<紹　介>

経営のための数理計画法入門

笹　井　　均

物理学においては，現実の捨象と抽象化によって本質的要因を抽出し，仮説を設定し，それに従いながらモデルを構成することによって実際の物理系の運動を説明しようとする立場をとる．

このような考え方は，経済主体を研究対象とした場合にも有効である．その際になされる仮説は最適化(optimization)という概念であろう．経済主体はなんらかの意味で，適切な拘束条件のもとで最適化を行っているという前提を置き，その帰結として現実の経済主体の行動を説明し，分析しようとするわけである．

たとえば，最適化の目的を利潤最大化，拘束条件を技術的制約条件とし，企業の行動を分析すること，あるいは最適化の目的を効用最大化，拘束条件を予算制約条件として消費者の行動を分析することなどがその例であろう．

このような視点からすれば経済主体の行動を分析する用具として，最適化の手法は，きわめて重要な役割りをになっているということができる．

最適化の代表的手法として数理計画法がある．数理計画法の理論は，きわめて華麗でかつ精緻なものであるが，初学者にとっては抽象度が高くとっつきにくいものであると思われる．

本稿は経営学部に入学し，これから数理計画法を学び，経営への適用を考えようとしている学生にとって，筆者なりに考えた平易な解説であり，入門のためのやさしい手引である．

なお，本稿は，線形代数のごく初歩的な数学的知識をもった学生を対象としている．

1. 微　分

1-1. 導関数

開区間 $I=(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$ を定義域として含む関数 $f:I\to R$ を考える．$x\in I$ についてその値が変化するという意味で関数 f を $f(x)$ で表わす．

$x\in I$ に対して，

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

が存在するとき，その極限値を x における関数 $f(x)$ の**微係数**と呼び，$f(x)$ は x において微分可能であるという．開区間 I の各点 x に対して微係数が定まるとき，その微係数は x の関数と考えることができる．その関数を $f(x)$ の**導関数**(derivative)と呼び，$f'(x)$，$\dfrac{df(x)}{dx}$で表わす．導関数が微分可能ならば，さらにその導関数を定義でき，これを $f(x)$ の2次導関数と呼び，$f''(x)$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ で表わす．同様にして，n 次の導関数を $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ と書くことにする．特にことわらない限り，本稿で扱う関数は必要なだけ微分可能であるものとする．また，n 次導関数が存在して連続であるとき，$f(x)$ は n 回連続微分可能であるという．

(x_0,y_0), $y_0=f(x_0)$ を曲線 $y=f(x)$ の点とし，直線 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ を考える．x_0 の近くで，この直線は $f(x)$ のグラフに密着している[1]．その意味で，この直線を $f(x)$ のグラフ上の点(x_0,y_0) における**接線**という．

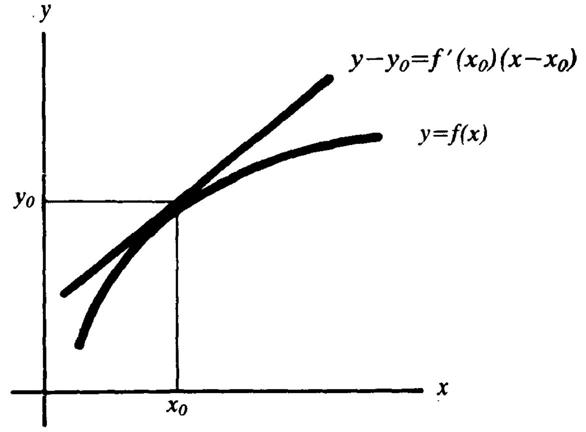

図 1

定理 1-1 (平均値の定理) $f(x)$ が閉区間 $[a,b]=\{x\mid a\leq x\leq b\}$ で連続，開区間(a,b)で微分可能であるとする．このとき，適当な点 $c, a<c<b$ を選んで

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c) \tag{2}$$

とできる．

$b=a+h$ と置くと上式は，また

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \quad 0<\theta<1$$

とも書ける．

通常我々の扱う関数は，無限回微分可能であることが多く，多項式関数によって近似することができる．また $f(x)$ を $x=a$ のまわりで

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots \tag{3}$$

と展開できることがある．この展開は **Tayler 展開**と呼ばれ，Tayler 展開が a の近くで成立するとき，$f(x)$ は a において解析的であるという．$f(x)$と Tayler 展開の $n-1$ 次まで近似式との誤差 R_n は

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \quad 0<\theta<1$$

となることが知られている(**Tayler の定理**)．

Tayler 展開は，また，$a=x_0, x=x_0+h$ と表わすと

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\cdots\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{h!}h^n+\cdots\cdots$$

の形式をとる．

問 次の式を確認せよ．

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\cdots,$$

$$-1<x<1$$

1-2. 極 値

よく知られているように，$f'(x)$の正負は $f(x)$の増減に関係し，$f''(x)$ の正負は $f(x)$ の凹凸に関係している．

定義 1-1 区間 $I=[a,b]$ の任意の2点 x_1, x_2 と $0<\alpha<1$ に対して

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \tag{4}$$

が成立するとき，$f(x)$ は I において**凹関数**であるという．また，異なる2点 x_1, x_2 と $0<\alpha<1$ に対して

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \tag{5}$$

が成立するならば，**狭義の** (strictly) **凹関数**であるという．

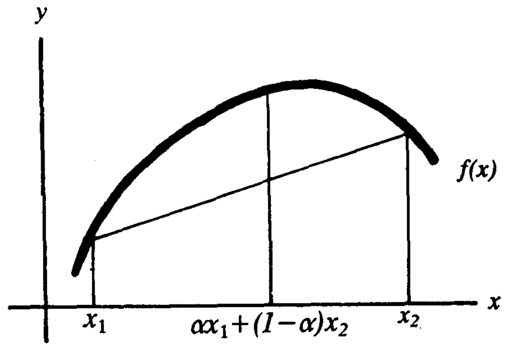

図 2

定理 1-2 $f(x)$ は $I=[a,b]$ で連続，(a,b)で2回連続微分可能であるものとする．このとき，凹関数であるための必要十分条件は，(a,b) でつねに $f''(x)\leq 0$ となることである．とくに，$f''(x)<0$ ならば，狭義の凹関である(逆は一般には成立しない)．

