

CRR型効用関数クラスの下での確率過程の 効率性について

——新しい判断基準による動学的投資戦略の比較¹⁾——

森 田 洋

1. はじめに

リスクのある選択肢の比較といえば誰もがまず確率優位 (stochastic dominance) をおもい起こすのではなかろうか。確率優位は、不完備ながらも2つの確率変数の優劣の決定を可能にする順序づけ (ordering) である。この確率優位は不確実性下の投資に関する意思決定問題に重要な意義をもつ。というのは、意思決定主体の選好に関する具体的な情報を順序づけの際に必要としないからである。例えば選択肢である様々な証券のポートフォリオのリターンを確率変数として捉えるとき、効率的ポートフォリオは第2次確率優位による順序づけから得られる。この効率的ポートフォリオの集合が凸であれば危険資産のリターンと市場ポートフォリオのリターンとの理論的關係を示す資本資産評価モデルが得られる。この一例からわかるように、確率優位はファイナンス理論において有用であるが、飽くまでも選択肢を1変数の確率変数としたときにのみ適用できる概念であり、これを確率過程間の比較に直接適用することは一般には不可能である。

もちろん、リターンの確率過程が独立かつ同一である確率分布に従う確率変数の列である場合には、確率優位をそのまま確率過程の比較に

適用できることが Levy (1978), Huang = Vertinsky = Ziemba (1978) らにより証明されている。だが周知のとおり、今日の資金運用において、投資家が運用期間の最中にアセットミックスの内容を変更しないことはごく稀であり、彼らが対象とする確率過程のクラス中に今日の重要な投資戦略が属することはほとんどない。例えば運用期間中において資産額が低下した局面でリスクヘッジを行う先物売り契約、債券運用の状況悪化に伴って金利リスクの回避をはじめコンティンジェントイミュニゼーションというような投資戦略がある。これらの投資戦略は運用額が一定の下限に達したときにリスクフリーな運用に切り替えるもので stop-loss strategy といわれ、途中期間の運用状況に依存させて運用方法を変更するものである。従って、これらの投資戦略の下ではたとえ運用対象としている証券のリターンの確率過程が独立かつ同一の分布に従う確率変数の列であろうと、運用資産そのもののリターンは独立にはならない。stop-loss strategy とは対照的に運用額が一定の金額に達したときに安全資産の運用に切り替える lock-in strategy といわれる投資戦略もその例である。

自己相関が存在する確率過程の比較における効率性の判断基準は、Levy = Paroush (1924a,

b) で提示されている。特に後者はV-M (フォンノイマン-モルゲンシュテルン) 型効用関数のクラスを限定し、その上で同時分布関数の値が如何なる変数においても低いか等しいことが効率的であることの必要かつ十分な条件であることを示した²⁾。が、この条件は同時分布の値の計算が困難であるときには必ずしも扱い安い判断基準とはいえない。またこの条件下での順序づけは確率優位と同様に不完備であり、順序づけが不可能な確率過程のペアが存在する。

本論文では Levy=Paroush (1974b) の判断基準では比較不可能であった確率過程のペアが比較可能となるような新しい判断基準を提示する。我々は Levy=Paroush (1974b) と同様、各単位期間のリターンに関する周辺分布が等しい2つの確率過程の比較を行う。だが我々は Levy=Paroush (1974b) とは異なり、V-M型効用関数のクラスを CRRA 型効用関数 (相対的危険回避度が一定の効用関数) のクラスに限定した。このようなクラスに限定することで Levy=Paroush (1974b) で提示された条件より強くも弱くもない条件を提示することができる。我々が提示する条件のもとでは、Levy=Paroush (1974b) の判断基準では必ずしも比較できない stop-loss strategy と lock-in strategy の比較、positive feedback investment strategy と negative feedback investment strategy との比較等が可能となった。これらの比較結果が共有する重要な特徴は、Levy=Paroush (1974b) と同様、対数型効用関数の相対的危険回避度である1を境界点として確率過程の優劣が逆転する点である。これは第2次確率優位の場合、相対的危険回避度が0を境界点として優劣が逆転することと形式的には似通っている。が、これは確率変数間の比較では得られない重要な理論的含意をもつ。例えば、たとえ危険回避的であろうと、下方リスクを消去した stop-loss strategy よりも上方リスクを消去した lock-in strategy を好む投資家が存在するという結論が得られる。したがって資産運用の委託者が危険回避的である

という理由だけから、ファンドマネージャーは一概に stop-loss strategy の方が lock-in strategy より適切な投資戦略であると判断してはならない。この結果は運用資産額が下落した時点で安全資産の運用比率を高めるポピュラーなダイナミックアセットアロケーションに対しても同じような内容の忠告を与える。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2節で表記を説明する。第3節では過程とモチベーションについて触れ、第4、5節において確率過程の効率性に関する新しい判断基準を構築し、いくつかの適用例を紹介する。最後に6節で結論を述べる。

2. 表記及び定義

我々は期間が2つの単純な確率過程を考察の対象とする。最初の期間を1期、次の期間を2期と呼ぶことにしよう。運用資産の確率過程は $r = \{r_1, r_2\}$ で表される。但し、確率変数 r_t ($t = 1, 2$) は各期間に対応する運用資産のリターンである。よって期間が3つ以上の多期間の投資戦略間の比較においても、途中の一定時点を区切りとして前半の期間全体のリターンを r_1 、後半の期間のそれを r_2 とすれば、以下の議論が適用できる。但し r_1, r_2 各々はいわば元本込みの収益率で、如何なる確率事象のもとでも非負であるとする³⁾。

優劣の判断の対象となる2つの確率過程の分布関数を $F: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, $G: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ で表すことにしよう。但し \mathbf{R}^+ は非負の実数の集合である。またこの周辺分布を $F_t: \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, $G_t: \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ ($t=1, 2$) とする。更に $F_2(x_2|x_1)$, $G_2(x_2|x_1)$ は1期のリターン r_1 を所与としたときの2期のリターン r_2 の条件付き分布とする。すなわち、

$$F_2(x_2|x_1) \triangleq P_r^F(r_2 \leq x_2 | r_1 = x_1),$$

$$G_2(x_2|x_1) \triangleq P_r^G(r_2 \leq x_2 | r_1 = x_1)$$

と定義される。ここでは条件となる情報は $\{r_1 \leq x_1\}$ でなく、飽くまで $\{r_1 = x_1\}$ であることに注意されたい。これらの分布関数の下での確

率変数 x の期待値は、各々 $\mathbf{E}_F[x]$, $\mathbf{E}_G[x]$, $\mathbf{E}_{F_t}[x]$ ($t = 1, 2$), $\mathbf{E}_{G_t}[x]$ ($t = 1, 2$), $\mathbf{E}_F[x|r_1]$, $\mathbf{E}_G[x|r_1]$ で表す。

