<紹　介>

経営のための確率過程（上）

笹　井　　均

0.　はじめに

経済・経営現象は常に，不確実に変動する環境要因に依存した動的過程の実現値として観察される．この過程における動的変化のメカニズムを解明し，到達する状態とその確率を望ましい方向に変化させるための方策を分析することは，きわめて重要な課題といえよう．例えば確率的に変動する資産市場でのポートフォリオを取り扱う投資決定に関する問題，不確実性下におけるマーケティング戦略を動的枠組みの中で議論するマーケティング意思決定の問題などがある．

今日企業を取り巻く環境の複雑さとダイナミクスの重要性が認識されるに伴い，その変化に適応し，より効果的な意思決定を可能ならしめる精緻な理論が要求されつつある．すなわち，時間と不確実性を意思決定の本質的要素として把握した上で将来の予測に基づいて現在を科学的に分析し，時々刻々と得られる情報を基に政策的指針が確立されなければならない．このような視点から，変化を生起させるメカニズムを深く理解し，それを操作する能力を拡大していくためには，確率過程論の知識が是非とも必要になってくる．

本稿は，このような趣旨にのっとり，経営学部大学院生のための入門的解説を試みたものである．

確率過程を理解するには，確率・統計学が基礎となることはいうまでもない．我々はまず公理的確率の導入から始めるが，現象に関する客観状勢，大量観察などを織りこむことにより，統計学でイメージする具体的確率の値が求まるということを注意しておきたい．本稿で主として参考にしたものは，「E. Wong: Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems, McGraw-Hill, 1971」，「河田竜夫：確率と統計，朝倉書店，昭和36年」，「D. Duffie: Security Markets, Academic Press, 1988」，「J. Cox and C. Huang: Option Pricing Theory and Its Applications, Theory of Valuation, Frontiers of Modern Financial Theory, Volume 1, Rowman & Littlefield Publishers, 1989」である．

1.　確率

実験や測定を行う場合，その結果というものは，事前に知ることはできないものであり，何らかの意味で偶然性に支配される．この結果の意味するところを数学的に取り扱うために，結果の起る確からしさというものに着目し，確率の概念を導入することにする．実験や測定により得られる結果は，起り得る範囲内に入る集合のある１点と考えることができよう．抽象的に，結果の要素 $\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\cdots\}$ からなる空間 Ω を考え（**標本空間**），この Ω の要素より構成される任意の集合を**事象**と呼ぶ．我々は，事象の上に確率を与えようとしているわけであるが，対象とする事象をどの程度のものにするか，明確にしておかねばならない．例えば，$\Omega=R$ であれば，全ての区間（$(a,\ b)$，$[a,\ b)$，$(a,\ b]$，$[a,\ b]$ の形のもの）の集まり，および，それらの有限回，あるいは，無限回の和（$\cup$），共通（$\cap$），補集合（c）を作るという操作を行ったものもまた事象と考えたい．一般的に，Ω の部分集合を要素とする集合（**集合族**）を F と表わし，F について，

(i)　$\Omega\in F$

(ii)　$A\in F$ ならば $A^c\in F$

(iii)　$A_n\in F$，$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in F$

が成立するとき，集合族 F を **σ-集合体**[1)] ということにする．

---

1)　F が σ-集合体なら，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，$\overline{\lim_n}\,A_n$，$\underline{\lim_n}\,A_n$ は F に属する．

ところで，σ-集合体に関して，Fを任意の集合族とするとFを含む最小の集合体が，ただ1つ存在することが知られている．したがって，R^nにおいて，すべての開区間，あるいは半開区間，閉区間（$\Omega=R$の場合と同様に区間を定める）からできている集合族を含む最小のσ-集合体が存在することになるが，これを特に**ボレル（Borel）集合体**と呼び，$B(R^n)$で表わす．ボレル集合体の要素を**ボレル集合**という．勿論ボレル集合体は，すべての開区間，半開区間，閉区間を含むし，縮退した区間 $[a, a]$，すなわち1点も含むことは明らかであろう．

我々は考察の対象とする空間と事象を空間Ωとその部分集合より構成される1つのσ-集合体Fというふうに規定し，Fを**可測集合**，(Ω, F) を**可測空間**と名付けることにする．つぎに，可測空間の上に測度の概念を導入しよう．

(i) 任意の$A\in F$に対し，$\mu(A)\geq 0$となる実数が対応する

(ii) $A_n\in F$, $n=1, 2, 3\cdots$に対し$A_i\cap A_j=\phi$ ($i\neq j$)のとき$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_i)$

を満足する集合関数$\mu(A)$，$A\in F$を事象Aの**測度**と定義しよう．特に，$\mu(\Omega)=1$が成立するとき事象Aの**確率（測度）**$P(A)$という．公理的に確率というものを定義したわけである．ところで，ある集合体上で確率が定義されていると，その集合体を含む最小のσ-集合体上にこの確率を一意的に拡張できる（拡張定理）ことが知られている．したがって，ボレル集合体上に確率を定義するためには，すべての開区間（あるいは半開区間，閉区間）および，その有限個の和集合，補集合からなる集合体上で確率を定めれば十分であるということになる．

いま，σ-集合体F上に測度μが与えられているものとする．測度が0であるFの部分集合NはFの元ではないかもしれない．このとき，Fにすべての測度が0になる集合を加えてできる最小のσ-集合体を**完備σ-集合体**[2)]という．また，$\mu(A\cup N)=\mu(A)$，$A\in F$によって完備σ-集合体上に測度（**完備測度**）を定義できる．

空間Ω，σ-集合体F，測度μをひとまとめにして(Ω, F, μ) と書き**測度空間**という．測度が確率Pによって与えられる場合には，**確率空間** (Ω, F, P) と呼ばれる．

以上で事象の上に確率を与えるという作業が完了したことになる．ところが，しばしば，事象を構成する個々の要素を識別する必要はなく，その要素から対応づけられる性質，すなわち，その関数にのみ興味をもつという場合がおこる．Ωの点を実数に対応させる関数

$$\omega\in\Omega\rightarrow X(\omega) \tag{1}$$

を考えよう．任意の実数xに対して，$\{\omega : X(\omega)<x\}=\{\omega : X(\omega)\in(-\infty, x)\}$ がFに属するとき$X(\omega)$が**可測関数**であるという．確率空間である場合には$X(\omega)$を**確率変数**と呼ぶ[3)]．可測関数の可算個の加，減，乗，除，極限という演算によりえられる関数はすべて可測関数となる．

Rのボレル集合に確率Pが定義されていると区間$(-\infty, x)$ の確率を$P(-\infty, x)\equiv F(x)$と置くことにより，$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$となる非減少左連続関数が定義できる．この性質をもつ$F(x)$を**分布関数**という．逆に，分布関数$F(x)$が与えられれば，区間 (a, b) の確率を$P(a, b)\equiv F(b)-F(a)$と定義することによりボレル集合上に確率が定まる．いま確率空間 (Ω, F, P) と確率変数$X(\omega)$が与えられているものとしよう．$(-\infty, x)$ という区間の確率（$P'(-\infty, x)$ と書く）として，$\{\omega : X(\omega)<x\}\in F$の確率（$P(X(\omega)<x)$と書く）を対応させることができる．すなわち，$P'(-\infty, x)=P(X(\omega)<x)$である．すると，上に述べたことから，$F(x)\equiv P'(-\infty, x)$という分布関数を作ることができる．この分布関数を**確率変数Xの分布関数**[4)]という．もし，分布関数が，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt \tag{2}$$

