<論　説>

オプション評価式の解析解：レビュー

東　田　　　啓

はじめに

本稿では，もっとも基本的な市場モデルの下での，株式オプション，割引債，債券オプションについて，今日の段階でその解析解が知られている成果を——いくつかの数学的命題は例外として——ほとんど行間の計算を必要としないほど詳しく説明する．

条件付証券の議論は，いわゆる裁定取引機会と証券プロセスのマルチンゲール性の問題等にみられるようにきわめて精緻な経済学的・数学的体裁を様しているが，それらの多くはいわば定性的な命題提起に主きをおいており，実際の条件付証券価格の導出については結果のみを示してそれで事足りとしているむきもみられる．研究論文としてはそれで十分であり，細かい導出については適当な教科書にあたればよいのかも知れないが，残念なことに，入門的な書物には難しすぎるということで省略されて，他方専門家向の書物には研究論文と同様に導出過程が示されていないというのが実情のようである．さらに，本稿の後半のような利子率が確率変動する場合は，研究成果がきわめて最近であるということもあって，専門家向の書物にさえほとんどふれられていない．

本稿は，筆者が最近の論文等を読みながらフォローしえた断片的備忘録を出来る限り体系的に整理したものである．もとより専門家にとっては常識的内容であろうが，筆者と同様にこの分野の複雑な計算を要する参入障壁の高さを痛感している学生諸君には何らかの参考になるかも知れない．

以下本文の概要を記す．

Ⅰ－1：利子率が一定のもっとも基本的な Black-Scholes モデルから，リククレスヘッジと無裁定条件を用いて，株式オプション価格が満すべき偏微分方程式を導く．

Ⅰ－2：上記の方程式を，その解が知られているいわゆる拡散方程式に変換することによって株式オプション価格式を導出する．

Ⅰ－3：Cox-Ross のリスク中立化法，数学的には Feynman-Kac の定理により，上記偏微分方程式の別解法を行なう．

Ⅱ：利子率が確率変動する場合に一般化したときの株式オプションおよび債券オプションの満たすべき偏微分方程式を導き，株式オプションについて解析解が求められる．このモデルは Merton によって研究されたものであるが，利子率の確率構造がみかけよりはかなり限定的であることを指摘する．

Ⅲ－1：利子率が非常に一般的な確率構造を有し，債券価格が短期利子率のみの関数と仮定したときの債券価格が満たすべき偏微分方程式が求められる．後半では，いわゆる平均回帰的 mean-reverting な利子率の場合に特殊化される．

Ⅲ－2：上記よりもさらに特殊な正規分布に従う利子率の場合について，Feynman-Kac の定理を用いて，直接債券価格の評価式を導出する．

Ⅲ－3：利子率が Feller の研究したプロセ

スに従うときの債券価格が満たすべき偏微分方程式を導き，Ingersoll のアドホックな方法と同様にその方程式の解析解が示される.

IV－1：一般的な確率変動をする利子率の場合の債券オプションの満たすべき偏微分方程式を導き，期待値による表現を示す.

IV－2：利子率が正規型の平均回帰過程のときの債券オプションの評価式を導く．Heath-Jarrow-Morton と同様に直接期待値を計算することも可能であるが，ここでは Merton の結果を利用した Rabinovitch の研究を若干の修正を指摘して紹介する.

IV－3：利子率が Feller のプロセスのときの Cox-Ingersoll-Ross の債券オプションの結果を導く．この場合には，実は Cox-Ingersoll-Ross の示唆する方法によっては彼らの結果を導くことはほとんど不可能であることが指摘される．本稿では，最近の Longstaff の成果を援用して，解決を試みている.

I　Black-Scholes の基本評価式の導出

1　リスクレスヘッジのポートフォリオ

株式市場およびオプション市場は，Black-Scholes の理想的条件をそなえていると仮定すると[1]，株価 $S(t)$ の運動は，確率微分方程式

$$dS(t)=\mu\, S(t)\,dt+\sigma\, S(t)\,d\omega(t) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

によって記述される．ただし，σ は正の定数で，ω は標準ウィーナー過程である．μ は，t と S に依存した確率変数でもよい.

t 時点で，価格が $S(t)$ の株式を $Q_S(t)$ 単位，価格が $C(S(t),\,t)$ の株式オプション $Q_C(t)$ 単位，満期日が T の価格 $P(t)$ の割引債を $Q_P(t)$ 単位購入するポートフォリオの価値は，

$$V(t)=Q_CC+Q_SS+Q_PP$$

である．したがって，一定の利子率を r とすると，$P(t)=e^{-r(T-t)}$ より，

$$dV=Q_CdC+Q_SdS+rQ_PPdt$$

dC の項に伊藤のレンマを用いると

$$\begin{aligned}dV&=Q_C(C_tdt+C_SdS+\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{SS}dt)\\&\quad+Q_SdS+rQ_PPdt\\&=(Q_S+Q_CC_S)\,dS+(rQ_PP+Q_CC_t\\&\quad+\frac{1}{2}Q_C\sigma^2S^2C_{SS})\,dt\end{aligned}$$

となるから，dS の係数がゼロになるようなポートフォリオを組めば，株価の変動によるリスクはゼロとなる．また，投資額をゼロと考えれば，無裁定条件より，dt の係数もゼロとならねばならない．したがって，

$$\begin{aligned}&Q_S+Q_CC_S=0,\\&rQ_PP+Q_CC_t+\frac{1}{2}Q_C\sigma^2S^2C_{SS}=0,\\&Q_CC+Q_SS+Q_PP=0,\end{aligned}$$

が得られ，これらをまとめると，

$$rC=C_t+rSC_S+\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{SS} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

なる偏微分方程式が得られる．ヨーロピアンコールオプションの場合には，この微分方程式を $C(S,T)=\max\{S-K,\ 0\}$ のもとで解けばよい．ただし，K はオプションの満期日 T における行使価格である.