確率優位による1変数分布関数間の順序を、第1次確率優位の場合 \succeq_{FSD} 、第2次確率優位の場合 \succeq_{SSD} 、第2次確率単調優位の場合 \succeq_{SSMD} で表すことにする⁴⁾。例えば F_1 が G_1 に対して第1次確率優位にある場合、 $F_1 \succeq_{FSD} G_1$ と表される。

本分析では、運用期間の途中において、運用資産を消費など金融資産以外の用途のために取り崩さない投資戦略の比較に焦点をあてる。従って運用期間最終時点の資産額の期待効用上で投資戦略どうしが比較される。我々は投資期間終了期における $V-M$ 型効用関数を CRRA 型効用関数のクラスに絞り、これを関数 $U: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ で表すことにしよう。第2変数は相対的危険回避度である。 $V-M$ 型効用関数は各危険回避度に対して一意的でなく、線形変換を施した任意の関数でも表現されるが、ここでは相対的危険回避度が $1-\gamma$ である投資家の $V-M$ 型効用関数を $U(W; \gamma) = W^\gamma/\gamma$ で表す。但し、 W は投資期間終了時における資産額である。投資家の初期資産は一般性を失うことなく1であるとしよう⁵⁾。

3. モチベーションおよび仮定

以上の表記では分布関数 $F(\cdot, \cdot)$ をもつリターンの投資終了期における資産額の期待効用は、 $\mathbf{E}_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$ で表わされる。CRRA 型効用関数は、

$$U(r_1 \times r_2; \gamma) = \gamma U(r_1; \gamma) \times U(r_2; \gamma)$$

という性質をもつので、期待効用は次のように変形可能である。

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \mathbf{E}_F[\gamma \times U(r_1; \gamma) \times U(r_2; \gamma)] \\ &= \gamma \times \mathbf{COV}_F[U(r_1; \gamma), U(r_2; \gamma)] + \gamma \\ & \quad \times \mathbf{E}_F[U(r_1; \gamma)] \times \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma)] \quad \dots(1) \end{aligned}$$

但し $\mathbf{COV}_F(\cdot, \cdot)$ は分布関数 F の下でのリターン間の共分散を表わす。よって期待効用で

表現された投資期間全体の成果に対する評価は、1つは2つの期間間のリターンの効用値の共分散、もう1つは周辺分布の下での各期間のリターンの期待効用の積で構成される。Levy (1973), Huang=Vertinsky=Ziemba(1978) は、比較する確率過程のクラスを独立な確率変数の列となるクラスに限定し、 $V-M$ 型効用関数全体のクラスの下で多期間確率優位を議論した⁶⁾。彼らの打ちだした定理は CRRA 型効用関数のクラスにおいてはごく簡単に確認することができる。独立性の過程の下では、(1)式は、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \gamma \times \mathbf{E}_F[U(r_1; \gamma)] \times \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma)] \quad \dots(2) \end{aligned}$$

となる。従って確率過程の優劣は結局、単位期間のリターンの確率優位による優劣に帰着する。例えば分布関数 F を持つ確率過程の方が G の分布関数を持つそれより、2つの期間ともに確率優位であることが、多期間上での確率優位となることの1つの十分条件となるのである。そして確率過程が定常的であることも仮定すれば、1期間のリターンの確率優位の必要十分条件がそのまま多期間確率優位の必要十分条件となる。だが、第1節で述べたように今日の資金運用では運用資産のリターンの確率過程が互いに独立な確率変数の列となることは稀であり、ポピュラーな投資戦略のほとんどが彼らの対象とする確率過程のクラスに属さないといっても過言ではない。

彼らとは異なる確率過程に対する制約として次のようなものが考えられる。

仮定1：比較される2つの確率過程が各々分布関数 F, G をもつとき、その間で次の条件が成立する。

$$F_t(x) = G_t(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^+, t = 1, 2 \quad \dots(3)$$

この仮定1は Levy=Paroush (1974b) においても設定された⁷⁾。仮定1の下では、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_F[U(r_1; \gamma)] = \mathbf{E}_G[U(r_1; \gamma)], \quad \forall \gamma \in \mathbf{R} \\ & \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma)] = \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma)], \quad \forall \gamma \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

が成立し、(1)の右辺第2項は2つの確率過程の間で同じ値になる。よって(1)の右辺第2項での比較を行う Levy (1973), Huang = Vertinsky = Ziemba (1978) とは対照的に第1項の部分に関する大小関係, つまり

$$\begin{aligned} & \text{COV}_F[U(r_1; \gamma), U(r_2; \gamma)] \\ & \cong \text{COV}_G[U(r_1; \gamma), U(r_2; \gamma)] \end{aligned}$$

という大小関係に焦点をあてることになる。

Levy=Paroush(1974b) は対象とする投資家の選好を次のようなクラス,

$$\begin{aligned} U^+ \triangleq \{U : \partial^2 U(x_1 \cdot x_2) / \partial x_1 \partial x_2 \geq 0 \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \text{ かつ} \\ \partial^2 U(x_1 \cdot x_2) / \partial x_1 \partial x_2 > 0 \\ \exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^- \triangleq \{U : \partial^2 U(x_1 \cdot x_2) / \\ \partial x_1 \partial x_2 \leq 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \text{ かつ} \\ \partial^2 U(x_1 \cdot x_2) / \partial x_1 \partial x_2 < 0 \\ \exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \} \end{aligned}$$

に限定した。CRRRA 型効用関数は、 $\gamma > 0$ となる効用関数が U^+ , $\gamma < 0$ となる効用関数が U^- に属している。従って対数型効用関数のみを除き、我々が扱う選好のクラスは彼らの扱ったクラスに含まれる。彼らは次に記す条件1が、 U^+ のクラスではGに対応する確率過程、 U^- のクラスではFに対応する確率過程の方が期待効用が高いことの必要十分条件であることを証明した。

条件1 (Levy=Paroush(1974b))

$$F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \quad \dots(4-a)$$

かつ

$$F(x_1, x_2) < G(x_1, x_2) \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+ \quad \dots(4-b)$$

条件1は必要かつ十分であることから意義が大きい。が、確率優位同様に不完備な順序づけしか行えず、後に示すように比較できない重要な確率過程のペアが存在し得る。その意味で我々が次の節で提示する判断基準は彼らの判断基準を補完する役割をもつ。

4. 確率過程の効率性に関する新しい判断基準

次のような集合を定義しよう。

$$B_1^F \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : F(\cdot | r_1) \geq_{\text{FSD}} G(\cdot | r_1)\} \quad \dots(5-a)$$

$$B_1^G \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : G(\cdot | r_1) \geq_{\text{FSD}} F(\cdot | r_1)\} \quad \dots(5-b)$$

