

## 2つのカオスのランダム性

東 田 啓

## 1 はじめに

カオスの最も特徴的な性質は、確率変数を含まない決定論的法則に支配されているにもかかわらず乱数のように予測不可能なランダムにみえる時系列を生成することにあるだろう。しかし厳密な意味でカオス性を有していても生成された時系列が単純なパターンしか示さない場合がある。カオス性のなかでさらにそのランダム性の程度を調べる必要があるだろう。そこでこの論文は、もっとも単純な1次元のカオスシステムを取り上げ、システムのカオス性とその統計的性質について、理論的に解明されている事実をレビューし、そしていまだ理論的には解明されていない予想を簡単な数値実験によって確認することを目的とする。

株価や為替レートなど多くの経済データは、トレンドを除けば、ある程度の規則的な変動と、比較的小さくかつ頻繁な不規則な変動と、まれに生じる暴騰や暴落といった経済全体に大きな影響をもたらす変動から合成されている。このような変動を説明する数学的方法は、2通りに大別される。1つは、計量経済モデルによる接近であり、決定モデルにランダムな確率変数(ノイズ)を加えることによって、現実への妥協が試みられた。いま1つは、計量経済モデルの開発と同時期に進められた動学的非線型モデルの研究である。後者は、前者のように不明な

ものはノイズとして処理するといった立場を取らず、あくまで決定論的道を選択した。しかし、当初の非線型モデルでは、せいぜい安定な周期的サイクルを説明できるにすぎず、先に述べた頻繁で比較的小さな変動や時々生ずる大きな不規則的な変動にはまったく無力であった。このように当初の非線型モデルが安定的な規則的な変動しか説明しえないということは、単に現実的でないというだけでなく、規則性による予測可能性と伝統的な合理的経済人の仮定に不整合性を生じるといった議論がある。しかしここではこの問題には立ち入らないことにする。ともあれ、非線型モデルは観測データにそぐわず、また論理的な矛盾も導くといった点からしばらく経済学の主流から遠ざけられてしまった。

ところが、非線型モデルのカオス性が発見されてから、上記の2つの問題はほとんど非線型モデルによる経済理論の発展への障害にはならなくなった。前者の観測データとの類似性については、カオスモデルである限りいかなる規則的な変動も不規則な変動、とくに突発的な大きな変動も説明しうる。また、後者の論理的矛盾については、カオスモデルによるデータの予測不可能性によってほとんど解消される。カオスモデルは定差方程式や微分方程式で表わされるので、変数の完全測定が可能ならば、無論予測も完全ではある。しかし、いかに精密に測定しても完全測定が不可能なのは明らかである。た

だ、線型モデルでは完全測定が不可能なことによる小さな誤差がせいぜい小さな誤差にとどまるのに対し、カオスモデルではこの小さな誤差が幾何級数的に増加し、決定論的モデルにもかかわらず、遅かれ早かれ予測は完全に不可能になる。

以上述べたように、カオスの発見は有望な非線型経済理論の可能性をひめているように思われるが、この論文では、なぜテントマップとロジスティックマップといったもっとも単純なカオスモデルのみを対象としたかを説明しておく必要があるだろう。

まず第1の理由は、抽象的なレベルでのカオス理論が進歩をみている一方で、具体的な定差方程式や微分方程式による数値実験が理論ではおそらく解決不可能なレベルまで広範に進められていて、具体的な方程式で理論的にかなりはつきりして実験の補助でさらに解明されそうなカオスモデルはそう多くなく、ここで取り上げるテントマップとロジスティックマップがまさに理論と実験が接近するものであるという点である。テントマップとロジスティックマップは、 $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$ という同相写像によって共役という関係で結ばれており、多くのカオスの性質を共有しているが、異なった性質もある。例えば、時系列の独立性の程度を示す相関次元では、テントマップは正確に1であり、ロジスティックマップは近似的に $0.5 \pm 0.005$ であることが判っている。したがって、テントマップによる時系列のほうが独立性が高い。ちなみにカオスの極端なケースである独立な時系列の場合には、相関次元は無限大となる。さらに後に述べるように、この論文で取り上げる広義のテントマップ、ロジスティックマップでは多くの異なった統計的性質を有する。したがって、共役性といったことだけでどちらか一方のみでことたりるといったものではない。

もう1つの理由は、テントマップとロジスティックマップは単なる数学モデルではなく現実的意味をもったモデルであるということであ

る。テントマップについては、ローレンツの乱流モデルから導かれたものであり、ロジスティックマップについては、マルサス、ベルハルストの人口増加モデルにその起源がある。最近の経済モデルにも、この2つのモデルに帰着させるものがある。Bala, Majumdar and Mitra [1998]は、2者2財の模索過程によって財の価格変動がテントマップに、またSorger [1998]は、動学的均衡モデルによって利率の変動がロジスティックマップに帰着できることを示している。このようにテントマップとロジスティックマップは経済現象、自然現象をとわずさまざまな現象に共通したモデルとしてその性質の解明がもとめられている。

## 2 カオスのシステムと自己相関係数

自分自身への写像 $\theta$ において、

$$\theta^3(x) \leq x < \theta(x) < \theta^2(x)$$

または、

$$\theta^3(x) \geq x > \theta(x) > \theta^2(x)$$

のいずれかを満たす点が存在するとき、

(1) あらゆる期間の周期点が存在する。

(2) 周期性を持たない非可算無限個の点からなる集合が存在し、その任意の点 $x, y$ に対し、

$$\limsup |\theta^n(x) - \theta^n(y)| > 0, \\ \liminf |\theta^n(x) - \theta^n(y)| = 0$$

となる。つまり、時系列  $\{x, \theta(x), \theta^2(x), \dots\}$  と  $\{y, \theta(y), \theta^2(y), \dots\}$  は、接近離反をくりかえす。