と可積分関数を用いて表わすことができる場合$f(x)$をXの**確率密度関数**という．確率的現象を記述する

2) R上の任意の区間 $[a, b]$ の測度をb－aと定義する．Rのボレル集合体の完備σ-集合体の要素をルベーグ可測集合，その上の完備測度をルベーグ測度と呼ぶ．

3) $X(\omega)$が$\omega\in\Omega\rightarrow X(\omega)\in R^n$であっても，同様に可測関数を定義できる．この定義は，“すべてのボレル集合Aに対して，$\{\omega : X(\omega)\in A\}\in F$”ということと同値である．何故ならば，ボレル集合体は，すべての開区間からできている集合族を含む最小のσ-集合体であり，Fもまたσ-集合体であるからである．

4) 確率変数 $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ の分布関数は，結合分布といい，$F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\equiv P(X_1(\omega)<x_1, X_2(\omega)<x_2, \cdots\cdots, X_n(\omega)<x_n)$によって定義する．

際に，よく使われる分布に2項分布，ポマソン分布，正規分布，一様分布，ガンマ分布などがある[5]．

さて，確率変数の積分の意味を明確にしよう．A_i, $A_j \in F$ で $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$, $j=1$, 2, 3, ……と仮定し，

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases} \qquad 0(3)$$

と定義する．I_{A_i} は集合 A_i のインディケーターと呼ばれる可測関数（確率変数）である．このとき，

$$X(\omega) \equiv \sum_1^n x_i I_{A_i}(\omega), \quad x_i \in R \qquad (4)$$

なる確率変数のことを**単純関数**という．(Ω, F, P) において上の単純関数の Ω 上の積分は

$$\int_\Omega X(\omega)\, dp(\omega) \equiv \sum_{i=1}^n x_i p(A_i) \qquad (5)$$

で定義される．非負の値をとる任意の確率変数は，すべての $\omega \in \Omega$ に対し，非負の単純関数の単調増加例の極限として記述できることが知られている．したがって，非負の確率変数 $X(\omega)$ の積分を

$$\int_\Omega X(\omega)\, dp(\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega X_n(\omega)\, dp(\omega) \qquad (6)$$

によって定義することが可能である．一方，任意の確率変数 $X(\omega)$ は非負の確率変数 X_+, X_- を用いて $X = X_+ - X_-$ のように分解できるため，$X(\omega)$ の積分を単調な単純関数の極限の和として(6)式のように定義する．積分の値が有限のとき，X は Ω で可積分であるという．ここで，後で使う必要があるため確率変数列 $\{X_n\}$ の収束の定義について触れておくことにする．

確率変数 X_n が Ω の確率0の集合を除いて，$X_n(\omega) \to X(\omega)$，すなわち，$P(\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$ となるとき，X_n は X にはほとんど到る所収束するといい

$$lim X_n(\omega) = X(\omega) \quad a.s. \qquad (7)$$

と書く．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$n \to \infty$ のとき，

$$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \to 0 \qquad (8)$$

が成立する場合，X_n はXに**確率収束**するという．もちろん，ほとんど到る所収束するならば確率収束する．

確率変数の積分が定義されたので確率変数の関数についての積分も定義できることになる．正確には，ボレル関数と呼ばれる関数についての積分を定義する．AをRのボレル集合とする．そして，

$$\{(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) : f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \in A\}$$

が，つねに R^n のボレル集合となるとき，関数 $f : R^n \to R$, を**ボレル関数**と呼ぶ．ところが，$X_1(\omega)$, $X_2(\omega) \cdots\cdots X_n(\omega)$ が確率変数の場合，fがボレル関数であば，$f(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots\cdots X_n(\omega))$ もまた確率変数となることが知られている．

確率空間（Ω, F, P）における確率変数 $X(\omega)$ の積分については，すでに説明したわけであるが，とくに，$X(\omega)$ が可積分のとき，

$$EX \equiv \int_\Omega X(\omega)\, dp(\omega) \qquad (9)$$

を $X(\omega)$ の**期待値**という．X が有限個の値しかとらない離散的確率変数の時，すなわち，

5) (i) 2項分布

$X(\omega)$ は0, 1, 2, ……n の値をとり，$0 < p < 1$ で $F(x) = 0$, $x \leq 0$

$$= \sum_{\nu < x} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu}, \quad x > 0$$

(ii) ポアソン分布

$X(\omega)$ は0, 1, 2, ……の値をとり，$\lambda > 0$ で $F(x) = \sum_{k<x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

(iii) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$X(\omega)$ の値域が（$-\infty$, ∞）であり，

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

(iv) 一様分布

$X(\omega)$ の値域が［a, b］であり，

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad -\infty < x \leq a \\ &= \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b \\ &= 1, \quad b \leq x \end{aligned}$$

(v) ガンマ分布

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^\gamma}{P(\gamma)} t^{\gamma-1} e^{-\lambda t} dt \qquad & x \geq 0 \\ &= 0 & x < 0 \end{aligned}$$

ただし，$\gamma > 0$　$\lambda > 0$.

$A_i=\{\omega : X(\omega)=x_i\}$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$,
$x_i \neq x_j$, $i \neq j$

であれば(9)式は

$$EX=\sum_{i=1}^{n} x_i p(A_i)$$

となることは明らかであろう.

$g: x \in R \to g(x) \in R$ をボレル関数とする.

$g(X(\omega))$ が可積分のとき

$$Eg(X)=\int_{\Omega} g(X(\omega))\,dp(\omega) \tag{10}$$

を $g(X(\omega))$ の期待値と呼ぶ.

いま, $X(\omega)$ の分布関数を $F(x)=P'(-\infty, x)\equiv P(X(\omega)<x)$ とする. すると前に説明したようにR上のボレ集合 $A \in B(R)$ に確率 $P'(A)$ が定義でき, X によって生成される新しい確率空間 (R, $B(R)$, P') が求まり, その上の確率変数 $g(x)$ の積分が定義できる.

$P'(x, x+dx)=F(x+dx)-F(x)$ であるから

$$\int_R g(x)\,dp'(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \tag{11}$$

と書くこともある. 通常右辺の形は, **ルベーグ・スティルチェス** (Lebesgue-Stieltjes) **積分**と呼ばれている. このとき,

$$\int_{\Omega} g(X(\omega))\,dp(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \tag{12}$$

が成立することを証明できる. 左辺は, $g(X(\omega))$ の確率Pに関する Ω 上の積分であり, 右辺は確率空間 (R, $B(R)$, P') 上の確率変数 $g(x)$ の確率 P' に関するR上の積分であることに注意しよう. (12)式が成立することを直観的に理解するには, $X(\omega)$ が離散的確率変数の場合, $A_i=\{\omega : X(\omega)=x_i\}$, i = 1, 2, ……n, を考えるとよい. すると, $\int g(X(\omega))\,dp(\omega)$ は $\Sigma g(x_i) P(A_i)$ であり, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)$ は $\Sigma g(x_i) P'(x_i)$ となるが, $P(A_i)=P'(x_i)$ であるから両者が一致する. この離散的確率変数の極限が(12)式であると思えばよい. また, EX^k, k = 1, 2, ……は**$X(\omega)$の k 次のモーメント呼ばれるということもつけ加えておく.**

つぎに, 確率的現象を説明するための重要な独立という概念について説明しよう.