2　Black-Scholes による微分方程式の解法

この微分方程式を，一般解が知られている拡散方程式に帰着させるために Black-Scholes はまことに巧妙な変数変換を見い出した[2]．ここで，彼等が用いた拡散方程式は，

$$\frac{\partial y(u,\,x)}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 y(u,\,x)}{\partial u^2},\quad -\infty<u<\infty,$$

$$x>0,\ a \text{ は定数}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\text{条件}\quad y(u,\,0)=f(u)$$

で表わされ，その解は，

$$y(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u+aq\sqrt{2x})\, e^{-\frac{q^2}{2}}dq \cdots\cdots (4)$$

である．$C(S,t)$ を $y(u,x)$ に変換する彼等の方法は，

$$\begin{aligned} C(S,t) &= e^{r(t-T)}y(u,x) \\ &\equiv e^{r(t-T)}y([(2/\sigma^2)(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)] \\ &\quad \times[\log(S/K)-(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)(t-T)], \\ &\quad -(2/\sigma^2)(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)^2(t-T)).\cdots(5) \end{aligned}$$

これを直接(2)式に代入すると，

$$\begin{aligned} & re^{r(t-T)}y \\ &= re^{r(t-T)}y - e^{r(t-T)}\{y_u(2/\sigma^2)(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)^2 \\ &\quad -y_x(2/\sigma^2)(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)^2\} \\ &\quad + rSe^{r(t-T)}y_u(\tfrac{2}{S\sigma^2})(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\sigma^2S^2e^{r(t-T)}\{y_{uu}(\tfrac{2}{S\sigma^2})^2(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)^2 \\ &\quad - y_u(\tfrac{2}{S^2\sigma^2})(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)\} \end{aligned}$$

となり，これを整理すると(3)式が得られる（$a=1$）．そして，$-(2/\sigma^2)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-T)\geq 0$ $(t\leq T)$ であるから，(3)式の非負条件 $x\geq 0$ を満たしている．また，$x=0$ のときは，$t=T$ であるから，$u<0\,(\geq 0)$ の条件は $x<K\,(\geq 0)$ に等しい[3]．したがって，$f(u)=0,\ u<0$．また，$u\geq 0$ のときは，$u=(2/\sigma^2)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\log(S/K)$ ゆえ，

$$S = Ke^{u(\frac{\sigma^2}{2})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}.$$

したがって，

$$f(u) = Ke^{u(\frac{\sigma^2}{2})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} - K,\quad u\geq 0.$$

C に関する条件は，このような条件に変わる．したがって，$f(u)$ の形から，(4)式は，

$$\begin{aligned} & y(u,x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u/\sqrt{2x}}^{\infty} K[e^{(u+q\sqrt{2x})(\frac{\sigma^2}{2})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}-1] \\ &\quad \times e^{-\frac{q^2}{2}}dq \end{aligned}$$

となる．積分の下限は，

$$-u/\sqrt{2x} = -\frac{\log(S/K)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

となり，これを $-d_2$ と表わす．累積標準正規分布関数を $N(\cdot)$ とすると，$1-N(-d_2)=N(d_2)$ であるから，積分の第 2 項は，

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}}dq = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}N(d_2).\cdots(6)$$

積分の第 1 項は，(5)式の u および x を代入すると，

$$\begin{aligned} & \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}\exp\ \{\log(S/K)-(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2) \\ &\quad \times(t-T)+q\sigma\sqrt{T-t}\}\ e^{-\frac{q^2}{2}}dq \\ &= \frac{Se^{r(t-T)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}\exp\ \{\frac{\sigma^2}{2}(t-T) \\ &\quad +q\sigma\sqrt{T-t}\}\ e^{-\frac{q^2}{2}}dq. \end{aligned}$$

ここで，$\xi = q-\sigma\sqrt{T-t}$ とおくと

$$\frac{Se^{r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi.$$

$$d_2+\sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log(S/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を d_1 とあらわすと，これは，

$$\frac{Se^{r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi = Se^{r(T-t)}N(d_1).\cdots\cdots(7)$$

(6)，(7)式を(5)式に代入すると，

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{r(t-T)}N(d_2)$$

が得られる．これが Black-Scholes のヨーロピ

アンコールオプションの評価式である[4]．

3　リスク中立化法による解法

微分方程式(2)を解くために非常に便利な事実が Feynman-Kac の定理（Duffie〔1988〕, p. 226）である．これは，(2)式の解が株価のプロセスを

$$dS = rS\,dt + \sigma\,d\omega \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

と仮定したとき，単にコールオプションの満期価値を利子率 r で割引いた現在価値の期待値となるというものである．ただし，初期時点 t での(1)の解は，(8)の t 時点の解と同一とする．したがって

$$\begin{aligned} C(S,t) &= E[e^{-r(T-t)}C(S,T)] \\ &= e^{-r(T-t)}E[S(T)-K]^{+} \cdots\cdots (9) \end{aligned}$$

である．ただし，ここでの期待値は，(1)式でなく，(8)式で記述される $S(T)$ の確率分布によって評価される．この期待値による表現は，方程式(2)の中に(1)式のパラメータ μ が入っていないということから，リスク中立的な投資家を仮定して，Cox-Ross〔1976〕が求めたものと同一であるが，Feynman-Kac の定理はこれに数学的保証を与えているわけである．(9)式の評価は拡散方程式の解(4)式を評価するよりやさしい．(8)式のプロセスを伊藤のレンマによって積分表現すると，

$$\begin{aligned} S(T) = S(t)\exp\{&(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) \\ &+\sigma(\omega(T)-\omega(t))\} \end{aligned}$$

となる．したがって，$X(T)=\log S(T)$ は，平均が $X(t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)$，分散が $\sigma^2(T-t)$ の正規分布であるから，

$$\begin{aligned} &E[S(T)-K]^{+} \\ &= \int_K^{\infty}(S(T)-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}\,S(T)}\exp \\ &\left\{-\frac{[\log S(T)-X(t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}dS(T) \\ &= \int_{\log K}^{\infty}(e^x-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\exp \\ &\left\{-\frac{[x-X(t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}dx \\ &= \int_{\log K}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\exp \\ &\left\{-\frac{[x-X(t)-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}+X(t)+r(T-t)\right\}dx \\ &= e^{X(t)+r(T-t)}\int_{\frac{\log K-X(t)-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &\quad -K\int_{\frac{\log K-X(t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \end{aligned}$$

これらの積分の下限をそれぞれ d_1，d_2 で表わすと，

$$\begin{aligned} &E[S(T)-K]^{+} \\ &= e^{r(T-t)}S(t)\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &\quad -K\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= e^{r(T-t)}S(t)\,N(d_1)-KN(d_2). \end{aligned}$$

したがって，(9)式は，

$$C(S,t) = S(t)\,N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

となる．

II　利子率が確率変動する場合のオプション

利子率 r が一定の場合には，満期日 T に1単位支払われる t 期の債券の価格は，$e^{-r(T-t)}$ であるが，利子率が確率変動する場合には，債券の価格も確率変動すると考えられる．Merton〔1973〕は，株価のみならず t 期の債券価格 $P(T-t)$ も

$$dP(T-t) = \alpha(T-t)\,P(T-t)\,dt$$

$$+\delta(T-t)P(T-t)dZ(t)^{5)} \cdots\cdots(10)$$

なるプロセスに従って変動すると仮定し，利子率の確率変動をインプリシットに取り入れ，S, P,（$T-t$），Kの関数となるオプション$C(S, P, T-t; K)$の評価を行なった．ここで，$Z(t)$は$dZ(t)d\omega(t)=\rho dt$となる標準ウィーナー過程で，債券の性質から，$P(0)=1$，$\delta(0)=0$である．ただし，株式収益率の分散σ^2はBlack-Scholesを一般化したtに依存する非確率変数で，αは，Black-Scholesと同様にP, tに依存した確率変数，δはtのみに依存する非確率変数である．Black-Scholesと同様に，オプションQ_C単位，株式Q_S単位，債券Q_P単位から構成されるポートフォリオによってリクスレスヘッジを行なう．このポートフォリオの価値は，

$$V(t)=Q_C C+Q_S S+Q_P P.$$

したがって，

$$dV=Q_C dC+Q_S dS+Q_P dP$$
$$=CQ_C\frac{dC}{C}+SQ_S\frac{dS}{S}+PQ_P\frac{dP}{P}$$
$$=W_C\frac{dC}{C}+W_S\frac{dS}{S}+W_P\frac{dP}{P}. \cdots\cdots(11)$$

