紹　介

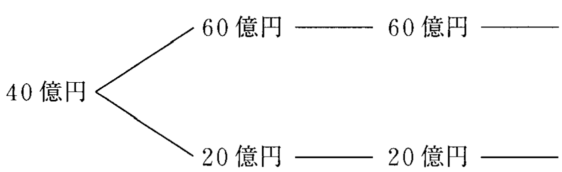
経営のための「実物投資へのオプションアプローチ」(上)

笹　井　　均

1．はじめに

投資は将来得られる利得の期待のために現時点で費用を負う行為のことである．プラントを作る企業，商品の仕入れを行う商人，職業教育に時間を費やす人等はこの意味で投資家であり，投資についての意思決定はいたる所に見受けられる重要な問題である．

投資決定のための基準として古くから用いられてきたものは，投資によって得られる将来利得のフローと投資のための支出のフローの現在価値の差を計算して，それが非負であれば，即ち正味現在価値（NPV）が非負ならば投資を行うというルールである．多くの場合，このルールが今投資するか永久に投資しないかという二者択一のケースに適用されてきた．このことは，柔軟性を欠いた投資決定のルールと言わざるをえない．将来利得は不確実であるため，将来についての更なる情報を入手して，投資決定を行った方が賢明であるときもある．例えば現時点では１年間に40億円の利得を確実に生み出すことのできるプロジェクトへの投資を考えよう．しかしながら１年先の利得は毎年60億円になるか20億円に下落するか不確定である．その実現の確率は各々0.5としよう．このプロジェクトへの投資のコストは330億円である．割引率は10%としよう．



今直ちに投資した場合のNPVは，

$$40 + 0.5 \times \sum_{t=1}^{\infty} \frac{60}{(1.1)^t} + 0.5 \times \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} = 440$$

であるから，440－330＝110＞0となり，現時点で直ちに投資すべきかどうか判断しなければならないとすれば直ちに投資するという決定が下される．ところが来年まで決定を延ばすことが許されるなら，来年になれば利得の水準が60億円か20億円のどちらかが判明する．もし，20億円であるなら，その時点でのNPVは，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} - 330 = -110 < 0$$

であるので投資すべきではない．一方，もし60億円であるなら，その時点でのNPVは

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{60}{(1.1)^t} - 330 = 330$$

であるから，投資すべきであるということになる．このように新しい情報の開示をもとに投資の決定を行うとすると現時点でのNPVは

$$0.5 \times \frac{330}{1.1} = 150\text{億円}$$

となり，柔軟な投資の決定が行われる場合の期待利得は上昇する．150－110＝40億円は直ちに投資を行うことによって生ずる機会費用と考えることができるだろう．投資コストは一般には回収できないコ

スト (sunk cost) であるため，より柔軟な判断が求められねばならない．

ここでは，あるプロジェクトへの投資問題を考える．そして，最初に投資されたコストはサンク・コストであり，プロジェクトから得られる将来利得には不確実性があり，投資のタイミングには自由度があるといった特徴を含む投資決定のモデルを考えていく．

投資を実行するタイミングを視野に入れるということは，いつでも投資を実行できる投資のオプションを保有することに他ならない．そういった意味において，現在あるいは将来においてあるコストを支払うことによってある価値をもった資産を保有していると考えてよい．これはまさに投資コストを行使価格としたコール・オプション (call option) である．したがって，投資オプションの価値評価に近年急速に発展してきた金融派生証券の理論が適用できることは容易に予測されるであろう．

本稿は，このような投資オプションの分析方法について，先駆的著書，「Dixit & Pindyck: Investment Under Uncertainty, Princeton Univ. Press, 1993」の基本的な考え方を簡潔に紹介したものである．本稿では解説の対象を大学院生としている．したがって，確率過程及びダイナミック・プログラミングの基本的知識が前提とされている．これらに関心のある読者は他書[1]を参照されたい．

２．基本的手法

活動している１つの企業（プロジェクト）を考えよう．この企業は最適に運営され，単位時間あたり１単位のアウトプットを生産することができる．そのアウトプットから得られるある時点（現時点）t における単位時間あたりの利潤は，その時の状態 (state) χ_t に依存して，$\pi(\chi_t, t)$ としよう．χ_t を価格として取扱い，生産費用を０と考えたときには，$\pi(\chi_t, t) = \chi_t$ となるだろう．

状態 χ_t の dt 時間後の状態 χ_{t+dt} は，現時点では不確実である．これから先の議論では微少時間の変化を考えるという意味で dt と書いた．将来の状態は不確実に変動し，確率的振舞として把握されるという意味で，確率過程に従う．

状態 χ_t にある企業が将来最適に運営され，このような利潤を生み出すことができるとき，その企業の価値を $F(\chi_t, t)$ で表わすことにする．我々の目的は，この価値を求め，投資のタイミングを分析することである．価値を求める方法としては，Dynamic Programming (DP) による方法と，Contingent Claim (CC) による方法がある．更に，この価値を用いて投資のタイミングを分析する手法として Optimal Stopping (OS) がある．

