研究ノート

Cox=Huang Method についてのノート

森　田　　　洋

1．はじめに

今日の資産価格形成理論では，単純な代表的投資家の存在を前提とする同質的経済から一歩踏み出て，より一般的な経済を対象とした理論展開がなされている．そしてこの結果，実際の証券市場に即した，従って実用性の高い理論的成果も得られている．具体的な例を網羅的に挙げるつもりはないが，例えば異なるリスク許容度の投資家が参加する heterogeneous な動学的経済（Wang [1996]）や，運用資産時価総額にポートフォリオインシュアランスをかけて最適消費投資計画をたてる投資家の存在する経済（Basak [1995]）等がその例である．いずれの研究においても投資家の計画問題を動的計画問題を利用して解くのは困難である．例えば Basak [1995] では，ある時点の運用資産額が確率1で一定額を下回らないという制約条件下の効用最大化問題がたてられるが，このような問題を動的計画問題により解くことは極めて困難である．

このような複雑な最適消費投資計画問題を解くことを可能にしたのがCox=Huang [1989] である．彼らは動的計画法にかわる解法として，通称，Cox=Huang method，あるいは martingale technique と呼ばれるものを提示した．周知のとおり，連続時間の動的計画問題を解こうとする場合､最終的には非線形偏微分方程式問題を解くことを迫られる．特に状態変数が複数となると偏微分方程式は複雑な形となり，変数変換により既存の偏微分方程式問題に変換できない限り，解くことがかなり困難となる．これに対し Cox=Huang [1989] が提示した解法においては，数学的には条件付期待値を求めるという作業がメインであるため，比較的容易な双曲線型の線形偏微分方程式問題が解くべき問題となる．このため，今まで動的計画法では対処しきれなかった問題も，Cox=Huang method により解を得ることが可能となり，最近成功を納めた研究がかなりの数で出てきている．この意味で彼らの研究結果はファイナンス理論においては大きなブレークスルーであったといっても過言ではなかろう．

このように，Cox=Huang method は大変利便性の高い手法であるが，その性質，特徴の理解を容易にすることを目的とした，あるいはそのような目的でなくとも理解が容易な文献は今のところ見受けられない．このような事情を鑑みると，最も単純な最適消費投資計画問題を1つの exercise としてとりあげ，この例の上で彼らの手法の特徴を明らかにしていくことも，それほど意義のないものではなかろう．本研究ノートでは，危険資産の価格が幾何ブラウン運動，短期金利が deterministic なプロセスに従う経済における投資家の最適消費投資計画問題をとりあげ，Cox=Huang method の特徴を明らかにすることを目的としたものである．とりあげる例がアップトゥデートな計画問題でないのは，手法の特徴をできる限り単純なモデル上で示すため，また数学的な規則性の条件にこだわらずに済み，従ってこの研究ノートの目的に合致するモデルを採用するためであることを最初に断っておこう．

構成は以下のとおりである．まず上述の投資家の最適消費投資計画問題を定義し，動的計画問題による解を記す．次に Cox=Huang [1989] の提示した計画問題を説明し，その計画問題が経済的にいかなる意味の最適化問題であるかを説明する．続いて実際にこの手法を利用して解を求める．この手法では動的計画法とは別の状態変数を利用するため解の関数形が異なり，解の一致はそれほど明白ではない．そこで得た解が動的計画法での解と完全に一致することを次に示す．最後にこの手法の特徴について，とりあげた例に即してまとめる．

2．最適消費投資計画問題

投資家の取引時点の集合を $[0, T]$ とする．この時間の集合に対して定義される1次元の標準ウィーナー過程 $\{z(t) : \in [0, T]\}$ で表す．確率空間を (Ω, F, Q) とする．但し σ －field はウィーナー過程の全体の経路から生成されるものとして定義する．各時点においてそれまでのウィーナー過程の経路から生成される σ －field を F_t $(t \in [0, T])$ で表す．もちろん $F_T = F$ である．

投資家に対して開かれている投資機会は，連続的に取引可能な1種類の危険資産と1種類の安全資産である．危険資産の価格の確率過程，$\{P(t) : t \in [0, T]\}$，安全資産の価格の確率過程，$\{B(t) \in [0, T]\}$ は各々次のような方程式で記述されているとしよう．

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \alpha dt + \sigma dz(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = rdt \qquad (2)$$