事象A, $B \in F$が**独立**であるとは

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B) \tag{13}$$

が成立することと定義する. 確率空間 (Ω, F, P) における確率変数 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ……, $X_n(\omega)$ を考える. 任意の R 上のボレル集合 A_1, A_2, ……, A_n に対して

$$X_i^{-1}(A_i)\equiv\{\omega : X_i(\omega)\in A_i\}$$

と表わそう. 任意の A_1, A_2, ……$A_n \in F$に対して,

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i))=\prod_{i=1}^{n} P(X_i^{-1}(A_i)) \tag{14}$$

が成立するとき, X_1, X_2, ……, Xn は**独立**[6]であるという. X_1, X_2, ……, X_n が独立であるとき, ボレル関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, ……, $f_n(\omega)$ に対して, $f_1(X_1(\omega))$, $f_2(X_2(\omega))$, ……$f_n(X_n(\omega))$ もまた独立な確率変数となる.

(問) X, Yが独立なら, $EXY=EX\cdot EY$となることを示せ.

2. 条件付期待値

確率空間 (Ω, F, P) の事象 A, Bに対し,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{15}$$

と定義し (ただし, $P(B)\neq 0$とする), **Bが与えられたときのAの条件付確率**という.

F'を B_1, B_2, B_3, ……$\in F$, $\cup B_i=\Omega$, $B_i\cap B_j=\phi$, $i \neq j$, によって生成される Fの部分の σ-集合体とする.

$$P(A|F')(\omega)\equiv \begin{cases} P(A|B_i) & \text{for} \quad \omega\in B_i,\ P(B_i)>0 \\ \text{任意の値} & \text{for} \quad \omega\in B_i,\ P(B_i)=0 \end{cases}$$

と定めると $P(A|F')$は確率変数となる. F上での確率Pを F'に制限した確率を $P_{F'}$とする. いま各々有限個の値 $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$, $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ をとる確率変数 Y, Xを考える. $B_i\equiv\{\omega : Y(\omega)\in y_i\}$, i = 1, 2, ……, nによって生成される σ-集合体を上の F'と考えよう. $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$ の任意の部分集合 Dに対し, $B\equiv\{\omega : Y(\omega)\in D\}$ と置くと $A\in F$に対して, (15)式より

$$\begin{aligned} P(A\cap B)&=\Sigma_{y_j\in D} P(A|B_j)\,P(B_j) \\ &=\int_B P(A|F')(\omega)\,dP_{F'}(\omega) \end{aligned} \tag{16}$$

が成立する.

$A_k\equiv\{\omega : X(\omega)=x_k\}$ と置き, F'が与えられたときの$X(\omega)$の条件付期待値[7]を

---

6) ボレル集合体に属する任意のボレル集合 A に対し, $X_i^{-1}(A)$ の形の全体からなる集合族 F_iは Fの部分の σ-集合体となる. したがって, (14)式は任意の $A_i\in F_i$ に対して $P(\cap E_i)=\Pi P(E_i)$ と書くことができる.

7) $X(\omega)=I_A(\omega)$ とすると, $B\in F$, $P(B)\neq 0$, に対して, $E^{F'}I_A(\omega)=P(A|B)$, $\omega\in B$となり, 条件付確率は特殊な確率変数に対する条件付期待値である.

$$E^{F'}X(\omega) \equiv \Sigma x_k P(A_k|F')(\omega)$$

で定義される F'-可測な確率変数とすれば

$$\begin{aligned}\int_B X(\omega)\,dP(\omega) &= \Sigma x_k P(A_k \cap B)\\ &= \Sigma x_k \left\{\int_B P(A_k \cap F')(\omega)\,dP_{F'}(\omega)\right.\\ &= \int_B \left\{\Sigma_k x_k P(A_k|F')(\omega)\right\} dP_{F'}(\omega)\\ &= \int_B E^{F'}X(\omega)\,dP_{F'}(\omega) \qquad (17)\end{aligned}$$

が成立する．

したがって，一般に，任意の $B \in F'$ についてほとんど到る所で

$$\int_B E^{F'}X(\omega)\,dP(\omega) = \int_B X(\omega)\,dP(\omega) \qquad (18)$$

を満足する F'-可測関数 $E^{F'}X$が一意的（$a.s.$）に存在するとき[8)]，$E^{F'}X$ をあらためて **F'に関するXの条件付期待値**と呼ぶことにする．これは，明らかに通常の意味での条件付期待値の拡張になっている．いいかえれば，$E^{F'}X$ は，F'の各要素の上で $X(\omega)$ を平均化することによって得られる F'-可測な確率変数ということになる．$Y(\omega)$ を（Ω, F, P）で定義された確率変数，$\sigma(Y)$ を $Y(\omega)$ を可測にする最小の σ-集合体（Yによって生成される σ-集合体という）とする．明らかに $\sigma(Y) \subset F$である．$E^{\sigma(Y)}X$ を **Yが与えられたときのXの条件付期待値**といい $E[X|Y]$ と書くことにする．$\sigma(Y)$は Yから得られるすべての情報の集りと解釈することができるので，$E[X|Y]$ は Yに関するすべての情報が得られているという前提のもとでの期待値ということになろう．

（例） Y, X を（Ω, F, P）におけるつぎのような2つの値しかとらない離散的確率変数とする．

$$\begin{aligned}Y(\omega) &= y_1,\ \omega \in B \in F \\ &= y_2,\ \omega \in B^c \in F \qquad y_1 \neq y_2\\ X(\omega) &= 1,\ \omega \in A \in F\\ &= 0,\ \omega \in A^c \in F\end{aligned}$$

簡単のため，$P(B)$，$P(B^c) \neq 0$ とし，$E[X|Y](\omega)$，$\omega \in B$ を慣例的に $E[X|Y=y_1]$ と書くと

$$E[X|Y] = 1 \cdot P(A|F') + 0 \cdot P(A^c|F')$$

$$= \begin{cases} E[X|Y=y_1] = P(A|B), & \omega \in B \\ E[X|Y=y_2] = P(A|B^c), & \omega \in B^c \end{cases}$$

となる．明らかに $E[X|Y]$ は $\sigma(Y)$ 可測であり，任意の $B \in \sigma(Y)$ に対して(18)式が成立する．

$E^{F'}X$ は，大体は通常の期待値の性質をもつと考えてよいが，よく使われるものをつぎにあげておく．

(i)　F'の任意事象が $\{\omega|X(\omega) < x\}$ の形の事象と独立（$F'=\sigma(Y)$なら Yと Xが独立ということ）ならば，$E^{F'}X = EX$, $a.s.$.

(ii)　Yが F'-可測なら，$E^{F'}YX = YE^{F'}X$, $a.s.$.

(iii)　$F' \supset F''$なら $E^{F'}E^{F''}X = E^{F''}X$, $a.s.$.

(i)の証明は（問）として置く．(ii)の証明の概略を与えよう．$B \in F'$, $Y = I_B$とすると任意の $A \in F'$ に対して(18)式より，$EI_A E^{F'}YX = EI_A I_B X = EI_{A\cap B}X$ である．一方，$EI_A YE^{F'}X = EI_A I_B E^{F'}X = EI_{A\cap B}E^{F'}X = EI_{A\cap B}X$ が成立するため，Yが単純関数のとき，(ii)が成立する．あとは Yを単純関数の極限と考えればよい．

(iii)はつぎのように証明される．$A \in F''$ とすると I_A は F''-可測であると同時に F'-可測である．したがって，(18)式より，$EI_A E^{F'}E^{F''}X = EI_A E^{F''}X = EI_A X = EI_A E^{F''}X$ が成立するため，F''に関してほとんど到る所で(iii)が成り立つ．

（問） (i)を証明せよ．

確率変数 X_1, X_2, ……X_n, Yを考えよう．$B = \{\omega : X_1(\omega) = x_1,\ X_2(\omega) = x_2,\ \cdots\cdots,\ X_n(\omega) = x_n\}$ とし，$P(B) > 0$ とする．

$$\begin{aligned}P(Y<y|B) &\equiv P(Y<y|X_1(\omega) = x_1,\\ &\qquad X_2(\omega) = x_2,\ \cdots\cdots,\ X_n(\omega) = x_n)\\ &\equiv F(y|x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n) \qquad (19)\end{aligned}$$

