l^K(\tau_j)} \max \left\{ \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(\tau_j) - DF_j^K(\tau_j), 0 \right\} \quad (91)$$

清算参加者  $i$  が  $j$  のデフォルトによって起きる期待損失は、

$$\int_0^T E \left[ D(t) \frac{DF_i^K(t)}{\sum_{l \neq j} DF_l^K(t)} \max \left\{ \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(t) - DF_j^K(t), 0 \right\} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (92)$$

$j$  について和をとることにより清算参加者  $i$  の証券  $K$  に対する期待損失が求められる。

$$\bar{L}_i^K = \sum_{j \neq i} \int_0^T E \left[ D(t) \frac{DF_i^K(t)}{\sum_{l \neq j} DF_l^K(t)} \max \left\{ \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(t) - DF_j^K(t), 0 \right\} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (93)$$

デフォルトファンドについては、将来時点における価格変動リスクを含めた形で記述する。具体的に、ゼロ時点における期待エクスポージャーに比例定数  $u$  の割合で拠出すると仮定する。

$$DF_i^K = uE \left[ D(t) \max \left\{ \sum_l V_{il}^K(t), 0 \right\} \right], 0 \leq t \quad (94)$$

## 5.5 正規分布による期待損失分析

ネットによる期待損失と CCP による期待損失を導出した。分析を簡単化するために、現時点を 0、将来時点を  $T$  とする 2 期間モデルを考える。メンバー  $j$  のデフォルト確率を  $p_j = P\{\tau_j \leq T\}$  とする。金利を定数  $r$  とし、割引ファクター  $D(T) = e^{-rT}$  とする。また、メンバー  $j$  のデフォルト条件付き期待値については、カウンターパーティーのデフォルトとエクスポージャーの間で独立であるとする。よって条件付き期待値は無条件期待値で置き換えられる。

ネットによる期待損失 (88) 式は次のように簡単化される。

$$L_i^K = (1 - R) \sum_{j \neq i} e^{-rT} p_j E [V_{ij}^K(T) \mathbf{1}_{\{V_{ij}(T) > 0\}}] \quad (95)$$

CCP による期待損失 (93) 式は次のようになる。

$$\bar{L}_i^K = \sum_{j \neq i} e^{-rT} p_j \frac{DF_i^K}{\sum_{l \neq j} DF_l^K} E \left[ \max \left\{ \sum_{l \neq j} V_{jl}^K(T) - DF_j^K, 0 \right\} \right] \quad (96)$$

資産クラス  $k$  のメンバー  $i$  から  $j$  に対する将来時点  $T$  での取引価格  $V_{ij}^k(T)$  について正規分布を仮定する。この取引価格は取引量  $\theta_{ij}^k$  と証券価格  $\hat{V}^k$  の積からなるとする。この証券価格  $\hat{V}^k$  は平均  $\mu^k$  分散  $\sigma^k$  の正規分布に従うと仮定する。Duffie and Zhu (2011) では平均を 0 として、分布の対称性を仮定することで簡単化を行っているが、今回我々は平均を導入し、分布の非対称性を加えることで拡張を行っている。

$$V_{ij}^k(T) = \theta_{ij}^k \hat{V}^k \quad (97)$$

$$\hat{V}^k = \mu^k + \sigma^k X^k \quad (98)$$

$X^k$  は標準正規確率変数である。標準正規確率変数  $X^k$  と  $X^m$  の相関係数を  $r^{km}$  と表すことにする。ただし、 $r^{kk} = 1, k = 1, \dots, K$  とする。資産クラス間の相関については、Duffie and Zhu (2011) では独立を仮定している\*4が、我々の論文は金利スワップや CDS などの資産間にはある相関が存在すると仮定する。

この  $V_{ij}^k$  を (95) 式と (96) 式に代入し、期待値を計算する。

まず、ネットによる期待損失から計算する。

$$E \left[ \theta_{ij}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) \mathbf{1}_{\{\sum_k \theta_{ij}^k (\mu^k + \sigma^k X^k) > 0\}} \right] \quad (99)$$

第 1 項の期待値に関しては、 $\Phi()$  を標準正規分布関数として

$$\theta_{ij}^K \mu^K P \left\{ \sum_k \theta_{ij}^k (\mu^k + \sigma^k X^k) > 0 \right\} = \theta_{ij}^K \mu^K \Phi \left( \frac{\sum_k \theta_{ij}^k \mu^k}{\sqrt{\sum_k \sum_m \theta_{ij}^k \theta_{ij}^m \sigma^k \sigma^m r^{km}}} \right) \quad (100)$$

と表現することができる。

第 2 項の期待値に関して、定義関数について  $X^k$  を次のように書き換える。

$$X^k = r^{kK} X^K + \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \hat{X}^k \quad (101)$$

$X^K$  と  $\hat{X}^k, k = 1, \dots, K$  は互いに独立な標準正規確率変数であるが、 $\hat{X}^k$  と  $\hat{X}^m$  は独立ではない。この二つの相関係数を計算すると、

$$\begin{aligned} r^{km} &= Cov(X^k, X^m) \\ &= Cov \left( r^{kK} X^K + \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \hat{X}^k, r^{mK} X^K + \sqrt{1 - (r^{mK})^2} \hat{X}^m \right) \\ &= r^{kK} r^{mK} + \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \sqrt{1 - (r^{mK})^2} E \left[ \hat{X}^k \hat{X}^m \right] \end{aligned} \quad (102)$$

