別紙様式第２号

学位論文及び審査結果の要旨

横浜国立大学

氏　　　　　　　名　王 歓
学　位　の　種　類　博士（経済学）
学　位　記　番　号　国社博甲第２４１号
学 位 授 与 年 月 日　平成２６年９月２５日
学 位 授 与 の 根 拠　学位規則（昭和 28 年４月１日文部省令第９号）第４条第１項及び
　　　　　　　　　　横浜国立大学学位規則第５条第１項
研究科(学府)・専攻名　国際社会科学研究科　グローバル経済専攻
学　位　論　文　題　目　移民項のある分枝過程の統計的逐次解析
論　文　審　査　委　員　主査　横浜国立大学　永井 圭二　教授
　　　　　　　　　　　　　　横浜国立大学　秋山 太郎　教授
　　　　　　　　　　　　　　横浜国立大学　小林 正人　教授
　　　　　　　　　　　　　　横浜国立大学　奥村 綱雄　教授
　　　　　　　　　　　　　　横浜国立大学　西出 勝正　准教授

論文の要旨

本論文のテーマは「移民項のある分枝過程の統計的逐次解析」である。

移民項のある分枝過程モデルに対して、単一変量と二変量の二つケースを察した。統計的な手法で、移民項のある分枝過程モデルに対し逐次解析理論を厳密に証明したうえ、シミュレーションを通じ、主張する観点を直観的験証した。

第１章では、本論文に使われる理論根処として数学的な定義と定理をまとめておる。微分積分学の理論、測度空間理論、マルチンゲールの理論と確率過程主な基礎となる知識である。この部分の理論をきちんと勉強したうえ、論文に関する理論を証明した。

第２章では、単一変量モデルについて直観的な解説するうえ、移民項のある分枝過程の逐次確率比検定を行った。この部分は筆者の修士時代の研究題目である。分枝過程モデル
$$z_0 = 1, \mathrm{z}_n = \sum_{i=1}^{z_{n-1}} \xi_{n,i} + Y_n$$
において、Zn と Yn　それぞれの期待値をμとλを推定して、シミュレーションよりヒストグラムで表示した。そして帰無仮説μ＝１と対立仮説μ＞１を設定し、逐次確率比検定をおこなった。統計量は関数尤度比
$$L = \frac{\mathrm{P}_1\left(z_1, y_1 \mathrm{L}\ \ \mathrm{z}_n, y_n \middle| z_{n-1}\right)}{\mathrm{P}_0\left(\mathrm{z}_1, \mathrm{y}_1 \mathrm{L}\ \ z_n, y_n \middle| z_{n-1}\right)}$$
で決められる。停止時刻
$$T = \min\left\{ t \geq 1 : \log \frac{f_1(z_1) f_1(z_2) \mathrm{L}\ \ f_1(z_n)}{f_2(z_1) f_2(z_2) \mathrm{L}\ \ f_2(z_2)} \notin [a, b] \right\}$$
と定義される。この基で一定条件に満たす時刻ｔを取り出し、サンプリングをストプする。このような停止時刻をシミュレーションより観測された。そしてこの検定の二種類誤りをシミュレーションより算出した。理論値と大体一致の結論を取得したうえ、各特性値の特徴を明確にした。

第３章で確率母関数など性質を利用し、移民項のある分枝過程モデルに対して逐次解析を行った。そして臨界値ｍ＝１において逐次検定シミュレーションのを行った。この部分での理論は I.V. Basawa (1991) Sequetntial Estimation For Brnching Processes With Immigration , とKeiji Nagai (2007) Sequetntial Estimation Test For The Criticality Of Branching PROCESSES を参考した。Feller(1951)によって始められたマルコフ過程の拡散近似を考え,逐次統計的方法で考察した。停止時刻を定義するためフィシャー情報量の意味とパワーシリーズを詳しく紹介

した。ＤＤＳ定理を利用して統計量の収束先を厳密に証明したうえ、Bessel 過程の表現を導いた。ベッセル過程の transition 密度関数よりシミュレーションの考え方を提案した。