と定義して，Fを **X_1, X_2, ……X_n に関する Yの条件付分布関数**と呼ぶ．$P(B) = 0$ の場合も条件付期待値の概念を用いて拡張することが可能であるが，ここでは省略する．

さて，確率プロセスを取り扱う際に重要な役割を演ずるラドン・ニコディム（Radon-Nikodym）の微分について触れておくことにしよう．可測空間（Ω, F）における2つの異なった確率 P, Qを考える．もし，Pと Qが同じ確率0の事象をもつなら，**PとQは等**

8）存在と一意性はラドン・ニコディム（Radon-Nikodym）の定理によって保証される．**ラドン・ニコディムの定理**：『Qを（Ω, F）の測度とする．すべての $A \in F$について “$P(A)=0 \Rightarrow Q(A)=0$” が成立するとき，$Q(A) = \int_A \varphi(\omega)\,dp(\omega)$となる F-可測な非負の関数が一意的（$a.s.$）に存在する．$\varphi(\omega)$を Pに関するQのラドン・ニコディムの微分 dQ/dPという．』．いま，$X(\omega)$を（Ω, F, P）における非負の確率変数とし，（Ω, F'）の測度 Q を $Q(A) = EI_A X = \int_A X(\omega)\,dp(\omega)$によって定義すると，$P(A)=0$ならば $Q(A)=0$が成立する．よって，ラドン・ニコディムの定理から，$Q(A) = \int_A \varphi(\omega)\,dp(\omega)$となる F'-可測関数 $\varphi(\omega)$が存在するから，$E^{F'}x \equiv \varphi(\omega)$とすればよい．一般の Xに対しては $X = X_+ - X_-$の分解を考えればよい．

価であるという．いま，任意の $B \in F$ について，$P(B)=0$ なら $Q(B)=0$ としよう．このとき，ラドン・ニコディムの定理（脚注8)）は，Q について可積分な確率変数Xについて，

$$\int_{\Omega} X(\omega)\, dQ(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)\xi(\omega)\, dP(\omega) \qquad (20)$$

となる確率変数 ξ が一意的（P に関して $a.s.$）に存在することを示している．$\xi \equiv \frac{dQ}{dP}$ と書いて，これを Q の P に関する**ラドン・ニコディムの微分**という．$X=1_{\Omega}$ と置くと $E^P \xi = 1$ が成立する．

$\xi(\omega)$ を $E^P \xi = 1$ である正の確率変数（非負の値をとる確率変数）とする．そのときに，明らかにラドン・ニコディムの微分が $\frac{dQ}{dP}=\xi$ となるような（Ω, F）上の新しい確率Qを

$$Q(B) = \int_B \xi(\omega)\, dP(\omega), \quad B \in F$$

によって定義できる．

3.　確率プロセス

3-1　確率プロセス

時々刻々変化する確率変数の振舞について考えていくことにしよう．(Ω, F, P) における**確率プロセス** (stochastic Process) [9] $X(t, \omega)$ は時間 $t \in T$ によって表示される確率変数の系列である．数学的にいうと確率プロセスは，"$B(T) \times F \to B(R)$ と考えたときに可測となるような $T \times \Omega \to$ R への関数 $X(t, \omega)$" である．ここで，$B(T)$ は $T \subset R$ 上のボレル集合体を意味する．

$T=[0, \infty)$ の区間の場合は連続プロセス，$T=\{t_1, t_2, \cdots\cdots\}$ の場合は離散プロセスという．固定した $\omega \in \Omega$ に対して，$t \to X(t, \omega)$ を**サンプル・パス** (Sample path) という．通常 $X(t, \omega)$ を簡略に X_t と書くこともある．サンプル・パス X_t が $\omega \in \Omega$ のほとんど到る所，時間について連続となるとき，プロセスは連続[10]であるという．

X_t は確率プロセスである以上，サンプル・パスのある時点 t での値を観測することによって，真の状態がどの状態 ω であったかを確定的に知ることは，一般的には不可能である．知り得るのはどの事象に属するのかということだけであろう．しかしながら過去の記憶が完全であるなら，時間の経過とともに確率変数の観測によって，真の ω についての新たな情報が追加されることになる．この情報構造の変化の流れについて数学的記号を導入する．

$s \le t$ のとき，$F_s \subset F_t$ となるような F の部分 σ-集合体の族 $\{F_t\}$ を**フィルトレーション** (filtration) と呼ぶ．確率空間に情報構造すなわちフィルトレーションが与えられたとき，(Ω, F, $\{F_t\}$, P) と書いて，**フィルター確率空間** (filtered probability space) という．さらに，各 t に対して，$\omega \to X(t, \omega)$ が F_t-可測となるとき，X_t は F_t**-adapted** という．したがって，X_t が F_t-adapted ということは，X_t が (Ω, F_t) 上の確率変数であるということであり，時刻 t における情報にのみ依存するということにほかならない．

F_t^X を t までのすべての s に他意して X_s を可測にするような最小の σ-集合体とする．$s \le t$ なる X_s によって生成されるという意味を強調して $\sigma(\{X_s : s \le t\})$ と書くこともある．これは，確率変数 X_t によって得られる時刻 t までのすべての履歴（情報）を表わすものである．当然 $F_s^X \subset F_t^X$ であり，X_t は F_t-adapted となる．

$\tau(\omega)$ を T の中の値をとる確率変数とする．各 $t \in T$ に対して $\{\omega : \tau(\omega) \le t\} \in F_t$ であるとき，$\tau(\omega)$ は**停止時間** (stopping time) と呼ばれる．もし，$B \in B(R)$ なら，$\tau_B(\omega) \equiv inf\ \{t \ge 0 : X_t(\omega) \notin B\}$ を B からの first exit time という．また B が開集合で X_t が連続なら，F_t の完備 σ-集合体（F_t と確率0であるすべての F の部分集合の和集合によって作られる σ-集合体）に関して τ_B は停止時間となることが知られている．

さて，確率プロセスが特定されていて，それから生成される σ-集合体を考えるというより，むしろ最初から σ-集合体が与えられている状況を考えよう．(Ω, F, $\{F_t\}$, P) において，F_t-adapted プロセスが**マルチンゲール** (martingale) であるとは，

$$E|X_t| < \infty, \quad {}^{\forall} t \in T$$
$$E[X_t | F_s] = X_s, \quad a.s., \quad s \le t \qquad (21)$$

が成立することである．したがって，プロセスがマルチンゲールであるなら，現在までの情報をもとにした

---

9) 任意の $\{t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n\} \in T$ に対し，X_{t_1}, X_{t_2}, $\cdots\cdots$, X_{t_n} の結合分布をプロセス $\{X_t\}$ の有限次元分布という．現実には，確率空間が最初から与えられることはまれであり，通常観測の結果によって有限次元分布が最初に得られることが多い．ところが，ある種の整合性を満足すれば，与えられた有限次元分布をもつ確率プロセス $\{X_t\}$ および確率空間を見い出すことができる．

10) $E|X_{t+h} - X_t|^{\nu} \to 0$ の場合に，X_t は ν 乗平均の意味で X_t は t において連続であるという．

将来のプロセスの値の条件付期待値は現時点でのプロセスの値となる. (21)式が等号ではなく,

$$E\,[X_t|F_s]\ \leq X_s$$

となるとき, X_t は**優マルチンゲール** (supermartingale) であると呼ばれる.