よって

$$\hat{r}^{km} \equiv Cov(\hat{X}^k, \hat{X}^m) = \frac{r^{km} - r^{kK} r^{mK}}{\sqrt{1 - (r^{kK})^2} \sqrt{1 - (r^{mK})^2}} \quad (103)$$

---

\*4 Duffie and Zhu (2011) においても資産間相関を導入した計算は Appendix で紹介されていて結果のみを残している、その計算結果を用いた中央清算機関の損失比較などの研究はなされていない



これを用いると、 $X$  を  $X^K$  と独立な標準正規確率変数として、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sigma^k \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \hat{X}^k &= \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \sigma^k \sigma^m \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \hat{r}^{km} X} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \sigma^k \sigma^m (r^{km} - r^{kK} r^{mK}) X} \end{aligned} \quad (104)$$

と書き換えることができる。

上記より (99) 式を計算することができる。

$$\begin{aligned} E \left[ \theta_{ij}^K \sigma^K X^K \mathbf{1}_{\{\sum_k \theta_{ij}^k \mu^k + \sum_k \sigma^k r^{kK} X^K + \sum_k \sigma^k \sqrt{1 - (r^{kK})^2} \hat{X}^k > 0\}} \right] \\ = E \left[ \theta_{ij}^K \sigma^K X^K \mathbf{1}_{\{\sum_k \theta_{ij}^k \mu^k + \sum_k \sigma^k r^{kK} X^K + \sqrt{\sum_k \sum_m \sigma^k \sigma^m (r^{km} - r^{kK} r^{mK})} X > 0\}} \right] \end{aligned} \quad (105)$$

この式を簡単に書くと、

$$E \left[ aX \mathbf{1}_{\{A+bX+cY\}} \right] \quad (106)$$

$X$  と  $Y$  は互いに独立な標準正規確率変数である。平方完成を用いれば計算でき、結果だけ示すと

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2(b^2 + c^2)} \right\} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + c^2}} \phi \left( \frac{A}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right) \quad (107)$$

となる。 $\phi()$  は標準正規密度関数である。まとめると、

$$L_i^K = (1-R) \sum_{j \neq i} e^{-rT} p_j \theta_{ij}^K \left\{ \mu^K \Phi \left( \frac{\sum_k \theta_{ij}^k \mu^k}{a_{ij}} \right) + \frac{\sigma^K \sum_k \theta_{ij}^k \sigma^k r^{kK}}{a_{ij}} \phi \left( \frac{\sum_k \theta_{ij}^k \mu^k}{a_{ij}} \right) \right\} \quad (108)$$

$$a_{ij} = \sqrt{\sum_k \sum_m \theta_{ij}^k \theta_{ij}^m \sigma^k \sigma^m r^{km}}$$

一方、CCP による期待損失についても計算する。まず、デフォルトファンド (94) につ

いて期待値を計算すると

$$\begin{aligned}
DF_i^K &= ue^{-rT} E \left[ \sum_l \theta_{il}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) 1_{\{\sum_l \theta_{il}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) > 0\}} \right] \\
&= ue^{-rT} E \left[ \sum_l \theta_{il}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1_{\{\sum_l \theta_{il}^K > 0\}} 1_{\{(\mu^K + \sigma^K X^K) > 0\}} + 1_{\{\sum_l \theta_{il}^K < 0\}} 1_{\{(\mu^K + \sigma^K X^K) < 0\}} \right) \right] \\
&= ue^{-rT} \sum_l \theta_{il}^K \left\{ \left( \mu^K \Phi \left( \frac{\mu^K}{\sigma^K} \right) + \sigma^K \phi \left( \frac{\mu^K}{\sigma^K} \right) \right) 1_{\{\sum_l \theta_{il}^K > 0\}} \right. \\
&\quad \left. + \left( \mu^K \Phi \left( -\frac{\mu^K}{\sigma^K} \right) - \sigma^K \phi \left( \frac{\mu^K}{\sigma^K} \right) \right) 1_{\{\sum_l \theta_{il}^K < 0\}} \right\} \\
&= ue^{-rT} \sum_l \theta_{il}^K \left( \mu^K \Phi \left( \frac{\sum_l \theta_{il}^K \mu^K}{|\sum_l \theta_{il}^K| \sigma^K} \right) + \frac{\sum_l \theta_{il}^K \sigma^K}{|\sum_l \theta_{il}^K|} \phi \left( \frac{\mu^K}{\sigma^K} \right) \right) \quad (109)
\end{aligned}$$

次に期待損失については、デフォルトファンドを定数とおいて次の計算を行う。

$$E \left[ \max \left\{ \sum_l V_{jl}^K - DF_j^K, 0 \right\} \right] \quad (110)$$