（１）DPアプローチ

時間的割引率が外生的に与えられ，$\rho > 0$ とする．計画期間を t から T までとすると，$F(\chi_t, t)$ は，

$$F(\chi_t, t) = \varepsilon\left[\int_t^T e^{-\rho(\tau - t)}\pi(\chi_\tau, \tau)\,d\tau + e^{-\rho(T-t)}\Omega(\chi_T, T)\right] \tag{1}$$

である．ここで，$\Omega(\chi_T, T)$ は最終時点 T における利得 (termination payoff) であり，$\varepsilon[\cdot]$ は期待値を表わす．区間を $(t, t+dt)$ と $(t+dt, T)$ に分割すると，最適性の原理[2]から，

$$F(\chi_t, t) = \pi(\chi_t, t)\,dt + e^{-\rho dt}\varepsilon\left[F(\chi_{t+dt}, t+dt) \mid \chi_t\right] \tag{2}$$

が成立する．$\varepsilon[\cdot \mid \chi_t]$ は χ_t が所与のもとでの条件付期待値を表す．
$\chi_t = \chi$ と与え，dt より高次 (order) の項を削除すると (2) 式は，

$$F(\chi, t) = \pi(\chi, t)\,dt + (1 - \rho dt)F(\chi, t) + \varepsilon[dF(\chi, t)] \tag{3}$$

となる．ただし，$dF(\chi, t) = F(\chi_{t+dt}, t+dt) - F(\chi, t)$ であり，$dt \to 0$ のとき $dF(\chi, t) \to 0$ と仮定してある．(3) 式を整理すると次の asset return equation が得られる．

$$\rho F(\chi, t)\,dt = \pi(\chi, t)\,dt + \varepsilon[dF(\chi, t)] \tag{4}$$

$dF(\chi, t)$は，χ_tを規定する確率過程によって計算され，最終的には(4)式を境界条件$F(\chi, T) = \Omega(\chi, T)$のもとで解けば，$F(\chi, t)$が求まることになる．ここでは，それがブラウン運動（Brownian motion process）とポアソンプロセス（Poisson process）によって記述される場合を考えよう．

（i）伊藤プロセス

$$d\chi_t = a(\chi_t, t)dt + b(\chi_t, t)dZ_t,$$

ただし，Z_tは標準ブラウン運動とする．このとき，伊藤の補題から，

$$dF(\chi, t) = \{a(\chi, t)F_\chi(\chi, t) + \frac{1}{2}b(\chi, t)^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + F_t(\chi, t)\}dt + b(\chi, t)F_\chi(\chi, t)dZ_t \tag{5}$$

となる．したがって，(4)式から，

$$\rho F(\chi, t) = \pi(\chi, t) + a(\chi, t)F_\chi(\chi, t) + \frac{1}{2}b(\chi, t)^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + F_t(\chi, t) \tag{6}$$

が得られる．もし，$a(\chi, t) = \alpha\chi$, $b(\chi, t) = \sigma\chi$であれば（幾何ブラウン運動），(6)式は，

$$\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + \alpha\chi F_\chi(\chi, t) + F_t(\chi, t) - \rho F(\chi, t) + \pi(\chi, t) = 0 \tag{7}$$

の形になる．更に$\pi(\chi, t) = \pi(\chi)$，すなわち a，b，πがtに依存しないときには，明らかに$F(\chi, t)$はtに依存せず，$F(\chi, t) = F(\chi)$と書ける．したがって，(7)式は次のような常微分方程となるだろう．

$$\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F''(\chi, t) + \alpha\chi F'(\chi) - \rho F(\chi) + \pi(\chi) = 0 \tag{8}$$

(ii) ポアソンプロセス

$$d\chi_t = a(\chi, t)dt + b(\chi, t)dq_t$$

ただし，q_tは［t，t+dt］区間でλdtの確率でジャンプするポアソン過程である．すなわち，λを平均到着率とすると，

$$dq_t = \begin{cases} 0 & : 1 - \lambda dt \\ 1 & : \lambda dt \end{cases}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} dF(\chi, t) &= F_t(\chi, t)dt + F_\chi(\chi, t)d\chi_t \\ &= F_t(\chi, t)dt + F_\chi(\chi, t)\{a(\chi, t)dt + b(\chi, t)dq_t\} \end{aligned}$$

であり，

$$\varepsilon[F_\chi(\chi, t)b(\chi, t)dq_t] = \lambda dt[F(\chi + b(\chi, t)) - F(\chi, t)]$$