集合 B_1^F は $F(\cdot | r_1)$ が $G(\cdot | r_1)$ に対して第1次確率優位となるような r_1 の集合であり、これに対して B_1^G は逆に $G(\cdot | r_1)$ が $F(\cdot | r_1)$ に対して第1次確率優位となるような r_1 の集合である。明らかに2つの集合は共通部分を持たない。第2次確率優位, 第2次確率単調優位についても同じように定義される。

$$B_2^F \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : F(\cdot | r_1) \geq_{\text{SSD}} G(\cdot | r_1)\} \quad \dots(6-a)$$

$$B_2^G \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : G(\cdot | r_1) \geq_{\text{SSD}} F(\cdot | r_1)\} \quad \dots(6-b)$$

$$B_{2M}^F \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : F(\cdot | r_1) \geq_{\text{SSMD}} G(\cdot | r_1)\} \quad \dots(7-a)$$

$$B_{2M}^G \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : G(\cdot | r_1) \geq_{\text{SSMD}} F(\cdot | r_1)\} \quad \dots(7-b)$$

また、2つの確率過程間で条件付き分布が同一である r_1 の集合を $B_=\$ としよう。すなわち,

$$B_=\triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : G(\cdot | r_1) = F(\cdot | r_1)\} \quad \dots(8)$$

である。これらの集合により次のような効率性に関する判断基準を提示しよう。

条件2 : 2つの同時分布関数F, Gに対して次の4つの条件を満たす2つの非空な集合 B_u, B_l が存在する。

$$(a) \quad B_=\cup B_u \cup B_l = \mathbf{R}^+ \quad \dots(9-a)$$

$$(b) \quad B_u = B_1^G \text{ or } B_u = B_2^G \\ \text{or } B_u = B_{2M}^G \quad \dots(9-b)$$

$$(c) \quad B_l = B_1^F \text{ or } B_l = B_2^F \\ \text{or } B_l = B_{2M}^F \quad \dots(9-c)$$

$$(d) \quad \inf B_u \geq \sup B_l \quad \dots(9-d)$$

(a)(b)(c) 3つの条件をあわせると、2つの確率過程の条件付き分布は1期のリターンの値に

関わらず、第1次、第2次、第2次単調確率優位のいずれかによって順序づけ可能であることが要求される。(d)は、条件付き分布関数が確率優位にあるような1期のリターン、確率劣位にある1期のリターンを任意にピックアップしたとき、2つのリターンの大小関係は常に前者が高いか、後者が高いかのいずれか一方であることを要求している。2つの確率過程がこの条件を満たすときには、片方の確率過程はもう一方の確率過程に対してリターンが高いときに有利になり、リターンの低いときに不利になる関係をもつ。よってある意思決定主体がこの判断基準から答を引き出そうとしているとすれば、彼は運用期間の途中において成果がいいときに有利な投資戦略を選ぶか、それとも成果が悪いときに有利な投資戦略を運ぶかという問題に直面していると表現することもできよう。

やや技術的な点であるが、 B_u, B_l 2つの集合は非空でなくてはならない。これを説明するために一般性を失うことなく仮に B_u が空集合であるとしよう。すなわち、 $B_u \cup B_l = \mathbf{R}^+$ であるとする。そこで r_1 が離散型の分布に従うケースを考えてみよう。このとき B_l に属する任意の r_1 に対し、

$$\mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] \geq \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1], \quad \forall \gamma > 0$$

$$\mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] > \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1], \quad \exists \gamma > 0$$

という関係が成立する。従って、2番目の不等式が成立する γ に対し、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma)] &= \mathbf{E}_F[\mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1]] \\ &= \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &= \int_{B_u} \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &\quad + \int_{B_l} \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &> \int_{B_u} \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &\quad + \int_{B_l} \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &= \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] dF_1(r_1) \\ &= \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] dG_1(r_1) \\ &= \mathbf{E}_G[\mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1]] \\ &= \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma)] \end{aligned}$$

が成立する。これは矛盾である。というのは、仮定1より周辺分布の下での期待効用は両者共同値をとるからである。また B_u と B_l 双方ともが非空である場合には上記のような仮定1との矛盾は生じないが、条件付き分布が常に等しくなってしまう、同一の確率過程の比較を行うという自明のケースとなってしまう。よって B_u と B_l の2つの集合がいずれも非空であることが要求されるのである⁸⁾。

本論文で提示された条件2は Levy = Paroush (1974b) で提示された条件1とは異なり、条件付き分布により特徴づけられている。この2つの条件は一見全く別の条件のようにみえるかもしれないが、2つの条件間には次のような関係が存在する。

命題：条件2が $B_u = B_u^G, B_l = B_l^F$ の形で成立するとき、条件1が成立する。

(証明) appendix をみよ。

すなわち、条件2の(b)、(c)における確率優位が第1次確率優位であるときには条件1が成立する。だが、例えば確率優位が第2次単調確率優位である場合、後に示すように、条件1が成立しないケースが存在する。従って、条件2は条件1と共通部分をもつが、条件1より強い条件でもなく、弱い条件でもない。条件2の下では危険回避的な投資家にとっての確率過程の優劣は相対的危険回避度に応じて次のようになる⁹⁾。

定理1：同時分布 F, G が仮定1、条件2を満たすとしよう。

- (a) $\gamma < 0$ のとき、 F, G 各分布の下での期待効用が存在する γ に対し次が成立する。

$$\mathbf{E}_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \geq \mathbf{E}_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \quad \dots (10-a)$$
- (b) $\gamma = 0$ のとき、 F, G 各分布の下での期待効用が存在するとき次が成立する。

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] = E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \quad \dots(10-b)$$

(c) $0 < \gamma < 1$ のとき, F, G 各分布の下での期待効用が存在する γ に対し次が成立する.

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \leq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \quad \dots(10-C)$$

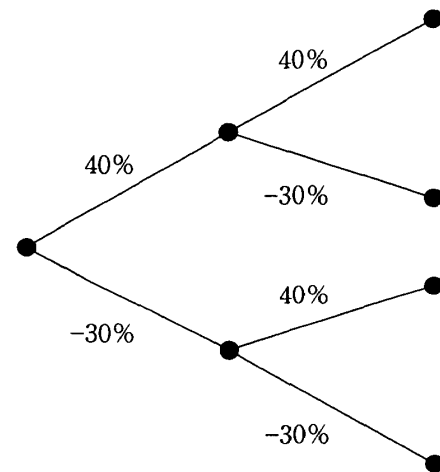
(証明) appendix をみよ.

同じ危険回避的な投資家であっても, 対数型効用関数の危険回避度 1 を境界として優劣の判断が逆転する. 条件 2 より明らかだが, 2 期のリターンに関する条件付き分布は第 1 次, 第 2 次, あるいは第 2 次単調確率優位により順序づけられている. したがって, 2 つの確率過程間での条件付き分布そのものの比較においては, いかなる危険回避的投資家も同じ順序づけを行う. だが確率過程全体の評価となると, この条件付き分布と 1 期のリターンとの一種の相関関係が入ることにより, 評価が投資家の間で同一とはならず, 対数型効用関数の投資家を間にはさんで優劣が完全に反対になるのである¹⁰⁾. この性質は, より広いクラス上での確率過程間の優劣関係を明らかにした Levy = Paroush (1974b) と基本的に同一のものとなっているが, このように確率過程の比較となると, 確率変数の順序づけである確率優位とは決定的に異なる優劣の結果が得られるのである¹¹⁾.