但し，α, σ, γ はいずれも正の実数である．従って，危険資産の価格は幾何ブラウン運動に従う．また安全資産にはまったく金利リスクがなく，従って時間軸上局所的にも大域的にも収益率にリスクが全く存在しない．

投資家の各時点の消費に対し定義される効用関数は，次の CRRA 型効用関数とする．

$$U(C(t), t)) \equiv \exp[-\rho t]\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma},\ t \in [0, T],\ \gamma < 1 \qquad (3)$$

この効用関数を次のように時間軸上で積分した functional の期待値が投資家の目的関数である．

$$\begin{aligned} &E_0\left[\int_0^T U(C(t), t)\,dt\right] \\ &= E_0\left[\int_0^T \exp[-\rho t]\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma}dt\right] \end{aligned} \qquad (4)$$

但し E_t は F_t－可測な条件付期待値，いいかえると時点 t までに入手された情報の下での条件付期待値の期待値オペレーターである．以上のような，連続時間モデルとしては最も簡単な例の上で最適消費投資計画問題を解くことにしよう．

3．動的計画法の下での最適消費投資計画

動的計画法を利用して最適消費投資計画を解く方法は，今日となってはあまりにもポピュラーなものとなった．その計画問題は次のように定式化される．

$$\underset{\{C(t):t\in[0,T]\},\{w(t):t\in[0,T]\}}{Max} E_0\left[\int_0^T \exp[-\rho t]\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma}dt\right]$$

$$\begin{aligned} s.t.\,dW(t) &= [[r + w(t)(\alpha - r)]W(t) - C(t)]dt \qquad \text{(P-1)} \\ &\quad + w(t)\sigma W(t)\,dz(t) \\ W(s) &= \bar{W} \end{aligned}$$

但し W(t) は運用資産時価総額，w(t) は危険資産の組み入れ比率である．後に説明する Cox=Huang method との対比を明確にするために，動的計画法でこの問題を解くプロセスを簡単に記してみよう．まず value function を定義する．

$$\begin{aligned} &J(\hat{W}, s) \\ &\equiv \underset{\{C(t):t\in[s,T]\},\{w(t):t\in[s,T]\}}{Max} E_s\left[\int_s^T \exp[-\rho(t-s)]\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma}dt\right] \\ &\quad s.t.\,dW(t) = [[r + w(t)(\alpha - r)]W(t) - C(t)]dt \\ &\qquad\qquad + w(t)\sigma W(t)\,dz(t) \\ &\quad W(s) = \hat{W} \end{aligned} \qquad (5)$$

最適性の原理より成立する value function に関しての関数方程式が次のベルマン方程式である．

$$0 = \underset{C(t),w(t)}{Max}\left[\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_t[J(W(t+\Delta), t+\Delta) - J(W(t), t)]\right] \qquad (6)$$

右辺の極限部分は，value function のドリフトを表すので，伊藤の補題を適用することにより，次の形に表現をかえることが可能である．

$$0 = \underset{C(t),w(t)}{Max}\left[\begin{aligned} &\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma} + J_W(W(t), t)[W(t)[r + w(t)(\alpha - r)] - C(t)] \\ &+ \frac{1}{2}J_{WW}(W(t), t)\,W(t)^2 w(t)^2 \sigma^2 + J_t(W(t), t) \end{aligned}\right] \qquad (7)$$

但し，J_W, J_{WW}, J_t は関数 J の偏微係数である．
右辺の最大化問題の1階の条件は，

$$w(t) = -\frac{J_W(W(t),t)\,(\alpha-r)}{J_{WW}(W(t),t)\,W(t)\sigma^2} \tag{8}$$

$$C(t)^{\gamma-1} = J_W(W(t),t) \tag{9}$$

であり，この２つを（７)式に代入することで，次の偏微分方程式問題が得られる．

$$0=\frac{J_W(W(t),t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma}+J_W(W(t),t)\,W(t)\,r$$
$$+\frac{1}{2}\frac{J_W(W(t),t)^2}{J_{WW}(W(t),t)}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}+J_t(W(t),t)$$
$$J(W(T),T)=0 \tag{P-2}$$

後はこの問題を解くという作業に入ればよい．ここで注意しておきたいのは，偏微分方程式が非線形のクラスに入る点である．ここでの問題は，運よく簡単に解ける問題であるが，一般に非線形の偏微分方程式は解くことが困難なケースが多いことを指摘しておこう．偏微分方程式問題（P-2）の解は次のようになる．

$$J(W(t),t)$$
$$=\left[\frac{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}\right](T-t)\right]\times}{\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}}\right]^{1-\gamma}\frac{W(t)^{\gamma}}{\gamma} \tag{10}$$

