<研究ノート>

経営のための確率過程（下）
—利子率の期間構造に関する理論的展望1)—

笹井　均・森田　洋

1．はじめに

前回では，確率論の初歩から掘り起こして代表的な株式オプションモデルであるブラックショールズモデルについて説明をした．本稿では，同じ状態請求権であるオプションでも，原証券が債券である債券オプションの価格理論について，金利の期間構造から出発して議論していきたい．ブラック-ショールズモデルはその発表の時点が20年程前になっている現在においても色あせることない．このモデルは今日のすべてのオプション価格理論の核となる部分を提示したものであり，その意味でオプション価格理論の発展の礎といえよう．更に株式のリスクと関わる資金運用の実務においていま最も投資家の間でひろく利用されているモデルでもある．また債券オプションと関わる運用実務においても重要視されており，満期が長期の債券に対するオプションに限っては，実践的な意味では有効なモデルと考えられている．

このモデルの大きな特徴は，原証券価格の株価の確率過程を幾何ブラウン運動過程という，リターンが定常的な連続時間確率過程モデルとして定式化し，スポットレート，呼び方をかえれば短期金利を定数として，コールオプションの理論価格を導出していることにある．債券オプションの場合，原証券である債券は株式とは異なり満期を迎える証券であり，その時点における価格が額面という形で予め決まっている．このため，債券は満期が近づくにつれ，価格変動の大きさを表すヴォラティリティが0に収束していくという確率的特徴を持っている．特に満期が近い債券，期近債を原証券とするオプションは，リターンのヴォラティリティが時間を通じて一定であるとするブラック-ショールズモデルの定式化とは相容れない，といえよう．また，短期金利を一定とすることも債券オプションモデルへの適用に疑問を抱かせる点である．実際の市場を観測すると，短期金利は変動が非常に小さく，株式のリターンとは必ずしも強い相関を示していないので，短期金利を定数として扱うことは，株式オプションモデルにおいては許容されるかもしれない．が，こと債券に至ってはこのような特定化は許されない．短期金利がリスクを持たない世界で中長期債券が変動するということは理論的には有り得ないからである．更に債券，特に中期債券の収益率と短期金利はデータの相関係数が1に近い形で推移しており，原証券と短期金利を独立に定式化することの妥当性を実際の市場に見いだすことはできない．現段階において取引されている日経債券オプションを例にとっても，その原証券である仮想上のクーポン債の残存期間は常時6年とされており，中期の残存期間の債券の範疇に入る．このため，少なくとも理論的には，株式オプションモデルから離れた理論モデルが債券オプションには要求されている．

本稿は，債券オプションの理論価格を与える利子率の期間構造に関する理論的枠組みを包括的に提示するものである．利子率の期間構造に関して最も一般的と考えられている研究としては Heath-Jarrow-Morton (1992)があげられるが，本稿ではこのアプローチと同一のものを本質を損なうことなく，可能な限り容易に提示することを第1の目的としている．従って，彼らの論文より，数学的な厳密性は犠牲にされることを予め断わっておこう．そして，彼らの論文が発表される以前において中心とされていた利子率の期間構造モデルとの対応にも触れ，一連の期間構造理論の明確な位置付けを行うことが第2の目的となっている．

まず次の2節では，表記を含め，金利の期間構造の

確率過程に関する分析の枠組みを説明する．第３節では先に述べたような実際の債券市場の諸特性を踏まえた，合理的な価格付けがなされる期間構造の条件について議論する．そこではブラックショールズモデルより，もう１ステップ踏み込んだ条件が必要となることが説明される．第４節では前節で記述した条件を扱いやすい形に表現をかえる作業を定理１の形で提示する．第５節では Heath-Jarrow-Morton モデルが登場する以前に債券市場モデルの中心であったワンファクターモデルが Heath-Jarrow-Morton モデルと理論的に如何なる形で関係しているかを定理の形で示す．第６節では５節での結果を踏まえて二つのモデルの対象とすることの可能な確率過程のクラスの広さの違いについて議論する．第７節では債券オプションの理論価格の評価について説明し，最後に今後の展望について触れ，本稿を終了する．

２．金利の期間構造の確率過程

いま満期が $[0, \tau]$ の間に連続的に存在する割引債券が存在するとしよう．もちろん，これは説明の便宜上のもので割引債が単に有限個存在する市場であっても議論の本質を損なわない．不確実性は確率空間（Ω, $\mathscr{F}$, Q）によって特徴づけられ，情報構造は前と同様に標準ブラウン運動過程 $\{W(t): t\in[0,\tau]\}$ によって生成されるフィルトレーション $\{\mathscr{F}_t: t\in[0,\tau]\}$ で与えられるものとする．有限個の独立なブラウン運動過程の場合には以下の議論を簡単に拡張することはできるが，複雑さを避けるために本稿では単一のブラウン運動過程の場合を扱っていく．

日時Tにおいて満期を迎える債券のt時点での価格を $P(t,T)$ で表す．但し，各債券の額面は1円で，従って $P(T,T)=1$ であるとしよう．またすべての $T\in[0,\tau]$, $t\in[0,\tau]$ について $\partial \ln P(t,T)/\partial T$ が存在するものとする．時刻tにおけるフォワードレートは

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \qquad (1)$$

によって定義される．但しlnは自然対数を表す記号である．先の微係数の存在条件は満期に関して連続的な（より一般的にはルベーグ可測な）フォワードレートの期間構造が存在することを前提とすることに他ならない．上のフォワードレートの定義式は，積分することにより，

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right) \qquad (2)$$

の関係を与える．(1)式は時刻tでT期債を1枚空売りして $P(t,T)$ の金額を入手し，$T+\triangle$ 期債を $P(t,T)/P(t,T+\triangle)$ 枚購入した時のTと $T+\triangle$ の2時点間における利率，すなわち，

$$\frac{1}{\triangle}\left\{\frac{P(t, T)}{P(t, T+\triangle)}\right\}$$

において時間の刻み△を０に近づけたときの極限を意味する．このような投資戦略はT時点から微小時間にわたる資金運用のレート現時点において確定させたときの利率を表すことからフォワードレートと呼ぶのである．

