＜研究ノート＞

ブラック＝ショールズオプション価格モデルに関するノート

森　田　　　洋

1　イントロダクション

Black and Sholes (1973) 以来，オプションなどの派生証券の理論価格の導出は急速な発展をしている．その理論的骨格を彼らのモデルで説明するとおよそ次のようになる．

いまオプションの対象となっている株式が配当支払いがなく，その価格の確率過程 $\{S(t)\}$ が次のような確率微分方程式で与えられるとする．

$$dS(t)=\mu\cdot S(t)\cdot dt+\sigma\cdot S(t)\cdot dW(t) \cdots\cdots(1)$$

但し μ，σ は定数で $dW(t)$ は１次元標準ブラウン運動過程 $\{W(t)\}$ の確率微分表現である．右辺の第１項は微小時間における期待収益をあらわすドリフト項であり，第２項はリスクを表す項で $\sigma\cdot S(t)$ は微小時間における標準偏差となっている．このとき株式の価格は対数正規分布に従い，このときの株式価格の確率過程を幾何ブラウン運動過程とよぶ．(1)式は，

$$dS(t)/S(t)=\mu\cdot dt+\sigma\cdot dW(t)$$

と書き換えることができるが，株式の収益率を表す式としてこの表現で記されることが多い．μ は微小時間における局所的期待収益率，σ は収益率の局所的標準偏差をあらわすことになる．この株式のヨーロピアンオプションが満期 T，行使価格Ｋで市場に出ているとする．仮に価格が株式価格，時間の関数 $G(S(t),t)$ として表現可能であり，前者に関しては２階微分可能，後者に関しては１階微分可能であるとすると[1)]，その確率微分方程式は伊藤の補題より，

$$dG=\{\mu\cdot S(t)\cdot G_s+1/2\mu^2\cdot S^2(t)\cdot Gss+Gt\}$$
$$dt+\sigma\cdot S(t)\cdot G_s\cdot dW(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

と表される．但し G_s，G_{ss}，G_t は各々 G の S，t に関する偏微係数である．(1)，(2)式より両方の証券とも同じ１次元ブラウン運動過程で局所的リスクが表現されていることがわかり，二つの証券の価格変化に関する局所的リスクは完全に相関しているといえる．従って証券の期待収益率を縦軸，収益率の標準偏差を横軸にとった図に株式，オプション二つの証券の期待収益率収益率の標準偏差をプロットすると，もし市場でｒの複利金利で安全資産が運用可能ならば図１のように２点は（０，r）を通る直線上に並ばなくてはいけないはずである．なぜならば，もしそうでないと二つの証券を利用して裁定が可能となるからである．つまり二つの証券のリターンは完全に相関していることから適当なポートフォリオを組むことによりリスクのない r とは異なる収益率で資産を運用することが可能となるので，もしそれが r より高ければ r の市場利子率で資金を借り入れてその資金をいまのポートフォリオで運用し，r より低ければ逆のポジションをとることにより資金コスト０にして確実に正の収益が得られることになってしまうのである．

各証券の期待収益率は確率微分方程式では dt にかかる項，収益率の標準偏差は $dW(t)$ にかかる項で表現されるから，いま述べた裁定条件は，

$$\frac{\{\mu\cdot S(t)\cdot G_s+(1/2)\sigma^2\cdot S^2(t)\cdot G_{ss}+G_t\}/G-r}{\sigma\cdot S(t)\cdot G_s/G}$$
$$=\frac{\mu-r}{\sigma}$$

と表される．この式を整理すると偏微分方程式，

$$(1/2)\sigma^2\cdot S^2\cdot G_{ss}+G_t+r\cdot G_s\cdot -r\cdot S=0 \cdots(3)$$

が得られる．T 期のオプションの理論価格は，オプションより得られるペイオフそのものであるから，

$$G(S(T)=max\ [S(T)-K,0] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となる．従って数学的には(4)を境界条件とする偏微分

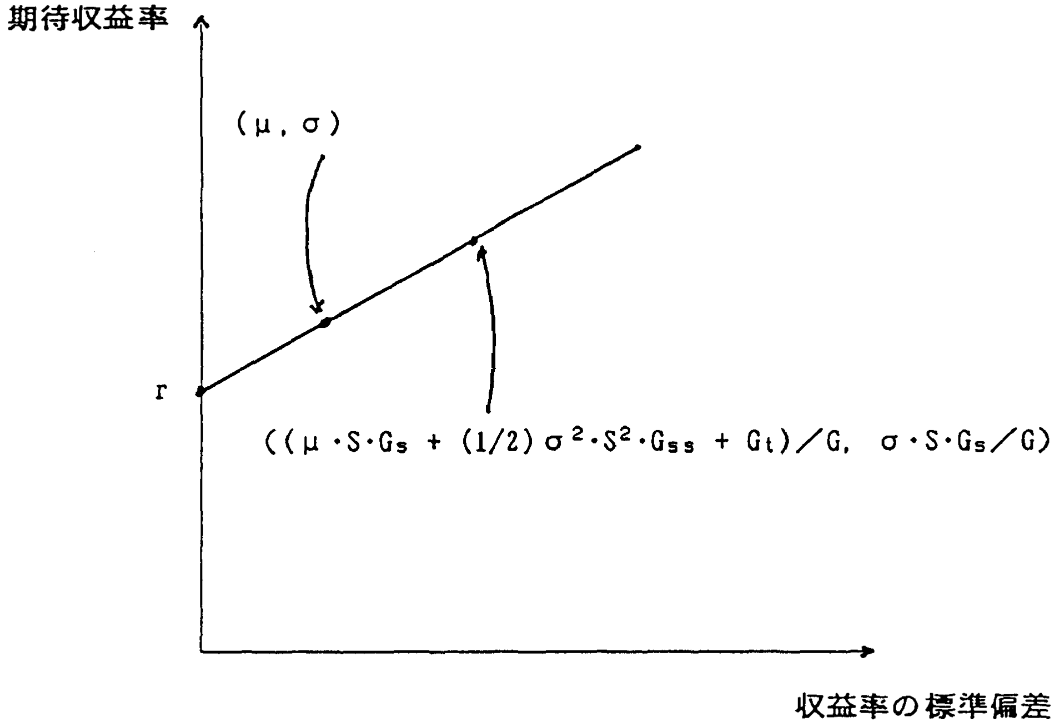

図1

方程式問題が与えられたことになり，この問題を解けばオプションの理論価格が求まることとなる．

ところでこの結果は経済学的にいくつかの興味深い性質を持っている．まず第1にオプションの理論価格が株式と安全資産の二つの証券から一意的に与えられるということである．このモデルでは不確実性の構造がブラウン運動過程で与えられている．従って状態空間の濃度は実数空間と同じ連続体濃度だけ存在しているが，これに対して経済で利用可能な証券はオプションの対象である株式と安全資産の2種類しかない．従ってこのオプション価格理論の結果は，状態の数以上の証券が市場に存在して，証券のペイオフが確率変数の空間の基底を構成すればそのときのみ他の任意の証券の理論価格を一意的に与えることが可能である，という静学的資産市場理論の結果からすると奇妙にうつるはずである．

第2にこのモデルの証券の期待収益率を μ から r に変更し偏微分方程式を導いても(3)式と全く同じものが得られることである．このモデルの変更は株式の期待収益率が安全資産の収益率と同じであるとすることから，市場の投資家の選好を危険中立的としたことになることを意味する．このようにして投資家を危険中立的としてオプションの理論価格を求める方法は危険中立化法といわれているが，投資家のリスク選好を変更しても同じ理論価格が得られるという事実も経済学からすると奇妙に感じられる．

また伊藤の補題が適用可能となるためにオプション価格を表す関数が幾つかの規則性を満たすことを仮定して偏微分方程式を導出したが，これは内生的に導出されるべき均衡価格に最初から一定の仮定を与えた格好となっている．もしこの分析が妥当なものならば予め与えたこの仮定が本来は仮定ではなく，均衡価格の性質として必然的に成り立つものであることが示されるべきである．