この解の偏微係数を（８)（９）式に代入して最適消費計画，最適投資計画が次のとおり得られる．

$$C(t)$$
$$=\frac{\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}}{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}\times W(t) \tag{11}$$

$$w(t)=\frac{\alpha-r}{(1-\gamma)\sigma^2} \tag{12}$$

4．Cox=Huang Method

4.1 growth optimal strategy

上述の動的計画法に対して，Cox=Huang Method は解くべき計画問題は同じではあっても，全く異なる方法で解を得ようとする．彼らの解法のキーとなるのが，仮想上のベンチマークポートフォリオ戦略，growth optimal strategy である．但しこの投資戦略は，飽くまでも２節で定義した投資家の最適消費投資計画とは全く別の計画問題の解で，投資家の最適計画を得るためのツールに過ぎないことに注意したい．これは次の計画問題の解としての投資戦略である．

$$\underset{\{w_g(t):t\in[0,T]\}}{Max}\;E_0[\ln[X(T)/X(0)]]$$
$$s.t.\,dX(t)=[r+w_g(t)\,(\alpha-r)]\,X(t)\,dt+w_g(t)\,\sigma X(t)\,dz(t)$$
$$X(0)=\bar{X} \tag{P-3}$$

但し $X(t)$ はこの架空の投資計画における運用額，$w_g(t)$ は危険資産の組み入れ比率である．表記が先の問題と異なるのは，求めるべき真の計画問題における運用資産額や組み入れ比率と混同しないようにするためである．この問題（P-3）は，目的関数が最終時点の，運用資産額の連続時間複利表現での累積期待成長率となっていること，運用の途中期間で消費等のキャッシュの引出しが全くないことにおいて，先の動的計画法で定式化した計画問題と異っている．もちろん（P-3）は，最終時点の運用資産額に対し，対数型の効用関数で実績を評価する投資家の計画問題と解釈することもできる．

注意深い読者ならば，この（P-3）が動的計画問題として定式化されており，解くことに骨が折れるのではないか，と考えるかもしれない．だが，対数型効用関数の場合，運用期間中の各期とも，単純な静学的最適投資計画を繰り返し実行する戦略が最適となることが明らかとなっている．つまり growth optimal strategy は次のような単純な投資戦略となる．

$$w_g(t)=\frac{\alpha-r}{\sigma^2}\;\forall t\in[0,T] \tag{13}$$

危険資産のリスクプレミアムをヴォラティリティで割ったもの，つまりリスクプライスをで θ 表すことにすると，growth optimal strategy の運用資産 X(t) の確

率過程は次の確率微分方程式により記述される.

$$\begin{aligned} dX(t) &= [\{w_g(t)(\alpha-r)+r\}X(t)]dt+w_g(t)\sigma X(t)dz(t) \\ &= [\{\frac{\theta}{\sigma}(\alpha-r)+r\}X(t)]dt+\frac{\theta}{\sigma}\sigma X(t)dz(t) \\ &= X(t)[[\theta^2+r]dt+\theta dz(t)] \end{aligned} \tag{14}$$

また確率積分をとれば，次のような表現にかえることもできる.

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0)\exp\left[\int_0^t\left[r+\frac{1}{2}\theta^2\right]ds+\int_0^t\theta dz(s)\right] \\ &= X(0)\exp\left[rt+\frac{1}{2}\theta^2 t+\theta[z(t)-z(0)]\right] \end{aligned} \tag{15}$$

4.2 Cox=Huang Method

Cox=Huang Method の計画問題は，growth optimal strategy を利用して定義される．この手法において顕著な特徴は，最適消費計画問題をまず解いてしまい，その次に最適投資計画問題を解く，という2段構えでの解法となっている点である．先に触れた動的計画問題が，最適消費，最適投資いずれの計画も value function を求めるという形で同時に解くのとは対照的である．解法の経済的意味は後回しにすることにして，まずこの解法のプロセスを簡単に説明しよう．まず，次の最適消費計画問題をラグランジュ未定乗数法によって解く.