満期がT期の割引債の最終利回りは，これを $r(t,T)$ と表すと，

$$r(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t, T)$$

で定義される．これは，満期まで債券を買い持ちしたときの収益率の連続時間複利金利で，

$$\exp(r(t, T)(T-t)) = \frac{P(T, T)}{P(t, T)} = \frac{1}{P(t, T)}$$

という関係を満たしている．満期が現時点から微小時間後に到来する最も残存期間の短い債券の利回りは，スポットレートと呼ばれるが，これは，

$$\begin{aligned}\lim_{T\to t} r(t, T) &= \lim_{T\to t} -\frac{1}{T-t}\ln P(t, T)\\ &= \lim_{T\to t}\frac{1}{T-t}\int_t^T f(t, s)\,ds\\ &= f(t, t)\end{aligned} \qquad (3)$$

という関係を満たす．以下スポットレートは $r(t)$ として表すことにしよう．フォワードレートの確率過程が与えられれば(2) (3)の関係から債券価格，スポットレートの確率過程も同時に決定されることに注意したい．時刻0で1円を投資し，スポットレートでロールオーバーする形で運用したときの累積リターンを $B(t)$

で表すと，定義より次のような式を満たす.

$$B(t)=\exp(\int_0^t r(s)ds) \quad (4)$$

このB(t)は債券の理論価格の評価に際して利用される.

いま，フォワードレートの確率過程が外生的に次式の確率微分方程式によって与えられるものと仮定しよう.

$$f(t, T)=f(0, T)+\int_0^t \mu(v, T, f(v, T))dv + \int_0^t \sigma(v, T, f(v, T))dW(v) \quad (5)$$

利子率の期間構造全体の確率過程は(5)式により規定される. $\{f(0,T):T\in[0,\tau]\}$ はこの確率過程の初期値の体系を表すものであり，当然非確率変数である. $\mu(\cdot,\cdot,\cdot)$はフォワードレートのドリフト， $\sigma(\cdot,\cdot,\cdot)$はヴォラティリティを表す. いずれもその時点のフォワードレートの水準に依存する確率変数であることを許す一般的な枠組みで議論を展開することにする. ただ表記上の簡潔性を保つために，以下では必要が生じない限り，第3の変数，フォワードレートの現行水準は省略し， $\mu(v,T)$, $\sigma(v,T)$という表記で二つの変数を扱うことにする. 経営のための確率過程(上)で説明したように確率積分が定義できるためには可積分条件,

$$\int_t^T|\mu(v, T)|dv<\infty,\ \int_0^T \sigma^2(v, T)dv<\infty,\ a.e.Q$$

を仮定する必要がある.

(5)式から明らかに,

$$r(t)=f(0, t)+\int_0^t \sigma(v, t)dv+\int_0^t \sigma(v, t)dW(v) \quad (6)$$

となる. フォワードレートが与えられれば(2)式を用いて債券価格の確率過程が,

$$\ln P(t, T)=\ln P(0, T)+\int_0^T\{r(v)+b(v, T)\}dv - \frac{1}{2}\int_0^T a^2(v, T)dv + \int_0^T a(v, T)dW(v) \quad (7)$$

のように導出される2). ここで,

$$a(t, T)=-\int_t^T \sigma(t, s)ds \quad (8\text{-}a)$$

$$b(t,v)=-\int_t^T \mu(t, s)ds+\frac{1}{2}a^2(t, T) \quad (8\text{-}b)$$

である. 伊藤の微分ルールを用いると(7)式は,

$$dP(t, T)=[r(t)+b(t, T)]P(t, T)dt + a(t, T)P(t, T)dW(t) \quad (9)$$

という確率微分方程式を満足することが分かる.

3.債券市場における同値マルチンゲール確率測度の存在

今日の資産市場理論において，証券価格が適正な水準にあることの最も弱い条件は，無リスク裁定の機会が存在しないという条件である. より強い条件としては，合理的な意思決定を下した投資家の市場に出す証券の需給が一致することを要求する，というものがあるが，我々の枠組みでは可能な限り，一般的な枠組みで債券オプションを議論することが目的であるため，前者の条件を課すことにしたい. さて，無リスク裁定の機会が存在しないような債券市場の価格体系は，任意の満期Tに対応するP(t,T)/B(t)がマルチンゲールに従うような確率測度の存在と数学的に同等であることが知られている3). すなわち，任意の$0\leqq s\leqq t\leqq T\leqq\tau$を満足するs,tに対して,

$$P(s, T)/B(s)=E^*[P(t, T)/B(t)|\mathcal{F}_s]$$

が成立するような確率測度 Q* が存在する，というものである. 但しE*はこの確率測度 Q* に関する期待値オペレーターである. これは次の表現をとることにより，その経済的意味をつかむことができる. B(s)を左辺に移項して変形すると B(·)の定義により,

$$P(s, T)=E^*[P(t, T)\cdot B(s)/B(t)|\mathcal{F}_s] = E^*[P(t, T)\cdot\exp(-\int_s^t r(v)dv)|\mathcal{F}_s]$$

となり，この確率測度のもとでは，債券の理論的な現在市場価値は，リスクフリーなスポットレートを割引率とした割引現在価値の期待値で与えられる. 以下では表記としてZ(t,T) = P(t,T)/B(t)を採用することにしよう. このとき(9)から，伊藤の微分ルールにより,

$$dZ(t, T)=b(t, T)Z(t, T)dt$$

$$+a(t, T)Z(t, T)dW(t) \quad (10)$$

となる4).

各満期の債券に対して定義されたZ, $\{Z(t,S): t\in[0,S]\}$ が $\{\mathscr{F}_t: t\in[0,S]\}$ に関してマルチンゲールとなる確率測度Q*が存在するための必要十分条件は連続時間確率過程論の成果として今日得られている．更にこの確率測度の存在は我々のような拡散過程の確率過程モデルにおいては，一意的であることも明らかとなっている5). 以下ではこの確率測度を同等マルチンゲール確率測度と呼ぶことにしよう．全ての債券が同一の確率測度のもとで，マルチンゲールに従うという記述を，説明の便宜上以下の二つの条件に分解して表現することにしよう．