上の定義，定理において，不等号が逆向きのときは，凸関数に対応するものとなる．

$f(x_0)$ が x_0 の近くで $f(x)$ の最大値となるとき，すなわち，十分に小さい $h\fallingdotseq 0$ に対して，つねに

$$f(x_0)\geq f(x_0+h)$$

が成立するとき，$f(x)$ は $x=x_0$ で極大になるといい，$f(x_0)$ を**極大値**(local maximum)という．逆の不等号が成立する場合には，**極小値**(local minimum)という．極大値と極小値の両方を総称して**極値** (local extremum)と呼ぶ．

$x=x_0$ の近くで$f'(x)$が連続だから，$f'(x_0)>0$ なら $f(x)$は x_0 の近くで増加関数，$f'(x_0)<0$ なら $f(x)$は x_0 の近くで減少関数であるから，$f(x)$ が x_0 で極値をとるなら $f'(x_0)=0$ となる．さらに，$f''(x_0)<0$ なら，x_0 の近くで $f''(x)<0$，したがって，$f'(x)$ は x_0 の近くで単調減少となるから，$f'(x_0-h)>f'(x_0)=0>f'(x_0+h)$，$h>0$ となり，次の定理が成立する．

定理 1-3 $f'(x_0)=0$ とする．$f''(x_0)<0$ ならば，x_0 は $f(x)$ の極大値を与え，$f''(x_0)>0$ ならば極小値を与える．

問　$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ の極値を求めよ．

2.　偏　微　分

2-1.　偏導関数

説明を簡単にするため，２変数の関数 $f(x,y)$ について考えていく．

$f(x,y)$ において y を固定すれば，$f(x,y)$ は x だけの関数となり，x に関する微係数を考えることができる．y を定数と考え，x の関数として導関数が存在するなら，それを $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$，$f_x(x,y)$ で表わし，$f(x,y)$ の **x に関する偏導関数**と呼ぶ．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\lim_{|h|\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \tag{6}$$

である．y に関する偏導関数も同様に定義できる．

$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ は，また x, y の関数であるから，その偏導関数が考えられ，それらを２次の偏導関数と呼び，

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right),$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right),$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right),$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)$$

と書くことにする．同様にして，n 次の偏導関数を考えることも可能である．f_{xy} と f_{yx} は，一般には一致しないが，それが存在して連続[2] のときには両者は一致する．n 次までの偏導関数がすべて定義されて連続のとき n 回連続微分可能という．

いま，$F(t)=f(x_0+ht,y_0+kt)$ と置き，t について１変数の **Tayler 展開**が可能ならば，

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\cdots\cdots$$

となり，ここで $t=1$ と置けば２変数の Tayler 展開

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)$$

$$+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{h!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\cdots\cdots \tag{7}$$

が得られる．ここに，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$

は，たとえば $n=2$ のとき，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)$$

$$+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)$$

を表わす．**Tayler の定理**は，

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)$$

$$+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(x_0,y_0)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),$$

$$0<\theta<1$$

の形で求まることも推察できる．

2-2.　全微分

１変数関数 $y=f(x)$ が微分可能なとき，x が $x+\Delta x$ と変化したときの増分 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を Δy とすれば，Δx よりも高位の無小を無視すると

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x$$

と書ける．このとき，右辺を $df(x)(=dy)$ で表わし $y=f(x)$ の微分あるいは**全微分** (differential) と名づける．すなわち，

$$df(x)(=dy)=f'(x)\cdot\Delta x$$

である．$f(x)=x$ のときは，$f'(x)=1$ より，

$$df(x)=dx=\Delta x$$

であるから，

$$df(x)(=dy)=f'(x)dx$$

と書くことができる．したがって，ここにおいて $f(x)$ の全微分 $df(x)$ と x の全微分 dx の商 $\dfrac{df(x)}{dx}$ は $f'(x)$ に一致するから，導関数 $f'(x)$ を $\dfrac{df(x)}{dx}$ と書くことは意味をもつことになる．

$df(x)$ は x と Δx の関数であるから，Δx を固定して同じ増分 Δx に対する全微分を考えることができ２次の全微分

$$d^2f(x)(=d^2y)=f''(x)(\Delta x)^2=f''(x)(dx)^2$$

が定義できる．

このような考え方は，2変数関数 $z=f(x,y)$ の場合にも拡張することができる．いま，(x,y) が $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ と変化したときの増分 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ が $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ より高位の無限小を無視して，

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \tag{8}$$

と書けるとき[3]，$f(x,y)$ は**全微分可能**であるという．(8)式の右辺を $df(x,y)(=dz)$ で表わし，$f(x,y)$ の微分あるいは**全微分**と呼ぶ．$dx=\Delta x, dy=\Delta y$ であるから，

$$df(x,y)(=dz)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy \tag{9}$$

が，全微分を表わす式となる．

全微分の全微分を2次の全微分と呼び，$d^2f(x,y)$ $(=d^2z)$ で表わすと

$$d^2f(x,y)(=d^2z)=d(dz)=\frac{\partial dz}{\partial x}dx+\frac{\partial dz}{\partial y}dy$$
$$=(f_{xx}\cdot dx+f_{xy}\cdot dy)dx+(f_{yx}\cdot dx+f_{yy}\cdot dy)dy,$$

微分作用素を用いると

$$=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) \tag{10}$$

となる．

問　$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

2-3.　極　値

1変数の場合と同様に，まず凹関数の定義とそのための条件について触れる．

定義 2-1.　$f(x,y)$ はある凸集合[4] C 上で定義された関数とする．C の任意の2点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ と $0<\alpha<1$ に対して

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)$$
$$\geq \alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2) \tag{11}$$

が成立するとき，$f(x,y)$は R において**凹関数**であるという．異なる2点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ と $0<\alpha<1$ に対して，(11)式で等号が省けるとき，**狭義の**(strictly)**凹関数**であるという．