$$\begin{aligned} &\underset{\{C(t):t\in[0,T]\}}{Max}\ E_0\left[\int_0^T \exp[-\rho t]\frac{C(t)^{\gamma}}{\gamma}dt\right] \\ &s.t. E_0\left[\int_0^T\frac{C(t)}{X(t)/X(0)}dt\right]=W(0) \end{aligned} \tag{P-4}$$

最適消費計画が求められたあかつきには，最適投資計画を求めるため，次の関数が定義される.

$$F(X(t),t)\equiv E_t\left[\int_t^T\frac{C(\tau)}{X(\tau)/X(t)}d\tau\right] \tag{16}$$

右辺の値が，X(t)およびtにのみ依存するという数学的対応関係に対して疑問をもたれる，いいかえると左辺が well-defined か否かに関して疑問をもたれる読者がおられるかもしれない．だがこの性質は，目的関数が time-additive な効用関数の期待値で，投資対象の資産の確率過程がマルコフタイプの拡散過程である限り成立する．この研究ノートで採用したモデル上でも (16) 式の左辺は well-defined である．この点については以下で計画問題を解く際に明らかになる.

さてこの関数が求められると，次の式により最適投資比率が得られる.

$$w(t)=\frac{F_X(X(t),t)}{F(X(t),t)}w_g(t)X(t) \tag{17}$$

以上が彼等の手法の概略であるが，一言書き添えておきたいことは，上記の問題を実際に解く際に直面する偏微分方程式問題はすべて線形偏微分方程式問題である点である．偏微分方程式を解く必要に迫られるのは，(P-4) の制約条件の左辺の期待値，およびやはり条件付期待値である関数 F(X(t), t) を求めるときである．拡散過程を前提としたときの条件付期待値は，コロモゴロフ方程式といわれる線形の双曲線型偏微分方程式に従う．このため，この手法における偏微分方程式問題は解くことが比較的容易である.

上記の Cox=Huang Method は growth optimal strategy を巧みに利用した解法であるが，計画問題 (P-4) がいかなる経済学的最適化問題を解いているか，あるいは関数がいかなる意味をもつかはそれほど明白ではない．というのは，予算制約式とおぼしき制約条件式において各時点の消費額の割り引き率が growth optimal strategy の累積リターンである理由は，経済的には不明瞭である．また制約条件式において期待値がとられている点も疑問視される点であろう．経済的には各基本事象ごとに予算制約が効かなくてはいけないはずであり，期待値上で予算制約が効いているという (P-4) の制約条件はこれよりはるかに弱い条件である，と考える人もいるかもしれない．次の節では，このような疑問点について答えを出すことにしよう.

4.3 Cox=Huang method の計画問題の経済学的意味

(15)式を使って計画問題 (P-4) の制約条件を書き換えると，次のようになる.

$$\begin{aligned} W_0 &= E_0\left[\int_0^T C(t)\exp\left[\int_0^t\left[r+\frac{1}{2}\theta^2\right]ds+\int_0^t\theta dz(s)\right]^{-1}dt\right] \\ &= \int_0^T E_0\left[C(t)\exp\left[\int_0^t\left[r+\frac{1}{2}\theta^2\right]ds+\int_0^t\theta dz(s)\right]^{-1}\right]dt \\ &= \int_0^T E_0\left[C(t)\exp\left[\int_0^t -r-\frac{1}{2}\theta^2 ds-\int_0^t\theta dz(s)\right]\right]dt \end{aligned}$$

$$=\int_0^T E_0\left[\begin{array}{l} C(t)\exp\left[-\int_0^t r ds\right] exp\left[\int_0^t -\frac{1}{2}\theta^2 du-\int_0^t \theta dz(u)\right] \\ \quad \times E_t\left[\exp\left[\int_t^T -\frac{1}{2}\theta^2 du-\int_t^T \theta dz(u)\right]\right]\end{array}\right] dt$$

$$=\int_0^T E_0\left[C(t)\exp\left[-\int_0^t r ds\right]\exp\left[\int_0^T -\frac{1}{2}\theta^2 du\int_0^T \theta dz(u)\right]\right] dt$$

$$=E_0\left[\int_0^T C(t)\exp\left[-\int_0^t r ds\right]\exp\left[\int_0^T -\frac{1}{2}\theta^2 du-\int_0^T \theta dz(u)\right] dt\right]$$

$$=E_0\left[\left[\int_0^T C(t)\exp\left[-\int_0^t r ds\right] dt\right]\exp\left[\int_0^T -\frac{1}{2}\theta^2 du-\int_0^T \theta dz(u)\right]\right]$$

$$=E_0^*\left[\left[\int_0^T C(t)\exp\left[-\int_0^t r ds\right] dt\right]\right] \tag{18}$$