だから，

$$\varepsilon[dF(\chi, t)] = (F_t(\chi, t) + F_\chi(\chi, t)a(\chi, t))dt + \lambda dt(F(\chi + b(\chi, t)) - F(\chi, t)) \tag{9}$$

となる．

（2）ＣＣアプローチ

DPアプローチでは割引率が外生的に与えられるとしたが，CCアプローチにおいては割引率は金融市場とのからみにおいて内生的に決まるという点において特徴がある．χ_tをt時点でのアウトプットの価格，$F(\chi_t, t)$をχ_tに依存する将来利得のフロー$\pi(\chi_t, t)$を手にする権利を与えるassetの価値と考えよう．更に，アウトプット自身市場で取引される１つのassetとしよう．

価格は確率過程：

$$d\chi_t = \alpha\chi_t dt + \sigma\chi_t dZ_t \tag{10}$$

によって記述される．市場は完備であって，(9)式のリスクは市場に存在するassetのポートフォリオによって複製できるものとする．アウトプットは十分な収益をもたらすときにのみ投資家に保有される．その利得の一部はドリフトαにより，残りの部分は配当率δの形でもたらされると考えよう．したがって，総期待収益率$\mu = \alpha + \delta$は金融市場の均衡条件（CAPM）から，

$$\mu = r + \phi\sigma\rho_{\chi m} \tag{11}$$

に一致しなければならない．ここで，

r　：リスクのないキャッシュフローの割引率

$\rho_{\chi m}$　：χ とマーケットポートフォリオとの相関関数

ϕ　：リスクのマーケット価格

である．μ が投資家によって要求されるリスク調整ずみの期待収益率となっている．

いま，1単位の $F(\chi, t)$ のlong positionとn単位の χ のshort positionからなるポートフォリオを考えよう．このポートフォリオの $[t, t+dt]$ 間の配当は，

$$\pi(\chi, t)\,dt - n\delta\chi dt,$$

キャピタル・ゲインは，

$$dF(\chi, t) - nd\chi = (F_\chi(\chi, t) - n)\,d\chi + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + F_t(\chi, t)\right)dt$$

であるから，もし $n = F_\chi(\chi, t)$ であれば，総収益は，

$$\pi(\chi, t)\,dt - \delta\chi F_\chi(\chi, t)\,dt + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + F_t(\chi, t)\right)dt$$

となる．明らかに，これはリスクのない収益であるから無裁定条件より

$$r\,(F(\chi, t) - F_\chi(\chi, t)\,\chi)\,dt$$

に一致しなければならない．以上の結果を整理すると (7)式に類似の次式が求まる．

$$\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F_{\chi\chi}(\chi, t) + (r-\delta)\chi F_\chi(\chi, t) + F_t(\chi, t) - rF(\chi, t) + \pi(\chi, t) = 0 \tag{12}$$

終端時刻がTで，その時点での利益が $\Omega(\chi_T, T)$ であれば，全ての χ について $F(\chi, T) = \Omega(\chi, T)$ という境界条件のもとで(12)式を解くことによって，$F(\chi, t)$ が求まる．もし，$\pi(\chi, t) = \pi(\chi)$ であれば，$F_t(\chi, t) = 0$ となるので，(8)式と類似の常微分方程式：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\chi^2 F''(\chi) + (r-\delta)\chi F'(\chi) - rF(\chi) + \pi(\chi) = 0 \tag{13}$$

が得られる．

【注意】

今までの説明から，明らかに χ_t が確率微分方程式

$$d\chi_t = \alpha\chi_t dt + \sigma\chi_t dZ_t\ ,\quad \chi_t = \chi$$

に従うとき，(1)式によって計算される $F(\chi, t)$ は $F(\chi, T) = \Omega(\chi, T)$ という境界条件を満たす(7)式の解となっていることが分かる．この結果はFeynman-Kacの公式として知られている．一方，(CC)アプローチにおける(12)式に着目しよう．その解 $F(\chi, t)$ は，

$$d\chi'_t = (r-\delta)\chi'_t dt + \sigma\chi'_t dZ_t\ ,\quad \chi'_t = \chi$$

のときの

$$F(\chi, T) = \varepsilon'\left[\int_t^T e^{-r(\tau-t)}\pi(\chi'_\tau, \tau)\,d\tau + e^{-r(T-t)}\Omega(\chi'_T, T)\right]$$