(3)  $y$ が周期的なある点のとき、(2)の集合のすべての点 $x$ に対し、

$$\limsup |\theta^n(x) - \theta^n(y)| > 0$$

となる。つまり、周期点と非周期点の軌道が一致してしまうことはない(Lie-York)。

これら、(1)(2)(3)を満たすシステムをカオ

ス的という。システム  $\theta$  が周期 3 を有するならば、この定理の条件を満足するので Lie-York の有名な論文には、周期 3 はカオスを意味する、というタイトルがつけられているのはこの事実を象徴している。

さて、このようなカオス的システム

$$x_{t+1} = \theta(x_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

から生成される時系列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  が確率過程における無相関なホワイトノイズと観測上同一の性質を有することがある。例えば、もっとも単純なテントマップの族 ( $1/2 < a \leq 1$ )

$$T_a(x) = \begin{cases} 2ax & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2a(1-x) & (1/2 < x \leq 1) \end{cases}$$

で、 $a = 1$  のときに生成される時系列のあらゆる自己相関係数はゼロであることが理論的に証明されている (Sakai-Tokumaru [1980])。したがって  $a = 1$  のときにはホワイトノイズを生成することになる。しかし  $a > 1/2$  ならばテントマップの族はすべて 3 周期点を有することが知られている (Gulick [1992], p.35)。たとえば、 $a = 0.9$  ならば、(0.834, 0.298, 0.536)、 $a = 0.6$  ならば (0.698, 0.332, 0.366) の 3 周期点を有する。したがって、Lie-York の定理よりこれらの族はカオス的システムである。しかし  $a = 1$  でないかぎりこれらの族によって生成される時系列は無相関なホワイトノイズになるという保証はないし、実際  $a < 1$  のときの自己相関係数はわかっていない。そこで後で述べるように  $1 \geq a > 1/2$  のときのテントマップは不変密度が存在し、エルゴード的であるから、標本自己相関係数は母集団の自己相関係数に収束すると仮定できる。したがって、 $a$  の値を 0.98, 0.8, 0.7 にとり、約 1000 個 (初期値の影響を受けないよう始めの部分を適当に除いている) のデータから自己相関係数を計算した (図 2, 3, 4)。 $a$  の値が小さくなるにつれて自己相関係数は有意に大きくなっている。とくに 0.7 のとき

は図 1 の分岐図より 2 つのおおきなアトラクターがあるが、エルゴード性より時系列はこのアトラクター間をほぼ周期的に移動することになるのでその相関は非常に強い。いずれにせよ、無相関なホワイトノイズになるのは、 $a = 1$  の場合のみであると考えられる。

いま 1 つの例としてロジスティックマップの族  $Q_b(x) = bx(1-x)$ ,  $0 < b \leq 4$ ,  $0 \leq x \leq 1$  をみる。 $b = 4$  のとき無相関性が予想されるが、これはテントマップのときと異なり理論的にすべての自己相関係数がゼロであることは証明されていないようである。ただし、Sakai-Tokumaru の方法を使って低次の自己相関のゼロは機械的に証明できるが、すべての次数の自己相関がゼロを示すことはまだないようである。そこで、後に述べるようにロジスティックの族の場合もエルゴード性を仮定できるからテントマップと同様に大標本の自己相関係数を計算した。まず、 $b = 4$  のときは図 7 よりやはりすべての次数で無相関である。 $b = 3.83$  のとき、1 つの 3 周期点 (0.5, 0.957, 0.156) が存在する (図 5)。したがって Lie-York の定理よりカオス的システムである。ところが  $Q_{3.83}^{(3)}(0.5) = 0.5$  であるから 0.5 は定常点であり、さらに  $Q_{3.83}^{(3)}(0.5) = 0 < 1$  であるからこの 3 周期は漸近的に安定である。したがって十分長い時系列を生成すると確率 1 で周期的時系列しかあらわれなくなる。周期的であるから、当然自己相関係数もゼロではないと予想される。テントマップのときと同様に約 1000 個のデータから自己相関係数を求めると図 6 のように強い相関が存在する。 $b$  の値が 4 から周期性のない軌道が消えるファイゲンバウム数 (約 3.62) に近づくにつれて自己相関係数が高くなっていくことが図 7, 8, 9, 10 よりみてとれる。ただし様に高くなっていくわけではなく、安定的周期を示すウィンドウが途中で多数あるので、こういうところでは特に相関が高くなっていることが図 6 よりわかる。

以上、テントマップとロジスティックマップ

でみたようにカオスのシステムが必ずしも無相関なホワイトノイズの性質を有するわけではないことをみた。ちなみに一般にカオスシステムと呼ばれていても、Lie-Yorkを含むカオスの通常の定義を満たしているのかも明確でなく、またカオスの時系列を判定する正のリヤプノフ指数や低次の相関次元の数値的テストを満たしているのかもはっきりしないものも少なくない。むしろ相関度がはっきりしているものは非常に少ない。

### 3 不変密度

自分自身への写像  $\theta$  において、すべての部分集合  $A$  に対し  $\mu(\theta^{-1}(A)) = \mu(A)$  のとき測度  $\mu$  を不変測度という。さらにこの不変測度  $\mu$  がルベーグ測度  $m$  に対し絶対連続のときその Radon-Nykodym 導関数  $\frac{d\mu}{dm} = f$  を不変密度という。不変密度が存在する場合は、カオスのシステムによって生成された時系列がカオスらしく乱数のようにランダムな様相を呈し、そのヒストグラムが連続な確率変数の密度関数のような形状になる。言い換えれば、カオスらしくあるためには不変密度の存在が必要なのである。

$\theta^{-1}(A) = A$  のとき  $\mu(A) = 0$  あるいは  $\mu(A) = 1$  となるような  $A$  が存在するならば  $\theta$  はエルゴードという。

エルゴード性は、2つ以上の孤立したアトラクターが存在しないことを保証する。このエルゴード性と不変密度の存在との密接な関係が次の定理である。

$\theta$  がエルゴード的ならば高々1つの不変密度が存在し、逆にユニークな不変密度が存在するならば  $\theta$  はエルゴード的である (Lasota-Mackey [1994], P61)。