例 1 : positive feedback investment vs negative feedback investment

次のような定常的投資機会を考えてみよう. 各期間とも状態に関わらず, 危険資産のリターンが確率 1/2 で 40%, -30% の値をとる. また安全資産の収益率は簡単化のため各時点とも 0% とする. 図 1 に記されているのは, この投資機会における危険資産のリターンの確率過程を表す樹型図である. 各枝に記されているのは, その枝に対応するリターンである. 次のような

図 1 危険資産の確率過程



投資戦略を考えてみよう.

第 1 期は危険資産を 100% 保有する. 第 2 期においては 1 期のリターン 40% であったときそのまま危険資産を保有し続け, リターンが -30% であったときには自己資金の 2 倍分の空売りを行う. このときのリターンスケジュールは確率 1/2 で -80%, 確率 1/2 で 60% となる. この投資戦略は, 証券価格が上昇したときにプラスのポジション, 下落したときにショートポジションをとる方法で, positive feedback investment strategy の 1 つである. これと対照的な投資方法は negative feedback investment strategy であるが, ここではこれを 1 期のリターンが 40% であるときに上記のショートポジション, -30% のときにそのまま危険資産を保有し続けるものとして 2 つの投資戦略を比較してみよう. 図 2 は図 1 に対応する各投資戦略のリターンの確率過程である.

2 つの投資戦略を比較すると, どちらにおいても 1 期は 40%, -30% 各々のリターンの実現する確率が 50% であり, 2 期に関しては, 上下のサブツリーを交換しただけであるから, 2 つの投資戦略の周辺分布は 1 期, 2 期とも同一であり, 2 つの投資戦略は仮定 1 を満たす. リターンの同時分布関数の値を記したのが表 1 であるが, 変数が (-30%, -80%) の場合と

図2 2つの投資戦略の確率過程

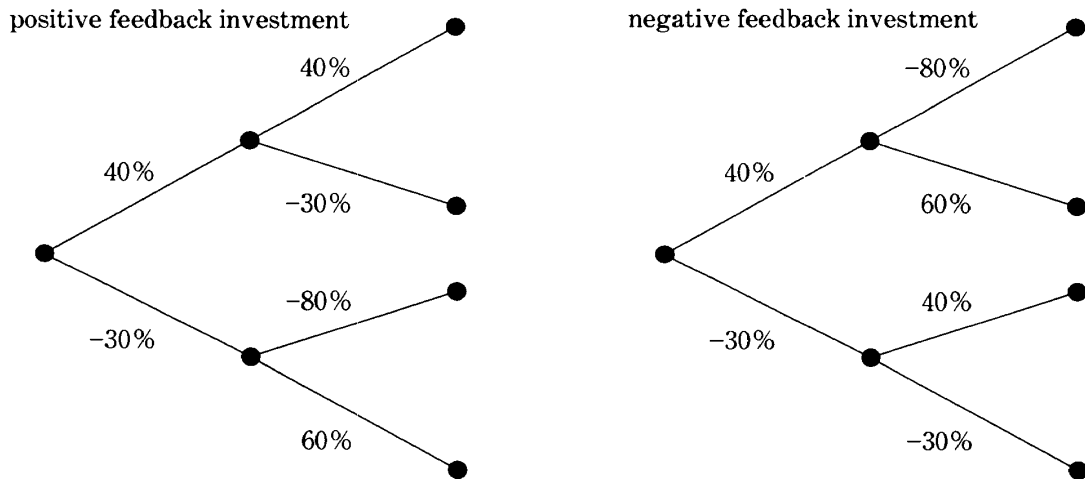


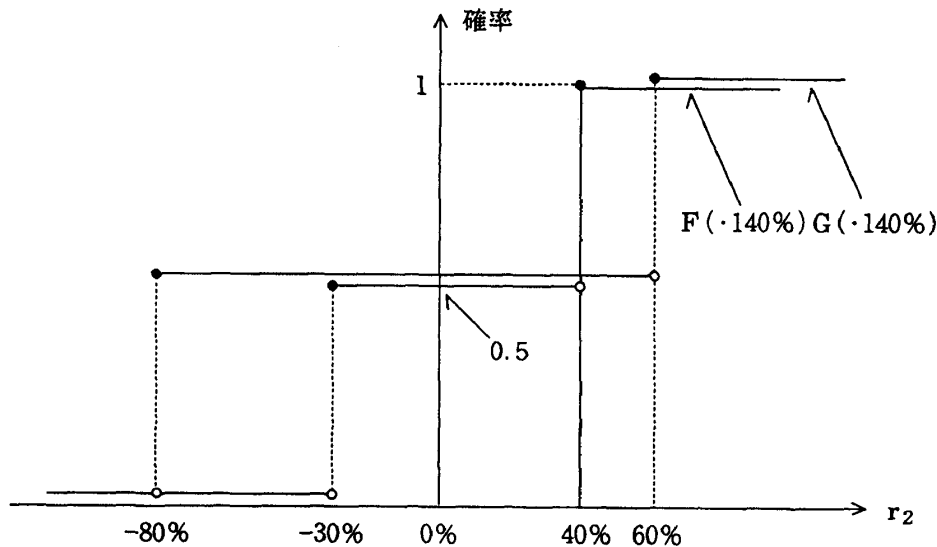
表1

リターン	positive feedback investment strategy	negative feedback investment strategy
(-30%, -80%)	0.25	0.00
(-30%, -30%)	0.25	0.25
(-30%, +40%)	0.25	0.50
(-30%, +60%)	0.50	0.50
(+40%, -80%)	0.25	0.25
(+40%, -30%)	0.50	0.50
(+40%, +40%)	0.75	0.75
(+40%, +60%)	1.00	1.00

(-30%, +40%) の場合で確率の大小関係が逆転していることが示されている。従って、2つの投資戦略の同時分布は条件1を満たさず、Levy=Paroush(1974b)の判断基準はこの投資戦略の比較には適用できない。

これに対し、条件2はどうであろうか。positive feedback investment strategyの分布関数をG、negative feedback investment strategyの分布関数をFとすると、1期のリターンが40%であるときのF、G各々の条件付き分布関数は図3のようになる。Gに対応する条件付

き期待収益率は5%、Fに対応するそれが-10%である。よって1期のリターンが40%であるときには、Gの条件付き分布はFの条件付き分布に対して第2次の確率単調優位にある。逆に1期のリターンが-30%のときにはFの条件付き分布がGの条件付き分布に対して第2次確率単調優位にある。従って分布関数F、Gは条件2を満たす。従って、定理1より相対的危険回避度が1より小さい、リスク許容度が比較的高い投資家は positive feedback strategy に相対的に高い評価を下し、逆によりリスク許容度