Harrison & Kreps (1979) はある側面からこのモデルに接近し，これらの疑問点に対して明確な解答を与えることに成功している．このノートは Harrison & Kreps (1979) の内容をより直観に訴える形で提供することを目的としている．彼らの論文では大きな柱として定理1，2，3の3つの定理があるが，本稿ではそのうち最初と最後の定理を証明の内容をかえて提示することにしている．まず証券の理論的価格付けを行うときにその数学的条件として市場の投資家の選好を用い，モデルの viability という概念を定義している．ここではより直接的に証券の価格付けを行うことを目的として市場の投資家の選好を全く引合いに出さず無

危険裁定機会という概念を登場させて分析を行う．定理3についてはブラック・ショールズモデルをとりあげHarrison & Kreps (1979)より拡散過程のクラスをかなり狭めるが，若干の数学的条件を付加することで，簡潔な証明を与えそのエッセンスを示すことに心がけた．更に彼らの論文では触れられていない前述の偏微分方程式と定理3の関係も明示的に説明した．

このノートの構成はHarrison and Kreps (1979)とほぼ同じ構成で次のようになっている．まず第2節ではモデル及び重要な役割を果たす基本的概念の説明をする．第3節では定理1，定理2の証明を与える．第4節ではモデルをブラック・ショールズモデルに限定してオプションの理論価格が一意的に与えられることをKunita and Watanabe (1967)の証明した2乗可積分マルチンゲールの表現定理を鍵としてHarrison and Kreps (1979)とは異なる形で証明を与える．第5節では拡散過程において重要な意味を持つGirsanovの定理から，ブラック・ショールズモデルにおいて危険中立化法が正当とされる理由が説明される．第6節では前述の偏微分方程式が拡散過程に従う確率変数の関数値の期待値の満たすいわゆるコルモゴロフの後向き方程式として与えられていることを説明して本稿を終える．

2　モデル

この節ではHarrison and Kreps (1979)にならって証券市場を記述する簡単なモデルを与える．まず分析の基本的枠組みである証券市場モデルという経済の構成要素を紹介し，次に市場の投資家のとる投資戦略を数学的に定義する．そして最後にモデルが均衡モデルとして整合的か否かを決める判断基準として利用される無危険裁定機会を定義する．

a.　証券市場モデル

我々は次のような4つの構成要素からなるものを証券市場モデルとよぶこととする．

- (Ω, F, P)…確率空間
- $\boldsymbol{T}:=[0, T]$…取引時間の集合
- $\{F_t: t\in \boldsymbol{T}\}$ $(F_0:=\{\phi, \Omega\}$ $F_T:=F, F_s\leqq F_t(s\leqq t)$ …σ-fieldの増大系
- $\{\underline{S}(t,\cdot): t\in \boldsymbol{T}\}$ $(S_j(\cdot,\cdot): \boldsymbol{T}\times\Omega\rightarrow R,\ j=1,\ 2)$，$\underline{S}(t,\cdot)=(S_1(t,\cdot),\ S_2(t,\cdot))$は$F_t$-可測 …証券価格ベクトルの確率過程

但し$S_1(t,\omega)=S_1(0,\cdot)\ \forall t\in \boldsymbol{T},\ \omega\in\Omega$,

$S_2(t,\cdot)\in L^2(\Omega, F, P)$

$(L^2(\Omega, F, P)$は2乗可積分な確率変数の空間である．)

取引時間の集合が閉区間であることは取引が連続的に行われる連続時間モデルであることを示している．σ-fieldは各時点で起き得る識別可能な事象の族を表し，経済で利用可能な情報を記述すると考える．その増大系ということは利用可能な情報が時間とともに増えていくことを記述するものである．証券価格ベクトルの第1要素はいかなる基本事象においても常に一定の価格をとるもので安全資産を意味する．第2要素は株式，債券などの証券を具体的例として持つようなリスクの存在する証券である．証券価格の2乗可積分性は後の数学的議論で厳密な結論を与えるための条件である．以下では表記を簡単にするために場合に応じて証券価格を中の変数を省略して表すことにするので注意されたい．

b.　投資戦略

投資家の投資行動を各証券の保有枚数$\theta_j: \boldsymbol{T}\times\Omega\rightarrow R$ $(j=1,\ 2)$で表し，二つをまとめてベクトル確率過程$\underline{\theta}(\cdot,\cdot):=(\theta_1(\cdot,\cdot),\ \theta_2(\cdot,\cdot))$として表現することにする．以下では表記を簡単にするため証券価格と同様，場合に応じて中の変数を省略して表すことにするので注意されたい．この投資家のとる投資行動は幾つかの条件を満たさなくてはいけない．以下での条件を説明していこう．

まず情報構造から整合性についてである．$\underline{\theta}$は予め与えられた情報構造であるσ-fieldと整合的でなくてはいけない．これより時間tを固定したときの$\underline{\theta}$，$\underline{\theta}(t,\cdot)$は$F_t$-可測でなくてはいけない．ここでは数学的に明確な結論を与えるためにF_t-可測性より更に強い2乗可積分性を$\underline{\theta}$に要求し，この$\underline{\theta}$を投資戦略とよぶことにする．上で定義した投資戦略は連続的に各証券への投資額を変更することが許されているが，以下の分析においては有限回数の取引しかしない投資戦略のクラスの中でのみ議論をすることで十分である[1)]．そこでこのような投資戦略を次のように定義する．すなわちあるTの分割$(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n)$ $(t_0=0,\ t_n=T,\ t_i<t_{i+1}\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$が存在して$\underline{\theta}(t,\cdot)$は$[t_i,\ t_{i+1}]$の上で$\omega\in\Omega$に依存した一定値をとる，という条件である．従って$\underline{\theta}(\cdot,\cdot)$の標本経路は時間軸上に沿って階段型となるいわゆる単関数の形状を持つ．そこでこのような投資戦略を単投資戦略とよぶこ

ととする．

また投資家は資金を無尽蔵に保有しているわけではないから一定の予算制約を満す必要がある．ここでは議論を簡単にするために賃金など資産市場以外での投資家の資金の出入りはないことにする．この簡単化の仮定のもとでは先に定義した単投資戦略は次のような性質を持つこととなる．

$\underline{\theta}(t_{i-1})^T\cdot S(t_i)=\theta(t_i)^T\cdot S(t_i)\quad \forall i=1,2,\cdots,n$

この式は整理することにより次のように表現することも可能である．

$(\underline{\theta}(t_{i-1})-\underline{\theta}(t_i))^T\cdot \underline{S}(t_i)\quad \forall i=1,2,\cdots,n$

すなわち時点 t_i において投資家は各証券の枚数を $\underline{\theta}(t_{i-1})$ から $\underline{\theta}(t_i)$ に変更するが証券価格を乗ずることにより得られるそのときの資金の出入りは0であることをこの式は表している．このような予算制約を満たす単投資戦略を自己充足的単投資戦略とよぶことにする．またこの自己充足的投資戦略の集合を Θ で表すことにする．

c.　無危険裁定機会

証券市場モデルが均衡モデルとして整合的であるならば，その必要条件として資金コスト0にして確実に正の収益を得ることのできるような自己充足的単投資戦略が存在してはいけないはずである．一般にこのような投資機会は裁定機会といわれている．我々の以下の分析はこの必要条件を満たすような証券市場モデルの性質を探ることである．そこで次にこの裁定機会を定義しよう．

定義1：証券市場モデルが与えられたとき，ある自己充足的単投資戦略，$\underline{\theta}\in\Theta$ が存在して次の①，②，③のいずれかの条件を満たすときその証券市場モデルに無危険裁定機会が存在するという．

①$\underline{\theta}(0)^T\cdot S(0)=0,\ \underline{\theta}(T)^T\cdot \underline{S}(T)\in X^{++}$

但し X^{++}:

$=\{x\in L^2(\Omega,F,P)$:

$P(\{\omega:x(\omega)\geqq 0\})=1,$

$P(\{\omega:x(\omega)>0\})>0\}$ であり，記号，

「^{T}」はベクトルの転置を表すためのものである．

②$\underline{\theta}(0)^T\cdot \underline{S}(0)<0,\ \underline{\theta}(T)^T\cdot \underline{S}(T)=0(P\text{-a.s})$