2変数関数の凹凸に関しては，$f(x,y)$ の (x,y) における**ヘッセ行列**(Hessian)と呼ばれる行列

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y), & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y), & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

が導入される．任意の $(h,k)\neq 0$ に対して，

$$(h,k)\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y), & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y), & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$=h^2 f_{xx}(x,y)+2hkf_{xy}(x,y)+k^2 f_{yy}(x,y)\geq 0$$

となるとき，ヘッセ行列は**負の半定値行列**と呼ばれ，等号が省ける場合には**負の定値行列**と呼ばれる．不等号が逆向きのときは，おのおの**正の半定値**，**正の定値**と呼ばれる．

定理 2-1.　$f(x,y)$ は凸集合 C[5] で2回連続微分可能とする．このとき，凹関数であるための必要十分条件は C の全ての点でヘッセ行列が負の半定値行列となることである．もし，それが負の定値行列となるなら狭義の凹関数である(逆は一般には成立しない)．

凸関数の場合は定理 2-1 において，負の半定値，負の定値を正の半定値，正の定値と読みかえればよい．また，線形代数で知られているように，ヘッセ行列が負の(正の)定値行列であるための必要十分条件は，

$$f_{xx}(x,y)<0 \qquad (f_{xx}(x,y)>0),$$
$$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f^2{}_{xy}(x,y)>0$$

が成立することである．

さて，2変数関数の極値を定義しよう．点(x_0,y_0)の十分近い[6] (x,y) に対してつねに

$$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$$

となるとき，$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で極大になるといい，$f(x_0,y_0)$ を**極大値**いう．逆の不等号が成立する場合には**極小値**という．1変数の場合と同様に，極大値と極小値の両方を総称して**極値**と呼ぶ．

$f(x_0,y_0)$ が極値であれば，$f(x,y_0)$ は x の関数として $x=x_0$ で極値をとり，$f(x_0,y)$ は $y=y_0$ で極値をとる．したがって，次の定理が成立する．

定理 2-2.　$f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば，$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ である[7]．

Tayler の定理より，

$$f(x_0+h,y_0+h)=f(x_0,y_0)$$
$$+\{hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\}$$
$$+\frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$+2hkf_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$+k^2 f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\}$$

である．f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が連続だから右辺の第3項は，h, k が十分小さければ $h^2 f_{xx}(x_0, y_0)+2hkf_{xy}(x_0, y_0)+k^2 f_{yy}(x_0, y_0)$ の符号と一致する．これが h, k のいかんに拘らず負ならば，すなわち，ヘッセ行列が負の定値行列なら，$f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$ であるとき，$f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$ となる．したがって，次の定理を得る．

定理 2-3. $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$ とする．

$$f_{xx}(x_0, y_0)<0(>0),$$
$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0)-f_{xy}{}^2(x_0, y_0)>0$$

ならば，$f(x, y)$ は (x_0, y_0) で極大値（極小値）をとる．

問 $f(x, y)=x^3+y^2-3x-3y$ の極値を調べよ．

2-4. 勾配ベクトル，接平面

一般に，$f(x, y, z)=0$ を満たす点 (x, y, z) の集合は x, y, z 空間において曲面 S を形成する．曲面 S 上の1点 $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ における**接平面**とは，P_0 を通る S 上の任意の曲線の P_0 における接線がすべてのっているような平面であると定義する．いま，S 上の点 P_0 を通る任意の曲線をパラメターによって，

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), -\infty<t<\infty$$

と表わす．ただし，$P_0=(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ とする．P_0 における接線は，直線

$$(x(t), y(t), z(t))=(x_0, y_0, z_0)+t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \quad (12)$$

すなわち，$\{(x_0+tx'(t_0), y_0+ty'(t_0), z_0+tz'(t_0))\}$ で与えられる[8]．

曲線は曲面にのっているから $f(x(t), y(t), z(t))=0$ である．これを t で微分して $t=t_0$ と置くと，

$$f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0)+f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0)+f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)=0$$

が得られる．接線上では，$x-x_0=tx'(t_0), y-y_0=ty'(t_0), z-z_0=tz'(t_0)$ より，このことは，接線(12)が平面の方程式

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+f_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0 \quad (13)$$

を満足していることを示している．曲線は任意であったから次の結論を得る．

定理 2-4[9]**.** 曲面 $f(x, y, z)=0$ の (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式は(13)式で与えられる．

$f(x, y, z)$ の勾配が最大[10] になる行ベクトル $[f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)]$ を $f(x, y, z)$ の (x_0, y_0, z_0) における**勾配ベクトル** (gradient) と呼び $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ で表わすと，(x_0, y_0, z_0) における曲面の接平面は勾配ベクトル $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ に垂直である．

特に，曲面が $z=f(x, y)$ の形で与えられているときは，$f(x, y)-z=0$ と考えることによって，$P_0=(x_0, y_0, z_0), z_0=f(x_0, y_0)$ における接平面は

$$f_x(x_0, y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad (14)$$

となる．

問 $x^2+y^2-z=0$ 上の点$(1, 1, 2)$における接平面の方程式を求めよ．

問 $f(x, y)=x^2+y^2-1=0$ 上の点 $(1, 1)$ における勾配ベクトルとその点における接線の方程式を求めよ．

3. 拘束条件つき最適問題

3-1. 等式条件つき極値問題

等式条件つき最適(最大化)問題：

$$\text{maximize} \quad f(x, y) \quad (15)$$
$$\text{subject to (s.t.)} \quad g(x, y)=0$$

の極値[11]を求めるという問題について考える．以下しばらくは，1拘束条件，2変数の場合について話を進める．問題の本質を把握するためには，これで十分であろうかと思われるが，後で一括して多拘束条件，多変数の場合を説明する．また，前にも触れておいたように，特にことわらない限り取り扱う関数は必要なだけ連続微分可能であるものとする．