ここで，$W.$は各財の投資額である．$T-t=\tau$とし，$C_1=C_S$，$C_2=C_P$，$C_3=C_\tau$等々とすると，
伊藤のレンマから，

$$dC=\beta Cdt+\gamma Cd\omega+\eta CdZ \cdots\cdots(12)$$

と表現される．ただし，

$$\beta=[\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{11}+\rho\sigma\delta SPC_{12}+\frac{1}{2}\delta^2P^2C_{22}$$
$$+\mu SC_{11}+\sigma PC_2-C_3]/C,$$
$$\gamma=\sigma SC_1/C,\quad \eta=\delta PC_2/C \cdots\cdots(13)$$

である．(11)式に，(1)，(10)，(12)式を代入すると，

$$dV=W_C(\beta dt+\gamma d\omega+\eta dZ)$$
$$+W_S(\mu dt+\sigma d\omega)+W_P(\alpha dt+\delta dZ)$$
$$=(\beta W_C+\mu W_S+\alpha W_P)dt$$
$$+(\gamma W_C+\sigma W_S)d\omega$$
$$+(\eta W_C+\delta W_P)dZ$$

となる．初期の総投資額をゼロ（$W_C+W_S+W_P=0$）とすると，無裁定条件より，

$$(\mu-\alpha)W_S+(\beta-\alpha)W_C=0,$$
$$\alpha W_S+\gamma W_C=0,$$
$$-\delta W_S+(\eta-\delta)W_C=0,$$

が成立する．これらに解が存在するための必要十分条件は，

$$\frac{\beta-\alpha}{\mu-\alpha}=\frac{\gamma}{\sigma}=\frac{\delta-\eta}{\delta} \cdots\cdots(14)$$

である．(14)式のβ, γ, ηに(13)式を代入すると，

$$\sigma^2S_2C_{11}+2\rho\alpha\delta SPC_{12}+\delta^2P^2C_{22}-2C_3=0 \cdots\cdots(15)$$

が得られる．この微分方程式は，Black-Scholesの場合と同様に，株式および債券の期待収益率に依存していない．

さて，株式のコールオプションの場合，債券とオプションの満期日を等しくすると，境界条件は，

$$C(S, 1, 0; K)=\max[0, S-K]$$

となる．オプションの満期日までは，債券価格は確率変動するから，この微分方程式の解は，まさに利子率が確率変動する場合の株式コールオプションの価格式を与える．次に，この微分方程式を解かねばならないが，これをリスク中立化法（現在の設定では，リスク調整法とでも呼ぶべきかも知れない）で求めることは困難である．このため，Merton [1973] は，Black-Scholesと同様に，拡散方程式に変換する方法を考案する．まず，

$$C(S, P, \tau; K)=h(x, \tau; K)KP,\qquad x=\frac{S}{KP}$$

とおく，これを直接(15)式に代入すると，

$$\frac{1}{2}(\sigma^2+\delta^2-2\rho\sigma\delta)x^2h_{11}-h_2=0$$

となる．境界条件は，$h(x,\ 0\ ;K)=\max[0,\ x-1]$にかわる．さらに，

$$H=\int_0^\tau(\sigma^2(T-s)+\delta^2(s)-2\rho(T-s)\delta(s))\,ds$$

として，$h(x,\ \tau)=y(x,\ H)$とおき，上式に直接代入すると，

$$\frac{1}{2}x^2y_{11}-y_2=0$$

となる．境界条件は，$y(x,\ 0)=\max[0,\ x-1]$のままである．さらに，$y(x,\ H)=x\phi(J,\ H)$，$J=\log x+\frac{H}{2}$とし，これを直接上式に代入すると，

$$\frac{1}{2}\phi_{11}-\phi_2=0$$

で，境界条件は，$\phi(J,\ 0)=e^{-J}\max[0,\ e^J-1]=\max[0,\ 1-e^{-J}]$

となる．この方程式は，(3)式で，$a=1/\sqrt{2}$の場合であるから，Black-Scholes と全く同様にして(4)式を計算すると，

$$\phi(J,\ H)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{J}{\sqrt{2H}}}e^{-q^2}dq\right\}-e^{-J+\frac{H}{2}}\times\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{J-H}{\sqrt{2H}}}e^{-q^2}dq\right\}\right]$$

が導かれる．したがって，

$$C(S,\ P,\ \tau\ ;K)$$
$$=\frac{KP}{2}\left[\frac{S}{KP}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{\log(\frac{S}{KP})+\frac{H}{2}}{\sqrt{2H}}}e^{-W^2}dW\right)-\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{\log(\frac{S}{KP})-\frac{H}{2}}{\sqrt{2H}}}e^{-W^2}dW\right)\right].$$

Merton [1973] では，

$$\mathrm{erfc}(h)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^h e^{-W^2}dW$$

を complement error function と呼び，

$$C(S,\ P,\ \tau\ ;K)=\frac{KP}{2}\left[\frac{S}{KP}\mathrm{erfc}(h_1)-\mathrm{erfc}(h_2)\right],$$

$$h_1=-\frac{\log(\frac{S}{KP})+\frac{H}{2}}{\sqrt{2H}},$$

$$h_2=-\frac{\log(\frac{S}{KP})-\frac{H}{2}}{\sqrt{2H}}$$

と表現している．これは，簡単な変数変換で，Black-Scholes 流に書きなおすことができ，

$$C(S,\ P,\ \tau\ ;K)=SN(D_1)-KPN(D_2),$$

$$D_1=\frac{\log(\frac{S}{KP})+\frac{H}{2}}{\sqrt{H}},$$

$$D_2=D_1-\sqrt{H}$$

となる．Black-Scholes の仮定のように，利子率が一定rで，株式の収益率の分散σ^2が一定ならば，$P(\tau)=e^{-r\tau}$，$D_1=d_1$，$D_2=d_2$となり，まさに Black-Scholes の公式に帰着する．