によって与えられることが類推できるであろう．この結果はequivalent risk-neutral valuationと呼ばれている．

(3) OSアプローチ

企業（プロジェクト）は現時点tにおいて，プロセスを停止して $\Omega(\chi, t)$ の利益を手にする (termination) か利得のフロー $\pi(\chi, t)$ を手にするとともに，$t+dt$ まで現在の状態を継続 (continuation) するかという2つの選択肢があるものとしよう．継続の場合には，$t+dt$ において再び停止か継続の決定が行われる．状態 χ_t は伊藤プロセス

$$d\chi_t = a(\chi_t, t)\,dt + b(\chi_t, t)\,dZ_t\ ,\ \chi_t = \chi$$

に従うものとする．前と同様にt時点における状態が $\chi_t = \chi$ であるとき，それ以降，最適な決定が行われたときに得られる利得の期待現在価値を $F(\chi, t)$ とする．最適性の原理によれば，$F(\chi, t)$ は次式によって与えられる．

$$F(\chi, t) = \max\left\{\Omega(\chi, t), \pi(\chi, t)\,dt + e^{-\rho dt}\varepsilon\left[F(\chi_{t+dt}, t+dt)\mid\chi\right]\right\} \tag{14}$$

もし，継続することが最適なら左辺の第2項に等しく，停止することが最適なら左辺は第1項に等しい．ここで，$\chi > \chi^*(t)$ なら継続することが最適，$\chi < \chi^*(t)$ なら停止することが最適であるような分岐点 $\chi^*(t)$ が存在するものとしよう[3]．$\chi > \chi^*(t)$ の領域では，DPアプローチで説明したように(6)式が成立する．更に，$\chi = \chi^*(t)$ では，

$$F(\chi^*(t), t) = \Omega(\chi^*, t) \quad \text{for all } t, \ (\text{value-matching}) \quad (15)$$

$$F_\chi(\chi^*(t), t) = \Omega_\chi(\chi^*, t) \quad \text{for all } t, \ (\text{smooth-pasting}) \quad (16)$$

が成立する[4]．(6)(15)(16)式を解くことにより分岐点 $\chi^*(t)$ が求まる（free boundary prob.）．

【例】

1単位のアウトプットを永久に生産できる機械がある．そのアウトプットから得られる単位時間あたりの利得 χ_t は確率微分方程式

$$d\chi_t = a\,dt + b\,dZ_t, \ a < 0 \ , \ \chi_t = \chi$$

に従う．機械を廃棄した場合の価値は0である．t時点において利得の水準が χ であるときの機械の価値は，a, bが定数であるから，$F(\chi, t) = F(\chi)$ と置くことができ，

$$F(\chi) = \max\{0, \chi dt + e^{-\rho dt}\varepsilon[F(\chi_{t+dt}) \mid \chi_t]\}$$

となる．機械を継続して利用することが最適である領域 $\chi > \chi^*$ では，(6)式から，

$$\frac{1}{2}b^2F''(\chi) + aF'(\chi) - \rho F(\chi) + \chi = 0$$

が成立し，(15)(16)式から

$$F(\chi^*) = 0 \ , \ F'(\chi^*) = 0$$

が満たされねばならない．この解として，状態の将来の展開を考えれば，$\chi^* < 0$，即ち利得のフローが負であっても操業を続けることが望ましいという結論が起り得るかもしれない．

3．プロジェクトの価値

単位時間あたり1単位のアウトプットを永久に生産できるプロジェクトを考える．簡単のため生産コストは0とする．アウトプットの価格を改めてPで表わし，次の確率過程に従うものとしよう．

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dZ_t \quad (17)$$

したがって，単位時間当りの収益は P_t であるから，この場合利得のフローは $\pi(P_t, t) = P_t$ である．現時点 $t = 0$ における価格が $P_0 = P$ のとき，(17)式の解は，

$$P_t = P\exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma dZ_t\} \quad (18)$$

となる．このプロジェクトを将来に亘って運営することによって見込まれる利益の現在価値 $V(P)$ はCAPMを経由して得られるリスク調整ずみ収益率 μ で割引けば，

$$V(P) = \varepsilon\left[\int_0^\infty e^{-\mu t} P\exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma Z_t\} dt\right] = \frac{P}{\mu - \alpha} = \frac{P}{\delta} \quad (19)$$

となる．一般には $\pi(P_t, t)$ は複雑な形をとる．このようなとき，見込まれる利益の現在価値を計算するには他の方法を用いる必要がある．ここでは，CCアプローチによって，確率過程が(17)式で $\pi = P_t$ のときに，プロジェクトの価値が(19)式となることを見てみることにする．(13)式から，

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + P = 0, \ \mu - \alpha = \delta \quad (20)$$