定理 3-1[12]**.** (x_0, y_0) が問題(15)の極値を与える点であるとする．そのとき，ある適当な定数 λ_0 が存在して，

$$f_x(x_0, y_0)+\lambda_0 g_x(x_0, y_0)=0$$
$$f_y(x_0, y_0)+\lambda_0 g_y(x_0, y_0)=0 \quad (16)$$

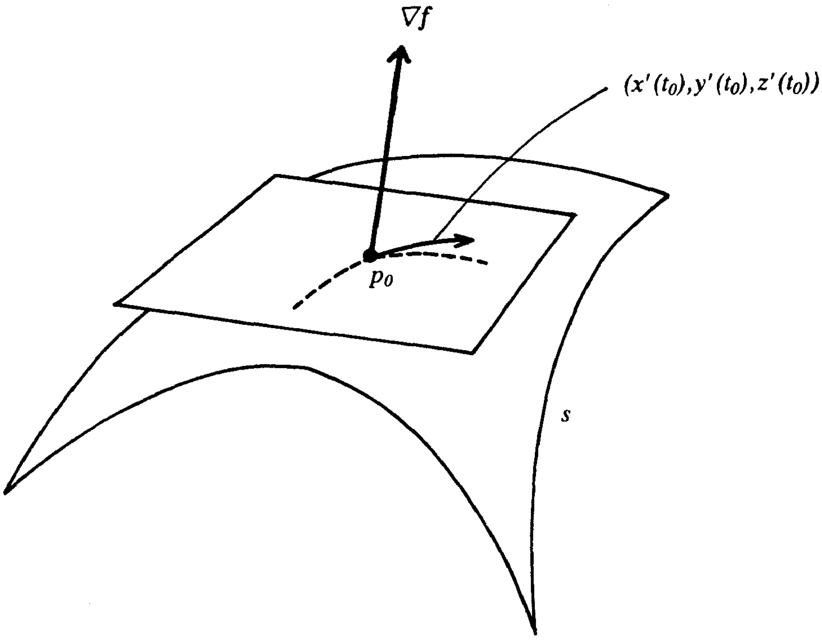

図 4

が成立する[13]．

拘束条件と合体した**ラグランジ関数** (Lagrangian) を

$$l(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

と定義する．定理 3-1. は問題(15)の極値の満たす必要条件，

$$l_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0$$
$$l_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0$$
$$l_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=0 \quad (17)$$

を与えるものである．(17)式を解いて極値を与える解の候補を求める方法は**ラグランジ乗数法**という名で呼ばれる．

定理 3-1. の証明の詳細は省略するが，定理が成立することをつぎのように直観的に推察できよう．まず，図のように $f(x,y)=d$ という曲線を考え，それが d の増加と共に右上方に移動するものとする．d を変化させ $f(x,y)=d$ の曲線と $g(x,y)=0$ の曲線が接する点が局所的には問題(15)の極値（この図の場合には極大値）を与える点となっていることは明らかであろう．このことは，その点で両方の接線が一致すること，すなわち，勾配ベクトル $\nabla f(x_0,y_0)$ と $\nabla g(x_0,y_0)$ が同一直線上にあることを意味し，$\nabla f(x_0,y_0)+\lambda\nabla g(x_0,y_0)=0$ となる．

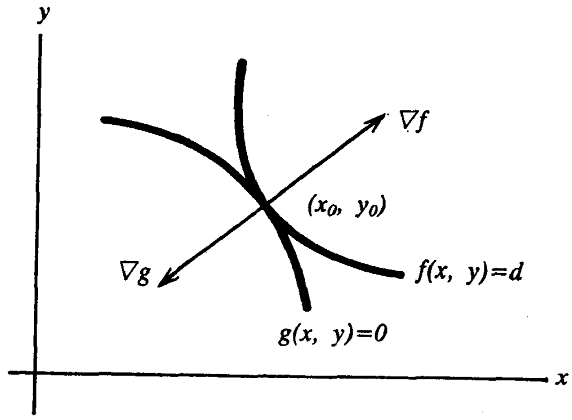

図 5

問　原点から直線 $ax+by=d$ にいたる最短距離を求めよ．

3-2.　不等式条件つき極値問題

前節の拡張として不等式条件つき最適（最大化）問題：

$$\text{maximize} \quad f(x,y)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x,y)\geq 0 \quad (18)$$

を考える．等式条件つき極値問題と並列的に述べられるつぎの定理は**クーン・タッカー (Kuhn-Tucker) の1階条件**と名づけられている．

定理 3-2.　(x_0,y_0) が問題(18)の極大値を与える点で

あるものとする．そのとき，ある適当な定数 $\lambda_0 \geq 0$ が存在して，

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0$$
$$f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0$$
$$\lambda_0 g(x_0, y_0) = 0 \tag{19}$$

が成立する．

証明．(x_0, y_0) が問題(18)の極大値を与える点であるなら，不等式条件を等式条件とした問題(15)の極大値にもなっているはずである．したがって，定理 3-1. より，定数 λ_0 が存在して(19)式を満たす．もし，$g(x_0, y_0) \neq 0$ なら，$\lambda_0 = 0$ と置けば(19)式が成立する．よって，結局(19)式が得られる．あとは $g(x_0, y_0) = 0$ のとき，$\lambda_0 \geq 0$ となることを示せばよい．

$\lambda_0 < 0$ としよう．ベクトル $(g_x(x_0, y_0),\ g_y(x_0, y_0))$ は不等式 $g(x, y) \geq 0$ をみたす領域の方を向いているので，図6のように曲線 $(x(t), y(t))$ をうまくとると，$t \geq 0$ で $g(x(t), y(t)) \geq 0$, $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ かつ $h = x'(0), k = y'(0)$ とすれば

$$g_x(x_0, y_0)h + g_y(x_0, y_0)k > 0$$

となるようにできる．

そのとき，

$$\left.\frac{df(x(t), y(t))}{dt}\right|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k$$