(A1):各満期の債券に対してその価格がマルチンゲールに従うようなQと同等な確率測度が存在する．

(A2):各債券に対して存在する(A1)の確率測度が債券間で同一のものである．

この二つの条件は数学的に表現すると，次のようになる．

(A1):満期がSの債券に対して，次の式を満足する関数$\gamma(\cdot;S)):[0,S]\times\Omega\to\mathbf{R}$が a.e.Q で存在する．

$$b(t, S)+a(t, S)\gamma(t; S)=0,\ t\in[0, S] \quad (11)$$

$$E[\exp\{\textstyle\int_0^s \gamma(v; S))dW(v)-\frac{1}{2}\int_0^s \gamma^2(v; S))dv\}]=1 \quad (12)$$

$$E[\exp\{\textstyle\int_0^s (a(v, S)+\gamma(v; S))dW(v) -\frac{1}{2}\int_0^s (a(v, S)+\gamma(v; S))^2dv\}]=1 \quad (13)$$

$$a(t, S)\neq 0 \text{ a.e. } Q \text{ and } t\in[0, S] \quad (14)$$

(A2):任意のふたつの満期$S_1,S_2\in[0,\tau]$について次が成立する．

$$\gamma(t, S_1)=\gamma(t, S_2),\ t\in[0, \min\{S_1, S_2\}] \quad (15)$$

$\{Z(t,S): t\in[0,S]\}$ がマルチンゲールに従うような確率測度が存在するために(A1)の条件が十分であることは，Girsanovの定理より容易に推測することができよう．(12)の条件からGirsanovの定理によって，

$$\frac{dQ_S^*}{dQ}=\xi(\gamma)=\exp\{\textstyle\int_0^s \gamma(v; S)dW(v) -\frac{1}{2}\int_0^s \gamma^2(v; S)dv\} \quad (16)$$

によって与えられるQ_S^*は$(\Omega,\mathscr{F})$上の確率測度となり，

$$W_S^*(t)=W(t)-\textstyle\int_0^t \gamma(v; S)dv \quad (17)$$

は，$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},Q_S^*)$, $t\in[0,S]$における標準ブラウン運動過程となる．(11)より，Z(t,S)の確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dZ(t, S)&=b(t, S)dt+a(t, S)dW(t)\\ &=-a(t, S)\gamma(t; S)Z(t, S)dt\\ &\quad +a(t, s)Z(t, S)dW(t) \end{aligned}$$

という表現を得る．ところで$W_S^*(\cdot)$の確率微分表現は，

$$dW_S^*(t)=dW(t)-\gamma(t; S)dt$$

であるから，これをそのまま上に代入することが許されるならば，

$$dZ(t, S)=a(t, S)Z(t, S)dW_S^*(t)$$

となり，Z(t,S)が確率測度Q_S^*に関してマルチンゲールとなることが推測できる．というのは，上の式の操作同様，厳密さを欠いた展開が許されるならば，上の確率微分方程式より，微小時間後のZの条件付期待値は，

$$\begin{aligned} E_S^*[Z(t+dt, S)|\mathscr{F}_t]&=E_S^*[Z(t, S)\\ &\quad +at, S)Z(t, S)dW_S^*(t)|\mathscr{F}_t]\\ &=Z(t, S)\\ &\quad +a(t, S)Z(t, S)E_S^*[dW_S^*(t)|\mathscr{F}_t]\\ &=Z(t, S)+a(t, S)Z(t, S)\cdot 0\\ &=Z(t, S) \end{aligned}$$

となるからである．尚，最後から2番目の等式は$W_S^*(t)$がQ_S^*のもとでブラウン運動過程に従うことを利用している．但し上の式の展開は飽くまでも厳密性を満たしたものではない．数学的な厳密さを要求する場合，以上の(11)(12)の条件のみではZ(t,S)は確率測度

Q_S^*に関して単にローカルマルチンゲールという確率過程であることしか保証できない．ローカルマルチンゲールはマルチンゲールと比較すると，より弱い概念の確率過程である6)．Z(t,S)がマルチンゲールとなることを数学的に保証するためには，更に条件を追加しなくてはいけない．それが(13)式である7)．

我々が最終的に議論しようとするものが債券オプションであることからすると，その理論価格の評価に際して，原証券となる債券のみに対する条件で十分，すなわち，(A1)により，原証券である特定の満期の債券がマルチンゲールに従うような確率測度の存在さえ保証すれば十分ではないか，と考える読者がいるかもしれない．確かに，原証券の債券価格のみを利用して投資戦略を組んだときに裁定機会が存在しないような価格の確率過程を保証するのが(A1)である．

債券をそっくりそのまま株式にとりかえるならば，オプションの理論価格の評価の前段階になすべき記述は原証券に対する制約だけで終了する．あとは適当なスポットレートの値を独立に外生変数として与えればよい．というのは，冒頭で述べたとおり，実際の証券市場において，株式のリターンといわゆる短期金利を表すスポットレートとの間には小さな相関しか認められないことが観測されているからである．だが債券オプションの場合はそうはいかない．スポットレートと原証券である債券が同一の金利リスクにさらされているため，スポットレートと債券の確率過程が独立に特定化できるものではないからである．つまり，我々の理論的枠組みにそくしていえば，スポットレートの確率過程は満期を迎えたフォワードレートの時系列$\{f(t,t):t\in[0,\tau]\}$であり，これをフォワードレートの確率過程から規定される債券の確率過程と独立に決定することは，即座に分析の枠組みの整合性を欠くことを意味する．理論的枠組みの整合性を保証するためには，$\{f(t,t):t\in[0,\tau]\}$の各要素が如何なる理論的関係にあるべきなのか，より一般的には異なる満期のフォワードレートの確率過程$\{f(t,S_1):t\in[0,S_1]\}$ $\{f(t,S_2):t\in[0,S_2]\}$の間に如何なる理論的関係があるかに言及しなくてはいけない．言い換えれば各満期の債券間の価格の理論的関係について触れなくてはいけないのである．