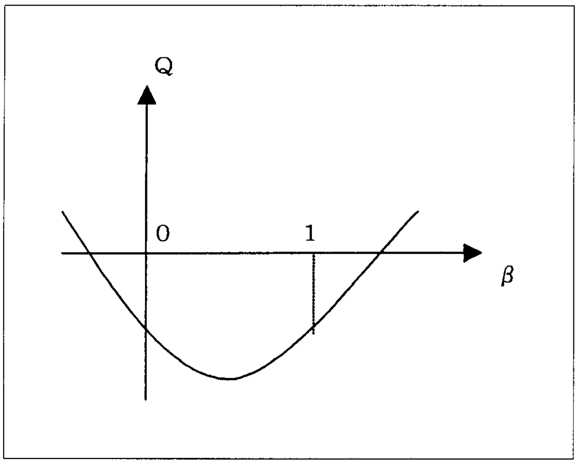
が成立する．(20)式の同次形の部分の解を $V(P) = AP^\beta$ の形で求め，(20)式の特解を加えると(20)式の一般解が求まる．即ち，

$$V(P) = A_1P^{\beta_1} + A_2P^{\beta_2} + P/\delta \quad (21)$$

となる．ただし，β_1，β_2 は次式の根である．

$$Q(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \quad (22)$$

$\beta_1 > 1$，$\beta_2 < 0$ であることは，次の図より確認される．



幾何ブラウンであるから，$P_0 = 0$ なら $P_t \equiv 0$ となり，利得のフローは永久に0である．したがって，このモデルが意味を持つためには $V(0) = 0$ でなければならない．このことから，(21)式の第2項の解において $A_2 = 0$ である．(21)式の第1項は，資産をそのファンダメンタル以上に価格づけるいわゆるバブル解を表す．このバブル解を削除することにすれば，プロジェクトの基本的価値は(19)式によって与えられる．

【注意】

割引率 ρ が外生的に与えられているとき(19)式は

$$V(P) = \frac{P}{\rho - \alpha} \qquad (19)'$$

となり，(20)(21)(22)式に対応する方程式は，r を ρ で置き換え，$r - \delta$ を α で置き換えた

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \alpha P V'(P) - \rho P V(P) + P = 0 \qquad (20)'$$

$$Q(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0 \qquad (22)'$$

となる．

ここで，プロジェクトの運営にはあるコストCを伴い，利得のフローがCを下回る場合には一時的に操業が停止されるというケースのプロジェクトの価値を求めてみることにする．$\pi(P_t, t) = \max\{P_t - C, 0\}$ であるから(13)式より，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta) P V'(P) - r V(P) + \max\{P_t - C, 0\} = 0 \qquad (23)$$

が得られる．$P < C$ のときには

$$V(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

$P > C$ のときには

$$V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$$

となる．Pが極めて小さく0に近い時には，はるか遠い将来でなければPがCを超える確率はきわめて小さく，将来操業を開始するオプションをもつプロジェクトの価値は0に近い．したがって，$A_2 = 0$ でなければならない．一方，Pが極めて大きな値のときには，はるか遠い将来でなければ，操業が停止される可能性は小さく，将来操業を停止するオプションをもつプロジェクトの価値は0に近い．したがって，$B_1 = 0$ でなければならない．結局，

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & ; P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r & ; P > C \end{cases} \qquad (24)$$

となる．定数は，$P = C$ における value-matching と smooth-pasting 条件：

$$A_1 C^{\beta_1} = B_2 C^{\beta_2} + P/\delta - C/r$$

$$\beta_1 A_1 C^{\beta_1 - 1} = \beta_2 B_2 C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta \qquad (25)$$

から求まる．

A_1 は将来操業を始めるオプションから生ずる期待利得に関係し，B_1 は将来の操業停止オプションから得られる期待利得に関係する定数であり，$A_1, B_1 > 0$ でなければならない．

この要求を満たすためには，$r > \beta_1(r - \delta)$，$r > \beta_2(r - \delta)$ でなければならない．

次に，プロジェクトにはライフタイムがあって，それがポアソン過程に従う場合のプロジェクトの価

値を求めることにする．ライフタイムまでは，利得のフローは$Pe^{\alpha t}$, $P_0=P$と増大していくものとしよう．微少区間dtの間にプロジェクトが消滅する確率はλdtである．プロジェクトが時刻Tより前に消滅する確率は$1-e^{\lambda T}$であることが知られているので，ライフタイムがTである確率は$\lambda e^{-\lambda T}$となる．割引率をρとすると利得のフローのライフタイムまでの現在価値は，

$$\int_0^T e^{-\rho t} P e^{\alpha t} dt = P \frac{1-e^{-(\rho-\alpha)T}}{\rho-\alpha}$$

となる．したがって，プロジェクトの期待価値V(P)は

$$V(P) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda T} P \frac{1-e^{-(\rho-\alpha)T}}{\rho-\alpha} dt = \frac{P}{\rho+\lambda-\alpha} \tag{26}$$

によって与えられる．このことは，割引率が$\rho+\lambda$で利得のフローが永久に続く場合，あるいは利得のフローが$e^{-\lambda t}$の割合で減少していく場合と同じ結果を与えていることに注意されたい．