但し，E^*は，関数，

$$\exp\left[\int_0^T -\frac{1}{2}\theta^2(u)\,du-\int_0^T \theta(u)\,dz(u)\right] \tag{19}$$

をラドン＝ニコディム導関数とし，実際の確率測度Qと equivalent な確率測度の下での期待値オペレーターである．以上より Cox=Huang method の計画問題（P-4）は次の計画問題に表現をかえることができる．

$$\underset{\{C(t)\}}{Max} E_0\left[\int_0^T U(C(t),t)\,dt\right]$$
$$s.t. E_0{}^*\left[\int_0^T C(t)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right) dt\right]=W(0) \tag{P-4'}$$

周知のとおり，ラドン＝ニコディム導関数がリスクプライスにより定義されているとき，その確率測度は equivalent martingale measure，別名，危険中立化測度となる．そして，（P-4'）における制約式左辺は，形式的にはアローデブリューマーケットにおける支出額総額を表わす．すなわち，アローデブリュープライス，いいかえると特定の時点かつ特定の基本事象における消費額１単位に対する状態請求権の価格を消費額に乗じて，基本事象ごと，時点ごとに集計した金額を意味している．つまりアローデブリューマーケットが仮に存在するならば，この制約条件式は，将来の消費計画を約束する状態請求権への支出総額が現在の保有資産額を上回ることが許されない，というマイクロエコノミクスにおいて極めて馴染み深い予算制約を意味しているのである．

もちろん，このモデルにおいては，投資機会は１種類の危険資産と１種類の安全資産のみであり，アローデブリューマーケットは存在しない．だが，経済のリスクを決めるウィーナー過程が１次元である場合，２証券での投資機会の下では市場は動学的には完備であり，適当な動学的投資戦略を組むことで，アローデブリューマーケットが存在するケースと同一の消費計画を実行することが可能である．（P-4'）はこの動学的完備市場における最適消費計画問題を，アローデブリューマーケットが存在する場合の最適消費計画問題の表現を借りて表わしたものとなっているのである．

一方，（16）式で定義された関数Fは，危険中立化測度を用いて次のように表現をかえることができる．

$$F(X(t),t)=E_t^*\left[\int_t^T C(\tau)\exp\left[-\int_t^\tau r(s)\,ds\right] d\tau\right] \tag{20}$$

つまり関数Fはt時点以降の消費の現在価値であり，非飽和の仮定が暗黙裡に存在する効用関数の下では，Fは現在の運用資産総額と数字の上で一致する．

従ってこの結果より，Fのヴォラティリティと動的計画法において登場した運用資産額Wのヴォラティリティとは一致するはずである．すなわち，

$$F_X(X(t),t)\,X(t)\,w_g(t)\,\sigma=W(t)\,w(t)\,\sigma \tag{21}$$

左辺はFのヴォラティリティ，右辺は運用資産額Wのヴォラティリティである．FとWが等しいことに注意して整理すると，（17）式が得られる．Cox=Huang method は実はこの理論的事実を利用して最適投資計画を解いているのである．

4.4節 Cox=Huang method の下での最適消費計画

では，この解法によって最適消費計画を求めてみよう．計画問題（P-4）の必要条件は，ラグランジュ未定乗数法により次のように記すことができる．

$$C(t;w)^{\gamma-1}-\lambda\exp[\rho t]\frac{1}{X(t;w)/X(0)}=0,$$
$$\forall w\in\Omega,\ \forall t\in[0,T] \tag{22}$$

但しλは制約条件式に対するラグランジュ乗数である．注意しておきたいことは，この１階の条件が各時点，各基本事象ごとに成立している点である．もちろん，乗数λは時点，基本事象に依存しない定数である．