債券価格間の整合性として満たすべき最も弱い理論的条件は複数の債券を利用して投資戦略を組んだときに裁定利益が発生しない，という無裁定条件である．この条件が(A2)で表現されている．それは同等マルチンゲール確率測度のterminologyでいえば全ての満期の債券が同一の同等マルチンゲール確率測度のもとでマルチンゲールに従うことを要求することになる．明らかに(A2)を(A1)にあわせることにより，任意の債券がマルチンゲールに従うような共通の確率測度の存在が保証される．これは次のような直観的な説明も可能である．(11)式が成立すると満期Sの債券について，

$$b(t,S)=a(t,S)(-\gamma(t;S)) \qquad (18)$$

となる．(9)式よりb(t,S)はこの債券の瞬時的期待収益率の内，リスクフリーなスポットレートを上回る部分，すなわち，リスクプレミアムを表し，上式はそれが$\gamma(\cdot;S)$×「債券リターンとリスクファクターW(t)の瞬時的共分散」と一致している，といえる．従って$\gamma(\cdot;S)$は満期がSの債券の瞬時的期待収益率にimplyされている共分散1単位に対するリスクの市場価格という意味を持つ．条件(A2)は各債券でimplyされているリスクの市場価格が債券間で同一であることを要求するものである．いわば一物一価の法則に従ってリスクに値がつけられていると考えれば，債券間の無リスク裁定機会が存在しないことが理解できよう．というのは同一の商品が異なる価格で取引されている場合，鞘取り，つまり裁定が可能であり，これを排除するためには同一の価格が付けられなくてはいけないのが価格理論の一般法則だからである．

4.債券価格の合理的価格体系のもとでのフォワードレートの確率過程

前節で述べた2つの条件は債券価格の体系が無リスク裁定機会を許さないという意味で合理的な価格体系となることを保証するものであった．これは暗黙の内にフォワードレートの確率過程が満たすべき条件を意味している．ただこの表現のままでは，フォワードレートに対して如何なる制約を与えているのかが明確ではなく，オプション価格の評価を行う段階でも解析的に扱いづらい．次の定理1は上の無リスク裁定機会が存在しない，という条件がフォワードレートのドリフトの確率過程に如何なる制約を与えているかを示すものである．

定理1：フォワードレートのドリフトとヴォラティ

リティの族 $\{\alpha(\cdot,T):T\in[0,\tau]\}$ $\{\sigma(\cdot,T):T\in[0,\tau]\}$ が(A1)(A2)を満たすとき次が成立する.

ある確率過程 $\{\phi(t):t\in[0,\tau]\}$ が存在して, 全ての $T\in[0,\tau]$に対して次が成立する.

$$\mu(t,T)=-\sigma(t,T)\{\phi(t)-\int_t^T\sigma(t,v)dv\},\ t\in[0,T] \quad (19)$$

(証明)(A2)より, $\gamma(\cdot,S)$がSに無関係であるためある確率過程 $\{\phi(t):t\in[0,\tau]\}$ が存在して, $b(t,S)=-a(t,S)\phi(t)$が成立する. これを(8)に代入し, Sについて微分すると(19)式が得られる.

このフォワードレートのドリフトへの制限式は(A1)における規則性に関する条件さえ保証すれば, (A2)と同等である. というのは定理の式を積分すればすぐさま(15)が得られるからである. この定理はフォワードレートの確率過程に関する性質を用いて無裁定条件を語ることを可能とし, 以下の理論的分析に重要な役割を果たす.

定理1の結果を利用して合理的な債券市場の価格体系が要求するフォワードレートの確率過程が如何なるものかを明記することができる. (19)を積分すると,

$$\begin{aligned}\int_0^t\mu(v,T)dv&=-\int_0^t[\sigma(v,T)\{\phi(v)-\int_v^T\sigma(v,y)dy\}]dv\\&=-\int_0^t\sigma(v,T)\phi(v)dv\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T)\{\int_v^T\sigma(v,y)dy\}dv \qquad (20)\end{aligned}$$

が得られる. ドリフト, ヴォラティリティにおける第3の変数を, 明記して(20)式を(5)式に代入すると,

$$\begin{aligned}f(t,T)&=f(0,T)+\int_0^t\mu(v,T,f(v,T))dv\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))dW(v)\\&=f(0,T)\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))\{\int_v^T\sigma(v,y,f(v,y))dy]\}dv\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))dW(v)\\&\quad-\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))\phi(v)dv\\&=f(0,T)\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))\{\int_v^T\sigma(v,y,f(v,y))dy\}dv\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,T,f(v,T))dW^*(v) \qquad (21)\end{aligned}$$

が得られる. 人為的につくられた確率過程 $\{W^*(t):t\in[0,\tau]\}$ がQ^* のもとでブラウン運動過程に従うことに注意すれば, フォワードレート, スポットレートのQ^* での確率分布は0時点のフォワードレートの期間構造と各満期のヴォラティリティの確率過程にのみ依存することが分かる. もちろん, リスクの市場価格は人為的につくられたブラウン運動過程 $\{W^*(t):t\in[0,\tau]\}$ の中に反映されているので, フォワードレート, スポットレートの確率過程そのものがリスクの市場価格に依存していない, ということは意味しないが, Q^* での確率分布の形でフォワードレート, スポットレートに関する情報を利用するときには, リスクの市場価格はまったく必要ないのである. フォワードレートの確率分布が現在のデータとヴォラティリティの推定値のみで確定できる, という理論的事実は債券オプションの理論価格を評価するときには, 大きな意義を持つ. というのは, 後に説明するように, オプションの理論価格はQ^* の下での期待値という形で与えられ, それを求める際には, 原証券の確率過程そのものではなく, Q^* での確率分布さえわかれば十分であり, よってオプションの理論価格の導出に際してリスクの市場価格は必要な情報とならないからである. これは実際の資金運用実務においてオプションの実際の価格と理論価格を比較して投資戦略を組む際にϕの推定を必要としないことを意味し, リスクの市場価格を的確に推定する統計的手法が提示されていない今日においては重要な意義を持つ.

本節において明らかになった債券市場の合理的価格体系の確率過程は次のように整理することができる.

$$P(t,T)=\exp(\int_t^T f(t,s)ds),\ T\in[0,\tau]$$

$$\begin{aligned}f(t,s)&=f(0,s)+\int_0^t\sigma(v,s,f(v,s))\{\int_v^s\sigma(v,y,f(v,y))dy\}dv\\&\quad+\int_0^t\sigma(v,s,f(v,s))dW^*(v),\ s\in[0,T]\end{aligned}$$

もっとも, (21)式は微分方程式の確率モデルヴァージョンであり, 数学的厳密性を要求するときには解が存在しなくてはいけない. この方程式の解が存在するための十分条件として, 通常の微分方程式の場合のそれと似通った, 次のようなものが有効であることが証明されている.