つぎに重要な性質をもつプロセスを説明しよう. プロセス X_t がつぎの式を満足するとき X_t は**マルコフ** (Markov) **プロセス**であるという. すなわち, 任意の $t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n$ に対し, (19)式の条件付分布関数に関して,

$$P(X_{t_n}\leq x_n|X_{t_1}=x_1,\ \cdots\cdots,\ X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$$
$$=P(X_{t_n}\leq x_n|X_{t_{n-1}}=x_{n-1}) \qquad (22)$$

が成立する. 前にも説明したが条件付分布関数を取り扱うよりは, 条件付期待値を取り扱う方がはるかに見通しがよく, 記号も簡潔であるので, (22)式の意味を条件付期待値で定義することにしよう. (Ω, F, $\{F_t\}$, P) をフィルター確率空間としよう. F_t-adapted プロセスがマルコフプロセスとは, すべての有界な $\sigma(\{Xs:s\geq t\})$ 可測となる確率変数 Z について

$$E^{F_t}Z=E[Z|X_t] \qquad a.s. \qquad (13)$$

が成立することであると定義する. 言葉でいうと, プロセスの現在値が与えられると他の既知の事象はその将来の振舞いについて何ら新しい情報を提供しないということになる. いま, $t_1<t_2<\cdots\cdots<t_{n-1}<t_n$, Z を $F^{X_{t_n}}=\sigma(X_{t_n})$ 可測で, かつ,

$$Z(\omega)=1,\quad A=\ \{\omega:X(\omega)<x\}$$
$$=0,\ \text{その他}$$

とすると, (23)式は

$$E\,[Z|X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_{n-1}]\ =E\,[Z|X_{n-1}] \qquad (24)$$

ということであるから,

$$P(A|X_1=x_1,\ \cdots\cdots,\ X_{n-1}=x_{n-1})$$
$$=P(A|X_{n-1}=x_n)$$

が成立する. このことは(22)式に他ならない. したがって(23)式の定義は(22)式のマルコフプロセスの定義のより一般的な拡張となっていることが分かる.

3-2 ブラウン運動と確率積分

つぎの条件を満たす連続な確率プロセス $\{W_t:t\geq 0\}$ を (Ω, F, $\{F_t\}$, P) における**標準ブラウン運動**[11]という.

(i) $W_0=0$ a.s..

(ii) W_t は F_t-adapted であり, W_t-W_s, $t>s$, は F_s と独立.

(iii) W_t-W_s は平均値 0, 分散 $|t\text{-}s|$ の正規分布を持つ.

このことより W_t の密度関数は.

$$f(t,\ x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,exp\ \left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\} \qquad (25)$$

となる. (ii)のかわりにつぎの条件を用いてもよい.

(ii)' Wt は独立増分を有する. すなわち, $s<t\leq r<u$ に対して, W_t-W_s と W_u-W_r は独立である. このとき, W_t は $F_t=\sigma(\{W_s:s\leq t\})$ における標準ブラウン運動になる.

(問) ブラウン運動がマルコフプロセスであり, マルチンゲールとなることを証明せよ.

ブラウン運動[12]のサンプル・パスは有界区間で確率1で一様連続であるが, きわめて特異な性質をもつ. 簡単にいうと $X_{t+\delta}-X_t$ は $O(\sqrt{\delta})$ のオーダーをもつことが知られている (E. Wong). したがって, どこでも微分不可能であり, 任意の区間で非有界変動となる.

W_t を (Ω, F, $\{F_t\}$, P), $t\in[0,\ T]$ における標準ブラウン運動, $\varphi_t=\varphi(t,\ \omega)$ を

$$E\int_0^T|\varphi_s|^2ds<\infty \qquad (26)$$

である adapted プロセスとする. このとき, 任意の分割 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n=T$ に対して,

$$\int_0^T E|\varphi(t,\ \omega)-\varphi^n(t,\ \omega)|^2dt\rightarrow 0 \qquad (27)$$

という意味で, $\varphi(t,\ \omega)$ を近似する t に関する段階関数:

$$\varphi^n(t,\ \omega)=\varphi_i(\omega) \qquad t_i\leq t<t_{i+1} \qquad i=0,\ 1,\ 2\ \cdots\cdots,\ n-1$$

が存在する (E. Wong). ただし, $\varphi_i(\omega)$ は F_{t_i} 可測である. 階段関数 $\varphi^n(t,\ \omega)$ についての W_t に関する積

---

11) ここでは R に値域をもつブラウン運動を考えるが, R^n に値域をもつ標準ブラウン運動は W_t^1, W_t^2, ……, W_t^n を互いに独立な標準ブラウン運動とし, $W_t^1=(W_t^1,\ W_t^2,\ \cdots\cdots,\ W_t^n)$ によって定義する.

12) 連続なプロセス $\{W_t:t>0\}$ がブラウン運動であるための必要十分条件は, $E\,[exp\ \{i\lambda\cdot(W_t-W_s)\}\,|F_s]=exp\ [-(t-s)|\lambda|^2/2]$, a.s. がすべての $\lambda\in R$ に対して成立することである.

分を

$$\int_o^T \varphi^n(t,\ \omega)\,dW(t,\ \omega)$$
$$\equiv \sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(\omega)\ \{W(t_{i+1},\ \omega)-W(t_i,\ \omega)\} \tag{28}$$

で定義するとブラウン運動の性質を使って

$$E\ \{\int_o^T \varphi^n(t,\ \omega)\,dW(t,\ \omega)\}^2$$
$$=\int_o^T E|\varphi^n(t,\ \omega)|^2 ds \tag{29}$$

が得られる．このことより，分割を小さくした(28)式の極限は2乗平均の意味で収束する．この極限を

$$I(T)\equiv\int_o^T \varphi(t,\ \omega)\,dW(t,\ \omega) \tag{30}$$

と表現し，ブラウン運動に関する**確率積分**[13]と呼ぶ．(30)式を簡略のため $\int_o^T\varphi_s dW_s$ と書くこともある．後で十分に活用することになる性質であるが，**“(26)式が成立するとき，$I(t)\equiv\int_o^t\varphi_s dW_s$ は［O，T］における連続なマルチンゲール”** となり，

$$EI(t)=0\quad EI(t)^2=\int_o^t E|\varphi_s|^2 ds \tag{31}$$

である．

［注意］ $W(t)=(W^1(t),\ W^2(t),\ \cdots\cdots,\ W^n(t))$ が，R^n に値域をもつ標準ブラウン運動であり，R^n に値域をもつプロセス $\varphi_s=(\varphi_s^1,\ \varphi_s^2,\ \cdots\cdots,\ \varphi_s^n)$ について

$$E\int_o^T\|\varphi_s\|^2 ds<\infty$$

が成立するとき（ただし，$\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである)，確率積分は

$$I(t)=\int_o^T\varphi_s dW_s=\sum_{i=1}^{n}\int_o^T\varphi_s^i dW_s^i$$

で定義され，$I(t)$ はやはり連続なマルチンゲールになる．

つぎに，ここでは結果のみを述べるか，よく知られた**Itoの微分ルール**を示しておく．これは，確率積分の定義から求まるものである．いま，プロセスが

$$X(t,\omega)$$
$$=x_o+\int_o^t\psi(s,\omega)\,ds+\int_o^t\varphi(s,\omega)\,dW(s) \tag{32}$$