Mertom のモデルは，株価のボラタリティが時間tの関数で，さらに利子率の確率変動を許している点において，たしかに Black-Scholes よりも一般的なモデルではあるが，債券価格のボラタリティがtのみの非確率変数であるという制約をうけている．債券価格が利子率のみを状態変数とすると仮定し，さらに利子率がよく知られた平均回帰な過程

$$dr=k(m-r)\,dt+\sigma r^\alpha dZ,$$
$$k,\ m,\ \sigma は定数$$

としても，Merton の方法が適用可能なのは，$\alpha=0$の場合のみが現在のところ知られており[6]，$\alpha=1$のとき[7]，および$\alpha=1/2$のときは[8]，Merton の仮定を満さず，みかけよりはかなり限定的である．これらについては，別な展開が必要である．

III　利子率が確率変動する場合の債券価格の評価

1　債券価格の一般的表現

債券価格を決定する状態変数は短期利子率の

みであると仮定する．利子率 $r(t)$ が拡散過程

$$dr(t) = b(r,\ t)\,dt + a(r,\ t)\,dZ(t) \quad \cdots\cdots(16)$$

に従うとすると，債券価格 $P(r,\ t,\ T)$ は，伊藤のレンマより

$$dP = (P_t + bP_r + \frac{1}{2}P_{rr}a^2)\,dt + P_r a dZ$$

となる．次に，r に依存したもう1つの満期日が異なる債券 $F(r,\ t,\ T')$，$T' > T$ が市場で取引されているとすると，P が Q_P 単位，F が Q_F 単位からなるポートフォリオの価値は，

$$V = Q_P P + Q_F F.$$

したがって，

$$\begin{aligned} dV &= Q_P dP + Q_F dF \\ &= [Q_P(P_t + bP_r + \frac{1}{2}P_{rr}a^2) + Q_F(F_t + \\ &\quad bF_r + \frac{1}{2}F_{rr}a^2)]\,dt + a[Q_P P_r + Q_F F_r]\,dZ. \end{aligned}$$

$Q_P P_r + Q_F F_r = 0$ となるようにポートフォリオを組めば，リスクレスとなり，無裁定条件より，V の収益率は，rdt と等しくならねばならないから，

$$\frac{Q_P(P_t + bP_r + \frac{1}{2}P_{rr}a^2) - \frac{Q_P P_r}{F_r}(F_t + bF_r + \frac{1}{2}F_{rr}a^2)}{Q_P P - \frac{Q_P P_r}{F_r}F} = r.$$

したがって，

$$\frac{(P_t + bP_r + \frac{1}{2}P_{rr}a^2)/P - r}{aP_r/P} = \frac{(F_t + bF_r + \frac{1}{2}F_{rr}a^2)/F - r}{aF_r/F}$$

となる．これは，リスクの市場価格 market price of risk と呼ばれているもので，各証券のリスク1単位あたりの超加収益率を示していて，すべての債券は，等しいリスクの価格でなければならないことがわかる．しかも，これは満期日に関係ないから，これを $\lambda(r,\ t)$ と表わすことができるので，P は，

$$\frac{1}{2}a^2 P_{rr} + (b - \lambda a)P_r + P_t - rP = 0 \quad \cdots\cdots(17)$$

を満たす．満期価値は $P(r,\ T,\ T) = 1$ であるから，この解は，Feynman-Kac の定理により，

$$P(r,\ t,\ T) = E[\exp(-\int_t^T r(s)\,ds)] \quad \cdots\cdots(18)$$

で表現することができる．ただし，ここでの期待値は，(16)ではなく，リスク中立化利子率に変換されたプロセス

$$dr = (b - \lambda a)\,dt + adZ \cdots\cdots(19)$$

について計算される．

ところで，(17)式を直接解くか，(18)式を評価するにしても，利子率のプロセス(16)式をもう少し特殊なものにする必要がある．よく知られているプロセスとして，平均回帰型

$$dr = k(m - r)\,dt + \sigma r^{\alpha} dZ \cdots\cdots(20)$$

がある．ただし，k, m, σ は正定数とする．(20)式の積分表現に期待値をとると，$\frac{d}{dt}E_{t_0}(r(t)) = k(m - E_{t_0}(r(t)))$ であるから，

$$\begin{aligned} E_{t_0}(r(t)) &= \exp(\int_{t_0}^{t}(-k)\,ds)\,(r(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t}\exp(\int_{t_0}^{s} k\,ds)\,km\,ds) \\ &= r(t_0)e^{-k(t-t_0)} + m - me^{-k(t-t_0)}. \end{aligned}$$

したがって，$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}_{t_0}(r(t)) = m$ であるから，m は長期的にみた短期利子率の期待値といえる．実際の利子率は，この m のまわりで反転を繰り返す傾向にあり，k は m への調整のスピードである．このプロセスでは，(17)式は，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\alpha} P_{rr} + [k(m - r) - \lambda\sigma r^{\alpha}]P_r + P_t - rP = 0 \cdots\cdots(21)$$

となる．ただし，境界条件は，$P(r,\ T,\ T) = 1$ である．リスクの価格 λ は，すでに示されたように，無裁定条件から，現時点 t および r のみの関数であり，満期日には依存していないが，その関数型は投資家の選好に依存して決められる．Cox-Ingersoll-Ross〔1985〕では，一定の相対リスク回避係数を有する対数型効用関数（彼等の論文の(7)式）を仮定して，一般均衡モデル

の解として，$\lambda(r,\ t)=q\sqrt{r}/\sigma$，$\alpha=1/2$ (q：定数) を導いている．他方，Vasicek〔1977〕，Jamshidian〔1989〕では，外生的に，$\lambda(r,\ t)=\lambda$ (一定)，$\alpha=0$ として，(21)式の解析解を求めている．後者の場合には，これらの設定を正当化づける一般均衡モデルが存在する保証がない．さらに，前者の場合には，利子率はつねに非負が保証されるが，後者の場合には，負の利子率が生じる可能性がある．したがって，理論的には前者の方が魅力があるが，投資家の選好に関してかなり厳しい仮定がもうけられているので，実用上その使用は限定されるかも知れない．実証研究がまたれるところである．次に，$\alpha=0$，$\lambda=$定数の場合，$\alpha=1/2$，$\lambda=q\sqrt{r}/\sigma$ の場合の順に(21)式の解析解をもとめる．

2　利子率が正規型回帰モデルの場合

(20)式で，$\alpha=0$ の場合には，利子率 r は正規分布に従うので，負になる可能性がある．しかし，Rabinovitch〔1989〕の実証分析によると，短い満期日の債券オプションを評価する際には，利子率の期待値が負になるのは十分長期に至ってからであり，実用上問題を生じる可能性は小さいようである．

さて，ここでの債券価格の導出は，債券オプションの評価にも容易に拡張しうる Jamshidian〔1989〕のアプローチ，すなわち，Feynman-Kac の定理により(18)式を計算する．リスク中立的利子率の(19)式は，

$$\begin{aligned} dr&=[k(m-r)-\lambda\sigma]\,dt+\sigma dZ \\ &=k[m'-r]\,dt+\sigma dZ. \end{aligned} \quad \cdots\cdots(22)$$