「$\phi:[0,\tau]\times\Omega\rightarrow R$が有界でpredictable, かつ$\sigma(\cdot,\cdot,\cdot)$が第3の変数(つまりf(t, T)))に関してリプシッツ連続である.」

フォワードレートのヴォラティリティが定数の場合, すなわち, $\sigma(t,T)=\sigma>0$のケースを例としてとりあ

げることにしよう8)．この場合，債券の瞬時的収益率が(8-a),(9)より，

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)}=[r(t)+b(t, T)]dt-\sigma(T-t)dW(t)$$

となり，債券収益率のリスク尺度として残存期間が有効になる．よってこの例は，実際の金利リスクの管理において多くの機関投資家等が利用している債券のリスク尺度，マッコーレーデュレーションが適用可能な理論モデルである．この意味でこの例は最も簡単ではあるが，ファイナンス理論上では重要なケースにあたる．以下では議論を簡潔にするため，リスクの市場価格ϕも定数であるとしよう．この例は，明らかに先の確率微分方程式の解の存在条件を満たす．実際，フォワードレートのドリフトが満たすべき条件は，

$$\mu(t, s)=-\sigma\phi+\sigma^2(s-t) \tag{22}$$

であり，フォワードレートの確率過程は，確率微分方程式の解として次のように与えられる．

$$f(t, s)=f(0, s)+\sigma^2 t(s-\frac{1}{2}t)+\sigma W^*(t) \tag{23}$$

5.ワンファクターモデル

Heath-Jarrow-Mortonモデルが発表される以前は，スポットレートの確率過程，およびリスクの市場価格の確率過程を予め特定化し，そのもとで合理的な債券市場価格の体系を求めるというアプローチが中心であった．このアプローチはスポットレートが債券市場における金利リスクの代理変数となるただ一つのリスクファクターである，ということから，ワンファクターモデルと呼ばれている．このアプローチによる一連の論文では，無リスク裁定機会が存在しない，という合理的債券価格体系の条件は，債券価格を表す関数の偏微分方程式により記述される9)．このアプローチに比べHeath-Jarrow-Mortonモデルのアプローチの方がより一般的な理論的枠組みを提供していることの証として，この偏微分方程式を定理1により導き出すことが可能である．ただそのためには(A1)(A2)の他に新たに仮定を一つ追加しなくてはいけない．それが次の(A3)である．

(A3)任意の$T\in[0,\tau]$に対して，次の等式を満たす関数$F(\cdot,\cdot,T):\mathbf{R}\times[0,T]\rightarrow\mathbf{R}$，が存在する．

$$f(t, T)=F(r(t), t, T),\ t\in[0, T],\ \text{a.e.}Q \tag{24}$$

この関数は第1変数に関して2階微分可能，第2変数に関して1階微分可能である．

このとき(2)より，上述のような微分可能性を満たす関数$p(\cdot,\cdot,T):\mathbf{R}\times[0,T]\rightarrow\mathbf{R}$が存在し，債券価格について任意の$T\in[0,\tau]$に対し確率1で，$P(t,T)=p(r(t),t,T)$となり次の関係を満たす．

$$p(r(t), t, T)=\exp[-\int_t^T F(r(t), t, s)ds] \tag{25}$$

この仮定を(A1)(A2)に追加することにより，次の定理を得ることができる．

定理２：(A1)～(A3)の仮定のもとでは，債券価格$P(t,T)(T\in[0,\tau])$について$P(t, T)=p(r(t),t,T)$, a.e.Qとなるような関数$p(\cdot,\cdot,T):\mathbf{R}\times[0,T]\rightarrow\mathbf{R}$が存在し，次の偏微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}0=&p_r(r(t), t, T)\cdot(\alpha(t)+\phi(t)\beta(t))\\&+\frac{1}{2}p_{rr}(r(t), t, T)\cdot\beta^2(t)\\&+p_t(r(t), t, T)-p(r(t), t, T)\cdot r(t),\ 0\leqq t\leqq T\end{aligned} \tag{26-a}$$

$$p(r(T), T, T)=1,\ r(T)\in\mathbf{R} \tag{26-b}$$

但し，p_r, p_{rr}, p_tは各々，関数pのrに関する1階，2階偏微係数，時間に関する偏微係数を表し，$\alpha(t)$, $\beta(t)$は各々，$\mathscr{F}_t$-可測なスポットレートのドリフト，ヴォラティリティを表す．

(証明)(A3)，伊藤の微分ルールより，フォワードレートのドリフト，ヴォラティリティは以下の式を満たす．

$$\begin{aligned}\mu(t)=&F_r(r(t), t, s)\alpha(t)+\frac{1}{2}F_{rr}(r(t), t, s)\beta^2(t)\\&+F_t(r(t), t, s)\\\sigma(t)=&F_r(r(t), t, s)\beta(t)\end{aligned}$$

これを(19)に代入すると，

$$F_r\alpha+\frac{1}{2}F_{rr}\beta^2+F_t=-F_r\beta[\phi-\int_t^s F_r\beta du]$$

を得る．これを整理すると，

$$-F_r(r(t), t, s)(\alpha+\beta\phi)$$
$$+[F_r(r(t), t, s)\int_t^s F_r(r(t), t, u)du$$
$$-\frac{1}{2}F_{rr}(r(t), t, s)]\beta^2$$
$$-F_t(r(t), t, s)=0$$

となるが，これををTに関して[t,T]の範囲で積分をとりF(r(t),t,t)−r(t)を左辺に加えると，

$$-[\int_t^T F_r ds](\alpha+\beta\phi)+\frac{1}{2}\{[\int_t^T F_r ds]^2-\int_t^T F_{rr} ds\}\beta^2$$
$$-\int_t^T F_t\, ds+F(r(t),t,t)-r(t)=0 \quad (27)$$

を得る．但し関数Fの偏微係数の中の変数は(r(t),t,s)である．ところで，関数p(r(t),t,T)の偏微係数p_r, p_{rr}, p_tは各々，

$$p_r=p\cdot(-1)\cdot\int_t^T F_r ds$$
$$p_{rr}=p\cdot\{[\int_t^T F_r ds]^2-\int_t^T F_{rr}\, ds\}$$
$$p_t=p\cdot[(-1)\int_t^T F_t\, ds+F(r(t), t, t)]$$