(19)式によって

$$= -\lambda_0\{g_x(x_0, y_0)\cdot h + g_y(x_0, y_0)k\} > 0$$

となる．このことは，(x_0, y_0) が極大値を考える点であることに矛盾する．

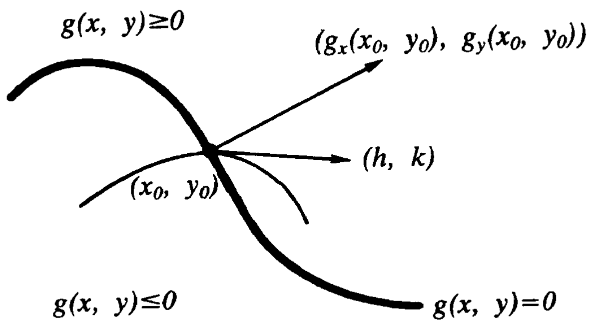

図 6

拘束条件がない場合の極値問題においては，極大値であるための十分条件は，定理 2-3. にあるように，ヘッセ行列が負の定値行列になるという，いわゆる2階の条件が満たされることであった．等式条件つき極値問題においては，極大値のための十分条件は，やや複雑になり，“(x_0, y_0) における $g(x, y) = 0$ の接平面上でラグランジ関数 $l(x, y, \lambda)$ の (x_0, y_0, λ_0) におけるヘッセ行列が負の定値行列である”という結果になる．この条件は，また，ラグランジ関数の **“縁つきヘッセ行列”** と呼ばれる行列が負の定値行列であることと等価になる[14]．

つぎに，最適問題(15)(18)で拘束が変化したとき，極値がどのように変化するかという感度分析を行う．多くの場合，等式あるいは不等式条件は資源の制約を意味し，目的関数は，その資源を使う活動の結果生ずる利潤を意味する場合が多い．したがって資源の制約量をパラメターとし，その変化と効率的活動の結果生ずる最適値との関係を論ずるということは，**資源の限界価格**を求めることに他ならないであろう．

いま，最適問題(18)が，

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad f(x, y) \\ &\text{s.t.} \quad g(x, y) \geq c \end{aligned} \tag{20}$$

と変化したとし，その極大値を与える点 $(x_0(c), y_0(c))$ が十分小さな c に対して存在しかつ c について連続微分可能とする．

$(x_0(0), y_0(0)) = (x_0, y_0)$ は問題(18)の極大値を与える点であるから，定理 3-2. より，$\lambda_0(0) = \lambda_0 \geq 0$ が存在して(19)式が成立する．

$$\left[\frac{d}{dc}f(x_0(c), y_0(c))\right]_{c=0} = \left. f_c(x_0(c), y_0(c))\right|_{c=0}$$
$$= f_x(x_0, y_0)\cdot x_0'(0) + f_y(x_0, y_0)\cdot y_0'(0)$$

であるから，(19)式より，

$$= \lambda_0\{g_x(x_0, y_0)x_0'(0) + g_y(x_0, y_0)y_0'(0)\} \tag{21}$$

となる．一方，(19)の第3式で $g(x, y)$ を $g(x, y) - c$ とおきかえれば

$$\lambda_0(c)\{g(x_0(c), y_0(c)) - c\} \equiv 0 \tag{22}$$

であるから，c について微分すると，

$$\begin{aligned} &\lambda_0'(c)\{g(x_0(c), y_0(c)) - c\} \\ &\quad + \lambda_0(c)\{g_x(x_0(c), y_0(c))x_0'(c) \\ &\quad + g_y(x_0(c), y_0(c))y_0'(c) - 1\} = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

が得られる．

もし $g(x_0, y_0) = 0$ なら，$\lambda_0 \geq 0$ で(23)式を $c \to 0$ とすると

$$\lambda_0\{g_x(x_0, y_0)x_0'(0) + g_y(x_0, y_0)y_0'(0) - 1\} = 0$$

となる．結局，

$$\left.\frac{df(x_0(c), y_0(c))}{dc}\right|_{c=0} = \left. f_c(x_0(c), y_0(c))\right|_{c=0}$$
$$= \lambda_0 \tag{24}$$

が得られる．$g(x_0, y_0)>0$ のときは十分小さい $c>0$ で，$g(x_0, y_0)>c>0$ となるので $\lambda_0(c)\equiv 0$ となり，この場合も(24)式がなりたつ．(24)式は，不等式条件の拘束が1単位変化したときの極大値の変化はラグランジ乗数の値に等しいことを示すものである．もし，不等式あるいは等式条件が資源の制約を意味するものであれば，ラグランジ乗数の値は資源の限界価格を示唆していることになろう．

3-3. 一般化について

行ベクトルを $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，列ベクトルを $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ で表わす．また，n 変数実数値関数を $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，列ベクトル値実数関数を $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g^1(\boldsymbol{x}), g^2(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, g^m(\boldsymbol{x}))$ と書く．$f(\boldsymbol{x})$ の列ベクトル $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ に関する勾配ベクトル(gradient)[15]は

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right] \tag{25}$$

ヘッセ行列は，

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1}, & \cdots\cdots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1}, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{26}$$

と定義する，この記法によれば，

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(\nabla g^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, \nabla g^m(\boldsymbol{x})) \tag{27}$$

と書ける．$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ は $m\times n$ 行列となることに注意する必要がある．2章で述べた定義，定理[16]は記法をこのように変えるだけですべて成立することはいうまでもない．たとえば，(11)式は

$$f(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})\geq \alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$$

と書き改められ，ヘッセ行列は(26)式となり，$n\times n$ 行列としての負の半定値あるいは定値行列と考えればよい．

不等式(等式)条件つき最適問題は，

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq 0 \quad (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=0) \end{aligned} \tag{28}$$

の形に拡張できる．ただし，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq 0$ は，$g^1(\boldsymbol{x})\geq 0$, $g^2(\boldsymbol{x})\geq 0, \cdots\cdots, g^m(\boldsymbol{x})\geq 0$ を意味する．

ラグランジ関数は

$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n]$ と定義される．このとき，定理 3-2. はつぎの形で述べられる．