によって記述されるものとする．ここで，x_oはスカラー，φ は(26)式[14]を満たし，ψ は $\int_o^t|\psi_s|ds<\infty\ a.s.$ となる adapted プロセスである．(32)式は，便法的に微分記号を用いて

$$dX_t=\psi_t dt+\varphi_t dW_t,\quad X_o=x_o \tag{33}$$

と表現される．さらに $f(X_t,\ t)：R\times T\to R$ が x につき2回，t につき1回連続微分可能とする．このとき，

$$f(X_t,\ t)$$
$$=f(X_o,o)+\int_o^t\frac{\partial f(X_s,s)}{\partial s}ds$$
$$+\int_o^t\frac{\partial(X_s,s)}{\partial x}\psi_s ds+\int_o^t\frac{\partial f(X_s,s)}{\partial x}\varphi_s dW_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_o^t\varphi_s^2\frac{\partial^2 f(X_s,s)}{\partial x^2}ds\qquad a.s. \tag{34}$$

が成立する[15]．

細かい証明は除いて，微分ルールの成立する意味について直観的説明を与えることにする．$f(x,t)=f(s)$ の場合のティラー展開を考えると

$$df(X_t)\ \equiv f(X_t+dt)-f(X_t)$$
$$=\frac{\partial f(X_t)}{\partial x}dX_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial x^2}\ (dX_t)^2+\cdots\cdots$$
$$=\frac{\partial f(X_t)}{\partial x}\psi_t dt+\frac{\partial f(X_t)}{\partial x}\varphi_t dW_t+$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial x^2}\ \{(\psi_t dt)^2+2(\psi_t\varphi_t dt\cdot dW_t)+$$
$$(\varphi_t dW_t)^2\}\ +\cdots,$$

ところが，前に述べたように，ブラウン運動は特異な性質 $(dWt)^2\fallingdotseq dt$ をもつから，

$$=\ \frac{\partial f(X_t)}{\partial x}\psi_t dt\ +\ \frac{\partial f(X_t)}{\partial x}\varphi_t dWt\ +\ \frac{1}{2}\varphi_t^2$$
$$\frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial x^2}dt+0(dt) \tag{35}$$

となる．dt より高次の項を無視すると(35)式は(34)式を形式的に微分記号を用いて表現したものに他ならない．通常のティラー展開と異なるのは，上の式右辺の第3項である．

最も簡単なケースとして，$X_t=W_t,\ f(X_t)=\frac{1}{2}W_t^2$

13) τ が $o\leq\tau\leq t$　$a.s.$ となるような停止時間であり，$I_\tau(s)=1,\ s<\tau,\ I_\tau(s)=0$, otherwise, であるなら，その時 $I(\tau)=\int_{to}^t I_\tau(s)\varphi_s\cdot dWs$ が成立する．

14) 確率積分が定義されるためには $\int_o^t|\varphi_s|^2 ds<\infty$　$a.s.$ であればよい．したがってItoの微分ルールはこの条件のもとで成立する．

15) もし，$X_t=(X_t^1,\ X_t^2,\ \cdots\cdots,\ X_t^n)^T\in R^n,\ \psi_t\in R^n,\ \varphi_t\in R^{n\times m},\ W_t=(W_t^1,\ W_t^2,\ \cdots\cdots,\ W_t^m)^T\in R^m,\ f：R^n\times T\to R$ のときは，(34)式において，$\frac{\partial f}{\partial x}$ を $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n})$；$\varphi_s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を $\frac{1}{2}t_r(\varphi_s^T\nabla^2 f\varphi_s)$ で置きかえればよい．

を考えると(34)式より $df(X_t)=df(W_t)=W_t dW_t+\frac{1}{2}dt$ が得られる．

［問］ $\frac{1}{2}W_t^2$ がマルチンゲールでないことを示せ．したがってこのことは，$\int_o^t W_s dW_s$ がマルチンゲールであることより，$\int_o^t W_s dW_s \neq \frac{1}{2}W_t^2$ となることを意味している．

［問］ $dX_t^1=\psi_t^1 dt+\varphi_t^1 dW_t$，$dX_t^2=\psi_t^2 dt+\varphi_t^2 dW_t$，$f=X_t^1\cdot X_t^2$ の時，$df=X_t^2 dX_t^1+X_t^1 dX_t^2+\varphi_t^1\varphi_t^2 dt$ となることを脚注(15)を用いてみちびけ．

さて，つぎの形をした方程式を**確率微分方程式**という．

$$X_t=x_o+\int_o^t \mu(X_s,\ s)ds+\int_o^t \sigma(X_s,\ s)dW_s,\quad t\geq o \tag{36}$$

微分記号を用いると

$$dX_t=\mu(X_t,\ t)dt+\sigma(X_t,\ t)dW_t\quad X_o=x_o \tag{37}$$

と書ける．μ，σ につぎの仮定を置く．

（仮定）：$\mu(x,t)$，$\sigma(x,t)$，$-\infty<x<\infty$，$o\leq t<\infty$ は，(x,t) についてのボレル関数であり

$|\mu(x,t)-\mu(y,t)|+|\sigma(x,t)-\sigma(y,t)|\leq k|x-y|$，$|\mu(x,t)|+|\sigma(x,t)|\leq k(1+|x|)$　x，$y\in R$ を満足する．

このとき，つぎの定理が成立する．

定理（Ito） 上に述べた仮定が成り立つものとする．そのとき，(36)式を満たす一意的（$a.s.$）な F_t-adapted プロセス X_t，$0\leq t<\infty$ が存在する．さらに X_t は連続なマルコフプロセスであり，$\int_o^t \sigma(X_s,\ s)dW_s$ はマルチンゲールとなる．

3-3 Girsanov の定理

確率プロセスを制御しようというモデル（確率制御過程）を考えるとき，Ito の存在定理が成立しない不都合が発生する．このため弱い意味での解概念を設定する必要がある．Girsanov の定理は，もともとこのための方策として与えられたものであるが，ファイナンスへの応用を考えるとき，きわめて強力であるためその結果を紹介することにする．

ブラウン運動が $\{W_t:0\leq t\leq T\}$，$T<\infty\}$ が伝播するフィルター確率空間を $(\Omega,\ F,\ \{F_t\},\ P)$ とし，$\{\theta_t:0\leq t\leq T\}$ が

$$\int_o^t|\theta_t|^2 dt<\infty\quad a.s. \tag{38}$$

を満たす adapted プロセスとする．

$$\xi_t(\theta)\equiv exp\ \{\int_o^t\theta_s dWs-\frac{1}{2}\int_o^t|\theta_s|^2 ds\} \tag{39}$$

と定義する．Ito の微分ルールと定理から，$\xi_t(\theta)$ は

$$d\xi_t=\xi_t\theta_t dW_t,\quad \xi_o=1 \tag{40}$$

の F_t-adapted な解となることが分かる．(31)式において説明したように，もし $\int_o^t E|\xi_s\theta_s|^2 ds<\infty$ なら，$\{\xi_t(\theta):0\leq t\leq T\}$ はマルチンゲールになる[16]．この条件を成立させるための十分条件を結果のみ示しておく．

(i) $\underset{t,\ w}{Sup}|\theta_t(\omega)|^2=c<\infty \Rightarrow \xi_t$ はマルチンゲールであり $E\xi_t(\theta)=1$ となる．

(ii) $E\xi_T(\theta)=1$[17] $\Rightarrow E\xi_t(\theta)$ はマルチンゲールとなる．

Girsanov の定理 $\int_o^t|\theta_s|^2 ds<\infty\ a.s.$ でかつ，$E\xi_T(\theta)=1$ が成立するものとする．そのとき，$\frac{dQ}{dP}=\xi_T(\theta)$ によって与えられる Q は $(\Omega,\ F)$ 上の確率となる．さらに，$W_t^*=W_t-\int_o^t\theta_s ds$ は $(\Omega,\ F,\ \{F_t\},\ Q)$ における標準ブラウン運動である．