図3 $r_1 = 40\%$ のときの条件付き分布関数

の低い投資家は negative feedback investment strategy に高い評価を下すという結論を得ることができる。

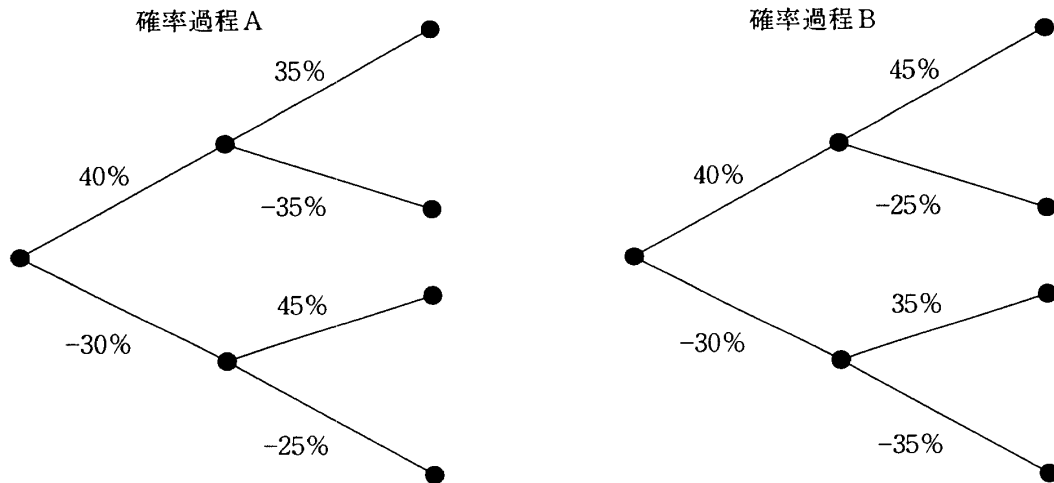
この2つの投資戦略は動学的投資戦略の中でも最も単純、かつ最もポピュラーな例の1つである。一般に投資対象の危険資産の価格が上昇したときにそのポジションをプラスの方向に修正するか否かは、現在得られている情報により今後のリターンに関する予想が如何に変化したかが大きな要因となる。例えば1期のリターンが高かったことから、今後はリターンが長期的な平均水準に下方修正されるという判断に踏み切った場合、投資家はこの資産のポジションを負の方向に変化させるタイプの negative feedback investment strategy を採用する。逆に1期のリターンが高いことが長期的趨勢として今後も続くと判断する投資家は逆に positive feedback investment strategy を採用する。が、この予想の違いのみが選択される投資戦略の違いを生む唯一の要因であるか否かは別に考察する必要がある。例1は、その意味で格好の材料を提供している。1期のリターンの実現値に関わらず、2期のリターンの条件付き分布が変化しない定常的なモデルであるので、上記のような予想の修正という要因が入り込む余地はない。

予想に関する不均一性という要因を取って捨象すると、投資家対数型効用関数をもつ投資家より相対的に危険回避の可否かという違いが投資戦略の優劣の違いに決定的な影響を及ぼすという理論的含意が得られるのである。

例2：mean-reverting process vs “not mean-reverting” process

2つの確率過程A、Bが図4のように与えられているとしよう。例1と同様に各々の枝に対応する条件付き確率はいずれも1/2である。だが、2期のリターンは例1とは異なる。確率過程Aでは1期のリターンが40%のときには2期のリターンの条件付き期待値が1期のそれに比べ相対的に低い0%に修正される。逆に1期のリターンが-30%であるときには相対的に高い10%に修正される。条件付き標準偏差はいずれも35%である。確率過程BはAにおける2期の上下のサブツリーを交換したものとなる。よって確率過程Aは mean reverting の性質をもつ確率過程であるのに対して、Bはその逆の性質をもつ確率過程となっている¹²⁾。実際1期のリターンと2期のリターンの相関係数はAが約-0.14であるのに対して、Bの相関係数は+0.14となっている。

図 4



Aの2期に関する条件付き分布は図の下のサブツリーに対応するものが上のサブツリーに対応するものに対して第1次確率優位にある。よって確率過程Aの分布をG, BのそれをFとしたときFとGは条件2を満たす。従って相対的危険回避度が1より高い投資家, すなわち, $\gamma < 0$ となる投資家にとっては確率過程Bの方を相対的に好み, 逆に相対的危険回避度が1より低い投資家にとっては確率過程Aの方を好むという結論が得られる。

一般にリターンの自己相関が負の確率過程の場合, 自己相関が正のそれに比して, 時間軸上での分散投資の効果が高く, 危険回避的な投資家にとって望ましいという直感が働く。だが, 上記の例より示唆される重要な理論的事実は, 必ずしもリターンの自己相関が負となる確率過程の方が危険回避的な投資家にとって望ましいとはいえず, 比較的风险許容度の高い危険回避的投資家は自己相関が正の確率過程の方に高い評価を与えるという点である¹³⁾。

5. 条件2の一般化に向けて

今までは条件付き分布間の確率優位による順序づけという視点から新たな判断基準を提示した。だが, 投資戦略間の比較を行うとき, 条件付き分布が確率優位により順序づけできる可能

性は一般に高いとはいえない。特に投資機会が定常的な場合, 投資期間の途中で変更したポートフォリオが異なる投資戦略間で一方がシステムティックリスクが高く, 一方が低いというような場合には条件2は適用不可能である。例えば stop-loss strategy と lock-in strategy の比較を行うとき, リターンの高いときには後者の投資戦略, リターンの低いときには前者の投資戦略の方が低くなっている。リスクがシステムティックリスクである以上, リスクが高いときにはリターンがそれ相応に高くなるため, 2つの投資戦略の条件付き分布は確率優位の関係で順序づけすることが不可能である。

だが, (5), (6), (7)式で定義された集合をパラメーター γ^* を登場させて以下のように修正することで, このような投資戦略が満たす条件を構築することが可能となる。

$$\begin{aligned}
 & B^F(\gamma^*) \\
 & \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] \\
 & < \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] \\
 & \forall \gamma > \gamma^*, \\
 & \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma^*) | r_1] = \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma^*) | r_1], \\
 & \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1] > \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] \\
 & \forall \gamma < \gamma^*\} \quad \dots(11-a) \\
 & B^G(\gamma^*) \triangleq \{r_1 \in \mathbf{R}^+ : \mathbf{E}_G[U(r_2; \gamma) | r_1] \\
 & < \mathbf{E}_F[U(r_2; \gamma) | r_1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall \gamma > \gamma^*, \\ &E_G[U(r_2; \gamma^*) | r_1] = E_F[U(r_2; \gamma^*) | r_1], \\ &E_G[U(r_2; \gamma) | r_1] > E_F[U(r_2; \gamma) | r_1] \\ &\forall \gamma < \gamma^* \end{aligned} \quad \dots(11-b)$$