③$\underline{\theta}(0)^T\cdot \underline{S}(0)<0,\ \underline{\theta}(T)^T\cdot S(T)\in X^{++}$

①は0期において全く資金コストをかけることなく T 期に確実に正の収益をあげることができるような投資機会の存在を意味する．②は逆に将来 T 期に収益が全くないが現在負の資金コスト，すなわち正の収益をあげることの可能な投資機会の存在を意味する．③での投資機会は現在も将来も正の収益を確実に得ることのできるものである．以上の3つの投資機会は次のようなまとめた形でも表現可能である．

$\theta(0)^T\cdot S(0)\leqq 0,\ \theta(T)^T\cdot S(T)\in X$かつ

「$\theta(0)^T\cdot S(0)=0,\ \theta(T)^T\cdot S(T)=0(P\text{-a.s})$」が成立しない．但し $X^+:=\{x\in L^2(\Omega, F, P):P(\{\omega:x(\omega)\geqq 0\})=1\}$ である．すなわち0期において正の収益，T 期においても確実に正の収益が得られるという表現である．「・」のような投資戦略を除く理由はそのような投資戦略は裁定機会を意味しないことから明らかであろう．

もしこのような投資機会のいずれかが存在するとすれば市場の投資家は資金コストを全くかけずに投資規模をいくらでも拡大して確実かつ莫大な収益をあげることが可能になる．このため各投資家から莫大な一方向の証券の需給が市場にだされ需給が一致せず取引が実現しなくなってしまう．従って瞬時に市場均衡を達成することの可能な合理的な証券市場においてはこのような裁定機会はすぐに解消されるはずである．そこで我々は証券市場モデルにこのような合理性を要求し，この無危険裁定機会の存在しないモデルの数学的性質を導出し，その性質を利用してオプションなどの派生証券の理論価格付けを説明していこうとするわけである．

3　合理的証券市場の理論価格の特徴付け

実は前節で定義した無危険裁定機会が証券市場モデルにおいて存在しない必要かつ十分な条件は一定の性質を満たし，そのもとでは証券価格の期待値がマルチンゲールに従う確率測度の存在することである．この説明は二つのステップを要する．最初のステップは証券市場モデルに無危険裁定機会が存在しないことの必要かつ十分な条件は T 期の証券価格を表す過靴変数から0期の証券価格に写す一定のよい性質を持つ汎関数が存在することを示すことである．第2のステップはその汎関数の存在と上述の確率測度の存在が同値なことを示すことである．Harrison & Kreps (1979) の定理1がこの第1ステップ，定理2が第2のステップである．最初のステップは一般的な枠組みで証明可能であるが，より直観的な理解を目的とし，限定された

クラスの証券市場モデルの上で説明していく．我々は証券市場に次のような仮定を要求する．

仮定 1：証券市場モデルの状態空間，確率測度，取引時間の集合は次のような条件を満たす．

・$\boldsymbol{\Omega}=\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$

・$P(\{\omega_k\})>0 \quad k=1, \cdots, m$

・$\boldsymbol{T}=\{0, T\}$

このとき次の定理が成立する．

定理 1：一定の証券市場モデルのもとで次の二つは同値である．

①無危険裁定機会が存在しない．

②ある汎関数 $\psi: L^2(\Omega, F, P) \to R$ が存在して，次の 3 つの条件を満たす．

(a)線形，かつ連続

(b)$\psi(x)>0 \quad \forall \mathrm{x} \in X^{++}$

(c)$\psi(\underline{\theta}(T)^T \cdot \underline{S}(T))=\underline{\theta}(0)^T \cdot \underline{S}(0) \quad \forall \theta \in \Theta$

証明は以下で定理の①，②の条件を書き直して与える．仮定 1 のもとでは証券市場モデルにおける二つの証券の確率過程は次のような行列，有限次元ベクトルとして表現可能である．

$$\underline{S}_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_1(0) \\ \mathrm{S}_2(0) \end{bmatrix} \cdots 0 \text{ 期の証券価格}$$

$$\underline{S}_T = \begin{bmatrix} S_1(\omega^1) & S_2(\omega_1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ S_1(\omega_m) & S_2(\omega_m) \end{bmatrix} \cdots \text{ T 期の証券価格}$$

このとき線形代数の超平面分離定理を用いて先の定理を証明することが可能となる．これを次に説明していこう．そこで定理 1 の二つの命題をこれらのベクトル，行列を用いて書き換える．これを補題の形で証明なしで与えよう．

補題 1：仮定 1 のもとでは無危険裁定機会は次の同値である．

ある k 次元実ベクトル $\theta \in R^k$が存在して次のいずれかを満たす．

① $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} \geq 0$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} = \underline{0}$

② $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} = \underline{0}$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} < \underline{0}$

③ $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} \geq 0$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} < \underline{0}$

但し不等号$\geq$は全ての要素は左辺のほうが大きく少なくとも一つの要素は厳密に大きいことを意味する不等号である．

補題 2：仮定 1 のもとでは定理の汎関数の存在は次のような m 次元実ベクトル，$\underline{q} \in R^m$ の存在と同値である．

① $\underline{q} \gg \underline{0}$

② $(\underline{S}_T)^T \cdot \underline{q} = \underline{S}_0$

但し不等号$\gg$はベクトルの各要素とも厳密に左辺のものが右辺のものより大きいことを意味する不等号である．

補題 2 に関して完結した証明は与えないがその概略を簡単に記すと次のようになる．まず q の存在を証明する部分は汎関数 ψ から実際に次のように構成すればよい．

$$\underline{q} := \begin{bmatrix} \psi\ (\mathrm{I}\{\omega_1\}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi\ (\mathrm{I}\{\omega_1\}) \end{bmatrix}$$

但し $I(E)$ $(E \in F)$ は可測集合 E の特性関数である．また逆の証明はベクトル q から汎関数 ψ を次のように構成すればよい．

$\psi(x) := \Sigma_{k=1}^{m} \quad q_k \cdot X(\omega_k)\, x \in L^2(\Omega, F, P)$

我々はモデルを仮定 1 を満たすクラスに限定し汎関数 ψ を経済の状態の数の次元の有限次元ベクトルで特徴付けたが，②からみて明らかなとおりこのベクトルはある基本事象が生起したときにのみ 1 単位の金銭を支払う状態請求権の価格，いわゆるアロー・デブループライスベクトルに対応する．従ってこの汎関数の存在はこの状態請求権の価格の存在を意味すると解釈することができる．つまりこの定理はアロー・デブ

ループライスの存在が無危険裁定機会が存在しないことの必要かつ十分な条件であるという意味を持つのである．

以上より定理1は次のように書き直すことができる．

定理1'：次の二つは同値である．

(a) 次のいずれかを満たす k 次元実ベクトル，$\underline{\theta} \in \mathrm{R}^k$ が存在しない．

① $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} > \underline{0}$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} = 0$

② $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} = \underline{0}$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} < 0$

③ $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} > \underline{0}$，かつ $\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} < 0$

(b) ある m 次元実ベクトル，$q \in R^m$ が存在して次の条件を満たす．

① $\underline{q} \gg \underline{0}$

② $(\underline{S}_T)^T \cdot \underline{q} = \underline{S}_0$

(証明)

まず(b)から(a)を示そう．$(\underline{S}_T)^T \cdot \underline{q} = \underline{S}_0$ を転置して両辺の右側から任意の k 次元実ベクトル $\underline{\theta} \in R^k$ をかけると，

$$\underline{q}^T \cdot \underline{S}_T \cdot \underline{\theta} = \underline{S}_0^T \cdot \underline{\theta} \quad \cdots\cdots(5)$$

ところで $\underline{q} \gg \underline{0}$ より(a)の①の場合の不等式は両立しない．というのは $\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} > \underline{0}$ のとき $\underline{q}^T \cdot \underline{S}_T \cdot \underline{\theta} > 0$ となるので(1)式より $\underline{S}_0^T \cdot \theta > 0$ となるからである．②，③の場合についても同様に示すことができる．