一方，ここでP_tが次のポアソン過程に従うとしよう．

$$dP_t = \alpha P_t dt + dq_t$$

ここで，q_tは（t, t+dt）区間でλdtの確率でジャンプするプロセスであり，ジャンプが起こればプロセスは停止とし，プロジェクトの価値は0となる．このとき，プロジェクトの価値は (4) (9) 式から，

$$\rho V(P) = P + \alpha P V'(P) - \lambda V(P) \tag{27}$$

の関係を満たす．明らかに，(27) 式の解は，(26) 式となる．

4．投資オプションの価値

現時点tにおける価格が$P_t=P$で，P_tは (17) 式に従う確率過程であるときのプロジェクトの価値V(P)は (19) 式によって与えられる．いま，直ちにこのプロジェクトにコストIを投資し，V(P)－Iの価値を手にするか，もう少し待って，即ちt+dtまで現在の状態を継続し，その時点で再び投資するかしないかの判断を行うものとする．こうした投資を行うタイミングを考慮に入れた上での投資オプションの価値F(P)を求めることにする．

OSの方法を用いると投資オプションの価値は，

$$F(P) = \max\{V(P)-I,\ e^{-\rho t}\varepsilon[F(P_{t+dt})]\} \tag{28}$$

となる．$F(P_{t+dt})$はt+dt以後，最適な投資の決定が行われたときの投資オプションの価値である．

(28) 式右辺の第1項は直ちに投資を行った場合の価値を表わし，第2項はオプションを保持した場合の価値を表わしている．もしPが継続することが最適である領域に入っているなら，投資オプションを保持するためその間の利得のフローは発生しないので (20)' 式から，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P V'(P) - \rho F(P) = 0\ , \quad \rho > \alpha \tag{29}$$

が成立する．(29) 式の解は，

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

となる．ここで，$\beta_1>1$, $\beta_2<0$は次の方程式の根となっている．

$$Q(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Pが0に近づくにつれ，dt区間でPが大きく上昇する確率はほとんど0であるので，投資オプションは価値を持たなくなる．このことから，$A_2=0$でなければならない．したがって，

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} \tag{30}$$

である．一方，$V(P)=P/(\rho-\alpha)$であるから，投資と継続の分岐点P*では，(15) (16) 式のvalue-matchimgとsmooth-pastingの条件

$$F(P^*) = V(P^*) - I\ , \tag{31}$$

$$F'(P^*) = V'(P^*) \tag{32}$$

を満たす．(31) (32) 式に (30) 式を代入し，A_1とP*について解くと

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(\rho - \alpha) I \ , \ V^* = V(P^*) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \tag{33}$$

となる．したがって，

$$F(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & : P < P^* \\ V(P) - I & : P > P^* \end{cases} \tag{34}$$

と求まる．$A_1 P^{\beta_1}$が投資オプションの価値を示している．$\beta_1 > 1$だから，$V^* > I$となる．このことは，投資から得られる割引現在価値が投資コストを$\beta_1 / (\beta_1 - 1)$だけ上回ったときに投資が行われるべきであることを意味している．換言すれば，投資が行われるためにはq-ratio：$q = V / I$は1より大きい必要があるということになる．

CCアプローチを用いた場合には（29）式は，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + (r - \delta) P F'(P) - r F(P) = 0 \ , \ \mu - \alpha = \delta \tag{35}$$

となり，結局，

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta I \ , \ V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \tag{36}$$

となる．ただし，$\beta_1 > 1$は$Q(\beta) = \sigma^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0$の根である．（36）式によると$P^* > \delta I$となっている．このことは，将来の期待利得が投資コストをカバーできているためには，初期の利得のフローP^*はδIより大きくなければならないことになる．δIは単位時間あたりのflow equivalent cost of investmentと呼ばれている．

最後にポアソンプロセスのときには，容易に分かることであるが，

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(\delta + \lambda) I \ , \ V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \tag{37}$$

$$F(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & ; P < P^* \\ V(P) - I & ; P > P^* \end{cases} \tag{38}$$

となる．ここで，$V(P) = P / (\lambda + \delta)$，$\delta = \mu - \alpha$である．

5．参入，撤退の選択肢を伴う投資オプションの価値

プロジェクトに投資するにはコスト$I > 0$を支払わねばならない．一時的にプロジェクトから撤退し，更に再投資しプロジェクトを活動させるためにもコストIが必要とされるものとする．また，プロジェクトから撤退する場合にもコストEを支払わねばならないものとする．$E < 0$の場合を考えて非現実的なケースを排除するため$I + E > 0$と仮定する．

活動しているプロジェクトは次のような意味で複合的資産と考えることができる．すなわち，その一部は将来における撤退の可能性を含んだ撤退オプションであり，オプションが行使されれば，プロジェクトは休止状態（idle state）になり，将来の投資の可能性を含む投資オプションとなる．更にそのオプションが行使されれば，プロジェクトは活動状態（active state）となる．こうしたプロジェクトに投資すれば，撤退するまで永久に単位時間当たり1単位のアウトプットを生産できるものとしよう．前と同様に，生産コストは$C > 0$でありアウトプットの価格は確率過程（17）式に従うものとする．$F_0(P)$を現在の価格がPであるとき休止状態における投資オプションの価値，$F_1(P)$を活動状態における撤退オプションの価値としよう．数学的厳密さは捨象し，次のような分岐点$P_H > P_L$が存在するものとする．