上記の集合は前節で確率優位を利用して定義された集合と一定の対応関係を持つ。というのは例えば、 $B^F(+\infty) \supseteq B_1^F$, $B^G(+\infty) \supseteq B_1^G$, $B^F(1) \supseteq B_2^F$, $B^G(1) \supseteq B_2^G$ となっているからである。上記の包含関係において2つの集合が一致しない理由は本論文で対象としている効用関数のクラスがCRRA型効用関数のクラスに限定されているからである。集合 $B^F(\gamma^*)$ は相対的危険回避度が $1 - \gamma^*$ より高い投資家の間で一様に $F(\cdot | r_1)$ の条件付き分布の方に対して $G(\cdot | r_1)$ より高い評価を与えるリターン r_1 の集合である。逆に $B^G(\gamma^*)$ は相対的危険回避度が $1 - \gamma^*$ より高い投資家の間で一様に $G(\cdot | r_1)$ に高い評価を与える集合である。前節ではこの γ^* が1や $+\infty$ としたときの判断基準を提示していたのである¹⁴⁾。

γ^* が1や $+\infty$ とならないケースではこのようなパラメーターが存在しないことが一般に多い。だが、V-M型効用関数をCRRA効用関数に限定したときには、条件付き分布が対数正規分布、確率過程が2項過程であったり、あるいはFかGいずれかの条件付き分布が退化したケースにおいては γ^* が必ず存在する。後に示す例3は条件付き分布が退化した場合に対応している。2つのパラメーターが存在するとき、次の判断基準を提示することが可能である。

条件3 : 2つの同時分布関数F, Gに対して次の4つの条件を満たす γ^* 及び集合 B_s, B_u, B_l が存在する。

- (1) $B_s \cup B_u \cup B_l = \mathbf{R}^+$
- (2) $B_u = B^G(\gamma^*)$
- (3) $B_l = B^F(\gamma^*)$
- (4) $\inf B_u \geq \sup B_l$

条件3が成立するとき、効率性に関して次のよ

うな性質が成立する。

定理2 : 仮定1の下では、条件3が成立するとき以下が成立する。

- (a) $\gamma \geq \max\{0, \gamma^*\}$ のとき,
 $E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \geq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$
- (b) $\min\{0, \gamma^*\} \leq \gamma \leq \max\{0, \gamma^*\}$ のとき,
 $E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \leq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$
- (c) $\gamma \leq \min\{0, \gamma^*\}$ のとき,
 $E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \geq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$

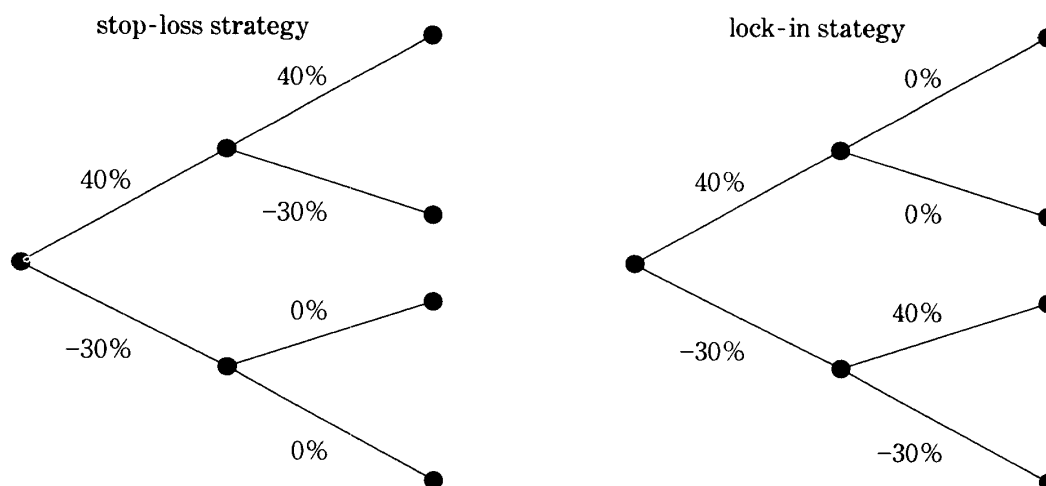
(証明) appendix をみよ。

例3 : stop-loss strategy vs lock-in strategy

例1, 例2と同様定常的な投資機会における例を考えよう。各期間における危険資産のリターンスケジュールは他の例1と同様に如何なる期間、状態においても確率50%で40%、確率50%で-30%であるとしよう。単純な2期間モデルの場合、stop-loss strategy は r_1 が40%のときにはそのまま危険資産を保有し続け、 r_1 が-30%であるときには危険資産の運用を中止し、安全資産の運用に切り替えるという投資戦略である。逆にlock-in strategy は-30%のときには引き続き危険資産の保有を続け、40%のときには安全資産の運用に切り替える投資戦略である。ここでは安全資産の収益率は各状態とも0%であるとしよう。このとき2つの投資戦略の下での運用資産のリターンの確率過程は図5のようになる。

この数値例においては γ^* の値は約0.168である。従って相対的危険回避度が1より大きいか0と $1 - \gamma^*$ つまり約0.832の間の数字となっている投資家は stop-loss strategyの方がlock-in strategyより高い期待効用を与えるのに対し、相対的危険回避度が0.832と1の間にある投資

図 5



家は逆に lock-in strategy に対して高い期待効用を与えるのである。図 5 から明らかなように stop-loss strategy は運用資産の下方リスクを消去する投資戦略であるのに対して、lock in strategy は上方リスクを消去する投資戦略である。リスクといっても投資家が回避したいリスクは上方リスクではなく下方リスクであるという直感によれば、危険回避的な投資家は一般に stop-loss strategy に対して相対的に高い評価を与えるのではないかと考えられる。だが、この例から明らかになったように少なくとも周辺分布が同じであるという条件を課す限りでは、たとえ危険回避的投資家であろうと、必ずしも stop-loss strategy に高い評価を与えるとは限らないのである。したがって運用の委託者がリスク回避的であるという情報だけから、運用担当者は stop-loss strategy と lock-in strategy の内前者を選択してはいけないのである。このような判断が許されるのは、 $\gamma^* = 0$ のケース、つまり危険資産と安全資産が対数型効用関数の投資家にとって無差別である場合だけなのである。

6. 結論

本論文では Levy = Paroush (1974b) で提示された判断基準を補完するような機能をもつ新しい確率過程に関する判断基準が提示された。も

ちろんその判断基準による順序づけも不完備なものであり、必ずしも適用可能な投資戦略の組み合わせが多いとはいえない。1つにはリターンの確率過程を2期間の確率過程のクラスに限定したため、比較される2つの投資戦略が2回以上各証券の組入れ比率を変更するものである限り適用不可能となるのが一般的だからである。2つめには仮定1という形で各期のリターンに関する周辺分布が投資戦略間で同一であることを要求しているからである。また第3番目として1期のリターンに関する集合 B_u , B_l の存在は強い条件であることがあげられよう。リターンの確率過程の比較のための判断基準をより実用的なものにするためには、今後上記の問題点を克服するような一般化に向けての工夫が必要であろう。