前節の  $b = 3.83$  のときのロジスティックマップは安定的な3周期が存在するから、明らかにエ

ルゴード的であり、不変密度は存在しない。不変密度の存在を保証するためにはまず、Frobenius-Perronの作用素  $P$  を用いて、 $Pf = f$  となる不動点  $f$  を求めることが考えられる。例えば  $b = 4$  のときのロジスティックマップでは、 $y = Q_4(x)$  の逆像は、 $x_1 = (1 - \sqrt{1-y})/2$  と  $x_2 = (1 + \sqrt{1-y})/2$  であるから、不変密度  $f(x)$  が存在するならば、

$$\begin{aligned} Pf(y) &= \frac{d}{dy} \int_{Q_4^{-1}([c,y])} f(u) du \\ &= \frac{d}{dy} \int_0^{(1-\sqrt{1-y})/2} f(u) du + \\ &\quad \frac{d}{dy} \int_{(1+\sqrt{1-y})/2}^1 f(u) du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-y}} \left( \begin{array}{l} f((1-\sqrt{1-y})/2 +) \\ f((1+\sqrt{1-y})/2) \end{array} \right) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

が成立する。そして、 $f(y) = 1/(\pi\sqrt{y(1-y)})$  がこの関数方程式を満たすことが確かめられる。実際、これはユニークな解であることが知られている。この密度関数はベータ分布 Beta(1/2, 1/2) と呼ばれている。ちなみにこの解を初めて求めたのは Ulam-Von Neumann であるので  $b = 4$  のときのロジスティックマップのことを Ulam-Von Neumann マップと呼ぶことがある。

また、 $a = 1$  のときのテントマップの場合、 $y = T_1(x)$  に対する逆像は、 $x_1 = y/2$  と  $x_2 = -y/2 + 1$  であるから不変密度  $f(y)$  が存在するならば、ロジスティックマップと同様に

$$Pf(y) = 1/2 f(y) + 1/2 f(-y/2 + 1) = f(y)$$

が成立する。一様分布  $f(y) = 1$  は明らかに1つの解であるし、実際これはユニークである。このことはテントマップの分岐図 (図1) をみると  $a = 1$  のところで時系列の値が、 $[0, 1]$  の間で均等に分散しているという事実を反映している。 $b = 4$  のロジスティックマップは  $a = 1$  の

テントマップと同様にすべての自己相関係数がゼロという性質を有していると期待されるにもかかわらず、その密度関数はまったく異なっている。後ほど述べるように  $1/2 < a < 1$  でもテントマップ族の不変密度の存在が証明されているが具体的な関数はわかっていない。そこで  $a = 0.99, 0.8, 0.7$  に関して生成した約 1000 個のデータからのヒストグラム (図 11, 12, 13) をみると値が 1 に近い方におおきな mass があることがわかる。対称な写像にもかかわらず不変密度は非対称であることが示唆される。また図 1, 図 13 のように  $a$  が 1 に近いところではアトラクターが 2 つに分割されモードが 2 個の密度関数になっていることがわかる。

不変密度を求めることは、一般に容易ではない。しかし不変密度の存在の十分条件がいくつか知られている。もっとも初期のものは次の定理で与えられる。

$\theta: I = [a, b] \rightarrow I$  が適当な区間の分割  $I = \bigcup_{i=1}^k I_i$  によってすべての部分区間  $I_i$  で、狭義に単調, 2 回連続可微分そして  $\inf |\theta'(x)| > 1$  のとき,  $\theta$  の不変密度が存在する (Lie-York).

例えば,  $1 \geq a > 1/2$  のテントマップの族はこの定理より不変密度が存在する。  $b = 4$  のときのロジスティックマップはこの定理の 3 番目の性質  $\inf |\theta'(x)| > 1$  (expansive と呼ばれている) を  $x = 1/2$  の近くで満たしていないが, この場合でも適用可能な定理 (Lasota-Mackey [1994, P165]) によって不変密度の存在が保証されている (もっともすでに明示的に求めているところではある)。しかしすでに述べたように  $b = 3.82$  付近では安定的な 3 周期点が存在するので明らかに不変密度は存在しない (エルゴード的ではある)。  $b = 4$  のかなり近くでは分岐図 (図 5) より絶えずウインドウが現れるのでロジスティックの族では不変密度が常に存在するとは限らない。不変密度が存在する場合を確かめるため約 1000 個と 5000 個の時系列をロ

ジスティックマップの族から発生させてヒストグラムにしたものが図 14AB ( $b = 3.98$ ), 図 15AB ( $b = 3.83$ ), 図 16AB ( $b = 3.75$ ) (A は約 1000 個, B は約 5000 個) である。不変密度が存在するならばサンプル数にかかわらず同じような形状になるはずであろう。いづれも密度関数の存在を予想させる。とくに図 16AB はカオスの領域 ( $b \geq 3.83$ ) にまだ入っていない場合であるが, この段階ですでに不変密度が存在しているようである。もちろんファイゲンバウム数 ( $b = 3.62$ ) 以下では  $2^k$  周期軌道になるので不変密度は存在しない。

#### 4 結論

確率過程のように不規則な時系列を生じる可能性のあるカオスのシステムは必ずしも不規則な時系列になるわけではない。決定論的システムであるから決して統計的に独立な時系列にならないがホワイトノイズのように無相関な時系列になることも保証されない。そしてその相関の強さはテントマップの族の場合にはパラメーター ( $1/2 < a \leq 1$ ) が小さくなるにつれて強くなり, ロジスティックマップの族の場合 ( $3.62 < b \leq 4$ ) には安定的周期軌道が生じる (ウインドウが現れる) 場合を除いて,  $b$  が小さくなるにつれて強くなることがわれわれの実験により予想される。

いま 1 つのランダム性である不変密度に関しては, テントマップの族 ( $1/2 < a \leq 1$ ) では理論的にその存在が保証されているが, ロジスティックマップの族の場合 ( $0 < b \leq 4$ ) では  $b = 4$  を除いてその存在は理論的にわかっていない。しかしわれわれの実験からは, ファウゲンバウム数  $b = 3.62$  以上では安定的周期が存在する場合を除き不変密度が存在すると考えられる。

#### 参考文献

- 1) V. Bala, Majumdar and T. Mitra, A note on controlling a chaotic tatonment, Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 33 (1998).