ただし，$m'=m-\lambda/k\,\sigma=$定数である．したがって，

$Y(t,\ s)=\int_t^s r(u)\,du$ とおけば，(18)式は，

$$P(r,\ t,\ T)=E[e^{-Y(t,T)}] \quad \cdots\cdots(23)$$

となる．$r(u)$ は正規分布であるから，$Y(t,s)$ も正規分布となる．したがって，$Y(t,s)$ の期待値と分散が求められれば，(23)式を計算できる．さて，(22)式は，Arnold〔1974〕，p. 130より，

$$\begin{aligned} &\mathrm{r}(s) \\ &=e^{-k(s-t)}r(t)+\int_t^s e^{-k(s-u)}[km'du+\sigma dZ] \\ &=e^{-k(s-t)}(r(t)-m')+m'+\sigma\int_t^s e^{-k(s-u)}dZ. \end{aligned}$$

したがって，

$$E_t[r(s)]=e^{-k\tau}r+m'[1-e^{-k\tau}] \quad \cdots\cdots(24)$$

となる．ただし，$\tau=s-t$，$r(t)=r$．また，直接重積分の計算をすると (Arnold〔1974〕，p. 134)，

$$\begin{aligned} &Cov_t[r(u),\ r(v)] \\ &=\frac{\sigma^2}{2k}e^{-k(u+v)+2kt}(e^{2k(min(u,v)-t)}-1) \end{aligned} \quad \cdots(25)$$

となる．したがって，(24)式より，

$$E_t[Y(t,\ s)]=\tau m'+(r-m')(1-e^{-k\tau})/k.$$

また，(25)式より，重積分の変数変換を行なうと，

$$\begin{aligned} &Var_t[Y(t,\ s)] \\ &=\frac{\sigma^2}{2k}\Big[\int_t^s du\int_t^u e^{-k(u+v)+2kt}\big[e^{2k(v-t)}-1\big]dv \\ &+\int_t^s du\int_t^v e^{-k(u+v)+2kt}\big[e^{2k(u-t)}-1\big]du \\ &=\frac{\sigma^2}{2k^3}(2k\tau-e^{-2k\tau}+4e^{-k\tau}-3). \end{aligned}$$

したがって，(23)式より，$P(r,\ t,\ T)$ は Y の積率母関数 $E[e^{\theta Y}]$ の公式で，$\theta=-1$ としたときであるから，

$$\begin{aligned} P(r,\ t,\ T)=\exp\{&-E_t[Y(t,\ T)] \\ &+\frac{1}{2}Var_t[Y(t,\ T)]\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(26)$$

となる．

3　利子率がカイ2乗型平均回帰モデルの場合

(20)式で，$\alpha=1/2$ の場合の r の分布は Feller〔1951〕によって求められている．一般に，(16)式のような拡散過程の条件付密度関数 $f(r(t)|r(t_0))$ は，Fokker-Planck の方程式

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[a^2(r,\ t)f]-\frac{\partial}{\partial r}[b(r,\ t)f]-\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

を満足する (Ingersoll〔1987〕, p. 350). したがって，(20)式の場合 ($\alpha=1/2$) には，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\sigma^2 rf]-\frac{\partial}{\partial r}[k(m-r)f]-\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

となり，この解が Feller により求められていて，

$$\begin{aligned}
&f(r(t)|r(t_0))\,dr(t)\\
&=c_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\Psi}{2}}(\Psi/2)^j}{j!}\frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2}+j)}\\
&\qquad\times(\frac{y}{2})^{\frac{n}{2}+j-1}e^{-\frac{y}{2}}dr(t),\\
&c_0=\frac{4k}{\sigma^2(1-e^{-k(t-t_0)})},\\
&\Psi=\frac{4kr(t_0)e^{-k(t-t_0)}}{\sigma^2(1-e^{-k(t-t_0)})},\\
&n=\frac{4km}{\sigma^2},\ \ y=\frac{4kr(t)}{\sigma^2(1-e^{-k(t-t_0)})}
\end{aligned}$$

となる．したがって，r の定数倍 y は，まさに，非心度 Ψ，自由度 n の非心カイ2乗分布に従っている．y の積率母関数は $\phi(\theta)$ は，

$$\phi(\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\Psi}{2}}(\frac{\Psi}{2})^j}{j!}(1-2\theta)^{-\frac{n+2j}{2}}$$

であることが知られているから (竹内啓〔1963〕, p. 133),

$$\begin{aligned}
E(r(t)|r(t_0))&=\frac{\sigma^2(1-e^{-k(t-t_0)})}{4k}\phi'(0)\\
&=r(t_0)e^{-k(t-t_0)}+m(1-e^{-k(t-t_0)}),\\
Var(r(t)|r(t_0))&=(\frac{\sigma^2(1-e^{-k(t-t_0)})}{4k})^2\\
&\quad\times(\phi''(0)-(\phi'(0)^2)\\
&=\frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-t_0)}-e^{-2k(t-t_0)})r(t_0)\\
&\quad+\frac{m\sigma^2}{2k}(1-e^{-k(t-t_0)})^2
\end{aligned}$$

と計算される．(20)式の場合にすでに確かめられたように，短期利子率の期待値は m に近づく．

さて，割引債の評価は，Feynman-Kac の定理により，リスク中立化利子率 r が，

$$\begin{aligned}
dr&=[k(m-r)-qr]dt+\sigma\sqrt{r}dZ\\
&=(k+q)[m'-r]dt+\sigma\sqrt{r}dZ,\quad\cdots\cdots(27)
\end{aligned}$$

$$m'=\frac{km}{k+q}$$

なるプロセスとなる確率分布に関して，(23)式を求めればよい．ところで，Cox-Ingersoll-Ross〔1985〕はこのような手順を示唆しているが，実際この手順でどのように計算するのか明らかにしていない．正規分布の場合と異なり，(23)式の Y の確率分布を求めることは容易ではないと思われる．ところが，幸いなことに，(21)式は $\alpha=1/2$ の場合，直接この微分方程式を解くことができるのである．$\alpha=1/2$ ならば，(21)式は，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rP_{rr}+(k+q)(m'-r)P_r+P_t-rP=0\quad\cdots\cdots(28)$$

となる．これは，Ingersoll〔1987〕, p. 397 の(30)式と同一形式であるから，それと全く同様にして，

$$P(r,\ t,\ T)=A(t,\ T)e^{-B(t,T)r},\quad\cdots\cdots(29)$$

$$\begin{aligned}
&A(t,\ T)\\
&=\left[\frac{2\gamma e^{(k+q-\gamma)\tau/2}}{2\gamma+(k+q+\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})}\right]^{2km/\sigma^2},\\
&B(t,\ T)=\frac{2(1-e^{-\gamma\tau})}{2\gamma+(k+q-\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})},\\
&\gamma=\sqrt{(k+q)^2+2\sigma^2},\ \ \tau=T-t
\end{aligned}$$