$V_{jl}^K$  に代入して、

$$\begin{aligned}
&E \left[ \left( \sum_l \theta_{jl}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) - DF_j^K \right) 1_{\{\sum_l \theta_{jl}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) - DF_j^K > 0\}} \right] \\
&= E \left[ \left( \sum_l \theta_{jl}^K (\mu^K + \sigma^K X^K) - DF_j^K \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1_{\left\{ X > -\frac{\sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j^K}{\sum_l \theta_{jl}^K \sigma^K} \right\}} 1_{\{\sum_l \theta_{jl}^K > 0\}} + 1_{\left\{ X < -\frac{\sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j^K}{\sum_l \theta_{jl}^K \sigma^K} \right\}} 1_{\{\sum_l \theta_{jl}^K < 0\}} \right) \right]
\end{aligned}$$

ここで

$$b = \frac{\sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j^K}{\sum_l \theta_{jl}^K \sigma^K}$$

と置く。よって期待値は

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j \right) \Phi(b) + \sum_l \theta_{jl}^K \sigma^K \phi(b) \right\} 1_{\{\sum_l \theta_{jl}^K > 0\}} \\ & + \left\{ \left( \sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j \right) \Phi(-b) - \sum_l \theta_{jl}^K \sigma^K \phi(b) \right\} 1_{\{\sum_l \theta_{jl}^K < 0\}} \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned} \bar{L}_i^K &= e^{-rT} \sum_j p_j \frac{DF_i^K}{\sum_{l \neq j} DF_l^K} \left\{ \left( \sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j^K \right) \Phi(b_j^K) + \left| \sum_l \theta_{jl}^K \right| \sigma^K \phi(b_j^K) \right\} \\ & b_j^K = \frac{\sum_l \theta_{jl}^K \mu^K - DF_j^K}{\left| \sum_l \theta_{jl}^K \right| \sigma^K} \end{aligned} \quad (111)$$

## 5.6 数値実験

ネットによる期待損失と CCP による期待損失を比較分析を行う。パラメータを以下に決めます。

$N$	$k$	$\mu$	$\sigma$	$R$
10	1	1	1	0.4

Table 5.1 : parameter set

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

取引量行列は対角が 0 で右上を全て 1、左下は  $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$  より全て -1 である。上から最大のエクスポージャーを保有している企業とし、下に行くほどエクスポージャーは減っていく。

この時、ネットによる期待損失と CCP による期待損失を比較する。その時、CCP に加入するときには抛出するデフォルトファンドの比例定数  $u$  を 0.1, 0.2, ..., 1.0 と動かした時のグラフを示す。