- 2) D. Gulick, Encounters with Chaos, McGraw-Hill, 1992.
- 3) A. Lasota and M. C. Mackey, Chaos Fractals and Noise, Springer, 1994.
- 4) H. Sakai and H. Tokumaru, Autocorrelations of a certain chaos, IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-28 (1980).
- 5) G. Sorger, Imperfect foresight and chaos: an example of a self-fulfilling mistake, Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 33 (1998).

[ひがしだ あきら 横浜国立大学経営学部教授]

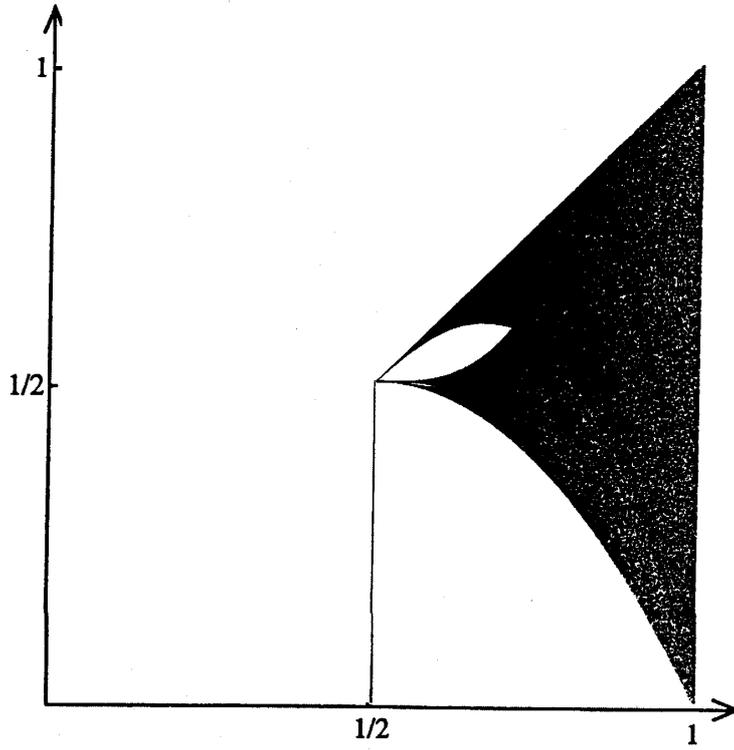


図 1

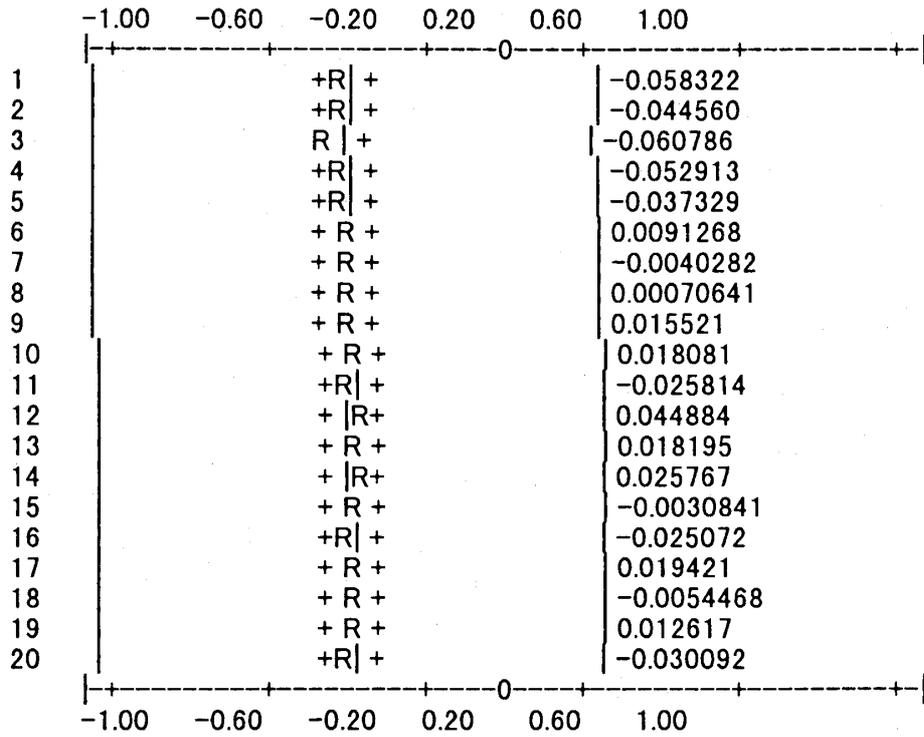


図 2

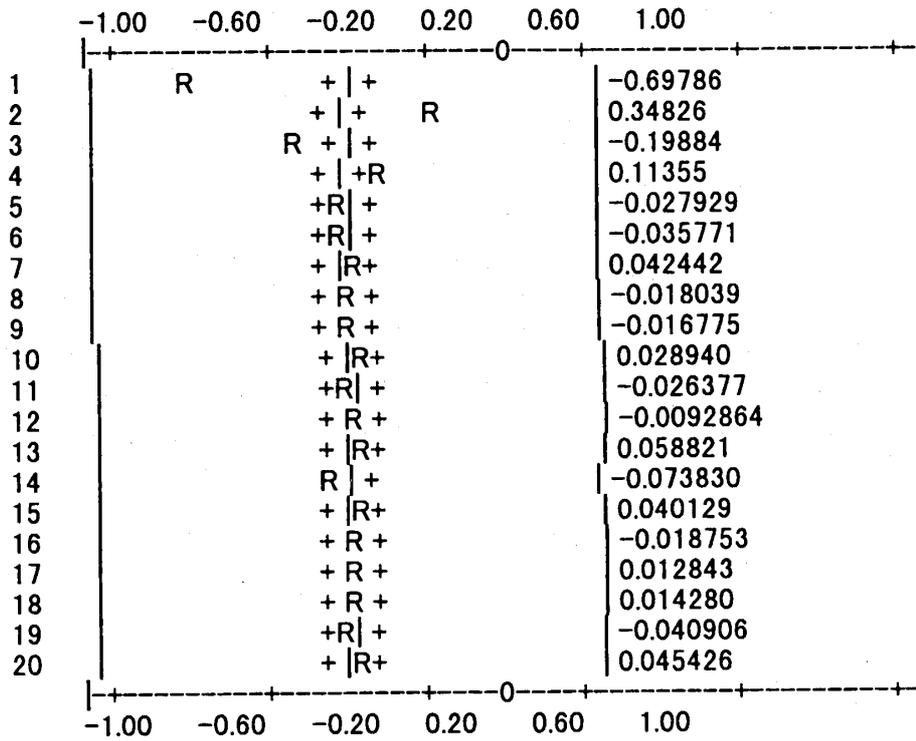


図 3

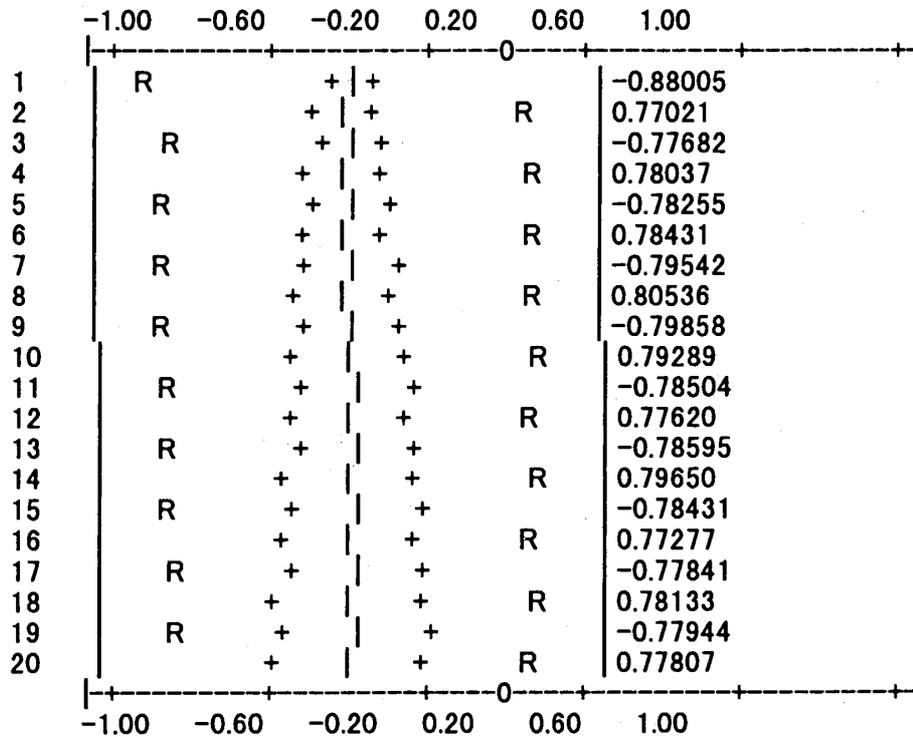


図 4

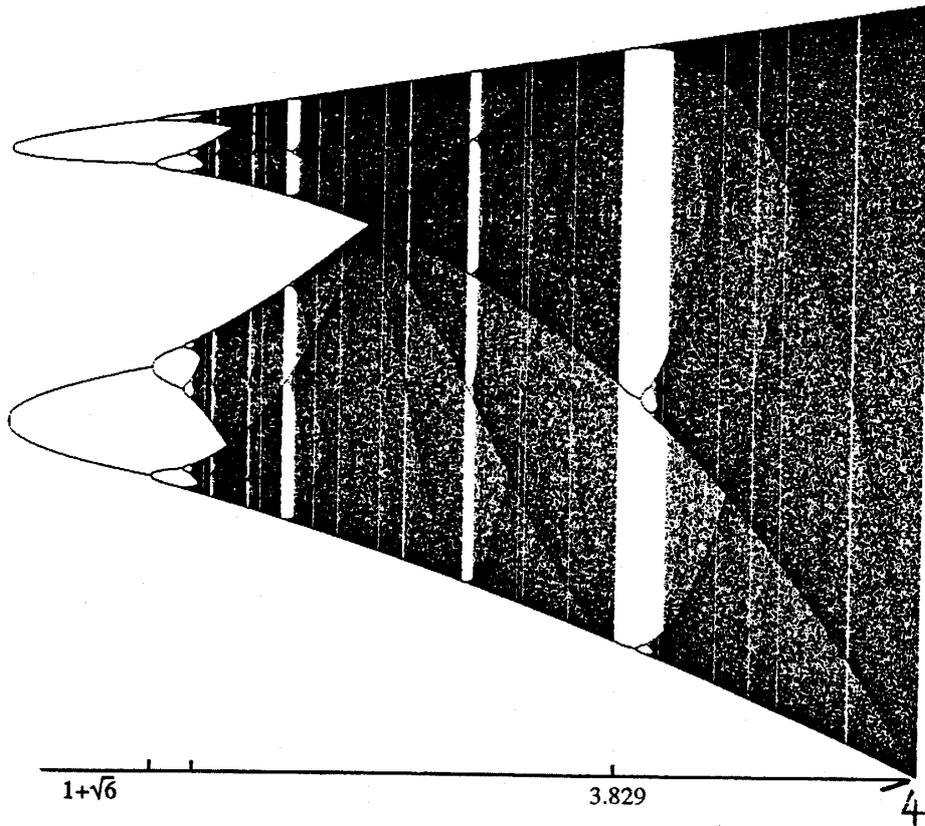


図 5

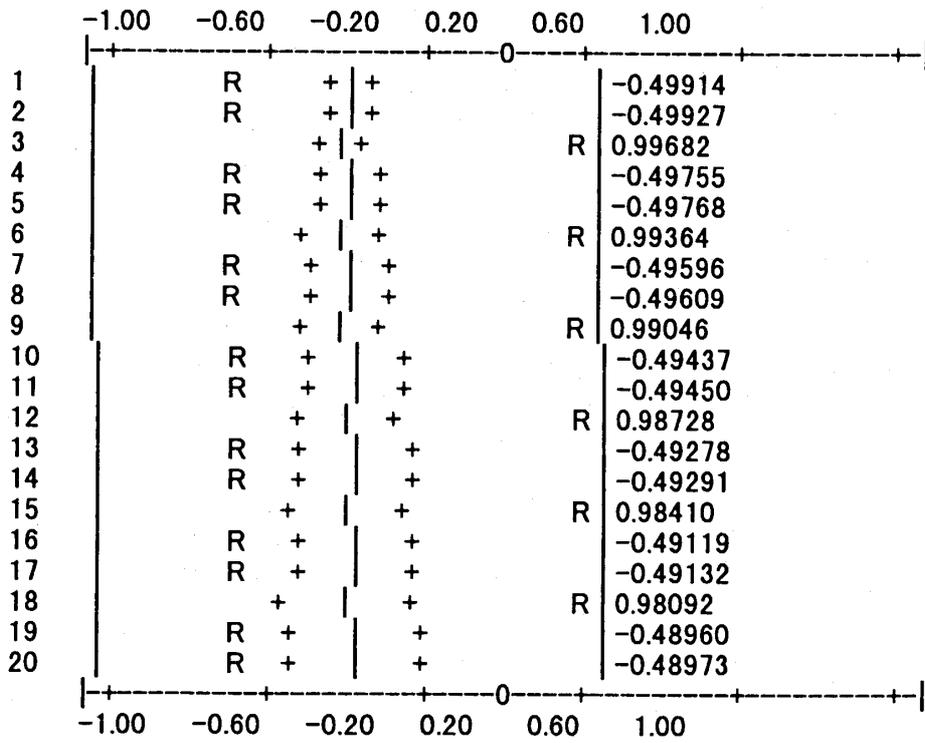