次に(a)から(b)を示そう．(a)の①，②，③はまとめると，

$\underline{S}_T \cdot \underline{\theta} > \underline{0}$ かつ $-\underline{S}_0 \cdot \underline{\theta} > \underline{0}$

これを行列で表現すると，

$$\begin{bmatrix} -\underline{S}_0^T \\ \underline{S}_T \end{bmatrix} \cdot \underline{\theta} > 0$$

となる．この不等式を満たすベクトル $\underline{\theta}$ が存在しないということは次の一連の不等式，等式を満たすベクトル $\underline{\theta}$ が存在しないことと同値である．

$$\begin{bmatrix} -\underline{S}_0^T \\ \underline{S}_T \end{bmatrix} \cdot \underline{\theta} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \underline{Y} \end{bmatrix} \quad (Y \text{は} m \text{次元実ベクトル})$$

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ \underline{Y} \end{bmatrix} \geqq 0, \quad Y_0 + \underline{1}^T \underline{Y} = 1$$

そこで次のような集合 Λ を定義する．

$$\Lambda := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \underline{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\underline{S}_0^T \\ \underline{S}_T \end{bmatrix} \cdot \underline{\theta}, \begin{bmatrix} Y_0 \\ \underline{Y} \end{bmatrix} \geqq 0 \right.$$
$$\left. Y_0 + \underline{1}^T \underline{Y} = 1, \quad \underline{\theta} \in R^k \right\}$$

この集合 Λ は明らかに閉集合で凸集合である．しかも定理1′の(a)はこの集合が $k+1$ 次元実数空間の原点のみの集合 $\{\underline{0}\}$ との共通部分が空集合となることを意味する．後者の集合も当然閉，かつ凸集合なので有限次元のベクトル空間における超平面分離定理が適用可能で，ある $k+1$ 次元ベクトル $[q_0', \underline{q}'^T]$ が存在して，

$$[q_0', \underline{q}'^T] \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} \in \Lambda$$

となる．行列演算を書き換えると，

$$q_0' Y_0 + \underline{q}'^T \underline{Y} + (q_0' \underline{S}_0^T - \underline{q}'^T \underline{S}_T) \cdot \underline{\theta} > 0 \quad \forall \underline{\theta} \in R^k$$

$$\forall \begin{bmatrix} Y_0 \\ \underline{Y} \end{bmatrix} \geqq 0, \quad Y_0 + \underline{1}^T \underline{Y} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

となる．そこでまず $\underline{\theta} = \underline{0}$ としてみよう．このとき，

$q_0' . Y_0 + \underline{q}'^T . \underline{Y} > 0$

となるが，今度は $[Y_0, \underline{Y}^T]$ を単位ベクトルとして(7)式に代入すると

$q_0' > 0$

$\underline{q}' \gg \underline{0}$

が得られる．(6)式を整理すると，

$$q_0'.Y_0+\underline{q}'^T.\underline{Y}>(\underline{q}'^T.\underline{S}_T-q_0'.\underline{S}_0^T)\cdot\underline{\theta}\quad\forall\underline{\theta}\in R^k$$

$[Y_0,\ \underline{Y}^T]$ を任意に選び固定すると(8)式が成立していることから，すべての k 次元実ベクトル $\underline{\theta}\in R^k$ に対してこの不等式が成立する必要条件は明らかに，

$$\underline{q}'^T.\underline{S}_T-q_0'.\underline{S}_0^T=0$$

である．これを整理することにより，

$$(\underline{q}'^T/q_0').\underline{S}_T=\underline{S}_0^T$$

すなわち，

$$\underline{S}_T^T.(\underline{q}'/q_0')=\underline{S}_0$$

を得る．そこで，

$$\underline{q}:=\underline{q}'/q_0'$$

とすると，

$$\underline{q}>>0,\ \text{かつ}\quad \underline{S}_T^T.q=S_0$$

を得る．

Harrison & Kreps (1979) は次にこの汎関数 ψ が equivalent martingale measure という次に定義する確率測度と対応し，0 期の証券の理論価格はこの確率測度のもとでの T 期の価格の期待値として与えられることを示した．この確率測度の厳密な定義，およびその定理を与えよう．

定義 2：次の条件を満たす確率測度　$P^*:(\Omega,F)\rightarrow[0,1]$ を equivalent martingale measure とよぶ．

①P に関して絶対連続である．

②$(\underline{S}(t),F_t)_{t\in T}$ はこの P^* に関して 2 乗可積分マルチンゲールである．

定理 2 (Harrison and Kreps)：equivalent martingale measure の集合と汎関数 ψ の集合には次のような 1 対 1 対応関係が存在する．

$P^*(E)=\psi(I(B))\quad B\in F$

$\psi(x)=E^*\ [x]$　但し E^* は P^* に関する期待値オペレーターである．

この定理の証明は一般的な形で与えることが可能であるが，その本質をできる限り簡単に示すためここでは $|\Omega|<\infty$ の場合 ($\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_m\}$ としよう.) についてのみ証明を与えよう[2)]．

($|\Omega|<\infty$ の場合の証明)

定理の集合間の一対一対応を示すにはそこで与えられた対応，

$$\psi(x):=E^*\ [x]$$

で定義される汎関数が

(a)線形，かつ連続

(b)$\psi(x)>0\quad\forall x\in X^{++}$

(c)$\psi(\underline{\theta}(T)^T\cdot\underline{S}(T))=\underline{\theta}(0)^T\cdot\underline{S}(0)\quad\forall\underline{\theta}\in\Theta$

という性質を満たし，また逆に，

$$P^*(E):=\psi(\mathrm{I}(B))\quad B\in F$$

で定義される確率測度が equivalent martingale measure となっていることを示せば十分である．そこでまず上のように期待値オペレーターとして定義された汎関数が(a)，(b)，(c)の性質を満たすことを証明する．ところで期待値オペレーターの線形性より(a)の性質は明らかである．また $x\in X^{++}$ なる確率変数の期待値が厳密に正であることも明らかである．従って後は(c)の性質を証明すればよい．$\underline{\theta}\in\Theta$ より，$\underline{\theta}$ は自己充足的であることから，

$$\underline{\theta}(t_{i-1})^T\cdot\underline{S}(t_i)$$
$$=\underline{\theta}(t_i)^T\cdot\underline{S}(t_i)\quad\forall i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \mathrm{n}$$

を満たす．従って t_{i-1} 期における条件付き期待値をとると，

$$E^*\ [\underline{\theta}((t_{i-1})^T\cdot\underline{S}(t_i)\mid F_{t_{i-1}}]$$
$$=E^*\ [\underline{\theta}((t_i)^T\cdot\underline{S}(t_i)\mid \mathrm{F}_{t_{i-1}}]$$
$$\forall i=1,2,3,\cdots,\mathrm{n}\ \cdots\cdots(9)$$

一方，$\underline{S}(t)$ の各要素 $S_1(t)$，$S_2(t)$ は P^* のもとでマルチンゲールに従うので，

$$E^*\ [\underline{\theta}((t_{i-1})^T\cdot\underline{S}(t_i)\mid F_{t_{i-1}}]$$
$$=\underline{\theta}(t_{i-1})^T\cdot E^*\ [\underline{S}(t_i)\mid F_{t_{i-1}}]$$
$$=\theta(t_{i-1})^T\cdot\underline{S}(t_{i-1})$$
$$\forall i=1,2,3,\cdots,\mathrm{n}\ \cdots\cdots(10)$$

となる．(9)，(10)式より，

$$E^*\ [\underline{\theta}((t_i)^T\cdot\underline{S}(t_i)\mid F_{t_{i-1}}]=\underline{\theta}(t_{i-1})^T\cdot\underline{S}(t_{i-1})\quad\forall i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \mathrm{n}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}\underline{\theta}(0)^T\cdot\underline{S}(0)&=\underline{\theta}(t_0)^T\cdot\underline{S}(t_0)\\&=E^*\ [\underline{\theta}(t_1)^T\cdot\underline{S}(t_1)\mid F_{t0}]\\&=E^*\ [E^*\ [\underline{\theta}(t_2)^T\cdot\underline{S}(t_2)\mid F_{t1}]\\&\quad\mid F_{t0}]\\&=E^*\underline{\theta}(t_2)^T\cdot\underline{S}(t_2)\mid F_{t0}]\\&\cdots\\&=E^*\ [\underline{\theta}(T)^T\cdot\underline{S}(T)\mid F_{t0}]\\&=E^*\ [\underline{\theta}(T)^T\cdot\underline{S}(T)]\end{aligned}$$