4. ファイナンスへの応用

4-1 株式オプション

オプションの価格がいかに決定されるべきかという課題は，かなり古くから行われていたものの本格的理論構築は，Black-Sholes (1973) と Merton (1973)[18] によって先鞭がつけられ，以後の研究に大きな影響を与えてきた．ここでは，今まで述べてきた確率プロセスの理論が，オプションを含めた派生証券の価格形成にいかに適用されるかみてみることにする．

いま，市場に 1 つの配当のない危険証券（risky security）と 1 つの無危険証券（riskless security）のみが存在するものとする．危険証券と無危険証券の価格プロセスが各々，$t\in T\equiv[0,\ 1]$ に対して

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t,\quad S_o=1, \tag{41}$$

$$dB_t=rB_t dt,\quad B_o=1 \tag{42}$$

によって与えられるとしよう．ここで，μ，$\sigma>0$ とする．(41)式は $(\Omega,\ F,\ \{F_t\},\ P)$ における確率プロセスである．(41)式を S_t で割ると，μ は瞬時的期待収益率，σ は瞬時的標準偏差を意味することが分かるで

16) 条件(38)式のみが成立するときは，$\xi_t(\theta)$ は優マルチンゲールとなる．

17) $E\xi_o(\theta)=1=E\xi_T(\theta)$ であり，$\xi_t(\theta)$ が優マルチンゲールから，この結果は明らかである．

18) Black and Sholes: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, 637−54, 1973.
Merton: Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 1973.

あろう．Itoの微分ルールから(41)(42)式の解は，

$$S_t = exp\ \{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t + \sigma W_t\} \tag{43}$$

$$B_t = exp\ \{rt\} \tag{44}$$

である．

投資家は，2つの証券を売買することにより期末の資産（確率変数）の最適化を企る．以下では，時刻oにおける初期資産以外金銭の流入の生じない完全市場を考える．市場が均衡であるなら，当然価格プロセスは，後で定義するが，裁定（arbitrage）機会を許すものであってはならないであろう．このとき，オプションに対する合理的価格はどのように定まるべきか，このことを議論し，確率プロセスの理論の有用性を示すのが，ここでの主旨である．

まず，投資家のもつ情報構造について考えよう．無危険証券は確定的プロセスに従うので，時刻oでその将来の値は確定的に与えられる．したがって，時刻tにおいて投資家の保有し得る情報は，時刻oからtまでの危険証券の実現値である．この実現値により得られる情報がS_tによって生成されるフィルトレーション $\{F_t;\ t \in [0,\ 1]\}$ である．(43)式から分かるように，S_tとW_tは1対1に対応しているため $\{F_t\}$ は，またW_tによって生成されるフィルトレーションでもある．当然，S_t，W_tはF_t-adaptedである．ところが，常識的に考えて，t時点における取引は，S_tの実現値を観測して行われるものではなく，tより前の情報をもとにして決定されるべきものであろう．このように，あるプロセスX_tがtより前の情報構造に依存するときX_tは**predictable**と呼ばれる．感覚的には，X_tが$\bigcup_{s<t} F_s$可測ということに近い．

α_t, θ_tを各々，無危険証券と危険証券の時刻tにおける保有量（確率変数）とする．α_o，θ_oは初期保有量で外生的に所与とする．期間［0，1］において金銭の流入はないと仮定しているため，ポートフォリオは内部的資金の調達によりなされねばならない．このことを数式によって表わすと[19]，

$$\alpha_t B_t + \theta_t S_t$$
$$= \alpha_o B_o + \theta_o S_o + \int_o^t \alpha_s dB_s + \int_o^t \theta_s dS_s \tag{45}$$

となる．(45)式右辺の前半は初期資産額であり，後半は，キャピタル・ゲインである．この意味で(45)式は自己充足的（self-financing）制約式と呼ばれる．さらに，このポートフォリオによって達成される期末の資産は有界な分散をもつものと仮定する．このような確率変数の空間を$L^2(P)$で表わすと，このことは

$$\alpha_1 B_1 + \theta_1 S_1 \in L^2(P) \tag{46}$$

ということになろう．今まで述べたことをまとめて，我々は**取引戦略**（trading strategies）を自己充足的で(46)式を満たすpredictableなペア（α_t，θ_t）であると定義する．もし，取引が時刻$0 = t_o < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = 1$においてのみ行われ，その大きさが有界であるような取引戦略は**単純取引戦略**と呼ばれる．この場合には(45)式は

$$\alpha_{t_i} B_{t_i} + \theta_{t_i} S_{t_i} = \alpha_{t_{i+1}} B_{t_i} + \theta_{t_i+1} S_{t_i}, \tag{47}$$

$i = 0$，1，……，$n-1$

となることに注意しよう．

ここで，つぎの記号を導入する．

$$V(t) \equiv \alpha_t B_t + \theta_t S_t \tag{48}$$

$$S_t^* \equiv \frac{S_t}{B_t} \tag{49}$$

$V(t)$は，t時刻におけるポートフォリオの価値を，S_t^*はB_tによって割引かれた価格プロセスを意味する．

裁定機会（arbitrage opportunity）とは，初期のコストが非正であるにも拘らず，期末における資産を0でない非負の確率変数とするような取引戦略を意味する．すなわち，$V(0) \leq 0$であって$P(V(1) \geq 0) = 1$，$P(V(1) > 0) > 0$を同時に満足する取引戦略（α_t，θ_t）である．

単純取引戦略に限定すれば，『裁定機会が発生しないための必要十分条件は，S_t^*をマルチンゲールとするようなPに等価な確率Qが存在することである』というよく知られた定理が*Harrison-Kreps*[20]によって証明されている．しかしながら，連続的な取引の世界においては，この定理は成立しない．

さて，実際に我々の価格プロセスについてマルチンゲール測度を作ることにする．(39)式において，$\theta_t \equiv -\frac{\mu - r}{\sigma}$と置くと，$t \in [0,\ 1]$ において，

$$\xi_t(\theta) \equiv \xi_t = exp\ \{-(\frac{\mu - r}{\sigma})\, W_t - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2\} \tag{50}$$

となる．ξ_1は対数正規分布であるから，$E\xi_1 = 1$である．したがってGirsanovの定理より，$\frac{dQ}{dP} = \xi_1$によ

19) 正確には(45)式の積分が意味をもつように，$\int_o^1 |\alpha_s|^2 ds < \infty$ *a.e.*，$\int_o^1 |\theta_s S_s|^2 ds < \infty$ *a.e.* を仮定する必要がある．

20) J. Harrison and D. Kreps, J. of Economic Theory 20 (1979), 381−408.

って与えられる Q は (Ω, F) 上の確率であり,

$$W_t^* = W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t \tag{51}$$

は標準ブラウン運動となる. (33)式と(51)式より,

$$S_t^* = S_s^* \cdot exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s) + \sigma (W_t^* - W_s^*) \right\}$$

であるから,

$$E^*[S_t^* | F_s] = S_s^* \tag{52}$$

が得られる. ここで, E^* は確率Qに関する期待値を表わす. したがって, S_t^* が Q のもとでマルチンゲールになり, 危険証券の B_t で割引いた現在価格 S_t^* は, 現在までの情報のもとでの S_t^* の将来価格の期待値ということになる.

一方, 微分ルールを用いると(45)式は

$$\frac{V(t)}{B_t} = \frac{V(0)}{B_o} + \int_o^t \sigma\theta_s S_s^* dW_s^* \tag{53}$$

と等価である[21]. ところが, 前に説明したように, たとえ S_t^* がマルチンゲールであっても, $\frac{V(t)}{B_t}$ が Q のもとでマルチンゲールになるためには,

$$\int_o^1 E^* |\theta_s S_s^*|^2 ds < \infty \tag{54}$$

が成立しなければならない. もし, $\frac{V(t)}{B_t}$ がマルチンゲールにならなければ, 必ず裁定機会を発生させる取引戦略を作ることが可能である[22].