定理 3-3[17]．$\boldsymbol{x}^0=(x_1{}^0, x_2{}^0, \cdots\cdots, x_n{}^0)$ が問題(28)の極大値を与える点であるとする．そのとき，ある適当なベクトル $\boldsymbol{\lambda}^0=[\lambda_1{}^0, \lambda_2{}^0, \cdots\cdots, \lambda_m{}^0]\geq 0$ が存在して，

$$\begin{aligned} \nabla l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)=\nabla f(\boldsymbol{x}^0)+\boldsymbol{\lambda}^0\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)=0 \\ \boldsymbol{\lambda}^0 \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)=0 \end{aligned} \tag{29}$$

が成立する[18]．

等式条件の場合も，まったく同様な拡張が可能であることは明らかであろう．

(例)　$\text{maximize} -(x-1)^2-(y-2)^2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & g_1=2-x-y\geq 0 \\ & g_2=3-2x-y\geq 0 \end{aligned}$$

極大値のための必要条件は(29)式を用いて，

$$\begin{aligned} &-2(x-1)-\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ &-2(y-2)-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ &\lambda_1(2-x-y)+\lambda_2(3-2x-y)=0 \\ &\lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0,\ g_1\geq 0,\ g_2\geq 0 \end{aligned}$$

である．次の4つの場合を考え，上式を満足するものを求めればよい．

(i)　$g_1=(2-x-y)>0$, $g_2=(3-2x-y)>0$
　このときは，$\lambda_1=\lambda_2=0$

(ii)　$g_1>0$　$g_2=0$，このときは，$\lambda_1=0$

(iii)　$g_1=0$　$g_2>0$，このときは，$\lambda_2=0$

(iv)　$g_1=0$　$g_2=0$

簡単な計算によって(iii)の場合のみが可能であり，

$$x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2},\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=0$$

となることがわかる．

問　(24)式の一般化として，問題(28)に対する感度分析の結果が

$$\nabla \boldsymbol{c} f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \cdots\cdots, c_m) \tag{30}$$

となることを確認せよ．

問　凸集合 Ω で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ が狭義凹関数であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}\in\Omega$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$ に対して

$$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

となることである．このことを下の図から確認せよ．

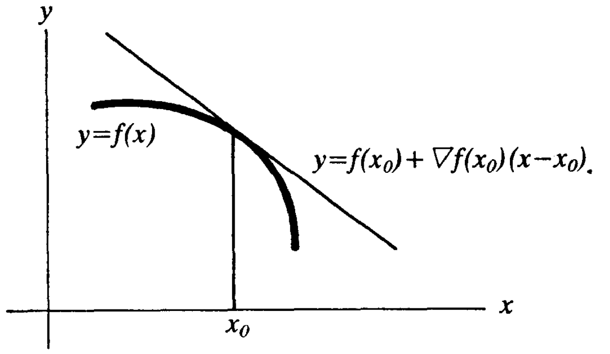

図 7

これまでは，すべて極値のための局所的な条件について議論してきたわけであるが，ここで，極大値と最大値との関係[19]について簡単に触れておく．

定理 3-4. $f(\boldsymbol{x})$ が凸集合 Ω で定義された凹関数とする．そのとき，任意の極大値は，また最大値となる．

証明．$\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ を極大値を与える点とし，かつ $f(\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}^0$ となる $\boldsymbol{y}\in\Omega$ が存在したとする．ところが，$\alpha\boldsymbol{y}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ であり，凹関数の定義式から，

$$f(\alpha\boldsymbol{y}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^0\geq\alpha f(\boldsymbol{y})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^0)>f(\boldsymbol{x}^0)$$

となり，$\boldsymbol{x}^0$ が極大値を与える点であることに矛循する．

3-4. 変数の非負条件

現実的な問題においては，資源制約や予算制約などのように，変数に非負の条件が課せられることが多い．ここでは，最適問題(28)の特殊な場合として，最適問題：

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq0,\quad \boldsymbol{x}\geq0\end{aligned}\tag{31}$$

をとりあげる．ただし，$\boldsymbol{g}=(g^1, g^2, \cdots\cdots, g^m), \boldsymbol{x}=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ とする．ラグランジ関数は

$$\begin{aligned}&l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu x}\\&\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_l,\cdots\cdots,\lambda_m],\ \boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\cdots\cdots,\mu_n]\end{aligned}\tag{32}$$

である．

定理 3-3. より，極大値のための必要条件は

$$\begin{aligned}&\nabla l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=\nabla f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu}=0\\&\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu x}=0(\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{\mu x}=0)\\&\boldsymbol{\lambda}\geq0,\boldsymbol{\mu}\geq0,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq0,\boldsymbol{x}\geq0\end{aligned}\tag{33}$$

となる．(33)の条件式における $\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu x}=0$ は $\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})\geq0, \boldsymbol{\mu x}\geq0$ であるから $\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})=0, \boldsymbol{\mu x}=0$ と等価であることに注意されたい．また条件式(33)は

$$\begin{aligned}&\nabla f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leq0\\&(\nabla f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq0\\&\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})=0\\&\boldsymbol{x}\geq0,\boldsymbol{\lambda}\geq0\end{aligned}\tag{34}$$

と等価な条件である．したがって，いま退化した形のラグランジ関数,

$$\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})\tag{35}$$

を導入すると条件(34)式は,

$$\begin{aligned}&\nabla_x\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\leq0\quad \nabla_x\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{x}=0\\&\nabla_\lambda\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\geq0\quad \boldsymbol{\lambda}\nabla_\lambda\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=0\\&\boldsymbol{x}\geq0\quad \boldsymbol{\lambda}\geq0\end{aligned}\tag{36}$$

という簡単な形になる．ただし，∇_x，∇_λ はおのおの $\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ の $\boldsymbol{x}$ あるいは $\boldsymbol{\lambda}$ に関する勾配ベクトルである．よって，極大値を与える点では(36)式が成立する．

また，

$\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ について凹関数とすると，$\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0$ が(36)式を満たせば，$\boldsymbol{x}_0$ で $f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ は最大値となり，

$$f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}^0g(\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{x}^0)+\boldsymbol{\lambda}^0\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0),\quad \forall\boldsymbol{x}\geq0$$