図 6

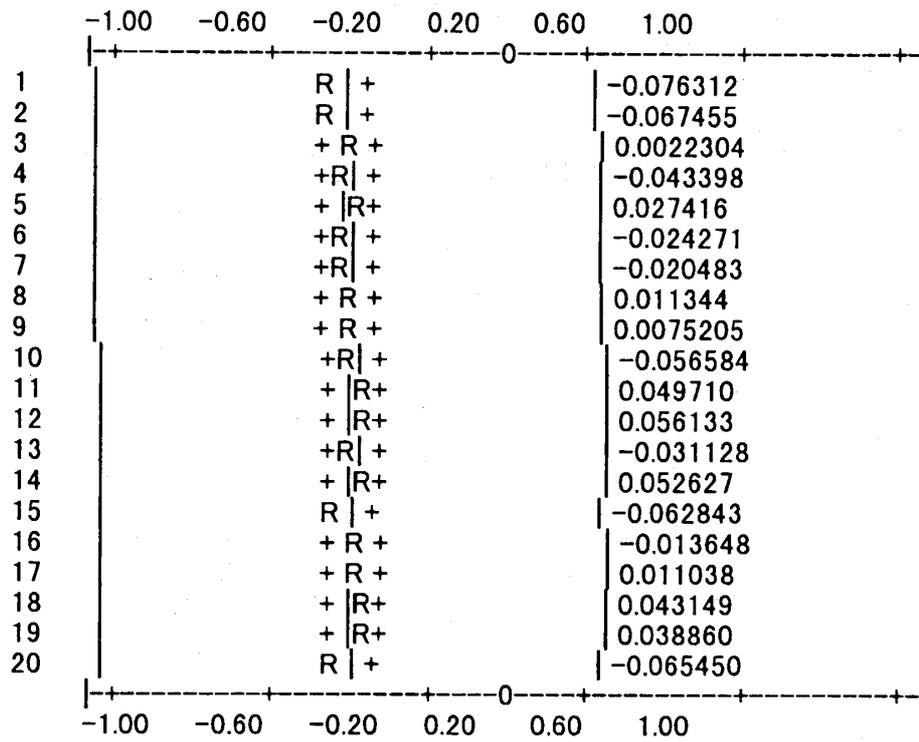


図7

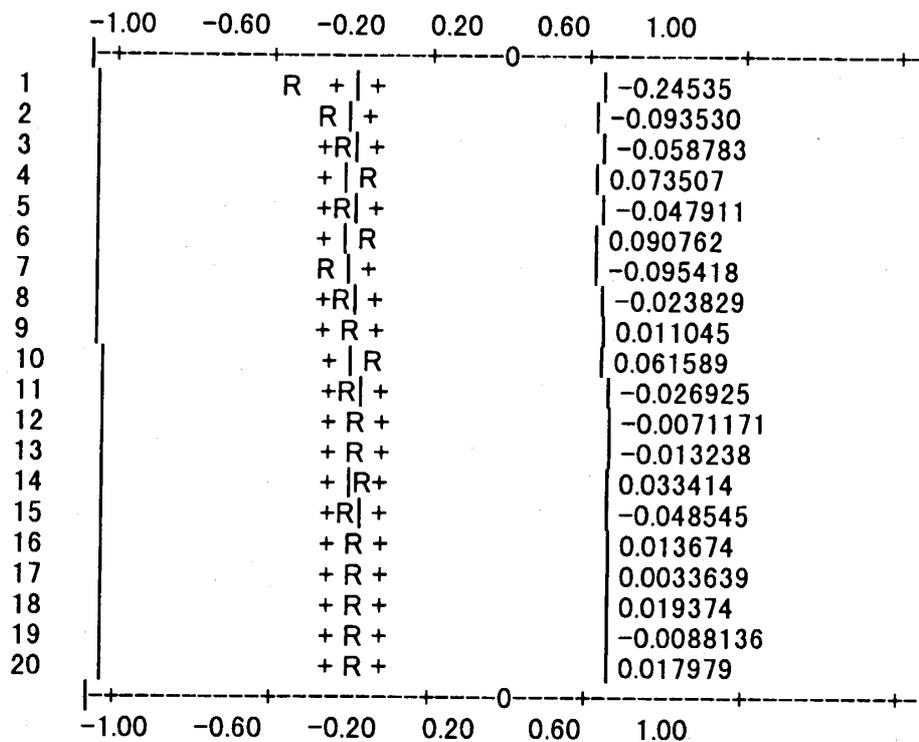


図8

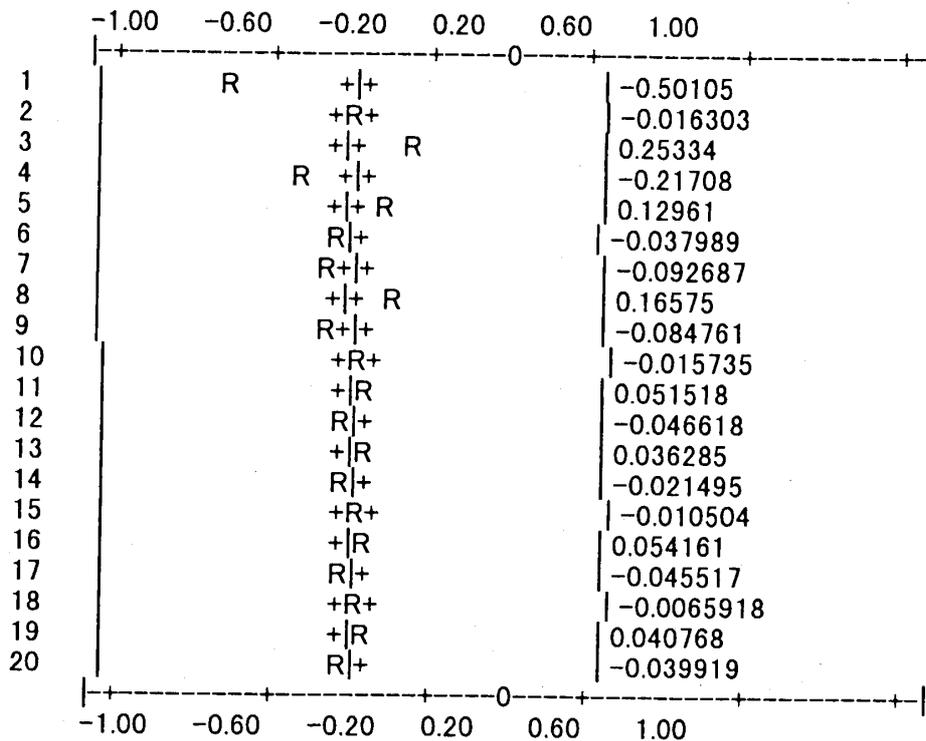


図 9

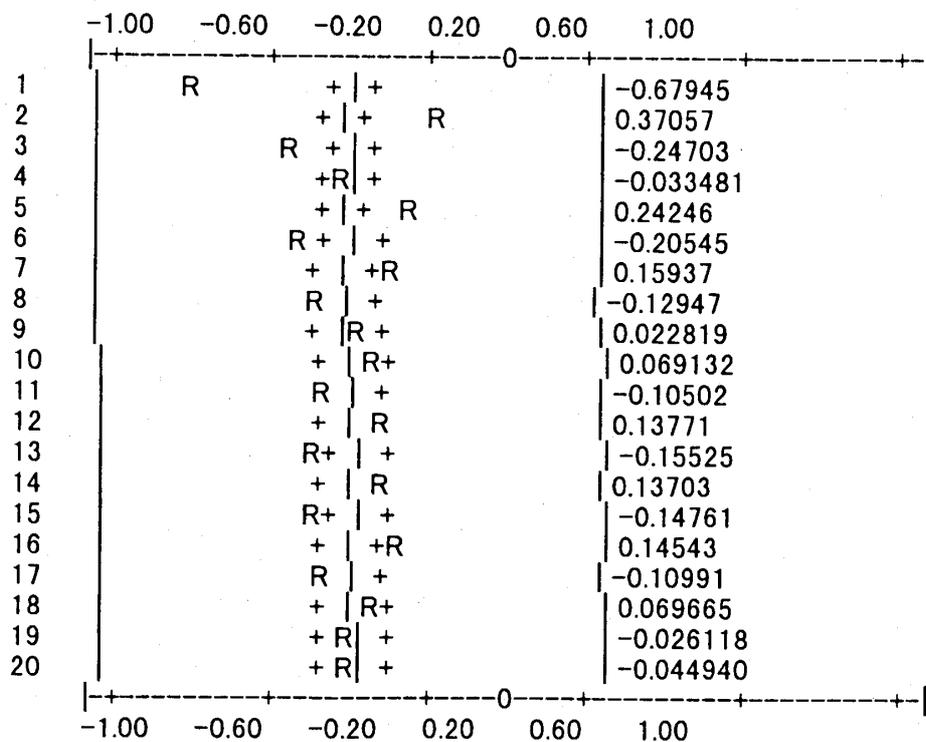


図 10

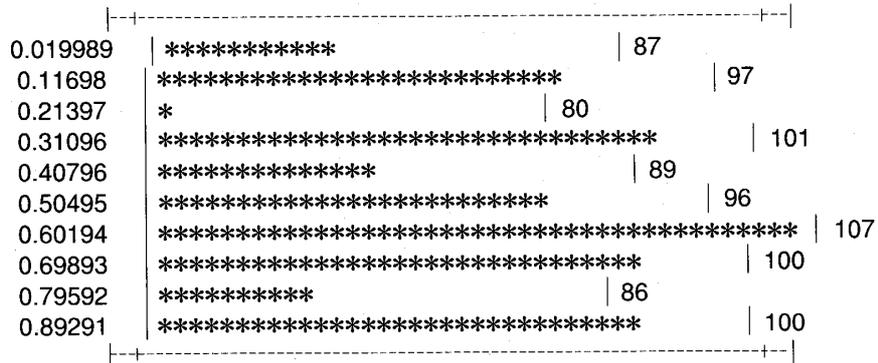


図 11

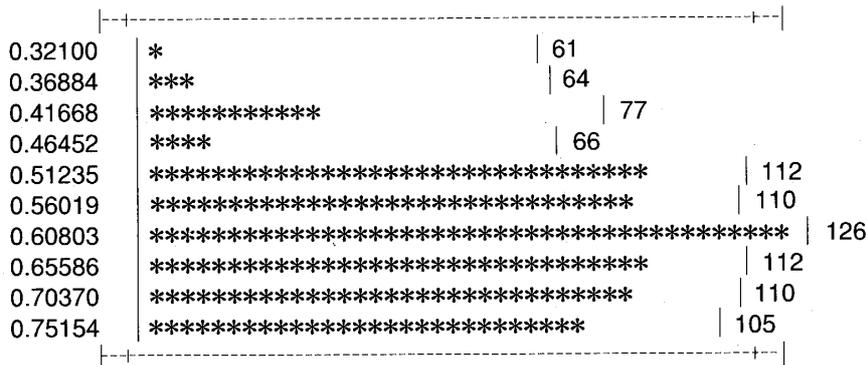


図 12

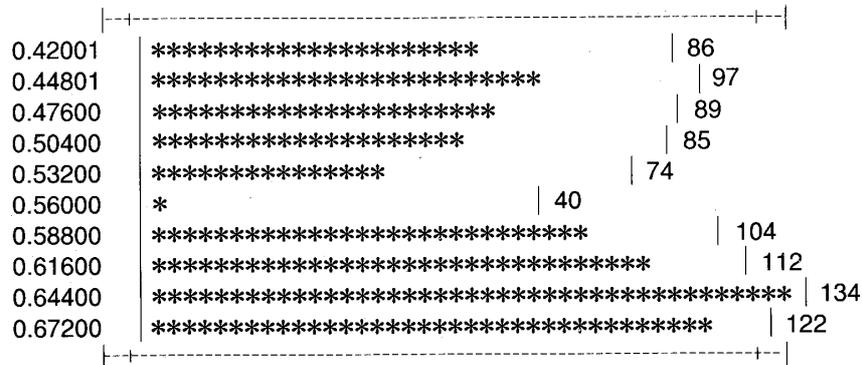


図 13