一般に経済学的分析，特に応用マイクロ経済分析に

おいては，ラグランジュ乗数を消去して経済主体の主体的均衡，あるいは市場均衡の性質を探るというアプローチがとられるが，ここではそのプロセスは踏まない．逆にこの乗数の値を求めることが行うべき作業である．(22)式を利用すると，(P-4) における制約条件式は次のように表現をかえることができる．

$$
\begin{aligned}
&W(0)\\
&=E_0\left[\int_0^T \frac{[\lambda \exp[\rho t]X(0)/X(t)]^{-\frac{1}{1-\gamma}}}{X(t)/X(0)}dt\right]\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}E_0\left[\int_0^T \exp[\rho t]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\frac{[X(0)/X(t)]^{-\frac{1}{1-\gamma}}}{X(t)/X(0)}dt\right]\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}E_0\left[\int_0^T \exp[\rho t]^{-\frac{1}{1-\gamma}}[X(t)/X(0)]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}dt\right]\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}\int_0^T \exp[\rho t]^{-\frac{1}{1-\gamma}}E_0\left[[X(t)/X(0)]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]dt
\end{aligned}
\tag{23}
$$

最後の等式はフビニの定理によるものである．厳密にはこの定理のための十分条件が成立するか否かをチェックする必要があるが，ここでは特に立ち入らないことにする．だが厳密性を要求する読者には確率変数 $[X(t)/X(0)]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ が対数正規分布に従うことからフビニの定理が成立することが容易に確認できることを一言述べておこう．

(23) 式を利用して，ラグランジュ乗数を求めるためには，あとは期待値，

$$E_0\left[X(t)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right] \tag{24}$$

がわかれば十分である．この期待値の一般的な求め方は条件付期待値，

$$E_t\left[X(\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right],\ \tau\in[t,\ T] \tag{25}$$

を，偏微分方程式問題を定義してそれを解くという方法であろう．だが，ここでは正規分布に従う確率変数に関する公式を利用して簡単に求めることができるため，この方法により答えを求めることにしよう．(25) を求める偏微分方程式問題は最後の節で明記して説明することにしよう．

(23) 式の右辺の期待値は，対数正規分布に従う確率変数の期待値であり，

$$
\begin{aligned}
&E_0\left[[X(t)/X(0)]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]\\
&=E_0\left[\exp\left[\left\{rt+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t+\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(t)-z(0)]\right\}\frac{\gamma}{1-\gamma}\right]\right]\\
&=\exp\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}rt+\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t+\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\right]^2\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}t\right]\\
&=\exp\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}rt+\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t\right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となる．以上より (26) 式は次の等式に帰着する．

$$
\begin{aligned}
&W(0)\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}\int_0^T \exp[\rho t]^{-\frac{1}{1-\gamma}}E_0\left[[X(t)/X(0)]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]dt\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}\int_0^T \exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]t\right]dt\\
&=\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}\frac{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]}{\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

これを変形して次を得る．

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{-\frac{1}{1-\gamma}}\\
&=W(0)\frac{\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}}{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

この (28) 式を (22) 式に代入することにより，最適消費計画が X(t) の関数として得られる．

$$
\begin{aligned}
C(t)&=\left[\lambda\frac{X(0)}{X(t)}\exp[\rho t]\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\\
&=W(0)\frac{\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}}{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]}\\
&\quad\times\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\exp\left[\frac{-\rho t}{1-\gamma}\right]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

4.5 Cox=Huang method の下での最適投資計画

前節で得られた最適消費計画より最適投資計画を求めよう．4.2節で定義した関数Fの定義式（16）式に（29）を代入しよう．但し表記を簡潔にするために，

$$\mu \equiv \frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2} \tag{30}$$

としよう．この表記の下では関数Fは，

$$\begin{aligned}
&F(X(t),t)\\
&=\int_t^T E_t\left[\frac{C(\tau)}{X(\tau)/X(t)}\right]d\tau\\
&=\int_t^T W(0)\frac{\mu}{1-\exp[-\mu T]}E_t\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\left[\frac{X(\tau)}{X(t)}\right]^{-1}\\
&\qquad\times\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]d\tau\\
&=\int_t^T W(0)\frac{\mu}{1-\exp[-\mu T]}E_t\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\\
&\times\left[\left[\frac{X(t)}{X(\tau)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\left[\frac{X(\tau)}{X(t)}\right]^{-1}\right]\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]d\tau\\
&=\int_t^T W(0)\frac{\mu}{1-\exp[\mu T]}E_t\left[\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\left[\frac{X(\tau)}{X(t)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]\\
&\qquad\times\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]d\tau\\
&=W(0)\frac{\mu}{1-\exp[-\mu T]}\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\int_t^T E_t\left[\left[\frac{X(\tau)}{X(t)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]\\
&\qquad\times\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]d\tau
\end{aligned} \tag{31}$$