が成立する．(36)式より，$\boldsymbol{\lambda}^0\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)=0$, $\boldsymbol{\lambda}^0\geq0$ であるから，$\boldsymbol{x}\geq0, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq0$ となる任意の $\boldsymbol{x}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}^0\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{x}^0)$$

が成立し，$\boldsymbol{x}^0$ は最大値を与える点となる．

定理 3-5. $f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\lambda}\geq0$ が $\boldsymbol{x}$ について凹関数であるものとする．そのとき，(36)式は，また問題(31)の最適値を与えるための必要十分条件となっている．

問　$\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0$ で(36)式が成立することと，$\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0$ に十分近い $\boldsymbol{x}\geq0,\boldsymbol{\lambda}\geq0$ に対して

$$\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^0)\leq\tilde{l}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)\leq\tilde{l}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda})\tag{37}$$

となること(**鞍点**)とは同値であることを検討せよ．また，このことは $\tilde{l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ が $\boldsymbol{x}$ について凹関数であれば，任意の $\boldsymbol{x}\geq0,\boldsymbol{\lambda}\geq0$ に対して成立することを確認せよ．

4.　線形計画法

いま，２種類の財 A, B が，１つの企業によってあるいは２つの異った産業において，２種類の資源を用

いて生産されているものとする．A, B の価格はおのおの4万円と3万円である．A を1単位生産するのに第1の資源は1単位，第2の資源は3単位必要であり，B についてはそれぞれ2単位と1単位必要である．A, B の生産量を x_1, x_2 とするとそのとき総投入資源量は第1資源については x_1+2x_2，第2資源については $3x_1+x_2$ となる．使用可能な資源の総量が各々100単位に限られているとき，企業の総収入あるいは産業全体での生産物価値を最大にする問題は

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad 4x_1+3x_2\\&\text{s.t.}\quad x_1+2x_2\leq 100\\&\qquad 3x_1+x_2\leq 100\\&\qquad x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{aligned} \tag{38}$$

と定式化される．

$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=(100, 100)$, $\boldsymbol{p}=[4, 3]$ と置くと

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad \boldsymbol{px}\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax}\leq\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0\end{aligned} \tag{39}$$

と書き直される．これは最適問題(31)において f および $\boldsymbol{g}$ が $\boldsymbol{x}$ について線形関数となるような特殊な場合を表わしており，線形計画問題という名で呼ばれる．また，ベクトル $(1,3)$ を A の生産のための活動ベクトル，x_1 を活動レベルと呼ぶこともある．

極大値のための条件は，ラグランジ関数が

$$\bar{l}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{px}+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}) \tag{40}$$

であるから，(36)式より，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda A}\leq 0\quad (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\lambda A})\cdot\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}\geq 0\quad \boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax})=0\\&\boldsymbol{x}\geq 0, \boldsymbol{\lambda}\geq 0\end{aligned} \tag{41}$$

となる[20]．いま，線形計画問題(39)を**主問題**と名づけ，それに対してつぎのような問題を主問題に対する**双対問題**と呼ぶことにする．

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad \boldsymbol{\lambda b}\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{\lambda A}\geq\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1, \lambda_2]\geq 0\end{aligned} \tag{42}$$

$\boldsymbol{\lambda b}$ を最小化することは，$-\boldsymbol{\lambda b}$ を最大化することである．したがって，双対問題(42)の極大値のための条件は，ラグランジ関数が($\boldsymbol{x}$をラグランジ定数として)

$$\bar{l}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})=-\boldsymbol{\lambda b}+(\boldsymbol{\lambda A}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x} \tag{43}$$

であるから，再び(36)式より，

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{Ax}\leq 0\quad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax})=0\\&\boldsymbol{\lambda A}-\boldsymbol{p}\geq 0\quad (\boldsymbol{\lambda A}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{\lambda}\geq 0\quad \boldsymbol{x}\geq 0\end{aligned} \tag{44}$$

が得られる．

(41)式と(44)式は同一の条件式であるから，(41)式を満たす解 $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0$ は(44)式を満たし，その逆も成り立つ．このことは，主問題(39)のラグランジ乗数が双対問題(42)の解であり，双対問題のラグランジ乗数が主問題の解となることを示している．

一方，すでに(24)式あるいは(30)式で見たように，我々は主問題の最適解に対応するラグランジ乗数は資源の限界価格であることを知っている．このことから，双対問題に経済的意味を附与することが可能になる．

(38)式の双対問題は，

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad 100\lambda_1+100\lambda_2\\&\text{s.t.}\quad \lambda_1+3\lambda_2\geq 4\\&\qquad 2\lambda_1+\lambda_2\geq 3\\&\qquad \lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0\end{aligned} \tag{45}$$

である．λ_1, λ_2 をおのおの第1資源と第2資源の価格とすると A を1単位生産するための費用は $\lambda_1+3\lambda_2$，B を1単位生産するための費用は $2\lambda_1+\lambda_2$ となる．企業あるいは産業は競争的状況にあり，実現可能な利潤はつねに非正であるとすると，双対問題は，非正の利潤拘束のもとに資源の総費用 $100\lambda_1+100\lambda_2$ を最小にする問題であると解釈できよう．(38)式を主問題として解くなら，同時にその背後で双対問題の最適解 $\boldsymbol{\lambda}^0$ を見い出すことになる．この意味で $\boldsymbol{\lambda}^0$ は**影の価格**(shadow price)と呼ばれる．さらに，(41)式より，

$$\boldsymbol{px}^0=\boldsymbol{\lambda}^0\boldsymbol{b} \tag{46}$$

が得られ，両問題の最適値は等しくなる．すなわち，効率的な生産においては，総収入と総費用が等しくなるということができる．

我々は，ここまで，説明を簡単にするため，2変数で記述された線形計画問題をとりあげ説明を加えてきたが，多変数に拡張して，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$, $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m]$, $\boldsymbol{p}=[p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n]$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m)$, $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ と考えると，主問題はこの記法のもとで，そのまま(39)式と書け双対問題は(42)式と書ける．ただし $[a_{ij}]$ は要素を a_{ij} とするマトリクスを表わす．さらに，いままで述べた結果は，このように拡張された一般的な場合にも成立することは明らかであろう．したがってつぎの定理を得る．