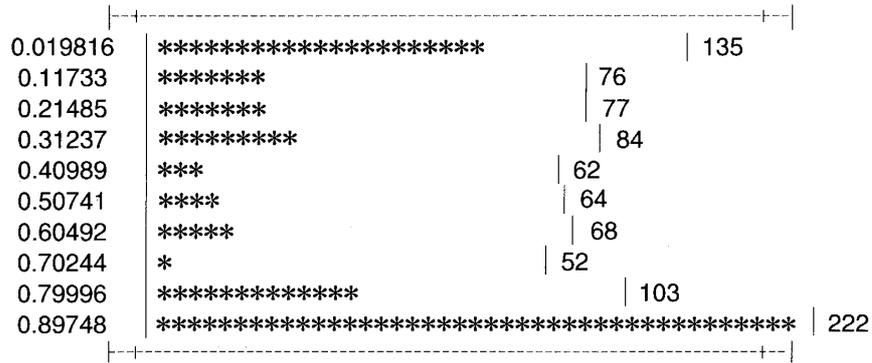


図 14A

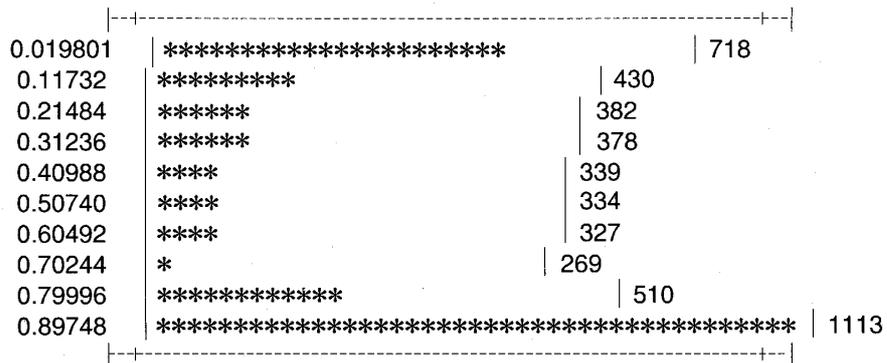


図 14B

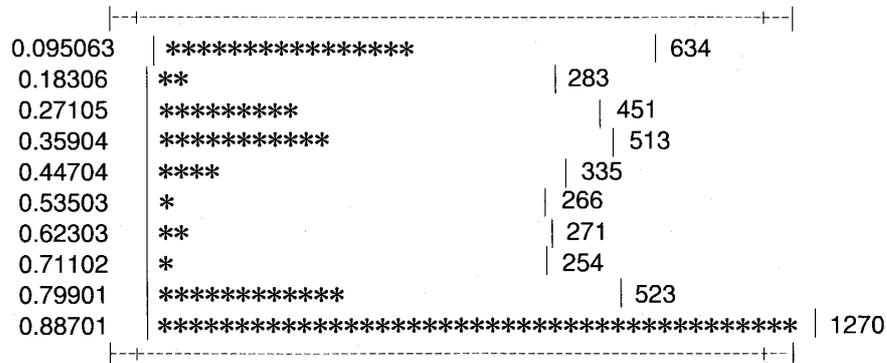


図 15A

0.095063	*****		139
0.18306	*****	50	
0.27105	*****		96
0.35904	*****		105
0.44704	*****	76	
0.53503	*****	47	
0.62303	*****	46	
0.71102	*	20	
0.79901	*****		110
0.88701	*****		254

図 15B

0.21973	*****		124
0.29151	*	37	
0.36328	*	37	
0.43506	*****		71
0.50684	**	42	
0.57861	*****		88
0.65039	*****		113
0.72217	*****		89
0.79394	*****		136
0.86572	*****		199

図 16A

0.21973	*****		662
0.29150	**	181	
0.36328	*	155	
0.43506	*****		374
0.50684	*****	254	
0.57861	*****		403
0.65039	*****		608
0.72217	*****	413	
0.79395	*****		750
0.86572	*****		1000

図 16B