となる．但し各式の被積分関数Fの中の変数は各々(r(t),t,s)である．各式を(27)に代入すれば(26-a)を得る．

先に触れたフォワードレートのヴォラティリティが定数のケースをここにおいても扱おう．ワンファクターモデルにおいては，ヴォラティリティが定数であることは以下を意味する．

$$F_r(r(t), t, s)\beta(t)=\sigma,\ s\in[t, \tau] \quad (28)$$

ヴォラティリティが定数であるときには，スポットレートのヴォラティリティもその他のフォワードレートのそれと一致することを意味するので直ちに，

$$\beta(t)=\sigma$$
$$F_r(r(t), t, s)=1,\ s\in[t, \tau]$$

となる．よって，フォワードレートを表す関数Fは，

$$F(r(t), t, s)=r(t)+g(t, s),\ \lim_{s\to t} g(t, s)=0$$

と表現できる．これと(19)式により，

$$\alpha(t)+g_t(t, s)=-\sigma[\phi-(s-t)\sigma] \quad (29)$$

を得る．この等式よりスポットレートのドリフトαは非確率変数であることが分かる．よって上の等式は関数g(・,T)に関する微分方程式，$g_t(t,s)-\alpha(t)-\sigma[\phi-(s-t)\sigma]$となるから，これを解いて境界条件，$\lim_{T\to t} g(t,T)=0$を利用すれば，

$$g(t, s)=\int_t^s\alpha(v)\,dv+\sigma\cdot\phi\cdot(s-t)-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot(s-t)^2 \quad (30)$$

を得る．よって，最終的なフォワードレートの解は，

$$F(r(t), t, s)=r(t)+\int_t^s\alpha(v)dv+\sigma\cdot\phi\cdot(s-t)$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot(s-t)^2 \quad (31)$$

となる．

特にドリフトαが定数，すなわち$\alpha(t)=\alpha>0$であるときには，

$$F(r(t), t, s)=r(t)+(\alpha+\sigma\cdot\phi)(s-t)-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot(s-t)^2$$

となり，債券価格は，

$$p(r(t), t, s)=\exp[-r(t)(s-t)-\frac{1}{2}(\alpha+\sigma\cdot\phi)(s-t)^2$$
$$+\frac{1}{6}\sigma^2\cdot(s-t)^3] \quad (32)$$

という形をとる．

6.Heath-Jarrow-Mortonモデルとワンファクターモデル

(A3)を追加して偏微分方程式でフォワードレートを求めるワンファクターモデルが，4節で述べたHeath-Jarrow-Mortonモデルのアプローチと比較したときに見せる顕著な特徴はフォワードレートの0時点，つまり現時点における値に自由度がない，という点である．実際(31)においてt＝0とすると，

$$F(r(0), 0, s)=r(0)-\int_0^s\alpha(v)dv-\sigma\cdot\phi\cdot s-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot s^2$$

となり，現時点のフォワードレートの水準は，スポッ

トレートのヴォラティリティのみならず，ドリフト，更に最も厄介なものとしてリスクの市場価格により規定されてしまう．自由度があるのはたかだかスポットレートの現行水準のみである．これは(A1)(A2)の他に(A3)という規則性の条件を課して解析的に扱いやすくした代償であり，実際の債券オプション価格の評価の際には大きなハードルとなる．4節のように(A1)(A2)の仮定のみで債券の合理的価格体系を扱うアプローチをとるときには，$t=0$の現時点におけるフォワードレートの期間構造はまるごとインプットとして扱える自由度がある．従って現在の価格体系とフォワードレート全部のヴォラティリティの推定作業に困難さがなければ，4節のアプローチの場合の方が必要なインプットのセットの入手の容易さという点で優位にたつことになり，これがHeath-Jarrow-Mortonモデルが実務界において重視される理由なのである．

また理論的な関心からもHeath-Jarrow-Mortonモデルのアプローチが広い期間構造の確率過程を対象としているという点で評価が高い．確かにHeath-Jarrow-Mortonモデルは定理2が示すとおり，(A3)という条件から解放されるために，かなり一般的であるような印象を受ける．だがワンファクターモデルで扱うことができずHeath-Jarrow-Mortonモデルでは扱えるフォワードレートの確率過程が多いか否かは十分に調べる必要がある．例えばフォワードレートのヴォラティリティが定数である場合を例にとってみよう．Heath-Jarrow-Mortonモデルにおいてフォワードレート，スポットレート各々の確率過程は，

$$
\begin{aligned}
f(t, s) &= f(0, s)+\sigma^2 t(s-\frac{1}{2}t)+\sigma W^*(t) \\
&= f(0, s)+\sigma^2 t(s-\frac{1}{2}t)-\sigma\cdot\phi\cdot t+\sigma W(t)
\end{aligned}
$$

$$
r(t)=f(0, t)+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2-\sigma\cdot\phi\cdot t+\sigma W(t)
$$

で表される．このとき，二つの方程式を連立させて$W(t)$を消去すれば，フォワードレートはスポットレートの関数として次のように表現できる．

$$
f(t, T)=r(t)+\{f(0, T)-f(0, t)\}+\sigma^2\cdot t\cdot(T-t) \qquad (33)
$$

従ってフォワードレートのヴォラティリティが定数である場合は自動的に(A3)が満たされることになり，二つのアプローチが扱い得るフォワードレートの確率過程のクラスは一致する．もちろん，一般的なケースについては双方のクラスがどのくらい異なっているかは，例えば(A3)の条件がフォワードレートの確率過程にどのくらいきつい制約を与えているかを明らかにしないと答えを得ることはできない．

ヴォラティリティが定数のケースにおいてたとえ扱うクラスが一致しているとはいえ，現行のフォワードレートの期間構造を自由に入力できるというHeath-Jarrow-Mortonモデルの優位性は依然として損なわれていない，と考える読者がいるかもしれない．スポットレートの確率微分方程式は伊藤の微分ルールより，

$$
dr(t)=[\frac{\partial f(0, t)}{\partial T}+\sigma^2\cdot t-\sigma\cdot\phi]dt+\sigma\, dW(t) \qquad (34)
$$

となる．従って，ワンファクターモデルによってフォワードレートの確率過程を定式化する場合，確かにスポットレートのドリフトをたまたま$\partial f(0,t)/\partial T+\sigma^2\cdot t-\sigma\cdot\phi$と特定化しない限り，実際の現行フォワードレートの期間構造と整合的なフォワードレートの確率過程を特定化することができない．