$T_c = \inf\left\{ n \geq 0; \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1} / \hat{\sigma}_n^{\,2} \geq c^2 \right\}, c \to \infty$ で定義されるとき、この方法ではサンプリングの規模を想定したら Bessel 過程の知識よりサンプリングのとまる条件 c を数量的に考察できる。シミュレーションで観測された StoppingTime が想定したサンプリングの規模大体一致であるので目的を実現した。さらに統計値 $c\left(\hat{m}_{T_c} - 1\right)$ の分布をヒストグラムで観測された。理論的ではこの統計値が標準ブラウン運動に従うが、シミュレーションで大体正規分布のヒストグラムが出ていたため、モデルの逐次解析理論を験証した。

第４章では第 3 章の解析理論のうえ SPRT 検定を行った。単一変量移民項のある分枝過程において、Abraha Wald 1947 年でが開発した特定の逐次仮説検定の手段で SPRT 検定を行い、シミュレーションで検定力について考察する。二種類誤りの算出方法を明確したうえ、シミュレーション値を計算した。そして、本論文では SPRT 検定の上、停止時刻に対してＤＤＳ定理を利用し、時間変更をした。この場合、ＳＰＲＴ検定はブラウン運動で表現され、2 種類の誤りもブラウン運動で表現できた。閾値の決定について Wald の方法は正当化されていると考えた。シミュレーションより 2 種類の誤りを計算した。物理系の研究（地震の予報や機械のコントロールなど）によく使われる分枝過程モデルに対しては、ＳＰＲＴ検定は現実的意味がとても大きいと思う。

第５章では二変量モデル $\begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{X_{k-1,1}} \begin{bmatrix} \xi_{k,j,1,1} \\ \xi_{k,j,1,2} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{X_{k-1,2}} \begin{bmatrix} \xi_{k,j,2,1} \\ \xi_{k,j,2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{k,1} \\ \varepsilon_{k,2} \end{bmatrix}$ に対して、具体的な例で解説した上逐次検定をした。

二変量モデルを解説して、シミュレーションより探索してみた。2 変量モデルの期待値計算などのことについて理論値とシミュレーションの結果がほぼ一致であった。

本論文でパラメータの推定、停止時刻問題の探索、逐次検定など問題を考察することより、移民項のある単一変量と 2 変量分枝過程に関する特性を明確にした。逐次解析は統計的推測に必要なデータを必要最小限得ることで、早い時点で条件を満たすサンプルを獲得し、早期警報システムを提供できる点になる。逐次解析の方法は一変量モデルから二変量モデルへ拡張して、新たな考えである。

自然界では生物の出生と死亡が自然なものだ。子どもを生みだし続けるので物種が絶滅せず、各世代が一つの集団になる。科学では電子信号の転送するように、一本信号源から出ていく電子が電子板を通る時何本の新しい電子を生みだす。我々は子のような数の増え方に子どもから直観的印象がある。本論文で、数理統計の方法を通じ、この増え方を定量に研究を行う後、分枝過程に対する認識が深くなった。特性値の計算より、分枝過程に従うある集団の規模、この先どうのように変化するのが明らかに知った。さらにシミュレーションで分枝過程を量的に再現し、理論推定の結果を検験することが出来る。コンピュータ技術の先進性を実感できる。

集団規模の縮小して行ってほしいか、拡大いて行ってほしいか、各分野の研究に対して希望も異なる。逐次解析を用いて、希望条件に満たすサンプリングを探すことができる。この探査が実現できたら、我々の社会生活では深刻の影響を与える。また本論文の例を言うと、逐次解析と SPRT 検定より希望な効果を早い段階で知るということができ各分野の研究及ぶ社会生活に対する積極な意義がある。

数理情報学などのコンピュータ科学技術レベルが日ましに向上する今日、数理経済などの社会科学分野の研究においても、コンピュータシミューレションを通じ、大量なデータに対しても正確で迅速な分析が実現できる。以前自然科学の研究手段は今社会科学分野でも活用している。コンピュータは二つの領域をつなぎ合わせ、いろいろな研究成果を共通に利用するようになった。