## net vs CCP

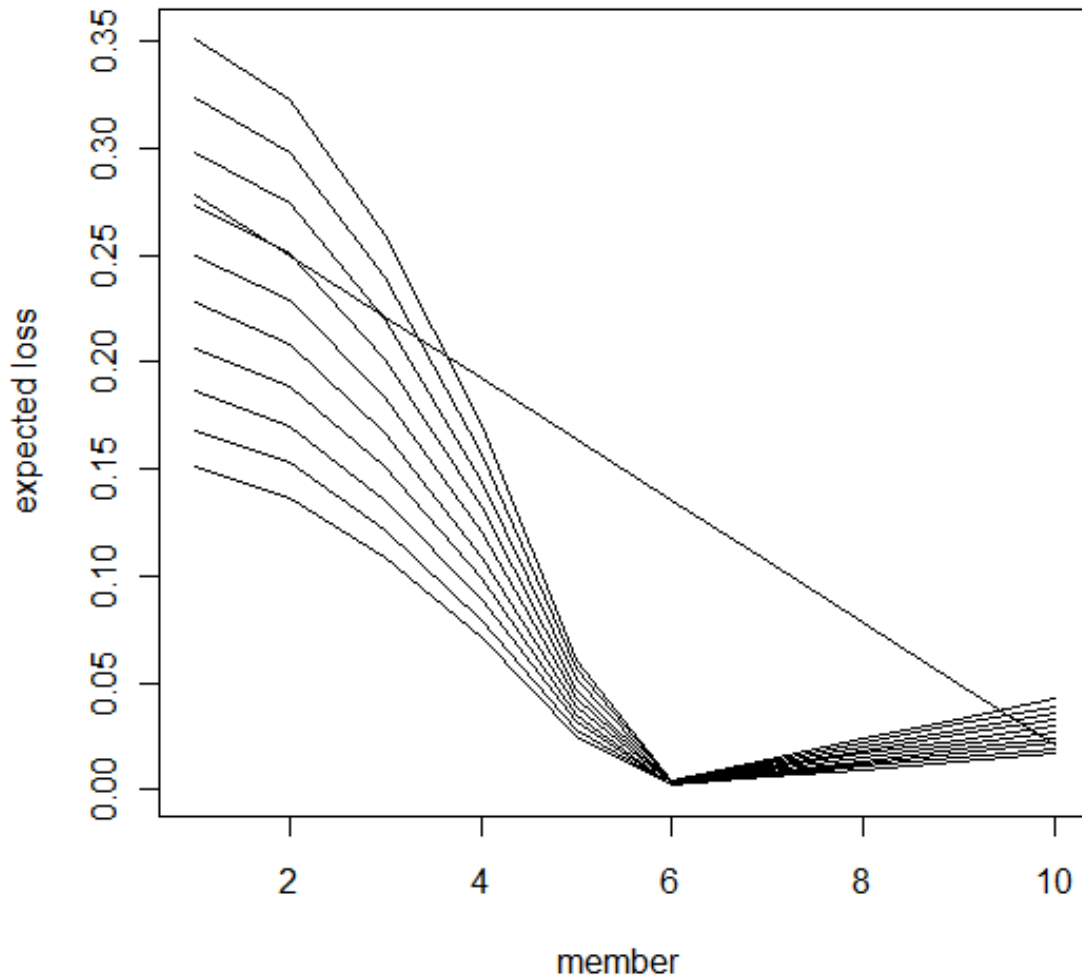


Figure 5.2 : netting による期待損失と CCP による期待損失

Figure 5.2 において、L 字型のグラフが CCP による期待損失で、上から比例定数を  $u = 0.1, 0.2, \dots$  と変化させたときのグラフである。 $u$  の値が小さいとき、最大のエクスポージャーを保有している企業は CCP よりもネットによる期待損失の方が小さい。 $u = 0.4$  以上でネットよりも CCP に加入した方が期待損失が小さくなる。L 字型にキックするのはマイナスの取引量、つまりショートが多くなると将来の取引価格が負になったときに期待エクスポージャーは大きくなる。そのときデフォルトファンドが大きくなるため、期待損失が高まってくる。中間の取引量ではネットするとほぼ 0、含み益が小さいた

め期待エクスポージャーは小さくなる。

ある証券クラスについて、売り買いをバランス良く行っている企業は CCP のほうが通常のネットイングによる方法よりも期待損失を小さくすることができる。買い中心、売り中心の企業はネットによる期待損失の方が小さくなる場合がある。

実際にはデフォルトファンドの納入額は最大のエクスポージャーを保有している企業がデフォルトした場合でも耐えうる額でなければならないと決められている。

$$\sum_{l \neq 1} DF_l \geq E \left[ D(T) \max \left\{ \sum_l V_{1l}^K - DF_1, 0 \right\} \right] \quad (112)$$

これを数値計算で解くと  $t = 0.3645434$  となった。

## 5.7 ネット CCP によるリスクの減少

$K$  個の資産を考え、1つずつの CCP で中央清算を行いエクスポージャーを軽減している。しかし、1つずつに清算を行うのではなく、 $K$  個の資産を同時にネットする方法で清算を行なう方が期待損失が軽減できるのではないかを考える。以下ではこの CCP をネット CCP と呼ぶことにする。

$K$  個の資産を中央清算する場合のデフォルトファンドは、 $K$  個の資産をネットした期待エクスポージャーに比例した額を納入すると考える。

$$DF_i^{net} = uE \left[ D(T) \max \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^N V_{il}^k, 0 \right\} \right] \quad (113)$$

このデフォルトファンドの期待値を計算する。

$$ue^{-rT} E \left[ \left( \sum_k \sum_l \theta_{il}^k (\mu^k + \sigma^k X^k) \right) 1_{\{\sum_k \sum_l \theta_{il}^k (\mu^k + \sigma^k X^k) > 0\}} \right] \quad (114)$$

正規分布の和について、 $X \sim N(0, 1)$  として

$$\sum_k \sum_l \theta_{il}^k \sigma^k X^k = \sqrt{\sum_k \sum_m \left( \sum_l \theta_{il}^k \right) \left( \sum_l \theta_{il}^m \right) \sigma^k \sigma^m r^{km}} X \quad (115)$$

$$c_i = \sqrt{\sum_k \sum_m \left( \sum_l \theta_{il}^k \right) \left( \sum_l \theta_{il}^m \right) \sigma^k \sigma^m r^{km}} \quad (116)$$

とおく。よって、

$$DF_i^{net} = ue^{-rT} \left\{ \sum_k \sum_l \mu^k \Phi \left( \frac{\sum_k \sum_l \theta_{il}^k \mu^k}{c_i} \right) + c_i \phi \left( \frac{\sum_k \sum_l \theta_{il}^k \mu^k}{c_i} \right) \right\} \quad (117)$$

となる。また、ネット CCP による期待損失は

$$\bar{L}_i^{net} = \sum_{j \neq i} \int_0^T E \left[ D(t) \frac{DF_i^{net}(t)}{\sum_{l \neq j} DF_l^{net}(t)} \max \left\{ \sum_{l \neq j} \sum_{k=1}^K V_{jl}^k(t) - DF_j^{net}(t), 0 \right\} \middle| \tau_j = t \right] dP\{\tau_j \leq t\} \quad (118)$$

2 期間モデルを考え、取引価格  $V_{ij}^k$  に (97) 式を代入することにより期待値を計算すると

$$\sum_{j \neq i} e^{-rT} p_j \frac{DF_i^{net}}{\sum_l DF_l^{net}} \left\{ \left( \sum_k \sum_l \theta_{il}^k \mu^k - DF_j^{net} \right) \Phi \left( \frac{\sum_k \sum_l \theta_{jl}^k \mu^k - DF_j^{net}}{c_j} \right) + c_j \phi \left( \frac{\sum_k \sum_l \theta_{jl}^k \mu^k - DF_j^{net}}{c_j} \right) \right\}$$

と表現出来る。

前節の個別資産ごとのデフォルトファンドを  $DF_i^k, k = 1, \dots, K$  とし、個別資産ごとの CCP による期待損失を  $\bar{L}_i^k, k = 1, \dots, K$  とする。ネット CCP のデフォルトファンドを  $DF_i^{net}$  とし、ネット CCP による期待損失を  $\bar{L}_i^{net}$  とする。