が得られる[9]．

Ⅳ　利子率が確率変動する場合の債券オプション評価式

1　債券オプションの一般的表現

債券が短期利子率のみを状態変数とするならば，債券オプションも短期利子率のみを状態変

数とする関数となる．したがって，Ⅲの1と同様に，2種類の債券オプションを用いてリスクレスヘッジが可能で，これらの債券オプションのリスクの市場価格は無裁定条件より等しくなるから，債券オプション価格 $C(r,\ t)$ の満足すべき微分方程式は，(17)式と同じく，

$$\frac{1}{2}a^2C_{rr}+(b-\lambda a)C_r+C_t-rC=0 \cdots\cdots (30)$$

である．満期価値は，

$$C(r,\ T)=[P(r,\ T,\ T')-K]^+$$

となる．ただし，$P(r,\ T,\ T')$ は，満期日が $t=T'$ となる $t=T(T'>T)$ での債券価格である．Ⅲの2で Feynman-Kac の定理を用いて債券価格を求めたときと同様に，(30)式の解は，(19)式のプロセスから導かれる確率分布に関する期待値演算によって，

$$C(r,\ t)=E_t[C(r,\ T)e^{-Y(t,T)}], \cdots\cdots\cdots (31)$$

$$Y(t,\ T)=\int_t^T r(u)\,du$$

となる．

2　利子率が正規型平均回帰プロセスのときの債券オプション

いまの場合，r と Y の確率分布は，Ⅲの2から2次元同時正規分布であるから，Ⅲの2の結果に加えて，r と Y の共分散が求められれば特定化できる．(25)式を用いると，

$$Cov_t[r(s),\ Y(t,\ s)]$$

$$=\int_t^s Cov_t[r(s),\ r(u)]\,du$$

$$=\frac{\sigma^2}{2k}\int_t^s e^{-k(s+u)+2kt}(e^{2k(min(s,u)-t)}-1)\,du$$

$$=\frac{\sigma^2}{2k}\int_t^s (e^{k(u-s)}-e^{-k(s+u)+2kt})\,du$$

$$=\frac{\sigma^2}{2k^2}(1-e^{-k(s-t)})^2$$

となる．したがって，同時密度関数 $f(r,\ Y)$ は，

$$f(r,\ Y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{Var(r)}\sqrt{Var(Y)}\,(1-Corr^2(r,\ Y))}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2(1-Corr^2(r,\ Y))}\left\{\frac{(r-E(r))^2}{Var(r)}\right.\right.$$

$$+\frac{(Y-E(Y))^2}{Var(Y)}$$

$$\left.\left.-2\frac{(r-E(r))(Y-E(Y))Corr(r,\ Y)}{\sqrt{Var(r)}\sqrt{Var(Y)}}\right\}\right]$$

であるから，2次元正規分布の積率母関数を求める場合と同様に整理すると，

$$e^{-Y}f(r,\ Y)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Var(Y)}}e^{-E(Y)+\frac{Var(Y)}{2}}$$

$$\times e^{-\frac{(r-E(r)+Cov(r,\ Y))^2}{2Var(Y)}}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Var(Y)}\sqrt{1-Corr^2(r,\ Y)}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2(1-Corr^2(r,\ Y))}\right.$$

$$\times\left\{Corr(r,\ Y)\frac{(r-E(r)+Cov(r,\ Y))}{\sqrt{Var(r)}}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(Y-E(Y)+Var(Y))}{\sqrt{Var(Y)}}\right\}^2\right]$$

となる．右辺第2ファクターの指数関数は，(26)式より，$P(r,\ t,\ T)$ であり，第4ファクターを，Y の全区間で積分すると，正規分布の性質から1となる．したがって，(31)式は，

$$C(r,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C(r,\ T)e^{-Y}f(r,\ Y)\,drdY$$

$$=P(r,\ t,\ T)\int_{-\infty}^{\infty}[P(x,\ T,\ T')-K]^+$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Var(r)}}\times\exp$$

$$\left\{-\frac{(x-E(r)+Cov(r,\ Y))^2}{2Var(r)}\right\}dx$$

となる．(26)式より，$P(x,\ T,\ T')$ は対数正規分布であるから，Jamshidian〔1989〕ではこのあとの計算はいとも簡単であるかのように述べて省略し，最終結果のみを示している．しかし，実際には，ここでの計算は，利子率が定数の場合の Cox-Ross（Ⅰの3）よりもはるかに複雑で

あるが，幸いなことに Heath-Jarrow-Morton〔1987〕の Appendix の最後に計算されている方法が現在の問題に直接適用できることがわかる．したがって，これ以降の計算については，Heath-Jarrow-Morton に譲ることにして，ここでは，IIで述べた Merton の方法を適用した Ravinovitch〔1989〕による，はるかに簡単なアプローチを採用する．

(26)式に伊藤のレンマを用いると，債券の収益率の標準偏差は，$\sigma P_r/P=-\sigma(1-e^{-k\tau})/k$ であるから，(10)式で，δ が非確率変数であるという Merton の仮定を満足している．したがって，IIの $S(t)$ の代りに，$P(r,\ t,\ T')$ とし，長期債と短期債の相関係数は1であるから，$\rho=1$ とすればよい．すなわち，満期日が T' の債券に関するオプションの権利行使日が $T(T'\geq T)$，権利行使価格が K の債券コールオプションの t 時点の価格は，

$$
\begin{aligned}
C(r,\ t)&=P(r,\ t,\ T')N(D_1)\\
&\quad -KP(r,\ t,\ T)N(D_2),\\
D_1&=\frac{\log\left(\dfrac{P(r,t,T')}{K\,P(r,t,T)}\right)+\dfrac{H}{2}}{\sqrt{H}},\\
D_2&=D_1-\sqrt{H},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H=&\int_0^{T-t}\left\{\frac{\sigma^2(1-e^{-k(T'-T+s)})^2}{k^2}+\right.\\
&\frac{\sigma^2(1-e^{-ks})^2}{k^2}\\
&\left.-2\frac{\sigma^2(1-e^{-k(T'-T+s)})(1-e^{-ks})}{k^2}\right\}ds\\
=&\frac{\sigma^2}{k^2}\int_t^T\left\{(1-e^{-k(T'-s)})^2\right.\\
&+(1-e^{-k(T-s)})^2-2(1-e^{-k(T'-s)})\\
&\left.\times(1-e^{-k(T-s)})\right\}ds\\
=&\frac{\sigma^2}{k^2}\int_t^T\left\{e^{-k(T'-s)}+e^{-2k(T-s)}\right.\\
&\left.-2e^{-k(T'+T-2s)}\right\}ds\\
=&\frac{\sigma^2}{2k^3}\left\{e^{-2k(T'-T)}-e^{-2k(T'-t)}+1\right.\\
&-e^{-2k(T-t)}-2e^{-k(T'-T)}\\
&\left.+2e^{-k(T'+T-2t)}\right\}
\end{aligned}
$$