審査結果の要旨

１．問題設定

分枝過程は出生死滅を繰り返す個体の総数を表す確率過程として重要である。例として、インフルエンザのような伝染性疾患の感染者数が国内で増加していく状況を考える。一人の感染者が平均して m 人にウイルスを感染させるものとし、感染者の総数を分枝過程とみなす。m は臨界定数とよばれる。統計家は pandemic な状況である帰無仮説（m ≧ 1）と対立仮説（m ＜ 1）のうちどちらが真か早く知りたいが、医療機関から報告される日々のデータから推測を行う際、以下のような問題点がある。帰無仮説が真である場合は少ない観測日数で十分小さな標準誤差が確保できるが、対立仮説が真の場合標準誤差を小さくするには観測日数を多く必要とし、少ない観測日数では第二種の過誤が高確率で起きる。本論文ではこうした問題を持つ分枝過程の臨界性の検定問題に対して、統計的逐次解析の方法を考察する。統計的逐次解析では、データが逐次的に与えられる状況を想定し、ランダムな停止時刻により推測を行う。特に、移民項のある分枝過程の逐次推定問題を取り扱った Sriram, Basawa and Huggins(1991)を参考にして検定問題を考える。Sriram 等との違いは、m について 1 のまわりの局所パラメータを考察した点にある。

２．論文の構成および要旨

1 章と 2 章では、本論文に使われる数学と統計学に関する予備知識を述べている。

3 章では、2 節で Kurtz and Protter の離散時間マルコフ過程の拡散過程への近似を、分布に仮定を置かない一般的な移民項のある分枝過程の場合に適用している。そこでは、移民項のある分枝過程は、m が 1 のまわりの局所パラメータである場合に、CIR 過程に収束することを示している。また 3 節では、子孫分布と移民分布がそれぞれ一般のべき級数分布従うとき、帰無仮説(m＝１)に対する局所対立仮説（m＝1－Δ/c：Δは局外母数、c→∞）についての対数尤度比の表現を求めている。4 節では Fisher 情報量が閾値に達するときに停止する停止時刻を定義して、閾値を大きくしたときの検定統計量と停止時刻の漸近理論を論じている。そこでは、検定統計量が DDS ブラウン運動に収束し、停止時刻が Bessel 過程で表現される確率変数に収束することを示している。５節ではシミュレーションを実施し、Bessel 過程の推移密度関数の数値積分で求められる理論結果と整合的であることを示している。

4 章では、1 節で逐次確率比検定(Sequential Probability Ratio Test; SPRT)を、帰無仮説 m＝１と局所対立仮説 m=1-Δ/c により定式化し、2 節で Wald の SPRT の公式を示している。3 節でシミュレーション結果を与えている。

5 章では二変量の移民項のある分枝過程モデルに対して、推定方法のシミュレーションを行っている。また、この問題の逐次検定の方法の可能性も探っている。

３．本論文の評価

3 章で展開された臨界性の逐次検定の方法は、極めて美しい局所漸近正規(Local Asymptotic Normality)のが成立していることを意味し、これにより 3 次の漸近最適性が示される。またその際、一般的なべき級数分布のもとで対数尤度の展開式を求めているが、これは有用な結果であるといえる。4 章では、Wald の SPRT の公式がこの場合でも成立することを示している点が評価される。5 章で論じられた 2 変量問題は非常に興味深く、推定方法まで得ている点は評価できるが、逐次検定の方法の解析結果を得ていない点が惜しまれる。

本論文は、いくつかの未解決部分を残しているが、博士論文としては高い評価が与えられると考えられる。以上の観点から、審査委員会は本研究科学位基準②を適用し、王歓氏の研究が博士号学位に値するものと判断する。

注　論文及び審査結果の要旨欄に不足が生じる場合には、同欄の様式に準じ裏面又は別紙によること。