だが本論文で提示された例が示すとおり、この判断基準から重要な理論的含意を得ることができた。例えば例3の stop-loss strategy と lock-in strategy との比較から上方リスクと下方リスクのいずれの消去が望ましいかは一概に結論づけることはできず、意思決定時点において投資家のリスク選好を十分配慮しなければいけない、という教訓を得ることができる。このことは何も上記のような投資戦略の比較に限ったことではない。例えば運用資産額の低下時に

において安全資産への組入れ比率を高めるタイプのダイナミックアセットアロケーションに対しても全く同様に適用可能である。この一つの運用方法は今日多くの機関投資家から受け入れられているものではあるが、運用を委託されたマネージャーは委託者のリスク選好に関して単に危険回避的であるという情報のみならずその回避度の大きさそのものにも注意を払わない限り、適切なアセットアロケーションが実行できているとはいえないという理論的含意が得られる。というのは、投資家によってはたとえ危険回避的でも、リターンの低下時に運用資産のシステムティックリスクを低くするのではなく、むしろ積極的にリスクを負担し、高リターン時にシステムティックリスクを低くするような、通常とは全く反対方向のポジションの調整を行うダイナミックアセットアロケーションを望むかもしれないからである。

注

- 1) この研究は郵貯資金研究協会から受けた研究助成金をもとに行われたものである。
- 2) 効率性の定義は例えば第2次確率優位の場合危険回避度が正か負かという分類を行った上で定義された。彼らの論文では、投資家のクラスが危険回避度の大小とは異なる方法で分類される。これについては本文の3節に記してある。
- 3) この仮定は対象とする資産が株式や債券などのように債権者の有限責任が認められている証券投資を考える限り整合的である。
- 4) 第2次確率単調優位については例えば Huang = Litzenberger (1988) 第2章 p49を見よ。
- 5) V-M効用関数がCRRA効用関数である限りいわゆる資産効果は存在しないので、以下の議論は初期資産額の水準からまったく影響を受けない。
- 6) 彼らは投資終了時点での資産額に対する期待効用のみならず時間に関して加法的効用関数の上でも多期間確率優位を議論している。
- 7) 彼らはこの仮定をはずした一般的な確率過程の効率性についても議論している。
- 8) 確率分布が連続型である場合には必ずしも2つの集合が非空である必要はないが、効率性の判断基準を確率分布の特徴から独立に提示するため、ここでは若干強い条件を課した。
- 9) γ が1以上、すなわち投資家のクラスが危険中立的、危険愛好的な投資家の場合にはより複雑

な結果となる。これは条件2が第1次確率優位だけではなく、第2次確率優位、第2次単調確率優位により特徴づけられているからである。この結果に関するメモは用意されているのでこれについて知られたい方は連絡されたい。

- 10) 相関関係は2つの確率変数に対して定義されているものであるから、厳密には「2期のリターンに関する効用の条件付き期待値と1期のリターンとの相関関係」が優劣の逆転に影響を及ぼしている。
- 11) もちろん確率優位においても第3次以上の確率優位の場合には、危険回避的な投資家の間でも優劣が異なることがおおいに有り得るが、大きな違いは条件2においては第2次確率優位の概念までしか利用していない点である。第2次確率優位の概念までしか利用していないのにもかかわらず定理1のような結果がでることが、確率優位と一線を画する重要な点なのである。
- 12) 例における2つの確率過程はAR(1)に従っている。AとBは自己回帰過程として表現したとき、説明変数である過去のリターンにかかる係数がAは負、Bは正の値となる確率過程である。
- 13) もちろん2つの確率過程の各期のリターンの周辺分布が等しくなければ、上記の性質は必ずしも成立しない。
- 14) ただ前節では第2次単調確率優位も関係していた。この場合には γ^* の値を特定することは一般には不可能である。

(appendixA 命題の証明)

積分表現により同時分布の差は次のように書き替えられる。

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{\infty} G(x_2|r_1) dG_1(r_1) - \int_{x_1}^{\infty} F(x_2|r_1) dF_1(r_1) \\ &= \int_{x_1}^{\infty} [G(x_2|r_1) - F(x_2|r_1)] dF_1(r_1) \quad \dots (A-1) \end{aligned}$$

但し2番目の等式は仮定1により成立する。 $x_1 < \sup B_l = \sup B_l^F$ である場合には、条件1の(4-a)式が成立する。というのは、この不等式 $r_1 < x_1$ を満たす r_1 は条件2(a)(c)(d)より、 B_l か B_- に属するので、

$$F(x_2|r_1) \leq G(x_2|r_1) \quad \forall r_1 \leq x_1 \quad \dots (A-2)$$

が成立し周辺分布の単調性より、

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{\infty} [G(x_2|r_1) - F(x_2|r_1)] dF_1(r_1) \\ &\geq 0 \quad \dots (A-3) \end{aligned}$$

となるからである。(4-a)に関しては、後は $x_1 \geq \sup B_l$ のケースを証明すればよい。そこで背理法により証明する。仮にある $x_1^* \geq \sup B_b$, x_2^* が存在して、

$$G(x_1^*, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*) < 0 \quad \dots (A-4)$$

が成立しているとしよう. $x_1 > x_1^*$ であれば, x_1 は B_u か B_l に属するので,

$$\int_{x_1^*}^{x_1} [G(x_2|r_1) - F(x_2|r_1)] dF_1(r_1) \leq 0 \quad \dots (A-5)$$

となり,

$$\begin{aligned} & G(x_1, x_2^*) - F(x_1, x_2^*) \\ &= G(x_1^*, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*) \\ &+ \int_{x_1^*}^{x_1} [G(x_2^*|r_1) \\ &- F(x_2^*|r_1)] dF_1(r_1) \\ &\leq G(x_1^*, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*) \quad \dots (A-6) \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} [G(x_1, x_2^*) - F(x_1, x_2^*)] \\ & \leq G(x_1^*, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*) < 0 \quad \dots (A-7) \end{aligned}$$

となる. これは矛盾である. というのは, (A-7)の左辺は分布関数の性質より, $G_2(x_2^*) - F_2(x_2^*)$ となり, これは仮定1より0だからである. よって任意の x_1, x_2 に対して,

$$G(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) \geq 0 \quad \dots (A-8)$$

が成立する.