となる．これはまさに Jamshidian の結果に一致する．Ravinovitch では，$\rho\neq 1$ の場合をもとめているが，このモデルでは $\rho=1$ とならねばならない．さらに，H の最後の項については，Ravinovitch では，$2e^{-k(T'+2T-t)}$ となっているが，正しくは，ここで示した通りである．

3　利子率がカイ2乗型平均回帰モデルのときの債券オプション

この場合には，(27)式なる利子率のプロセスの確率分布に関して(31)式を評価すればよい．実際，Cox-Ingersoll-Ross〔1985〕は，この手順によって直接オプションの評価が可能であるかのように示唆している[10]．しかし，利子率が正規分布と異なるときには，Heath-Jarrow-Morton〔1986〕と同様の計算手続きを用いたと思われる Jamshidian〔1989〕の場合のように直接この期待値の計算を実行することは，IIIの3でみたように債券価格を期待値の演算で評価することさえきわめて困難な状況を考えると，ほとんど不可能に思われる．ところが，幸いなことにこの問題に対処するのに便利な糸口が Longstaff〔1990〕によって与えられた．この論文は，我々のモデルと異なり最終利回りオプション yield option を取り扱っているが，そのアイデアを我々のモデルに生かすことができる．すなわち，一般にオプションの評価は，満期価値をなんらかのリスク調整を行なった利子率の確率分布によって期待値をとり，次にその期待値をオプションの満期日と同じ満期日をもつ債券価格を乗じて割引くことにより求められるはずだということである．このアイデアは，利子率が一定のときの Cox-Ross のリスク中立化法からの類推といえる．Longstaff が呼ぶところの分離定理

separation theorem を我々のモデルに即して導出してみよう．(27), (30)式より，$C(r,\ t;\ T,\ T')$，$T<T'$ は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rC_{rr}+(k+q)(m'-r)C_r+C_t-rC=0$$

を満足する．(28)式より，$P(r,t;T)$ もこの方程式を満足するから，

$$C(r,t;T,T')=P(r,t;T)G(r,t;T,T')$$

とおき，上式に代入すると，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rG_{rr}+\left(\sigma^2 r\frac{P_r}{P}+(k+q)(m'-r)\right)G_r$$
$$-G_t=0$$

となる．(29)式より，$Pr=-B(t,\ T)P$ であるから，(27)式より，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rG_{rr}+(km-(k+q+\sigma^2 B(t,\ T))r)$$
$$\times G_r-G_t=0$$

が得られる．オプションの満期価値は，

$$\begin{aligned}&[P(r,\ T;\ T')-K]^+\\ &=C(r,\ T;\ T,\ T')\\ &=P(r,\ T;\ T)G(r,\ T;\ T,\ T')\\ &=G(r,\ T;\ T,\ T')\end{aligned}$$

であるから，G に Feynman-Kac の定理を適用すると，

$$dr=(km-(k+q+\sigma^2 B(t,\ T))r)dt$$
$$+\sigma\sqrt{r}dZ$$

なるプロセスに従う r の確率分布に関する期待値を用いると，

$$\begin{aligned}&C(r,\ t;\ T,\ T')\\ &=P(r,t;T)E[P(r,T;T')-K]^+ \quad \cdots(32)\end{aligned}$$

となる．したがって，残るところは，満期価値の期待値を計算すればよい．r の初期値 $r(t)$ を所与としたときの，$r(T)$ の条件付密度関数は，IIIの3で述べた Feller のモデルより一般的な場合であるが，これは Capocelli-Ricciardi (Longstaff〔1990〕を参照) によって求められている．すなわち，

$4r(T)/(\sigma^2 B(t,\ T))$ は，自由度 $4km/\sigma^2$，非心度 $4\gamma^2 e^{\gamma(T-t)}B(t,\ T)r(t)/(\sigma^2(e^{\gamma(T-t)}-1)^2)$ の非心カイ2乗分布となる．ただし，(29)式から，$\gamma=\sqrt{(k+q)^2+2\sigma^2}$ である．これを，Cox-Ingersoll-Ross と同様の表現

$$\eta=\frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T-t)}-1)},\quad \delta=(k+q+\gamma)/\sigma^2$$

を用いると，$2(\eta+\delta)r(T)$ は，自由度 $4km/\sigma^2$，非心度 $2\eta^2 r(t)e^{\gamma(T-t)}/(\eta+\delta)$ の非心カイ2乗分布となる．これらが，Longstaff の分離定理である．

さて，この成果を用いて，(32)式の期待値を計算しよう．$r(T)$ の条件付密度関数を $f_T(\cdot)$，$r^*=[\log(A(T,\ T')/K)]/B(T,\ T')$ とすると，(29)式より，

$$\begin{aligned}&E[P(r,\ T;\ T')-K]^+\\ &=\int_{-\infty}^{r^*}A(T,\ T')e^{-B(T,T')r}f_T(r)dr\\ &\quad-\int_{-\infty}^{r^*}Kf_T(r)dr \quad \cdots\cdots(33)\end{aligned}$$

となる．$u=2(\eta+\delta)r$ と変換すると，右辺第2項は，

$$-K\int_0^{2(\eta+\delta)r^*}\chi_1^2(u)du \quad \cdots\cdots(34)$$

となる．ここで，$\chi^2{}_1(u)$ は，上述した非心カイ2乗密度関数である．第1項は，同じ変換を用いて，非心カイ2乗密度関数を代入すると，

$$\int_{-\infty}^{2(\eta+\delta)r^*}A(T,\ T')\sum_{h=0}^{\infty}e^{-\frac{2\eta^2 r(t)e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta)}}$$
$$\times\left(\frac{2\eta^2 r(t)e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta)}\right)^h$$
$$\times\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{4km}{2\sigma^2}+h\right)}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{4km}{2\sigma^2}+h-1}e^{-\frac{u}{2}}e^{-\frac{B(T,\ T')}{2(\eta+\delta)}u}du.$$

ここでさらに，$\dfrac{\eta+\delta+B(T,\ T')}{\eta+\delta}=v$ と変換すると，

$$\int_0^{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))r^*} A(T,\ T')$$
$$\times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta)}} \left(\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))}\right)^h}{h!}$$
$$\times \frac{1}{2\Gamma\,(4km/(2\sigma^2)+h)}$$
$$\times \left(\frac{\eta+\delta}{\eta+\delta+B(T,\ T')}\right)^{\frac{4km}{2\sigma^2}} \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{4km}{2\sigma^2}+h-1} e^{-\frac{v}{2}}\, dv$$
$$= A(T,\ T')\, e^{-\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta)}}$$
$$\times e^{\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))}} \left(\frac{\eta+\delta}{\eta+\delta+B(T,\ T')}\right)^{\frac{4km}{2\sigma^2}}$$
$$\times \int_0^{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))r^*} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))}} \left(\frac{2\eta^2 r(t) e^{\gamma(T-t)}}{2(\eta+\delta+B(T,\ T'))}\right)^h}{h!} \times \frac{1}{2\Gamma\,(4km/(2\sigma^2)+h)} \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{4km}{2\sigma^2}+h-1} e^{-\frac{v}{2}} \right\} dv \qquad \cdots\cdots(35)$$