すなわち，

$$\psi(\underline{\theta}(T)^T \cdot \underline{S}(T)) = \underline{\theta}(0)^T \cdot \underline{S}(0) \quad \forall \underline{\theta} \in \Theta$$

がいえた．以上で確率測度 P^*から定義された汎関数が一連の性質を満たすことが示された．

次に $P^*(E) := \psi(I(B))$　$B \in F$としよう．まず $I(\{\omega_k\}) \in X^{++} (k=1,\cdots,m)$であることより，$P^*(\{\omega_k\}) = \psi(I\{\omega_k\})$　$(k=1,2,3,\cdots,m)$，また $I(\Omega)$が安全資産を意味することから $P^*(\Omega) = \psi(I(\Omega)) = 1$となり P^*が確率測度であるがいえる．次に，$P(\omega_k) = 0$のとき無危険裁定機会が存在しないことから $\psi(I(\{\omega_k\}) = 0$が成立し，$P^*(\{\omega_k\}) = 0$，同様に $P(\omega_k) > 0$のとき $I(\{\omega_k\}) \in X^{++}$より $P^*(\{\omega_k\}) > 0$がいえ，P^*の絶対連続性が成立する．次にこの確率測度のもとで $(S_2(t), F_t)_{t \in T}$がマルチンゲールに従うことを示そう．そこで F_t-可測な事象 B_tを取り出し，この事象に依存させる以下のような二つの自己充足的単投資戦略を考えよう．

- 投資戦略A… t期に事象 B_tが生起したときこの時点で安全資産を空売りして危険資産を1枚購入する．
- 投資戦略 B… 事象 B_tが生起したときu期 $(u>t)$で安全資産を空売りして危険資産を1枚購入する．

いずれの投資戦略も0期の資金コストは0である．投資戦略Aに従ったとき T期の投資家の資産は空売りのポジションと危険資産投資のポジションを合わせて $(-S_2(t) + S_2(T)) \cdot \mathrm{I}(B_t)$となるので，汎関数 ψの3番目の性質，

$$\psi(\underline{\theta}(T)^T \cdot \underline{S}(T)) = \underline{\theta}(0)^T \cdot \underline{S}(0) \quad \forall \underline{\theta} \in \Theta$$

より，

$$\psi((-S_2(t) + S_2(T)) \cdot I(B_t)) = 0$$

となる．これを equivalent martingale measure を用いて表現すると，

$$E^* \left[(-S_2(t) + S_2(T)) \cdot I(B_t) \right] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

を得る．B戦略についても同様の手続きより，

$$E^* \left[(-S_2(\mathrm{u}) + S_2(T)) \cdot I(B_t) \right] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

が得られる．(11), (12)式より，

$$E^* \left[(-S_2(t) + S_2(T)) \cdot I(B_t) \right] = E^* \left[(-S_2(u) + S_2(T)) \cdot I(B_t) \right]$$

となるが，更に整理すると，

$$E^* \left[(S_2(t) \cdot I(B_t) \right] = E^* \left[S_2(\mathrm{u}) \cdot I(B_t) \right]$$

となる．だがこれは $S_2(t)$が $S_2(\mathrm{u})$の t期における条件付き期待値であることを表す定義式そのものである．時点 t,u の選択は任意であるから以上より任意の可算個の時点からなる集合 $T' := \{t_i : 0 \leqq t_i \leqq T,\ i \in N\}$のうえで $(S_2(t), F_t)_{t \in T}$ がマルチンゲールに従うことが証明された．T'の選び方は任意であるから以上より $(S_2(t), F_t)_{t \in T}$がマンチンゲールに従うことがいえた．

4　ブラック・ショールズモデルにおけるオプション価格の一意性

この節ではイントロダクションで提示した問題意識に解答を与えるためブラック・ショールズモデルで採用している拡散過程，幾何ブラウン運動過程のクラスの上で前節で定義した確率測度 P^*が存在し，かつ一意的に存在することを示す．ブラック・ショールズモデルに対応する証券市場モデルを記述しよう．

- (Ω, F, P)…確率空間
- $T :=$ $[0, T]$ …取引時間の集合
- $\{F_t : t \in T\}$…これは1次元ブラウン運動 $\{W(t) : t \in T\}$から生成される事象の族である．すなわち，
  $\{\omega : W(t_1) \in B_1, \cdots, W(t_k) \in B_k \quad 0 \leqq t_1 < \cdots < t_k \leqq t,\ k$は任意の自然数，$B_i (i=1,\ \cdots,\ k)$はボレル集合$\}$
  という事象の族を含む最小の σ-field である．
- $\{S(t, \cdot) : t \in T\}$…第1要素はさきに定義したものと同じ．第2要素は次のような確率過程を持つ．

$$\log(S_2(t)) = \log(S_2(0)) + \int_0^t (\mu - 1/2\sigma^2)\, dS + \int_0^t \sigma\, dW(s) \cdots\cdots (13)$$

この確率過程は幾何ブラウン運動過程で $S_2(t)$が対数正規分布に従う，すなわち対数値 $\log(S_2(t))$が平均 $(\mu - 1/2\sigma^2) \cdot t$，分散 $\sigma^2 \cdot t$の正規分布に従う確率過程である．伊藤の補題を適用すると，

$$dS_2(t) = (\mu \cdot S_2(t))\, ds + (\sigma \cdot S_2(t))\, dW(s)$$

という確率微分方程式が容易に得られる[3]．さてこの証券市場モデルのもとでは実は equivalent martingale measure はただ一つ存在することがいえる．Harrison and Kreps (1979) は一定の数学的条件をおいて証券価格がかなり広いクラスの拡散過程に従う証券市場モデル上でこの定理を証明している．本稿では証券の確率過程を幾何ブラウン運動過程に限定し，ある数学的条件のもとで彼らとは異なる証明を与えよう．まず定理を証明するための幾つかの準備命題を与える．

補題 3 (Kunita & Watanabe)：確率空間 (Ω, F, P)，σ-field の増大系 $\{F_t : t\in T\}$ が前述のように与えられるとき，$(\zeta(t), F_t)_{t\in T}$ が 2 乗可積分マルチンゲールに従うならば，必ず次のような条件，

$$E\left[\int_0^T |Y(s)|^2 ds\right] < \infty$$

を満たす確率過程 $\{Y(t) : t\in T\}$ が存在して，$\zeta(t)$ は $Y(t)$ を被積分関数とする伊藤積分で以下のように一意的に表現される．

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t Y(s)\,dW(s)$$

この補題は 2 乗可積分マルチンゲールの表現定理の 1 次元ブラウン運動過程版であり，より一般的な定理も今日動学的資産市場均衡理論を議論する上では重要なものとなってくる．この $\zeta(t)$ は初期値を 1 とするとき伊藤の補題より次のように表現可能であることが容易に確認できる．

$$\zeta(t) = \exp\left(\int_0^t (-1/2)\,\phi^2(s)\,ds + \int_0^t \phi(s)\,dW(s)\right)$$

但し $\phi(s) := Y(s)/\zeta(s)$ である．

次の補題は Girsanov (1960) によるもので Girsanov の定理と呼ばれているがこれも重要である．

補題 4 (Girsanov)：$\{W(t) : t\in T\}$ が標準ブラウン運動過程のとき次の条件を満たす確率過程 $\{\phi(t) : t\in T\}$，

$$E\left[\int_0^T |\phi(s)|^2 ds\right] < \infty$$

を用いて，

$$W^*(t) := W(t) - \int_0^t \phi(s)\,ds$$

と定義される確率過程 $\{W^*(t) : t\in T\}$ は次に定義する確率測度 P^* のもとで標準ブラウン運動過程に従う．

$$P^*(B) := \int_B \zeta^*(\omega)\,P(d\omega)$$

但し $\zeta^* := \exp\left(\int_0^T (-1/2)\,\phi^2(s)\,ds + \int_0^T \phi(s)\,dW(s)\right)$ である．