$0 < P < P_H$：休止状態が最適であり，P_Hに達したときに投資することが最適

$P_L < P < \infty$：活動状態が最適であり，P_Lに達したときに撤退することが最適

$P_L < P < P_H$：活動状態であれ休止状態であれ，現在の状態を続けることが最適

休止状態にあるとき，$0 < P < P_H$（continuation）では，（20）式から

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_0''(P) + (r - \delta) P F_0'(P) - r F_0(P) = 0 \tag{39}$$

が成立し，（39）式の解は，

$$F_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \tag{40}$$

となる．活動状態にあるとき，$P_L < P < \infty$ (continuation) では，(t, t+dt) 区間で (P−C)dt の利得が発生することを考慮すれば，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_1''(P) + (r-\delta) P F_1'(P) - r F_1(P) + P - C = 0 \tag{41}$$

が成立し，(41) 式の一般解は，

$$F_1(P) = B_1 P^{\beta 1} + B_2 P^{\beta 2} + P/\delta - C/r \tag{42}$$

となる．$(P/\delta - C/r)$ は損失が発生しても永久に操業を続けたときのプロジェクトの期待価値である．(41) 式の第 1 項と第 2 項は撤退オプションの価値を表している．$P \fallingdotseq \infty$ では撤退の可能性はほとんど起り得ないためオプションの価値は 0 である．したがって，$B_1 = 0$ を満たさなければならない．結局，

$$F_1(P) = B_2 P^{\beta 2} + P/\delta - C/r \tag{43}$$

となる．

一方，休止状態にあるとき $P = P_H$ に達すると費用 I を支払い投資オプションを行使し，資産価値 $F_0(P_H)$ を放棄して $F_1(P_H)$ の価値をもつ活動状態のプロジェクトを手にする．

$P = P_L$ についても同様のストーリーとなる．このため，P_H，P_L においては，value-matching と smooth-pasting の条件

$$F_0(P_H) = F_1(P_H) - I \qquad F_0'(P_H) = F_1'(P_H) \tag{44}$$

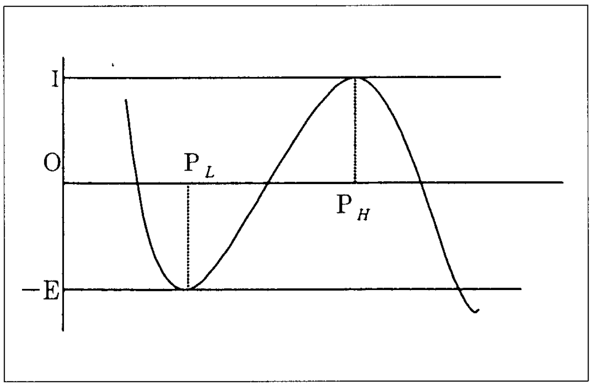
$$F_1(P_L) = F_0(P_L) - E \qquad F_1'(P_L) = F_0'(P_L) \tag{45}$$

が成立する．(40) (43) (44) (45) 式から，A_1，B_2，P_H，P_L が求まり，参入，撤退が可能な場合の価値が求められたことになる．

ところで，$G(P) \equiv F_1(P) - F_0(P)$ とおくと (44) (45) 式は，

$$\begin{aligned} G(P_H) &= I \qquad & G'(P_H) &= 0 \\ G(P_L) &= -E \qquad & G'(P_L) &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

となることを意味し，次図のようなイメージが浮かぶ．



(41) 式から (39) 式を差し引くと，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 G''(P) + (r-\delta) P G'(P) - r G(P) + P - C = 0 \tag{47}$$

が得られる．(47) 式は $P = P_H$ において (46) 式から

$$-r\,I + P_H - C = -\frac{1}{2}\sigma^2 P_H{}^2 G''(P_H) \tag{48}$$

となる．もし図のように $G''(P_H) < 0$ であるなら，

$$P_H > C + r\,I \tag{49}$$

が成立する．(49) 式の右辺は生産コストと資本コストを加えたものであり，価格がそれを厳密な意味で上回った場合に投資が行なわれなければならないことを意味し，通常の Marshallian threshold を越えたものとなる．類似の議論から，明らかに