(54)式は Harrison-Kreps の提起した doubling 戦略というものを排除する条件式となっている. 単純取引戦略においては当然(54)式が成立することは明白であろう. 以下では, 取引戦略を(54)式が成立するクラスに限定し, 市場に裁定機会が発生しないものとする. したがって, このとき $\frac{V(t)}{B_t}$ はマルチンゲールとなる.

さて, 投資家は, 取引戦略によって達成される期末における資産に関心をもつわけであるが, それがどの程度のクラスのものであるかが問題となる. 我々は, 確率 Q およびPに関して有界な2次のモーメントをもつ資産, すなわち $L^2(P) \cap L^2(Q)$ は2つの証券の取引戦略によって達成できることを示そう. そのためには, つぎのマルチンゲール表現定理を利用しなければならない.

定理 (Kunita-Watanabe)

情報構造 $\{F_t : t \in [0, 1]\}$ が確率 Q に関するブラウン運動 W_s^* によって生成されるものとする. そのとき, Q に関して有界な2次モーメントをもつマルチンゲール m_t は

$$m_t = m_o + \int_o^t \eta_s dW_s^*, \quad t \in [0, 1] \tag{55}$$

と表現できる. ここで, $\{\eta_t\}$ は predictable であり, $E^* \int_o^1 |\eta_s|^2 ds < \infty$ を満たす.

$X \in L^2(P) \cap L^2(Q)$ とすると, 明らかに, $E^*[Xe^{-r}|F_t]$ は2次モーメントをもつマルチンゲールである. したがって定理から predictable な η_t によって

$$\begin{aligned} E^*[Xe^{-r}|F_t] &= E^*[Xe^{-r}] + \int_o^t \eta_s dW_s^* \\ &= E^*[Xe^{-r}] + \int_o^t \sigma \cdot \frac{\eta_s}{S_s^* \sigma} S_s^* dW_s^* \end{aligned} \tag{56}$$

と表現できる.

$$\theta_t \equiv \frac{\eta_t}{\sigma S_t^*}, \quad \alpha_t = E^*[Xe^{-r}|F_t] - \theta_t S_t^* \tag{57}$$

と置くと, θ_t は(54)式を満たし ($\alpha_t + \theta_t S_t^*$ がマルチンゲール),

$$\alpha_1 + \theta_1 S_1^* = Xe^{-r}$$

$$\alpha_t + \theta_t S_t^* = E^*[Xe^{-r}|Ft] = E^*[Xe^{-r}] + \int_o^t \sigma\theta_s S_s^* dW_s^* = \alpha_o + \theta_o S_o + \int_o^t \theta_s dS_s^*$$

となって, 任意の $X \in L_2(P) \cap L_2(Q)$ に到達できる自己充足的取引戦略が存在することになる.

ところで, X を複製する取引戦略 (α_t, θ_t) に対して, $\frac{V(t)}{B_t}$ はマルチンゲールになるため,

$$\alpha_t + \theta_t S_t^* = E^*[\alpha_1 + \theta S_1^* | F_t]$$

が成立する. 結局, 時刻1における資産 X に対する時刻 t における価値は,

$$V(t) = E^*[Xe^{-(1-t)r}|F_t] \tag{58}$$

によって与えられることになる.

いま, 例として行使価格が $K > 0$, 満期日1である危険証券のヨーロッパ形コールオプションをとりあげよう. すると, その利得は $X \equiv max\ \{S_1 - K, 0\}$ となる. S_1 は, P および Q に関して, 対数正規分布であるので, $X \in L_2(P) \cap L_2(Q)$ である. よって, いままでの議論により, ヨーロッパ形オプションの時刻 t における価値 $V(t)$ は(58)式となる. 確率 Q は $\frac{dQ}{dP} = \xi_1$ によって与えられるので, (43)式と(44)式を使って(58)式は

21) $dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*$ の関係を用いた.

22) 「無裁定であるための必要十分条件は, $\frac{V(t)}{B_t}$ が Q に関してマルチンゲールになることである」という結果が証明されている. D. Heath and R. Jarrow, The Journal of Finance, 42-5 (1987), 1129-1142.

計算可能であり，その結果はつぎのBlack-Sholesの公式と同じ結果を与える．

$$V(t)=S_t\phi\left(\frac{log(S_t/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(1-t)}{\sigma\sqrt{1-t}}\right)$$

$$-Ke^{-r(1-t)}\phi\left(\frac{log(S_t/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(1-t)}{\sigma\sqrt{1-t}}\right)$$

$$\phi(z)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

（問）$E^*[Xe^{-r}]$ を計算して，期首（t＝0）におけるヨーロッパ形コールオプション価格が(59)式で $t=0$ とした値に一致することを確かめよ．

ヒント：$S_1=exp\ \{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma W_1^*\}\ \equiv e^Z$ であり，Z の分布関数 $F(z)=Q(Z(\omega)<z)\sim N(r-\frac{1}{2}\sigma^2,\ \sigma^2)$ となることを利用して，$E^*[e^{-r}max\ \{S_1-K,\ 0\}]$ を計算する．

Black-Sholesは，もともと，マルチンゲールを用いた方法ではなく，無裁定条件より，偏微分方程式を導出し，適当な境界条件を設定することにより，その結果として(59)式を求めている．しかしながら，マルチンゲールを使った方法は，裁定機会と取引戦略の関係，特定なオプションのみならず，到達可能な期末資産のクラスおよびそれを達成するための具体的な取引戦略などを明示的に与え得るという点ですぐれているといえよう．ここで，マルチンゲールによる方法から，細かい数学的条件の検討は省略し，Black-Sholesの導出した偏微分方程式を求めてみよう．

μ, σ, r, K は所与の定数であるから，$V(t)\equiv V(S_t,\ t)$ と書いて，これに微分ルールを適用すると

$$\frac{V(S_t,\ t)}{B_t}=V(0)+\int_0^t\frac{\partial V(S_s,\ s)}{\partial s}S_s^*\sigma dW_s^*$$

$$+\int_0^t\frac{1}{B_t}\ \{\frac{1}{2}\sigma^2S_s^2\frac{\partial^2V(S_s,\ s)}{\partial S^2}$$

$$+rS_s\frac{\partial V(S_s,\ s)}{\partial S}+\frac{\partial V(S_s,\ s)}{\partial s}$$

$$-rV(S_s,\ s)\}\ ds \tag{60}$$

が得られる．

右辺第1項，左辺第2項は Q のもとでマルチンゲールである．したがって，右辺第3項も Q に関してマルチンゲールにならなければならない．このことは右辺第3項の被積分部分が0であることを意味する．S_t は対数正規分布をするため必ず正の値をとることから，

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2V(x,\ t)}{\partial x^2}+rx\frac{\partial V(x,\ t)}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial V(x,\ t)}{\partial t}-rV(x,\ t)$$

$$=0\quad\forall x\in(0,\ \infty),\ t\in\ [0,\ 1] \tag{61}$$

という偏微分方程式が得られる．(61)式は，通常，よく知られているオプション価格の評価式である．(60)式と(56)式を比較すると，コールオプションを複製する取引戦略が $\theta_t=\frac{\partial V(S_t,\ t)}{\partial S}$ と(57)式から得られる α_t によって与えられることが分かるであろう．

（未完）

〔ささい　ひとし　横浜国立大学経営学部教授〕