最後に次の補題を証明する．

補題 5：η が 2 乗可積分な確率変数のとき確率過程 $\{\xi(t) : t\in T\}$ を，

$$\xi(t) := E[\eta \mid F_t]$$

と定義すると $(\xi(t), F_t)_{t\in T}$ は 2 乗可積分マルチンゲールで，かつ $\xi(T) = \eta$ である．

(証明) Jensen の不等式と条件付き期待値の公式より，

$$\begin{aligned} E[\xi^2(t)] &= E[(E[\eta \mid F_t])^2] \\ &\leqq E[E[\eta^2 \mid F_t]] \\ &= E[\eta^2] < \infty \end{aligned}$$

となり，2 乗可積分性は確認される．またマルチンゲール性も条件付き期待値の公式より，

$$\begin{aligned} E[\xi(u) \mid F_t] &= E[E[\eta \mid F_u] \mid F_t] \\ &= E[\eta \mid F_t] \\ &= \xi(t) \end{aligned}$$

と確認される．$\xi(T) = \eta$ は

$$\begin{aligned} E[\eta \mid F_T] &= E[\eta \mid F] \\ &= \eta \end{aligned}$$

より得られる．

以上の準備のもとに次の仮定のもとで定理を証明する．

仮定 2：equivalent maringale measure が存在するとき P に関するラドンニコディム導関数の 4 次のモーメントが存在する．

定理 3：仮定 2 のもとではブラック・ショールズモデルに対応する証券市場モデルにおいては equivalent martingale measure P^* が一意的に存在する．

(equivalent martingale measure の存在証明)

equivalent martingale measure を実際に構成すればよい．$\zeta(T)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \zeta(T) = \exp\Big(&\int_0^T (-1/2)\,(-\mu/\sigma)^2 ds \\ &+ \int_0^T (-\mu/\sigma)\,dW(s)\Big) \end{aligned}$$

これは補題 4 における ζ^* を $\phi(s) := -\mu/\sigma$ としたときのものに対応することに注意したい．このとき，

$$\begin{aligned} \zeta(T) = \exp\big(&(-1/2)\,(\mu/\sigma)^2 T \\ &+ (-\mu/\sigma)\,(W(T) - W(0))\big) \end{aligned}$$

あるいは，

$$\begin{aligned} \log\zeta(T) = &(-1/2)\,(\mu/\sigma)^2 T \\ &+ (-\mu/\sigma)\,(W(T) - W(0))) \end{aligned}$$

となり $\zeta(T)$ は平均 1 の対数正規分布に従うことがわかる．従って，$E[\zeta(T)] = 1$ かつ $E[(\zeta(T))^2] < \infty$ となることがいえる．さらに指数関数の性質から $\zeta(T) > 0$ (P-a.s) が成立するので，$\zeta(T)$ を用いて定義される確率測度，

$$P^*(B) := \int_B \zeta(T)\,P(d\omega) \quad B \in F$$

は P に関して絶対連続な確率測度となる．そして補題 4 よりこの確率測度のもとでは，

$$\begin{aligned} W^*(t) &:= W(t) - \int_0^t \phi(s)\,ds \\ &= W(t) + \int_0^t (\mu/\sigma)\,ds \end{aligned}$$

で定義される確率過程 $\{W^*(t) : t\in T\}$ は標準ブラウン

運動過程に従うこととなる.

この $W^*(t)$ を(13)式に代入すると,

$$\begin{aligned}&\log(S_2(t))\\&=\log(s_2(0))+\int_0^t(\mu-1/2\sigma^2)ds+\sigma\int_0^t dW(s)\\&=\log(s_2(0))+\int_0^t(\mu-1/2\sigma^2)ds+\sigma\int_0^t dW^*(s)\\&\quad-\int_0^t\mu\,ds\\&=\log(s_2(0))+\int_0^t(-1/2\sigma^2)ds+\int_0^t dW^*(s)\end{aligned}$$

を得る. 従ってこの確率過程を確率測度 P^* で期待値をとると,

$$\begin{aligned}E^*[S_2(t)]&=E^*[S_2(0)\exp(\int_0^t(-1/2\sigma^2)ds\\&\quad+\int_0^t\sigma\,dW^*(s))]\\&=S_2(0)\cdot E^*[\exp(\int_0^t(-1/2\sigma^2)ds\\&\quad+\int_0^t\sigma\,dW^*(s))]\end{aligned}$$

となり, 右辺の期待値 $W^*(s)$ は標準ブラウン運動過程に従うことから標準対数正規分布の期待値1であることがわかる. 従って,

$$E^*[S_2(t)]=S_2(0)$$

が成立し, 確率測度 P^* に関して $(S_2(t),F_t)_{t\in T}$ はマルチンゲールに従うことがいえた.

(equivalent martingale mcasure の一意性の証明)

equivalent martingale measure が存在したとしてそのラドンニコディム導関数を ρ とするとき補題5を $\eta:=\rho$ と $\eta:=\rho S_2(T)/S_2(0)$ の二つのケースについて適用する.

$$\xi_1(t):=E[\rho\mid F_t]$$

と定義すると $(\xi_1(t),\mathrm{F}_t)_{t\in T}$ は明らかに初期値1の2乗可積分マルチンゲールに従い, $\xi_1(T)=\rho$ となる. 従って Kunita & Watanabe の補題3が適用可能で $\xi_1(t)$ は,

$$E[\int_0^T|\nu_1(s)|^2ds]<\infty$$

を満たすある確率過程 $\{\nu_1(t):t\in T\}$ により一意的に

$$\xi_1(t)=\exp(\int_0^t(-1/2(\nu_1(s))^2)ds+\int_0^t\nu_1(s)dW(s))$$

と表現可能である. そこで $\xi_1(T)=\rho$ であることに注意すると,

$$\rho=\exp(\int_0^T(-1/2(\nu_1(s))^2)ds+\int_0^T\nu_1(s)dW(s))$$

を得る. これより equivalent martingale measure のもとで条件付き確率のラドンニコディム導関数を ρ_t と表すと[4], それは,

$$\begin{aligned}\rho_t=&\exp(\int_t^T(-1/2(\nu_1(s))^2)ds\\&+\int_t^T\nu_1(s)dW(s))\quad\forall t\in T\end{aligned}\quad\cdots\cdots(14)$$

と表される. 次に,

$$\xi_2(t):=E[\rho S_2(T)/S_2(0)\mid F_t]$$

と定義すると Jensen の不等式, コーシー・シュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned}&E[(E[\rho S_2(T)/S_2(0)\mid F_t])^2]\\&\leqq E[E([\rho S_2(T)/S_2(0))^2\mid F_t]]\\&=E[(\rho S_2(T)/S_2(0))^2]\\&=E[(\rho S_2(T))^2]/(S_2(0))^2\\&\leqq E[(\rho)^4]^{1/2}E[(S_2(T))^4]^{1/2}/(S_2(0))^2\end{aligned}$$

となる. $E[(\rho)^4]$ は仮定2より有限, $E[(S_2(T))^4]$ は $S_2(T)$ が対数正規分布に従うことから有限の値をとるので結局 $E[(\rho S_2(T)/S_2(0))^2]$ は有限であり, $\xi_2(t)$ は2乗可積分であることがいえる. また equivalent martingale measure の定義より初期値は,

$$\begin{aligned}\xi_2(0)&=E[\rho S_2(T)/S_2(0)]\ \text{は,}\\&=E^*[S_2(T)/S_2(0)]\\&=E^*[S_2(T)]/S_2(0)\\&=S_2(0)/S_2(0)\\&=1\end{aligned}$$