**定理 1** 確率変数  $X^k$  は  $-\infty$  から  $\infty$  をとる任意の確率変数とする。  $V_{ij}^k = \theta_{ij}^k (\mu^k + \sigma^k X^k)$  ,  $\forall i, j, k$  とする。ネットしたデフォルトファンドは個別資産ごとのデフォルトファンドの和以下である。

$$\sum_{k=1}^K DF_i^k \geq DF_i^{net} \quad , \forall i \quad (119)$$

**証明** max 関数は凸関数より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K DF_i^k - DF_i^{net} &= \sum_{k=1}^K E \left[ \max \left\{ \sum_{l=1}^n V_{il}^k, 0 \right\} \right] - E \left[ \max \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^n V_{il}^k, 0 \right\} \right] \\ &\geq E \left[ \max \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^n V_{il}^k, 0 \right\} \right] - E \left[ \max \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^n V_{il}^k, 0 \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

ネット CCP の効果を見るために数値実験を行う。パラメータを以下の Table 5.2 のように決めた。

$N$	$u$	$\mu$	$\sigma$	$R$
10	0.3	1	1	0.4

Table 5.2 : parameter set

$$\theta^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}, k = 1, \dots, K$$

資産クラス間の相関係数  $r^{km} = 0.2$  で全て一定とした。デフォルトファンドの比例定数は固定し、証券数を変化させたときの CCP の効果を検証する。この時の  $K = 2$  と  $K = 10$  について図示しました。個別資産ごとの CCP による期待損失  $\bar{L}_i^k$  に対して、資産数について和を取った値  $\sum_k \bar{L}_i^k$  を CCPs として図示している。

**k=2 CCP expected loss**

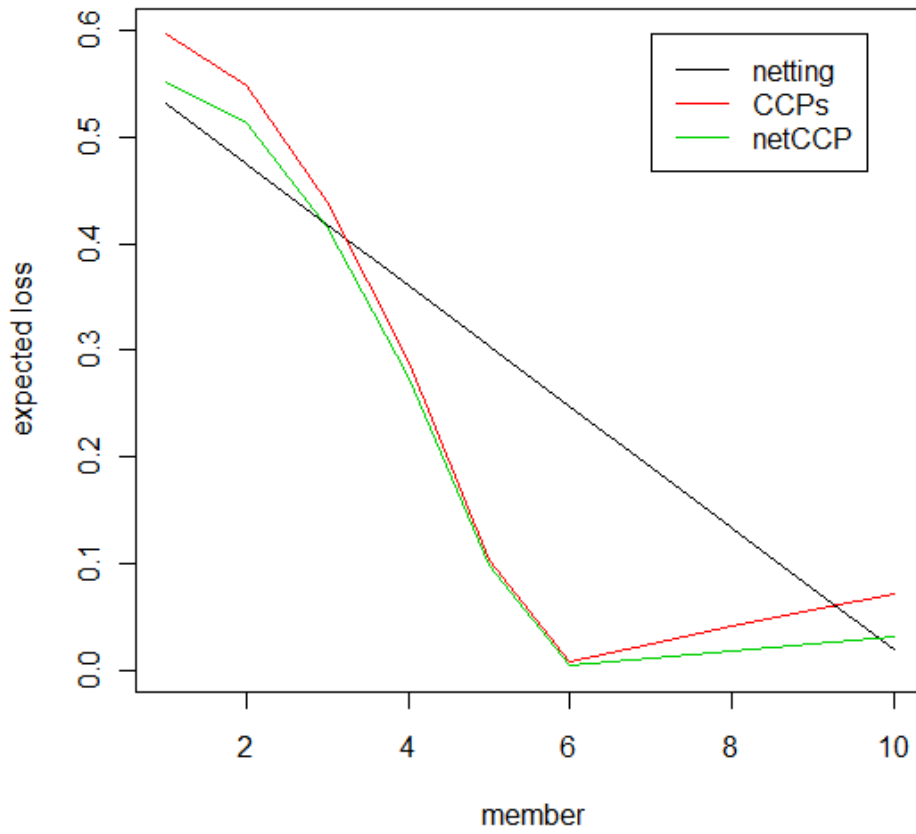


Figure 5.3 : 各資産をネットした CCP による期待損失 (資産数 2)