となる．ここで，｛ ｝内の被積分関数は，明らかに，自由度 $4km/\sigma^2$，非心度 $2\eta^2 r(t)\, e^{\gamma(T-t)} / (\eta+\delta+B(T,\ T'))$ の非心カイ２乗密度関数である．これを，$\chi^2{}_2(v)$ と表わす．積分にかかる係数は，$r(t)$，T，T' のみに依存する関数であるから，これを $f(r,\ t,\ T,\ T')$ と表わす．これらを考慮して，(34)，(35)式を，(33)式に代入し，さらに，(32)式に代入すると，

$$\begin{aligned} &C(r,\ t;\ T,\ T') \\ &= P(r,\ t;\ T) f(r,\ t,\ T,\ T')\, X^2{}_1(2(\eta+\delta)r^*) \\ &\quad - P(r,\ t;\ T)\, K X^2{}_2(2(\eta+\delta+B(T,\ T'))r^*) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(36)$$

となる．ここで，$X^2{}_1(\cdot)$，$X^2{}_2(\cdot)$ は，それぞれ前述の $\chi^2{}_1(\cdot)$，$\chi^2{}_2(\cdot)$ の累積分布関数である．さて，この方程式は，すべての $K<A(T,\ T')$ について成立するから，$K=0$ とおくと，左辺は無裁定条件の議論から，$P(r,\ t;\ T')$ とならなければならない．一方，右辺第２項は明らかにゼロで，$r^*\to\infty$ ゆえ，$X^2{}_1(\cdot)=1$ であるから，

$$P(r,\ t;\ T') = P(r,\ t;\ T) f(r,\ t,\ T,\ T'),$$

すなわち，$f(r,\ t,\ T,\ T') = P(r,\ t;\ T')/P(r,\ t;\ T)$ となる．これを(36)式に代入すると，

$$\begin{aligned} &C(r,\ t;\ T,\ T') \\ &= P(r,\ t;\ T')\, X^2{}_1(2(\eta+\delta)r^*) \\ &\quad - KP(r,\ t;\ T)\, X^2{}_2(2(\eta+\delta+B(T,\ T'))r^*) \end{aligned}$$

が導出される．

注

1) Black-Scholes〔1973〕, p. 640.
2) Black の後日談（Black〔1989〕）によると，方程式(2)を解くためにいかに苦心したか伺い知ることが出来る．適当な変換によって拡散方程式となることに長い間気が付かなかったようである．Black〔1989〕には，その他の悪戦苦闘ぶりも書かれていて大変面白い読みものとなっている．
3) これは，$r-\sigma^2/2>0$ と仮定しているが，$r-\sigma^2/2\leq 0$ と仮定しても結果はかわらない．
4) 現在では，Black-Scholes の微分方程式(2)より一般的な $\delta C = C_t + \alpha S C_S + 1/2\sigma^2 S^2 C_{SS}$ の解も求められている．それは，$C = Se^{(\delta-\alpha)(t-T)}N(d_1) - Ke^{\delta(t-T)}N(d_2)$ である（Barron-Jensen〔1990〕, Ingersoll〔1987〕, p. 312）．
5) Merton〔1973〕では，確率項を $dZ(t,\ T)$ とし，満期日の異なる２種類の債券が必ずしも完全相関ではないことを明示している．このことは，債券価格が利子率以外の変数の関数でもあることを設定していることになるが，以下の展開では，$dZ(t)$ としても十分であるので記号の簡単化のため(10)式のように書くことにする．
6) Vasicek〔1977〕, Jamshidian〔1989〕, Rabinovitch〔1989〕.
7) Brennan-Schwartz〔1977〕．この場合には，株式オプション，債券，債券オプションのいずれの解析解も求められていない．
8) Cox-Ingergoll-Ross〔1985〕.
9) Ingersoll〔1987〕に詳しい証明が与えられているので，あらためて繰り返さない．
ここで，利子率が確率変動する場合の株式オプションの評価について簡単にふれておこう．II で示されたように，債券価格が(10)式のような確率微分方程式を満足しているならば，株式オプションの評価式が導出される．ところが，(29)式のような債券価格の場合には，(28)式と伊藤のレンマから，債券価格のプロセスは，

$$dP = r(1-qB)Pdt - BP\sigma\sqrt{r}dZ$$

となって，(10)式の仮定をみたさなくなる．したがって，Fellerのプロセスの利子率の場合には，Mertonの方法を直接用いて株式オプションの評価を行うことは出来ない．一方，正規型の利子率の場合には，債券価格は(26)式であるから，Mertonのモデルの(10)式のδは，伊藤のレンマから，$\sigma(1-e^{-k\tau})/k$であるからMertonの仮定を満たす．したがってIIの結果がそのまま使えることになる．

10) おそらくきわめて複雑な計算を要すると思われるにもかかわらず，なぜか彼等は結果のみを示しているにすぎない，彼等がどのようにこの結果を導出したのか不明である．実のところ，筆者が本稿のこの箇所を準備する段階で彼等の示唆を信頼して，さんざん四苦八苦して計算を試み，もうほとんど断念しそうになっていたとき，偶然本文で述べるLongstaff〔1990〕の命題にめぐりあい，ようやく解決の糸口になりうることに気がついた．

参考文献

[1] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1974.

[2] Barron, E.N. and R. Jensen, "A Stochastic Control Approach to the Pricing of Options," *Mathematics of Operations Research*, 1990, 49−79.

[3] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 1973, 637−654.

[4] Black, F., "How we came up with the option formula," *Journal of Portfolio Management*, 1989, 4−8.

[5] Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance*, 1979, 133−155.

[6] Cox, J. and S.A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 1976, 145−166.

[7] Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 1985, 385−407.

[8] Duffie, D., *Security Markets*, Academic Press, 1988.

[9] Feller, W., "Two Singular Diffusion Problems," *Annals of Mathematics*, 1951, 173−182.

[10] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," 1987, working paper, Cornell University.

[11] Ingersoll, J.E. *Theory of Finanal Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987.

[12] Jamshidian, F., "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, 1989, 205−209.

[13] Longstaff, F.A., "The Valuation of Options on Yields," *Journal of Financial Economics*, 1990, 97−121.

[14] Merton, R.C., "Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, 141−183.

[15] Rabinovitch, R., "Pricing Stock and Bond Options when the Default-Free Rate is Stochastic," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1989, 447−457.

[16] 竹内　啓，数理統計学，東洋経済新報社，1963.

[17] Vasicek, O.A., "An Equilibrium characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 1977, 177−188.

〔ひがしだ　あきら　横浜国立大学経営学部教授〕