(4-b)式も背理法にて証明する. 仮に $G(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) > 0$ となる (x_1, x_2) が存在しないならば, (4-a)より $G(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) = 0$ となり F と G はまったく同一となる. 明らかにこれは条件2において B_u, B_l が非空であることに反する. (証明終り)

(appendix B 定理1の証明)

(a) CRRA型効用関数 $U(W; \gamma)$ は $W \geq 0$ である任意の W に対してその値の符号は一定であるから, 期待効用が存在する限りフビニの定理が適用可能で, 分布関数 F の下での期待効用は,

$$\begin{aligned} & E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \int_{R^+ \times R^+} U(r_1 \times r_2; \gamma) dF(r_1, r_2) \\ &= \int_{R^+} [\int_{R^+} U(r_1 \times r_2; \gamma) dF(r_2|r_1)] dF_1(r_1) \quad \dots (B-1) \end{aligned}$$

となる. ところで, CRRA型効用関数の性質より,

$$\begin{aligned} & U(r_1 \times r_2; \gamma) = (r_1 \times r_2)^\gamma / \gamma \\ &= r_1^\gamma \times U(r_2; \gamma) \quad \dots (B-2) \end{aligned}$$

と変形できるので (b-2) を (b-1) に代入すると,

$$\begin{aligned} & E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \int_{R^+} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \quad \dots (B-3) \end{aligned}$$

となる. よって F, G 両分布の下での期待効用の差は,

$$\begin{aligned} & E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] - E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \int_{R^+} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &- \int_{R^+} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dG_1(r_1) \\ &= \int_{R^+} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ &- \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &= \int_{B_u} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ &- \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &+ \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ &- \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &+ \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ &- \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &+ \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ &- \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \quad \dots (B-4) \end{aligned}$$

となる. 但し2番目の等式は仮定1による. ところで, $\gamma < 0$ であるから条件2より,

$$(\sup B_l)^\gamma \geq r_1^\gamma \geq 0 \quad \forall r_1 \in B_u \quad \dots (B-5)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & \leq \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1) \quad \forall r_1 \in B_u \quad \dots (B-6) \end{aligned}$$

であるから, (B-3)の右辺第1項は,

$$\begin{aligned} & \int_{B_u} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & - \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ & \geq \int_{B_u} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & - \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] (\sup B_l)^\gamma dF_1(r_1) \quad \dots (B-7) \end{aligned}$$

という不等式を満たす. また,

$$0 \leq (\sup B_l)^\gamma \leq r_1^\gamma \quad \forall r_1 \in B_l \quad \dots (B-8)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & \geq \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1) \quad \forall r_1 \in B_l \quad \dots (B-9) \end{aligned}$$

であるから, (B-3)の右辺第2項は不等式,

$$\begin{aligned} & \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & - \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ & \geq \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & - \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] (\sup B_l)^\gamma dF_1(r_1) \quad \dots (B-10) \end{aligned}$$

を満たす. (B-7)と(B-10)を(B-3)に代入すると,

$$\begin{aligned} & E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] - E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \\ &= \int_{B_u} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\ & - \int_{R^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] r_1^\gamma dF_1(r_1) \\ &+ \int_{B_l} [\int_{R^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1) r_1^\gamma dF_1(r_1) \\
 \geq & \int_{B_u} [\int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\
 & - \int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] (\sup B)^\gamma dF_1(r_1) \\
 & + \int_{B_l} [\int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\
 & - \int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] (\sup B)^\gamma dF_1(r_1) \\
 = & \int_{\mathbf{R}^+} [\int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\
 & - \int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] (\sup B)^\gamma dF_1(r_1) \\
 = & (\sup B)^\gamma \int_{\mathbf{R}^+} [\int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dF(r_2|r_1) \\
 & - \int_{\mathbf{R}^+} U(r_2; \gamma) dG(r_2|r_1)] dF_1(r_1) \\
 = & (\sup B)^\gamma \{E_F[U(r_2; \gamma)] - E_G[U(r_2; \gamma)]\} \\
 = & 0 \qquad \qquad \qquad \dots (B-11)
 \end{aligned}$$

となる。但し最後から2番目と最後の等式は仮定1による。

(b) $\gamma = 0$ のときの CRRA 型効用関数である対数型効用関数のときには、

$$\ln r_1 \times r_2 = \ln r_1 + \ln r_2 \qquad \dots (B-12)$$

が成立するので仮定1より、

$$\begin{aligned}
 & E_F[\ln r_1 \times r_2] - E_G[\ln r_1 \times r_2] \\
 = & \{E_F[\ln r_1] - E_G[\ln r_1]\} \\
 & + \{E_F[\ln r_2] - E_G[\ln r_2]\} \\
 = & 0 \qquad \qquad \qquad \dots (B-13)
 \end{aligned}$$

を得る。

(c) $0 < \gamma < 1$ のときには条件2より、

$$0 \leq (\sup B)^\gamma \leq r_1^\gamma \quad \forall r_1 \in B_u \qquad \dots (B-14)$$

$$(\sup B)^\gamma \geq r_1^\gamma \geq 0 \quad \forall r_1 \in B_l \qquad \dots (B-15)$$

であることに注意すれば(a)と同様の方法で

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] - E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \leq 0$$

が証明できる。(証明終り)

(appendixC 定理2の証明)

γ^* が非負のときには、投資家の相対的危険回避度の属する範囲を次のように分けることができる。

$$(a-1) \quad \gamma \leq 0 \leq \gamma^*$$

$$(a-2) \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma^*$$

$$(a-3) \quad 0 \leq \gamma^* \leq \gamma$$

(a-1) の大小関係が成立するような投資家の場合、次のような不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
 E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] & \geq E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_l \\
 E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] & = E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_0 \\
 E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] & \leq E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_u
 \end{aligned}$$

$\gamma \leq 0$ であることに注意すれば、定理1の証明と全く同様の方法によって、

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \geq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$$

という不等式を得ることができる。

(a-2) の場合、上記の条件付き期待値に関する不等式は(a-1)と全く同じものが成立する。よって $\gamma \geq 0$ であることに注意すればやはり定理1と同じ証明方法により、

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \leq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$$

を得ることができる。

(a-3) の場合、条件付き期待値に関する不等式は、

$$E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] \leq E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_l$$

$$E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] = E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_0$$

$$E_F[U(r_2; \gamma)|r_1] \geq E_G[U(r_2; \gamma)|r_1] \quad r_1 \in B_u$$

が成立する。よって γ が非負であることから定理1と同様の証明方法により、

$$E_F[U(r_1 \times r_2; \gamma)] \geq E_G[U(r_1 \times r_2; \gamma)]$$

を得る。以上の4つのケースの結果は定理2のstatementのように整理することができる。

以上の議論を γ^* が正のときの場合にも同様に行えば、定理2のstatementが成立することが容易に示せる。(証明終り)

参考文献

Huang, C.C., I. Vertinsky, and W. Ziemba. "On Multi-Period Stochastic Dominance." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (1978), pp. 1-13.

Huang, C.H., R. Litzenberger. "Foundations for Financial Economics." (1988) North-Holland.

Levhari, D., J. Paroush, and B. Peleg. "Efficiency Analysis for Multivariate Distribution." *Review of Economic Studies* (1975), pp. 87-91.

Levy, H. "Stochastic Dominance, Efficiency Criteria and Efficient Portfolios: The Multi-Period Case." *American Economic Review*, Vol. 65 (1973), pp. 986-994.

Levy, H., and J. Paroush. "Multi-Period Stochastic Dominance." *Management Science*, Vol. 21 (1974), pp. 428-435.

Levy, H., and J. Paroush. "Toward Multi-Variate Efficiency Criteria." *Journal of Economic Theory*, Vol. 7 (1974), pp. 129-142.

[もりた ひろし 横浜国立大学経営学部助教授]