だがtime-homogenity，つまりフォワードレートが時間t，満期Tの各変数に独立に依存するのではなく，残存期間$T-t$を通してしか依存しない，という性質を持つクラスに限定した場合ワンファクターモデルに対する優位性は完全に失われる．というのは，スポットレートの確率過程がtime-homogeneousなとき，(34)も必然的にその性質を持つので，(偏)微分方程式，

$$
\frac{\partial f(0, t)}{\partial T}=-\sigma^2\cdot t+\sigma\cdot\phi+\alpha,\ \exists\alpha\in \mathbf{R}
$$

が成立する．この方程式を解くと，

$$
f(0, t)=f(0,0)-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot t^2+(\sigma\cdot\phi+\alpha)\cdot t
$$

という解を得る．これを(33)に代入すると，

$$
f(t, T)=r(t)+(\alpha+\phi\cdot\sigma)(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2
$$

となり，(2)より債券価格は，

$$
\begin{aligned}
P(t, T)=\exp[&-r\cdot(T-t)-\frac{1}{2}(\alpha+\sigma\cdot\phi)(T-t)^2 \\
&-\frac{1}{6}\sigma^2\cdot(T-t)^3]
\end{aligned}
$$

となる．ところが，これはワンファクターモデルで提示されたtime-homogeneousなモデルの債券価格(32)に他ならない．このようにヴォラティリティが定数のケースでは，time-homogeneousなクラスに限定した場合，$t=0$と$t>0$の時点で同じ構造を要求することになり，初期値に制約が課されることになる．結果として初期値を自由に設定することができなくなり，ワンファクターモデルに対する優位性が失われるのである．一般的なヴォラティリティのケースにおいてワンファクターモデルに対する優位性があるか否かに関しては，残念ながら現段階において明確な結論が得られていない．扱い得るクラスに関するワンファクターモデルとの違い，初期値に関する自由度が保証されるクラスの大きさを明確にすることは，見極めておきたい今後の理論的課題である．

7.債券オプション等条件付請求権(contingent claim)の理論価格の評価

(A1)(A2)が成立すると任意のSに対して$Z(t,S)$がマルチンゲールとなる一意的確率測度Q が存在するわけであるが，このことはいわゆる状態請求権が取引されるアローデブルー市場において各状態に対して請求権が全て存在するという意味での完備市場と本質的に同じ投資機会を提供する市場となっていることを意味する．すなわち$E^*[X/B(S1)]<\infty$という規則性の条件を満たすような$\mathscr{F}_S$-可測な非負の確率変数$X:\Omega\rightarrow\mathbf{R}$で表されるS時点におけるリスクの伴う資産額に対して，

$$X=N_0(S)B(S)+N_\tau(S)P(S,\tau) \tag{35}$$

となる自己充足的取引戦略$\{N_0(t),N_\tau(t):t\in[0,\tau]\}$が存在する．ここで取引戦略とは，スポットレートで資金運用するポジション，満期τの債券で資金運用するポジションを表す$N_0(t),N_\tau(t)$が$\mathscr{F}_t$-可測$(t\in[0,\tau])$であることを意味する．また自己充足的とは0時点からτ時点までの資金運用期間中投資家自身の予算制約を満たすことを意味し，

$$V(t)=V(0)+\int_0^t N_0(v)dB(t)+\int_0^t N_\tau(v)dP(t,T),\ \text{a.e.}Q \tag{36}$$

が成立していることを意味する．右辺第2項はスポットレートでの累積的成長額を，第3項は債券保有におけるキャピタルゲインの累積を表している10)．以上述べたことは，初期資産を容易し，適当な取引戦略を選択しさえすれば，任意のリスク特性をもつ将来の資産額が実現できることを意味する．従ってあらゆる満期の割引債，ひいてはクーポン債，更にリスクファクター$\{W(t):t\in[0,\tau]\}$にのみ左右されるオプション等の状態請求権を保有することの利益が2つのポジションのみで複製可能であり，したがって既存の証券との相対的関係のみから，裁定を許さない合理的な価格を与えることが可能となるのである．

以上のことから時刻Sにおいて期末資産Xをもつ状態請求権のt時点での理論価格は，$X=V(S)$となる取引戦略Vにより，

$$\begin{aligned}V(t)&=E^*[V(S)/B(S)|\mathscr{F}_t]\cdot B(t)\\&=E^*[X/B(S)|\mathscr{F}_t]\cdot B(t)\end{aligned} \tag{37}$$

によって与えられる．

例えば，債券$P(t,T)$に対する行使価格Kのヨーロッパ型コールオプションの場合を考えてみよう．オプションの満期がSであるとき，その時点におけるオプション一枚保有による利益，あるいは価値は，$X=\max\{P(S,T)-K,0\}$で表される．これは$\mathscr{F}_S$-可測で，更に積分の定義により明らかに$E^*[X/B(S)]<\infty$である．債券価格の定義式(2)より，Xはフォワードレートの体系$\{f(S,u):u\in[S,T]\}$と行使価格にのみ依存し，$B(S)$はスポットレートの時系列$\{r(t):t\in[0,S]\}$にのみ依存するのでオプションの理論価格はフォワードレートの体系，スポットレートの時系列及び行使価格Kにのみ依存する確率変数の同値確率測度Q による期待値という形をとる．

今日，数値解法や計算機の発達等により，オプション価格の理論値を求める作業において，必ずしも閉じた形の解(closed form solution)まで得られていることが要求されないが，閉じた解を求めることは，少なくとも理論的にはモデルの各外生的パラメータに対する性質等を調べる上で重要である．ここではフォワードレートのヴォラティリティが定数のケースのオプション価格を記しておこう．

(2)(23)式から債券の確率過程は，

$$P(t,T)=\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}-Tt(T-t)-\sigma(T-t)W^*(t)\right)$$

となる．満期がT期の割引債を原証券とする行使価格K＞0，満期日Sのヨーロッパ型コールオプションのt期の理論価格は経営における確率過程(上)4-1と同様の考え方により次のような理論価格が与えられる11).

$$C(t)=P(t, T)\Phi(h) - KP(t, S)\Phi(h-\sigma\cdot(T-S)\cdot(S-t)^{1/2})$$

$$h=\frac{\ln(\frac{P(t, T)}{KP(t, S)})+\frac{1}{2}\sigma\cdot(T-S)^2\cdot(S-t)}{\sigma\cdot(T-S)\cdot(S-t)^{1/2}}$$