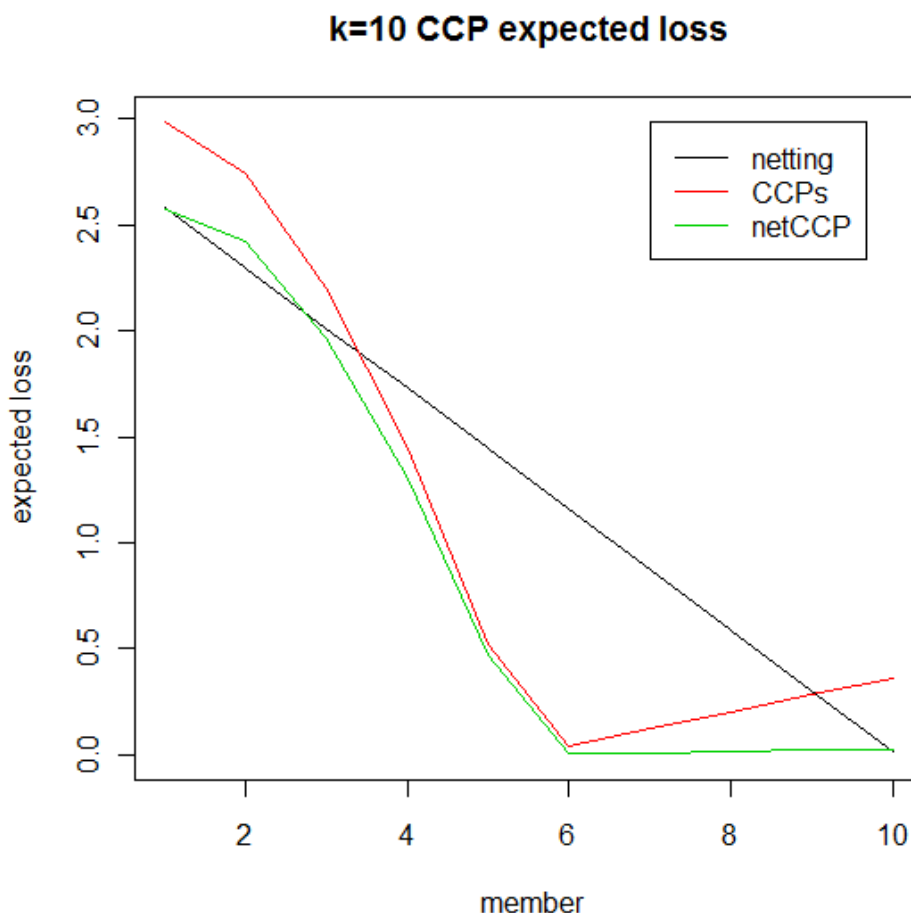


Figure 5.4 : 各資産をネットした CCP による期待損失 (資産数 10)

Figure 5.3 と Figure 5.4 通常のネットによる期待損失 (netting) と資産ごとに CCP の期待損失について和をとったもの (CCPs) と各資産を 1 つの CCP でネットした期待損失 (net CCP) をメンバーごとに比較したグラフである。黒線が通常のネットによる期待損失である。資産数が増えると個別資産ごとの CCP の和 (CCPs) は損失が上昇していくことが分かる。逆に資産をネットして行った CCP (netCCP) は減少していくのが分かる。よって、資産数が増加すると個別資産ごとに CCP を導入すると、損失軽減の効果が低くなり、逆にネット CCP の効果は高まることが分かる。

### 5.7.1 デフォルトファンド拠出割合の変化

デフォルトファンド (94) 式の拠出割合  $u_i$  を各社一定とせず、CCP の導入によって導入前よりも期待損失が全てのメンバーについて低下するよう変化できるような拠出割合を

考える。デフォルトファンド式を再掲すると、

$$DF_i^K = u_i E \left[ D(t) \max \left\{ \sum_l V_{il}^K(t), 0 \right\} \right], 0 \leq t$$

まず、 $\mu = 0$ (将来の価格変動が対称) としたときの前述の期待損失を比較して見る。他のパラメータは以下の Table 5.3 のように仮定した。

$N$	$K$	$u$	$\mu$	$\sigma$	$R$
10	4	0.3	0	1	0.4

Table 5.3 : parameter set

$$\theta^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}, k = 1, \dots, K$$