となる．ところで

$$\begin{aligned}
&E_t\left[\left[\frac{X(\tau)}{X(t)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]\\
&=E_t\left[\exp\left[r(\tau-t)+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}(\tau-t)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(\tau)-z(t)]\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right]\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]\\
&=E_t\left[\exp\left[r\frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau-t)+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau-t)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\alpha-r}{\sigma}\frac{\gamma}{1-\gamma}[z(\tau)-z(t)]\right]\right]\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}\right]\\
&=\exp\left[-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}+r\frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau-t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}(\tau-t)\right]\\
&=\exp\left[-\frac{\rho(\tau-t)}{1-\gamma}+r\frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau-t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}(\tau-t)-\frac{\rho t}{1-\gamma}\right]\\
&=\exp[-\mu(\tau-t)]\exp\left[-\frac{\rho t}{1-\gamma}\right]
\end{aligned} \tag{32}$$

であるから，これを代入して，

$$\begin{aligned}
&F(X(t),t)\\
&=W(0)\frac{\mu}{1-\exp[-\mu T]}\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\exp\left[-\frac{\rho t}{1-\gamma}\right]\\
&\qquad\times\int_t^T\exp[-\mu(\tau-t)]\,d\tau\\
&=W(0)\frac{\mu}{1-\exp[-\mu T]}\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\\
&\qquad\times\exp\left[-\frac{\rho t}{1-\gamma}\right]\frac{1}{\mu}[1-\exp[-\mu(T-t)]]\\
&=W(0)\frac{1-\exp[-\mu(T-t)]}{1-\exp[-\mu T]}\left[\frac{X(0)}{X(t)}\right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}\exp\left[-\frac{\rho t}{1-\gamma}\right]
\end{aligned} \tag{33}$$

を得る．これより，

$$\frac{F_X(X(t),t)}{F(X(t),t)}=\frac{\frac{1}{1-\gamma}X(t)^{\frac{1}{1-\gamma}-1}}{X(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}X(t)^{-1} \tag{34}$$

となり，最適投資計画は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
w(t)&=\frac{F_X(X(t),t)}{F(X(t),t)}w_g(t)\,X(t)\\
&=\frac{1}{1-\gamma}X(t)^{-1}\frac{\alpha-r}{\sigma^2}X(t)\\
&=\frac{\alpha-r}{(1-\gamma)\sigma^2}
\end{aligned} \tag{35}$$

4.6 2つの手法の下での最適消費計画の一致

4.4及び4.5で Cox=Huang method によって最適消費計画，最適投資計画が求められた．最適投資計画については動的計画法の下で求められた最適投資計画と一致していることが即座にわかるが，最適消費計画に関しては必ずしもそうではない．というのは，動的計画法の下での最適消費計画は，各時点の消費が投資家の保有資産時価総額の関数として表現されているのに対し，Cox=Huang method の場合，各時点の消費が growth optimal starategy の累積リターンの関数として表現されているからである．解くべき最適消費投資計画問題が同一である限り，この2つの手法の下で得られた最適消費計画は，関数形こそ異なれ数字の上では一致するはずである．ここでは，やや繁雑な計算によってではあるが，2つの手法の下で得られた最適消費計画の一致を確認しておこう．

動的計画法で得られた最適消費計画（11）を，問題（P-1）における推移方程式，つまり運用資産の確率微分方程式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
dW(t) &= \left[\left[r+\frac{1}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}\right]W(t)-C^*(t)\right]dt \\
&\quad +\frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha-r}{\sigma}W(t)\,dz(t) \\
&= W(t)\times \\
&\left[\left[r+\frac{1}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}-\frac{\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}}{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}\right]dt\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha-r}{\sigma}dz(t)\right]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

となり，次の等式を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
W(t) &= W(0)\exp\left[rt+\frac{1}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}t\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}t+\frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(t)-z(0)]\right] \\
&\times\frac{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]} \\
&\times\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]t\right]
\end{aligned}
\tag{37}
$$

また growth optimal strategy の累積リターンを示す（15）式，

$$
X(t)=X(0)\exp\left[rt+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t+\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(t)-z(0)]\right]
$$