但し，$\Phi(\cdot)$は標準正規分布関数である．

8.今後の展望

債券市場の合理的価格体系の一般理論は最近になってまとまりつつある．特にHeath-Jarrow-Mortonモデルが発表されてからは，最も弱い合理性の条件で，より広いクラスの期間構造の確率過程を扱い得るモデルはもはやない，というように認識されつつある．ただ，これは飽くまでも理論的枠組みの一般性に関してであり，債券オプションの理論価格の評価に有用な具体的モデルが十分提示されているということとは別のものである．脚注8)で触れているように具体的には無リスク裁定機会条件を満たす例はごく限られており，確率微分方程式の解を得ている例となると本稿で扱ったヴォラティリティが定数の例の他，指数型のヴォラティリティ $\sigma(t,T)=\exp(-\kappa(T-t)), \kappa>0$位にとどまってしまう．従って実用に十分耐えうるようなモデルが十分な数だけ提示されているとはいい難い．今後，この方向の発展が期待されるところである．また6節でのべたとおり，扱い得るクラスの範囲に関して，ワンファクターモデルとの明確な違いを明らかにすることは，このモデルの優位性を正確に認識するためにも重要な課題であるといえよう．これについても今後の理論的研究の成果を待つことにしたい．

脚注

1)本稿は石井記念証券研究振興財団による助成をもとに進めた研究成果を論文としてまとめたものである．

2)(7)式を導くためには確率積分に関するフビニの定理を用いる必要がある．この定理が適用できるためには十分条件として，$f(0,\cdot),\mu(\cdot,\cdot),\sigma(\cdot,\cdot)$について強い可積分性を要求しなくてはいけない．厳密な証明は本稿の意図する所ではないため割愛するが，興味ある読者はHeath-Jarrow-Morton(1992)を参照されたい．

3)これについては，例えばHarrison-Kreps(1979)を参照せよ．

4)(10)式の解は $\ln Z(t, T)=\ln Z(0, T)+\int_0^t b(v, T)dv-\frac{1}{2}\int_0^t a^2(v, T)\,dv+\int_0^t a(v, T)dW(v)$ によって与えられる．

5)詳細は，マルチンゲール理論における画期的論文，Kunita-Watanabe(1967)を参照せよ．この論文による理論的成果を我々と同じ文脈で財務理論において適用した文献としてはHarrison-Kreps(1979)が代表的である．

6)ローカルマルチンゲールとは以下のようなマルコフ時間と呼ばれる確率変数の列 $\{\tau_k:k\in N\}$ が存在する確率過程 $\{X(t): t\in[0,\tau]\}$ のことである．

$$\tau_k\leqq\tau_{k+1},\ \text{a.e.}Q$$
$$\lim_{k\to\infty}\tau_k=\tau,\ \text{a.e.}Q$$
$$E^*[X(t\wedge\tau_k)|\mathscr{F}_s]=X(s\wedge\tau_k),\ 0\leqq s\leqq t\leqq\tau,\ \text{a.e.}Q$$

7)有限連続時間の確率過程の場合，ローカルマルチンゲール $\{X(t):t\in[0,\tau]\}$ がマルチンゲールとなるために，通常以下の条件が十分条件として課される．

$$E^*[X(\tau)|\mathscr{F}_0]=X(0)$$

(13)式はこれを単にZのヴォラティリティ$a(\cdot,\cdot)$を利用して書き換えた表現にすぎない．詳細は，Heath-Jarrow-Morton(1992)を参照せよ．

8)ヴォラティリティが定数であるケースと並んで代表的なケースは，比例的ヴォラティリティ，$\sigma(t,T,f(t,T))=\sigma\cdot f(t,T), \sigma>0$の場合である．だが，残念ながら先の確率微分方程式の解の存在のための十分条件の一つである有界性を満たしていないため，解の存在を保証することができない．このときヴォラティリティが定数のケースと異なり，(21)の解はもし存在するとしても，常に非負の値をとるが，正の確率で発散することが知られている．これは正の確率で債券価格が0となり，裁定機会が発生することを意味する．このため比例的ヴォラティリティの場合は理論的に整合的にならない．一方，ヴォラティリティが定数の場合にはフォワードレートの値，従ってスポットレートが正の確率で負の値をとることで非現実的な債券市場

の記述になるといわざるを得ない．(A1)(A2)の二つの条件を満たし，非負の値のみをとるフォワードレートの確率過程のクラスが如何なるものであるかはいまだ明らかになっていない．しかしながら，いま述べたことをヒントに一つの例$\sigma(t, T, f(t,T)) = \sigma\cdot\min\{f(t,T),\lambda\}$，$\sigma$, $\lambda>0$をつくることはできる．この場合確率微分方程式の存在条件を満たし，フォワードレートが確率1で非負の値をとるという性質を満たす．詳細はHeath-Jarrow-Morton(1992)を参照せよ．

9)例えばVasicek(1979),Cox-Ingersoll-Ross(1985)を参照せよ．

10)資金運用に利用する債券は投資期間中，適当な満期のものに変更することが一般には許されるが，(35),(36)式のような設定でも一般性は失われない．(36)式の積分が意味をもつように「経営のための確率過程(上)」の4-1,脚注19)のような可積分条件を課す必要がある．

11)この解を導出する過程についてはHeath-Jarrow-Morton(1992)を参照されたい．ただ解が正しいか否かを確認したいときには，債券価格をスポットレートの関数として表現し直したものをオプション価格に代入し，定理2の偏微分方程式が満たされているか否かをチェックすればよい．

参考文献

Cox, J., J. Ingersoll, and S. ross. "A theory of the Term structure of Interest Rates." *Econometrica* 53(1985), 385−406.

Harrison. J.M, D. Kerps. "Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securuties Markets." *Journal of Economic Theory* 20(1979), 381−408.

Heath. D, R. Jarrow, A. Morton "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology" *Econometrica* 60(1992), 77−105.

Ingersoll. J, J. Skelton, R. Weil. "Duration Forty Years Later" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13(1978), 627−654.

Kunita. H, S. Watanabe. "On Square Integrable Martingales." *Nagoya Mathmatical Journal* 30 (1967), 209−245.

Vasicek. O.A. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure. "Journal of Financial Economics 5 (1977), 177−88.

[ささい　ひとし　横浜国立大学経営学部教授]
[もりた　ひろし　横浜国立大学経営学部助教授]