となり1である. 従ってこの確率過程に対しても Kunita & Watanabe の補題3が適用可能で $\xi_2(t)$ は,

$$E[\int_0^T|\nu_2(s)|^2ds]<\infty$$

を満たすある確率過程 $\{\nu_2(t):t\in T\}$ により一意的に

$$\xi_2(t)=\exp(\int_0^t(-1/2(\nu_2(s))^2)ds+\int_0^t\nu_2(s)dW(s))$$

と表現可能である. そこで $\xi_2(T)=\rho S_2(T)/S_2(0)$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}&\rho S_2(T)/S_2(0)\\&=\exp(\int_0^T(-1/2(\nu_2(s))^2)ds+\int_0^T\nu_2(s)dW(s))\quad\cdots\cdots(15)\end{aligned}$$

を得る. ところで $S_2(T)/S_2(0)$ は(13)式より,

$$\begin{aligned}&S_2(T)/S_2(0)\\&=\exp(\int_0^T(\mu-1/2\sigma^2)ds+\int_0^T\sigma dW(s))\quad\cdots\cdots(16)\end{aligned}$$

と与えられるので, (16)式を(15)式に代入するとラドンニコディム導関数,

$$\begin{aligned}\rho=&\exp(\int_0^T(-1/2(\nu_2(s))^2-\mu+1/2\sigma^2)ds\\&+\int_0^T(\nu_2(s)-\sigma)dW(s))\end{aligned}$$

が得られる. (14)式と同様, 条件付き確率のラドンニコディム導関数は,

$$\begin{aligned}\rho_t=&\exp(\int_t^T(-1/2(\nu_2(S))^2-\mu+1/2\sigma^2)ds\\&+\int_t^T(\nu_2(s)-\sigma)dW(s))\\&\forall t\in T\quad\cdots\cdots(17)\end{aligned}$$

となるので(14), (17)より,

$$\begin{aligned}&\int_t^T(-1/2(\nu_2(s))^2-\mu+1/2\sigma^2+1/2(\nu_1(s))^2)ds\\&+\int_t^T(\nu_2(s)-\sigma-\nu_1(s))dW(s))\\&=0\quad\forall t\in T\end{aligned}$$

を得る. これより,

$-1/2(v_1(s))^2 = -1/2(v_2(s))^2 - \mu + 1/2\sigma^2$

$v_1(s) = v_2(s) - \sigma \quad \forall s \in T$

という $v_1(s)$，$v_2(s)$ に関する連立方程式を得る．これを $v_1(s)$ について解けば，

$v_1(s) = -\mu/\sigma \quad \forall s \in T$

となり，equivalent martingale measure が存在すれば，必ずそのラドンニコディム導関数は一意的に，

$$\rho = \exp\left(\int_0^T (-1/2(-\mu/\sigma)^2)\,ds + \int_0^T (-\mu/\sigma)\,dW(s)\right) \quad \cdots\cdots (18)$$

となることがいえた．これは存在証明で与えたラドンニコディム導関数にほかならない

この定理よりオプションの理論価格は equivalent martingale measure を用いて次のように与えられることとなる．すなわち，満期 T 期，行使価格 k のオプションの T 期の価格=ペイオフ・スケデュールは max $[S_2(T) - \mathrm{K},\ 0]$ であるからオプションの t 期の価格を $G(S_2(t),\ t)$ と表すこととすると，その0期での均衡価格 $G(S_2(0),\ 0)$ は

$$\psi(G(S_2(T))) = E^*\ [G(S_2(T))] \quad \cdots\cdots (19)$$

$$(G(S_2(T)) := \max\ [S_2(T) - K, 0])$$

で与えられる．

この定理の結果によると結局，証券の現在価格を与える汎関数はブラック・ショールズモデルにおいては一意的であることになる．この汎関数はいわゆるアロー・デブループライスに対応する概念であるから，いわば経済は本質的に完備市場となっていることを意味するわけである．それ故にイントロダクションで説明したようにブラック・ショールズモデルにおいては対象としている証券と安全資産の二つから無危険裁定機会を許さないオプションの理論価格が一意的に求まるのである[5)]．

5　ブラック・ショールズモデルと危険中立化法について

イントロダクションにおいてブラック・ショールズモデルはオプションの理論価格を投資家の選好を危険中立的として求めること，すなわち危険中立化法が可能であることにふれた．我々のブラック・ショールズモデルでは安全資産の利子率が常時0であるからこの危険中立化法のもとでは危険資産の期待収益率が0のときのオプションの理論価格を求めることに対応する．本節の目的はこの危険中立化法のもとでオプションの理論価格を得ることが可能であるという性質を equivalent martingale measure による価格付けから説明することである．このたぶんにトリッキーな性質をもたらす理由には先に述べた補題4の Girsanov の定理が重要な役割を果たしているのである．そこで準備としてこの Girsanov の定理から次のような命題を証明する．

補題6：次の二つの幾何ブラウン運動過程に従う確率過程があったとする．

$$dS_2(t) = \mu \cdot S_2(t)\,dt + \sigma \cdot S_2(t)\,dW(t)$$

$$dS_2^*(t) = (\mu + \delta) \cdot S_2^*(t)\,dt + \sigma \cdot S_2^*(t)\,dW(t)$$

$S_2(0) = S_2^*(0)$ ならば確率測度 P^* を，

$$P^*(B) := \int_B \zeta^*(\omega)\,\mathrm{P}(d\omega)$$

$$(\zeta^* := \exp\left(\int_0^T (-1/2)\,(\delta/\sigma)^2(s)\,ds + \int_0^T (\delta/\sigma)\,dW(s)\right)$$

である．）

と定義すると $S_2(T)$ の P^* に関する分布関数 $F^*{}_s$ と $S_2^*(T)$ の P に関する分布関数 F_{s*} は一致する，すなわち，

$$F^*{}_s(y) = F_{s*}(y) \quad \forall y \in R$$

が成立する．

（証明）確率過程 $\{W^*(t): t \in T\}$ を，

$$W^*(t) := W(t) - \int_0^t (\delta/\sigma)\,ds$$

と定義すると，

$$S_2(t) = \int_0^t (\mu + \delta) \cdot S_2(s)\,ds + \int_0^t \sigma \cdot S_2(t) \cdot dW^*(s)$$

となる．従って二つの確率過程の確率微分方程式は，

$$dS_2(t) = (\mu + \delta) \cdot S_2(t)\,dt + \sigma \cdot S_2(t)\,dW^*(t)$$

$$dS_2^*(t) = (\mu + \delta) \cdot S_2^*(t)\,dt + \sigma \cdot S_2^*(t)\,dW(t)$$

となる．補題4より $\{W^*(t): t \in T\}$ は P^* に関して標準ブラウン運動過程に従うのでこれより補題が成立するのは明らかである．

この準備命題を利用して危険中立化法と equivalent martingaale measure のもとでの理論価格の導出が同値であることを証明する．

命題：ブラック・ショールズモデルにおいて，危険中立化法によって得られるヨーロッピアンオプションの理論価格と equivalent martingale measure によって得られる理論価格は一致する．

（証明）ヨーロッピアンオプションの満期T期の投資

家のペイオフスケデュールを表す関数 $G(S_2(T)=\max[S_2(T)-K,\ 0]$ は明らかに連続関数である．従って変数変換により，

$$E^*[G(S_2(T)] = \int_\Omega G(S_2(T,\ \omega))P^*(d\omega) = \int_R G(S_2(T))dF^*(S_2(T)) \quad (20)$$

と書き換えることができる．ここで仮に市場の投資家が危険中立的である経済を想定してその経済における証券を初期値を実際の証券価格と同じ値に設定し，その均衡確率過程 $\{S_2^*(t): t\in T\}$ を確率微分方程式で表すことにすると，安全資産の収益率は0であるから，証券の期待収益率も0であり，

$$dS_2^*(t)=\sigma\cdot S_2^*(t)dW(t)$$

となるはずである．これは補題6における δ を $-\mu$ に設定した確率過程に対応する．この確率過程に対しても変数変換が可能で，

$$E[G(S_2^*(T)] = \int_R G(S_2^*(T))dF(S_2^*(T)) \cdots\cdots (21)$$

となる．そして補題6より，

$$\int_R G(S_2(T))dF^*(S_2(T)) = \int_R G(S_2^*(T))dF(S_2^*(T)) \cdots\cdots (22)$$