に注意して整理すると，

$$
\begin{aligned}
&W(t) \\
&= W(0)\exp\left[rt+\frac{1}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}t-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}t\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(t)-z(0)]\right] \\
&\times\frac{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]} \\
&\times\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]t\right] \\
&\times\exp\left[-\frac{1}{1-\gamma}rt-\frac{1}{1-\gamma}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t\right. \\
&\qquad \left.-\frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha-r}{\sigma}[z(t)-z(0)]\right]\left[\frac{X(t)}{X(0)}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
&= W(0)\exp\left[-\frac{\gamma}{1-\gamma}rt-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}t\right] \\
&\times\frac{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}{1-\exp\left[-\left[\dfrac{\rho}{1-\gamma}-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}r-\dfrac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\dfrac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]}
\end{aligned}
$$

$$\times \exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]t\right]$$
$$\times\left[\frac{X(t)}{X(0)}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$
$$=W(0)$$
$$\times\frac{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}r-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right](T-t)\right]}{1-\exp\left[-\left[\frac{\rho}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\gamma-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2}\right]T\right]}$$
$$\times\exp\left[-\frac{\rho}{1-\gamma}t\right]$$
$$\times\left[\frac{X(t)}{X(0)}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{38}$$

となる．この等式を動的計画法での最適消費計画 (11) 式の $W(t)$ に代入すると，Cox=Huang method の下での最適消費関数 (29) 式が得られる．

5．おわりに

この研究ノートでは，Cox=Huang method を利用して最も単純な最適消費投資計画問題を解いてみた．ここでは動的計画法による解法は簡単な概略のみを記したこともあって，Cox=Huang method が必ずしも簡単な方法ではないという印象を受けた読者もおられたかもしれない．しかし，実際に計算が繁雑か否かということと，計算が可能であるか否かということは全く別の問題である．このノートでは，簡単な例をとりあげたため，いずれの手法によっても最適消費計画，最適投資計画が得られた．しかし，計画問題がより複雑なものとなると，場合によっては動的計画法によっては解を得にくいことがある．その大きな理由は1節でも触れたように，動的計画法の下では解くべき数学的問題が非線形の偏微分方程式問題である点である．このノートにおける例の上では，(P-2)，

$$0=\frac{J_W(W(t),t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma}+J_W(W(t),t)\,W(t)\,r$$
$$+\frac{1}{2}\frac{J_W(W(t),t)^2}{J_{WW}(W(t),t)}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}+J_t(W(t),t)$$
$$J(W(T),T)=0$$

である．

これに対し，Cox=Huang method の場合には，解くべき数学的問題が線形偏微分方程式問題となる．今回とりあげた例の場合では，(23) 式，(31) 式における条件付期待値が関係する．これは (25) 式の条件付期待値，

$$E_t\left[X(\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right],\ \tau\in[t,\ T]$$

を求めれば十分である．つまり，この条件付期待値を次の偏微分方程式問題，

$$0=J_X(X(t),t)\,X(t)\ \left[\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}+r\right]$$
$$+\frac{1}{2}J_{XX}(X(t),t)\,X(t)^2\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}+J_t(X(t),t)$$
$$J(X(\tau),\tau)=X(\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

で解き，得れれた関数を時間軸上で積分することが，この手法での数学的にメインの問題となる．マルコフ型の拡散過程モデルにおいては，条件付期待値はコロモゴロフ方程式といわれる双曲線型線形偏微分方程式に従う．上記の偏微分方程式もその一例である．偏微分方程式が線形である場合，一般に非線形のタイプに比べて解くことが容易である．このため，条件付期待値を求めることが数学的にメインの作業となる Cox=Huang method は，動的計画法では解くことが不可能であった最適消費投資計画問題の解の導出を可能とするのである．

もちろん，本ノートでの例の場合，growth optimal strategy の下での連続時間複利累積リターンが正規分布に従うため，特に偏微分方程式を持ち出さずとも解を得ることができてしまった．この事実自体，Cox=Huang method が動的計画法より数学的には容易なプロセスを要求していることのあらわれなのである．

参考文献

Basak, S., 1995, “A General Equilibrium Model of Portfolio Insurance,” *Review of Financial Studies*, 8, 1059–1090.

Cox, J. C. and C. Huang, 1989, “Optimum Consumption and Portfolio Policies When Asset Prices Follow a Diffusion Process,” *Journal of Economic Theory*, 49, 33–83.

He, H. and N. D. Pearson, 1991, "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite Dimensional Case," *Journal of Economic Theory*, 54, 259−304.

Wang, J., 1996, "Term Structire of Interest Rates in a Pure Exchange Economy with Heterogeneous Investors," *Journal of Financial Economics*, 41, 75−110.

〔もりた　ひろし　横浜国立大学経営学部助教授〕