また、資産間相関  $r^{km} = 0.2, k \neq m$  とした。このときの期待損失は横軸をメンバーとして、Figure 5.5 のようになった。

net and CCP's and net CCP  $\mu=0$

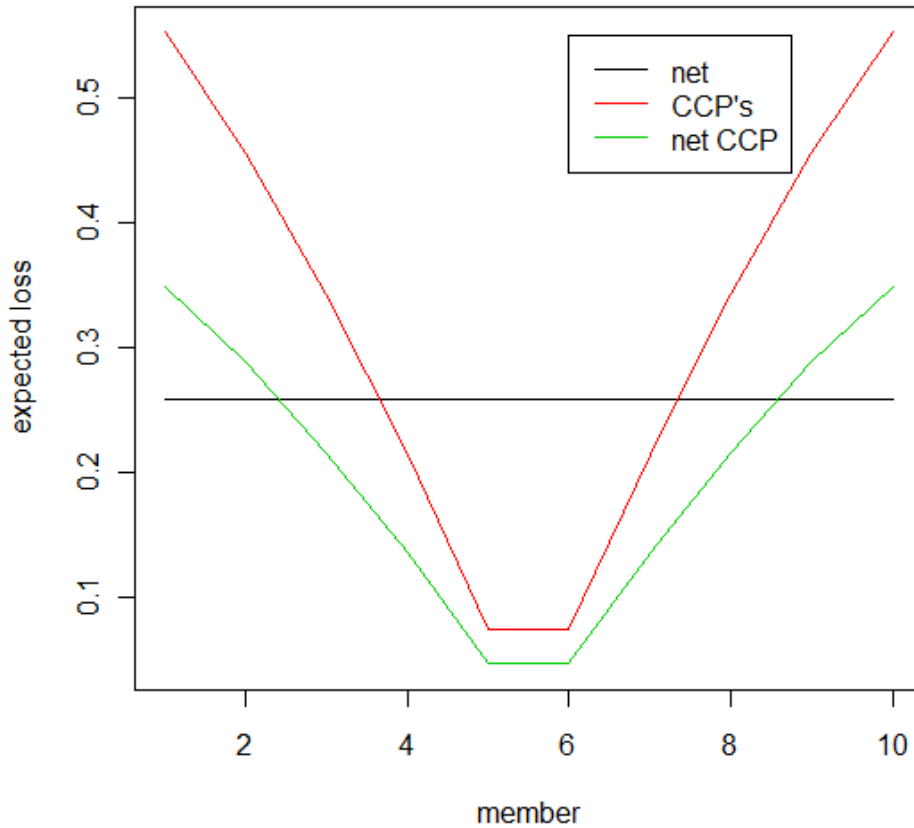


Figure 5.5 :  $\mu = 0$  の場合の期待損失比較

$\mu = 1$  と比べて極端に端のメンバー (含み益の大きい) の期待損失が大きく出た。この結果は  $\mu = 1$  とした時と同様である。

次に、それぞれのポジションに応じてデフォルトファンドの比率  $u$  の値を一定 (ここでは 0.3) ではなく、含み益の大きい端のメンバーは少なくして、中心の人は多くなるように変化させた。そしてこのとき、通常ネットによる期待損失と同じ値となるような  $u_i$  の値を計算した。この  $u_i$  が分かれば、CCP を導入するインセンティブを持つことができると考えられる。

計算方法は、連立方程式を解くことになるが、繰り返し計算によって  $u_i$  を発見的に決定していった。

member	CCPs (expected loss)	net CCP (expected loss)
1	0.5095791 (0.2592085)	0.004660318 (0.2397638)
2	0.6124035 (0.2592085)	0.005648542 (0.2385981)
3	0.8058195 (0.2592084)	0.007571279 (0.2389204)
4	1.2697636 (0.2592084)	0.012087629 (0.2390044)
5	3.6509452 (0.2592084)	0.034802085 (0.2390487)
6	3.6509452 (0.2592084)	0.034802085 (0.2390487)
7	1.2697636 (0.2592084)	0.012087629 (0.2390044)
8	0.8058195 (0.2592084)	0.007571279 (0.2389204)
9	0.6124035 (0.2592085)	0.005648542 (0.2385981)
10	0.5095791 (0.2592085)	0.004660318 (0.2397638)

Table 5.4 : ネットによる期待損失以下となるデフォルトファンド比率  $u_i$

Table 5.4 は通常のネットによる期待損失の額 (0.2592084) 以下となるような CCPs のデフォルトファンドの比率とネット CCP のデフォルトファンドの比率を表している。メンバー 1 と 5 を比べると約 7~8 倍程度の差がある。この差は CCPs とネット CCP の期待損失の差とほぼ同様であった。このことから、全てのメンバーにとって CCP へのインセンティブを持つことは、メンバーごとの期待損失の比率の逆数となるような関係でデフォルトファンドの比  $u_i$  に代入すればいいことが推測される。

また、ネット CCP において、一定よりもそれぞれのポジションに応じて  $u_i$  を決定するとよりデフォルトファンドを圧縮することも結果から考察される。

## 6 結論

倒産リスクに関する評価と管理という2つについて論じてきた。

倒産リスクの評価に関しては、regime switching を平均回帰水準に取り入れたことで景気変動を確率変数として取り入れることができた。さらに、その好景気と不景気の状況と企業間デフォルト相関と大きく影響し合っていることが確かめられた。具体的に、好景気からスタートした場合相関に従ってすべての企業が一定期間内に生存する確率が高まり、逆に、不景気から始まる場合には相関に従い生存確率が減少することが分かった。よって倒産リスクを評価する場合には、企業間デフォルト相関のみではなく景気変動などのマクロ変数を取り入れることで、より柔軟で現状に即した評価を行えることが示された。

課題点としては、スイッチングを取り入れた場合、解析的な解が求めにくいところにある。このため CDS 価格情報から CIR パラメータや推移確率を求めることが困難になり、パラメータの多さも正しい結果を導くことが難しくなってしまった。このスイッチングモデルの推定に関しては、最尤法を用いた方法が多く提案されているが、生存確率を推定しやすいよう近似するようなモデル化を行うことで解決していきたいと考えている。CDO の計算に関しても、参照企業社数が大きく (約 30 社程度) になると値が振り切れてしまい求まらなくなってしまう。スイッチングモデルによるモデルの柔軟性を生かしつつも、推定など数値計算が求まりやすいよう検討していきたい。

次に、倒産リスクの管理については、金融危機以来注目されている中央清算機関 (CCP) について、具体的に期待損失を用いてリスクを算出した。流動性リスクを減少させるという意味において CCP は有益であるとしながらも、各企業にとって CCP を導入する方がリスクを減少させることができるかどうかについては、まだ知られていないところが多くあった。今回の研究から CCP を導入する方が、従来のネットィングによるリスクを減少するよりも有益である場合は、1つには売りと買いをバランス良く行っていく企業であることである。もう1つはある一定以上のデフォルトファンドであれば CCP に加入するようなインセンティブが存在することである。また、複数デリバティブを1つの CCP で行う場合について、リスクをより効果的に減少させる事ができることも示された。これらのことから、CCP が相対取引におけるカウンターパーティ・リスク管理の有用性を確かめることができた。