となるから(20)，(21)，(22)より，

$$\psi(G(S_2(T))) = E[G(S_2^*(T))]$$

を得る．ところでこの式の右辺は証券の期待収益率が安全資産と同じ0の仮想的な経済のもとでの0期のオプション価格である．従ってこれが危険中立的な投資家で構成される経済で成立する理論価格にほかならない．よって命題は証明された．

このように証券価格が幾何ブラウン運動過程に従うとき市場の投資家のリスクに対する選好を危険中立的としてオプションの理論価格を計算しても同じものが得られることになるのである．この危険中立化法はより一般的な拡散過程の証券市場モデルに対しても適用可能である．ただこの方法が妥当性を持つためには少なくともこの証明をみる限り Girsanov の定理が重要な役割を持っていて，この定理が拡散過程固有なものであることからかんがみると如何なる確率過程の証券市場モデルにも危険中立化法が適用できるとは限らないことには注意しなくてはいけないといえる．

6 ブラック・ショールズモデルにおけるオプション価格関数の満たす偏微分方程式について

最後に前節で正当化された危険中立化法を所与として得られるオプションの理論価格がイントロダクションで導出した偏微分方程式を満たすことを示そう．

前節の結果から汎関数 ψ，あるいは equivalent martingale measure のもとで得られるオプションの理論価格について次のような式が成立する．すなわち t 期における証券の価格を同じ値に設定すると危険中立化法によりオプションの理論価格は，

$$G(S_2(t)) = E^*[G(S_2(T))\mid F_t] = E[G(S_2^*(T))\mid F_t]$$

となる．条件付き期待値の公式を適用し，$S_2^*(t)$ が P に関してマルチンゲールであることを利用すると，

$$= E[E[G(S_2^*(T))\mid F_{t\Delta}]\mid F_t] = E[G(S_2^*(t+\Delta),\ t+\Delta)\mid F_t]$$

となる．従って右辺と左辺から，

$$E[G(S_2^*(t+\Delta),\ t+\Delta)-G(S_2^*(t),\ t)\mid F_t]=0$$

を得る．両辺を Δ で割って Δ を0に近づけると，

$$\lim_{\Delta\to 0}(1/\Delta)E[G(S_2^*(t+\Delta),t+\Delta) - G(S_2^*(t),t)\mid F_t]=0 \cdots\cdots (23)$$

となる．が，左辺は関数 $G(S_2(t),\ t)$ の確率微分方程式におけるドリフト項の定義式にほかならない．イントロダクションで説明したとおりオプションの理論価格が対象とする証券価格，時間の関数であり，規則性の条件を満たすとして伊藤の補題を適用するとこの項は $(1/2)\sigma^2\cdot S^2\cdot G_{ss}+G_t$ で与えられる．従ってこれを(23)式にあてはめると

$$(1/2)\sigma^2\cdot S^2\cdot G_{ss}+G_t=0$$

となるが，これはイントロダクションで導いた偏微分方程式

$$(1/2)\sigma^2\cdot S^2\cdot G_{ss}+G_t+r\cdot G_s\cdot S-r\cdot S=0$$

で $r=0$ としたものにほかならない．このことから汎関数で与えられるオプションの理論価格は偏微分方程式を解くという作業によって実際に求められることがわかる．

実はこの偏微分方程式は確率過程論においてコルモゴロフの後向き方程式といわれるもので拡散過程のもとでの関数の期待値は必ず規則性の条件を満たし，この偏微分方程式の解となっていることが知られている．イントロダクションではオプション価格の規則性を仮定したが，オプションの理論価格を求めるという作業は equivalent martingale measure のもとで将来のペイオフの期待値を求めることなので，株式価格の関数としての規則性は自動的に満たされることになるのである．そしてオプション価格が偏微分方程式を解くこ

とにより得られることは，拡散過程に従う確率変数の期待値はコルモゴロフの後向き方程式という偏微分方程式を解くことから求まる，という数学的事実からしてしごく当り前のことなのである．

7　おわりに

このノートではHarrison and Kreps (1979)とほぼ同じ構成ではあるものの，モデルに簡単化の仮定を付加してモデルのクラスを限定し，より直観的な形でブラック・ショールズモデル特徴を説明してきた．第3節で均衡モデルの数学的条件としてequivalent martingale measureの存在が証明されたのち，第4節でブラック・ショールズモデルにおいてはequivalent martingale measureが一意的に存在することから，オプションの理論価格が一意的に与えられることが示された．そこではKunita and Watanabeの2乗可積分マルチンゲールの表現定理が鍵となっていることが証明の過程で示された．Harrison and Kreps (1979)ではGirsanovの定理を定理3の証明において利用しているが我々の証明では全く用いていない．従って定理3の本質は2乗可積分マルチンゲールの表現定理であるといえよう．第5節ではGirsanovの定理が鍵となって拡散過程モデルでは危険中立化法が正当化されることが示された．そして第6節でオプション価格を与える偏微分方程式は数学的にはコルモゴロフの後向き方程式そのものであり，その意味でこの偏微分方程式が均衡条件として得られるのはしごく当然であることが説明された．このように裁定という経済学原理を背後に持ちながらもブラック・ショールズモデルは拡散過程に関する多くの数学的性質に強く依存したものといえる．本稿で説明した定理1，2，3はいくつかの数学的条件のもとで一般的に成立するが，その厳密な証明についてはHarrison and Kreps (1979)を参照されたい．

脚注

1)　この理由は定理2の証明の過程で明らかになる．

2)　状態空間が可算無限以上の濃度の場合についてはリースの表現定理が重要となる．
これについてはHarrison and Kreps (1979)を参照せよ．

3)　実際にはブラック・ショールズモデルでは安全資産の利子率は一定の定数rで与えられている．すなわち，彼らのモデルで実際に登場してくる証券をS_1'，S_2'と表すと，

$\log(S_1'(t)) := \log(S_1'(0) + \int_0^t r ds$

$\log(S_2'(t)) := \log(S_2'(0) + \int_0^t (\mu' - 1/2(\sigma)^2) ds + \int_0^t \sigma dW(s)$

となる．そこで新しく，

$S_1(t) := S_1'(t)/\exp(rt) = S_1'(0)$,

$S_2(t) := S_2'(t)/\exp(rt)$

とすれば$\mu := \mu' - r$と定義することにより(12)式が得られる．本来ならばこのように指数関数exp(rt)で割り引いてモデルを変換しても前節の諸定理が成立することを確認する必要があるが，それは先の証明を拡張することで容易に示すことが可能なのでここでは省略し，変換後のものをブラック・ショールズモデルとして議論を進めることにしたい．

4)　実際は条件付き確率についてはラドン・ニコディム導関数という呼び方はしないがその意味は十分伝わると考え，ここではρ_tを「条件付き確率のラドン・ニコディム導関数」と呼んだ．

5)　イントロダクションにおいて静学的資産市場理論において市場で利用可能な証券のペイオフが確率変数の空間の基底を構成すれば市場が完備になる，と述べた．この理論的結果は動学的資産市場モデルにおいてはラフな説明をすると「市場の証券価格の確率過程がequivalent martingale measureのもとでマルチンゲールの空間の基底になっているとき市場は本質的に完備市場となる」という命題に変更される．この論点についてはDuffie and Huang (1985)を参照せよ．

参考文献

Black, F. and M. Sholes. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabiities" *Journal of Political Economy* 81.

Duffie, D. and C. Huang. 1985, "Implementing Arrow-Debrew Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities", *Econometrica* 53.

Girsanov, I.V. 1960, "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution", *Theory of Probability and Its Applications* 5.

Harrison, J.M. and D.M. Kreps. 1979, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20

Kunita, K. and S. Watanabe. 1967, "On Square Integrable Martingales", *Nagoya Mathematical Journal* 30

〔もりた　ひろし　横浜国立大学経営学部講師〕