$$P_L < C - r\,E$$

も得られ，価格が生産コストを下回る場合にも操業を続けることが最適であることになる．

注

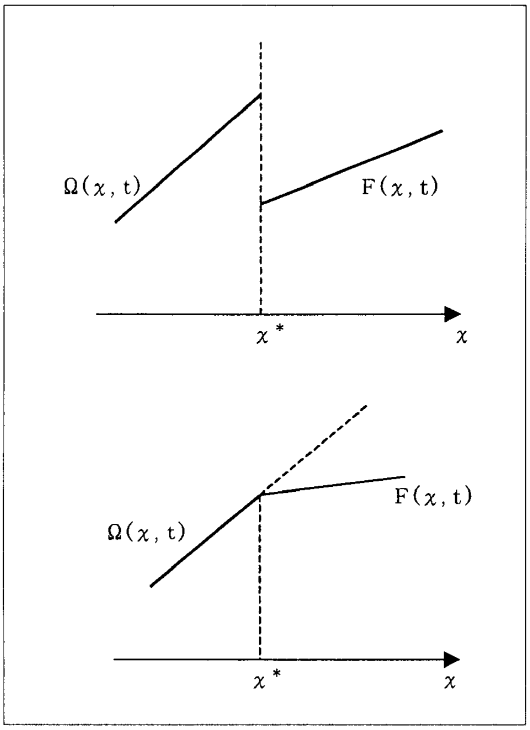
1）たとえば，笹井著『最適決定の理論入門』，学文社，2000年，を参照．
2）最適性の原理は，最適政策の性質を次のように主張するものである．すなわち，「最適政策は，初期の状態と初期の決定が何であっても，残りの区間の決定は，最初の決定によってもたらされる状態に関して最適政策でなければならない．」
3）こうした分岐点は多くの経済モデルにおいて存在するが，厳密な条件については，本稿で紹介

しているDixit and Pindyckの書を直接参照されたい．

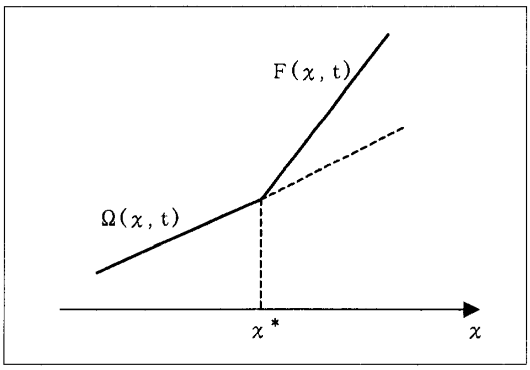
4）$\chi > \chi^*$では継続が最適，$\chi < \chi^*$では停止が最適であり，$\Omega(\chi, t)$，$F(\chi, t)$ はχについて連続な関数とする．(14) 式および (3) 式から，

$$F(\chi, t) = \max\{\Omega(\chi, t), \pi(\chi, t)dt + (1-\rho dt)F(\chi, t) + \varepsilon[dF(\chi, t)]\}$$

である．右辺の第２項は$dt \to 0$のとき$F(\chi, t)$に近づく．したがって，$\Omega(\chi, t)$，$F(\chi, t)$ のχについての連続性より，下図のようなケースは，χ^*が継続と停止の分岐点であることに矛盾する．



したがって，(15) (16) 式が成立しないとすると，残る可能性は次の図のようなケースである．



$\Omega(\chi^*, t) = F(\chi^*, t)$ であるから，χ^*においては継続と停止は無差別である．もし図のようなキンクが起こる場合には，継続の方が最適となり無差別であることに矛盾することを示そう．

いま，状態χにありΔt時間後に確率

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$

でΔh上昇し，確率$q = 1 - p$で$-\Delta h$下落する二項プロセスを考える．ただし，$\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$とする．この二項プロセスは$\Delta t \to 0$のとき，

$$d\chi_t = \alpha dt + \sigma dZ_t \quad , \quad \chi_t = \chi$$

の解を近似することはよく知られている．我々はこの近似の方法を経由することにしよう．

まず，とりあえずχ^*において継続の決定を行う．そして，Δt時間後，すなわち$t + \Delta t$でχからΔh上昇すれば継続を，χから$-\Delta h$下落すれば停止するという決定を行うことにすれば，この方策によるt時点における期待価値は，

$$\pi(\chi^*, t)\Delta t + (1-\rho\Delta t)\{pF(\chi^*+\Delta h, t+\Delta t) + q\Omega(\chi^*-\Delta h, t+\Delta t)\}$$

となる．上式をテイラー展開し，$F(\chi^*, t) = \Omega(\chi^*, t)$ を用い，Δtの１次以上の項を削除すると

$$F(\chi^*, t) + \frac{1}{2}\{F_\chi(\chi^*, t) - \Omega_\chi(\chi^*, t)\}\Delta h$$

得られる．もし，図のようなキンクが起こるとすれば，第２項は正となり，上式は

$$> \quad F(\chi^*, t) = \Omega(\chi^*, t)$$

が成り立ち，χ^*においては，継続の方が停止を優越することになる．

〔ささい ひとし　横浜国立大学大学院国際社会科学研究科教授〕