今後の課題点としては、近年の中央清算の義務化に従い、清算の集中化が問題となるであろう。資金が清算機関に集中することで、清算参加者の破綻により CCP 自体が破綻

するリスクを負うことになる。この点、別資産クラスを1つの CCP で清算することにより、複数の CCP で清算するよりも期待損失が減少するが、集中リスクを含めずに行っている。CCP の破綻を含めたモデル化を行うことでより正しい損失管理がなされるものと考えられる。また、2 期間のみならず、複数期間によるモデル化で長期的な利用に対して損失管理が可能であると思われる。その場合価格変動モデルを正規分布と仮定したが、ブラウン運動を用いた価格モデルで計算することなどが考えられるが、期待値の計算が困難であったため今後の課題としたい。

## 参考文献

- Alexander, C. and Kaeck, A. (2008), “Regime dependent determinants of credit default swap spreads”, *Journal of Banking & Finance*, **32**(6), 1008-1021.
- Arnsdorf, M. (2012), “Central Counterparty Risk”, *arXiv preprint arXiv:1205.1533*.
- Brigo, D. and Capponi, A. (2009), “Bilateral counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to Credit Default Swaps”, *Available at SSRN 1318024*.
- Brigo, D. and Morini, M. (2005, September), “CDS market formulas and models”, *In Proceedings of the 18th annual Warwick options conference*.
- Burtschell, X., Gregory, J. and Laurent, J. P. (2005), “A comparative analysis of CDO pricing models”
- Chiarella, C., Fanelli, V. and Musti, S. (2011), “Modelling the Evolution of Credit Spreads using the Cox process within the HJM framework: a CDS Option Pricing Model”, *European Journal of Operational Research*, **208**(2), 95-108.
- Driffill, J., Kenc, T., Sola, M. and Spagnolo, F. (2009), “The effects of different parameterizations of Markov-switching in a CIR model of bond pricing”, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, **13**(1).
- Duffie, D. and Kan, R. (1996), “A yield - factor model of interest rates”, *Mathematical finance*, **6**(4), 379-406.
- Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K. (2000), “Transform analysis and asset pricing for affine jump - diffusions”, *Econometrica*, **68**(6), 1343-1376.
- Duffie, D. and Zhu, H. (2011), “Does a central clearing counterparty reduce counterparty risk?” *Review of Asset Pricing Studies*, **1**(1), 74-95.
- Duffie, D. and Garleanu, N. (2001), “Risk and valuation of collateralized debt obligations”, *Financial Analysts Journal*, **57**(1), 41-59.
- Eckner, A. (2009), “Computational techniques for basic affine models of portfolio credit risk”, *Journal of Computational Finance*, **13**(1), 63.
- Elliott, R.J. and K. Nishide (2014), “Pricing of Discount Bonds with a Markov Switching Regime”, *Annals of Finance*, **10**(3), 509–522.
- Giesecke, K. (2004), “Credit risk modeling and valuation: An introduction”, *Available at SSRN 479323*.

- Hansen, A. T. and Poulsen, R. (2000), “A simple regime switching term structure model”, *Finance and Stochastics*, **4**(4), 409-429.
- Hull, J. C. and White, A. D. (2008), “Dynamic models of portfolio credit risk: A simplified approach”, *The Journal of Derivatives*, **15**(4), 9-28.
- De Jong, F. and Santa-Clara, P. (1999), “The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **34**(01), 131-157.
- Kijima, M., Motomiya, S. I. and Suzuki, Y. (2010), “Pricing of CDOs based on the multivariate Wang transform”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **34**(11), 2245-2258.
- Kijima, M. (2000), “Valuation of a credit swap of the basket type”, *Review of Derivatives Research*, **4**(1), 81-97.
- Landen, C. (2000), “Bond pricing in a hidden Markov model of the short rate”, *Finance and Stochastics*, **4**(4), 371-389.
- Laurent, J. P. and Gregory, J. (2005), “Basket default swaps, CDOs and factor copulas”, *Journal of Risk*, **7**(4), 103-122.
- Longstaff, F. A. and Rajan, A. (2008), “An empirical analysis of the pricing of collateralized debt obligations”, *The Journal of Finance*, **63**(2), 529-563.
- Pykhtin, M. and Rosen, D. (2010), “Pricing counterparty risk at the trade level and CVA allocations”
- Zhou, N. and Mamon, R. (2012), “An accessible implementation of interest rate models with Markov-switching”, *Expert Systems with Applications*, **39**(5), 4679-4689.
- 小宮清孝 (2003), “CDO のプライシング・モデルとそれを用いた CDO の特性等の考察:CDO の商品性, 国内市場の概説とともに”, 金融研究 第 22 卷 別冊第 2 号.
- 新谷幸平山田哲也吉羽要直 (2010), “金融危機時における資産価格変動の相互依存関係:コンピュータに基づく評価”, 金融研究 第 29 卷 第 3 号.
- 戸坂凡展吉羽要直 (2005), “コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説”, 金融研究 第 24 卷 別冊第 2 号.
- 山下智志吉羽要直 (2010), “デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価: CIR 型ハザード率過程での解析的評価”, ディスカッションペーパーシリーズ 2010-J-10.