定理 4-1. 線形計画問題(39)を主問題とすると，主問題の最適解に対応するラグランジ乗数は，双対問題(42)の最適解を与え，その逆も成り立つ．また，両問題の最適値はつねに等しい．

問 線形計画問題(38)の影の価格を求めよ．

問 問題(39)(42)の最適解において，第１資源の余剰が発生する（$a_{11}x_1{}^0+a_{12}x_2{}^0<b_1$）なら，第１資源の影の価格は０，製品 A の利潤が負（$a_{11}\lambda_1{}^0+a_{21}\lambda^0{}_2>p_1$）なら，$A$ は生産されないことを確認せよ．

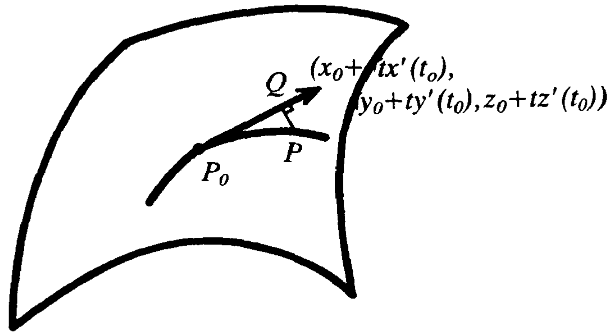

図 3

注

1) x における直線上の値と曲線上の値との差，$y-f(x)$ が，$x-x_0$ に比して高位の無限小つまり，$x\to x_0$ のとき $\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}\to 0$ となるという意味である．このことを $o(x-x_0)$ と表わす．また，その意味で，この直線はあらゆる直線の中で $x=x_0$ の近くで，$f(x)$ の最良の近似となっている．

2) 点 (x,y) と点 (x_0,y_0) の距離を $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ で定義する．$f(x,y)$ が (x_0,y_0) で連続とは，この距離の意味で $(x,y)\to(x_0,y_0)$ のとき，$f(x,y)\to f(x_0,y_0)$ となることを意味する．

3) $f_x(x,y),f_y(x,y)$ が連続ならば，$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\Delta\rho)$，$\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ となる．ここで，$o(\Delta\rho)$ は $\Delta\rho$ より高位の無限小であることを表わす．

4) C の任意の２点を結ぶ線分が C 内で引けるとき C を凸集合という．

5) 正確には，C は内点を含む凸集合でなければならない．

6) 適当に小さな $\varepsilon>0$ に対して，$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon$ である限りという意味である．

7) 更に極大値ならば $f(x,y)$ の (x_0,y_0) におけるヘッセ行列は負の半定値となる．

8) 点 P_0 の近くの曲線上の点を $P=(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t))$ とし，この点から(12)式の直線へ下した垂線の足を Q とすると PQ は P_0P より高位の無限小となる．この意味で(12)式は接線となる．

9) 正確には，$|f_x(x_0,y_0,z_0)|+|f_y(x_0,y_0,z_0)|+|f_z(x_0,y_0,z_0)|\neq 0$ であることが必要である．

10) $u=f(x,y,z)$ の全微分は，$du=f_x\cdot dx+f_y\cdot dy+f_z\cdot dz$ であるから，変数を (x_0,y_0,z_0) から (x_0+h,y_0+k,z_0+l) に動かしたとき，u の変化は，ほぼ $\Delta u=f_x\cdot h+f_y\cdot k+f_z\cdot l=\{(f_x,f_y,f_z)$ と (h,k,l) の内積$\}$ となるので，ベクトル (h,k,l) が (f_x,f_y,f_z) と同じ向きのとき最も早く増加し，ベクトル (f_x,f_y,f_z) の長さが増加の割り合いを表わす．

11) $\Omega=\{(x,y)\,|\,g(x,y)=0\}$ とすると $(x_0,y_0)\in\Omega$ の十分近くの点 $(x,y)\in\Omega$ に対して $(x,y)\in\Omega$ でかつ $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\varepsilon$，$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ 或は $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ となるという意味である．

12) この定理 3.1 及び次節の定理 3.2 では，極値を与える点が正則点 (regular point) であることを仮定している．即ち，勾配ベクトル $[g_x(x_0,y_0),g_y(x_0,y_0)]$ が０ベクトルでないこと，同じことであるが $|g_x(x_0,y_0)|+|g_y(x_0,y_0)|\neq 0$ であるものとする．

13) 更に極大ならば (x_0,y_0) における $g(x,y)=0$ の接平面上でラグランジ関数 $l(x,y,\lambda)$ の (x_0,y_0,λ_0) におけるヘッセ行列が負の半定値となる．

14) 不等式条件の場合の十分条件についても類似の結果が得られるが，これらの十分条件に関して詳しくは Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973. を参照せよ．縁つきヘッセ行列に関する議論は西村『経済数学早わかり』日本評論社，昭和61年を参照せよ．

15) 行ベクトル $[x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n]$ に関する勾配ベクトルは

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)$$

と定義する．本稿では混乱がない限り，同じ記号を用いる．

16) 集合 Ω が凸集合とは，全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$ と $0<\alpha<1$ に対して $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y} \in \Omega$ となることである．

17) 定理 3-3. でも極大値を与える点 $\boldsymbol{x}^0$ が正則点 (regular point) であることを仮定しなければならない．この場合 $\boldsymbol{x}^0$ が正則点であるということは，$g^j(\boldsymbol{x}^0)=0$ となる j の集合 J 上で $\nabla g^j(\boldsymbol{x}^0)$ が1次独立であるということを意味する．

18) 更に，$g^j(\boldsymbol{x})=0, j \in J$ の $\boldsymbol{x}^0$ における接平面上で，$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ におけるヘッセ行列は負の半定値となる．

19) 先の問の結果をそのまま使うと $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるための必要十分条件は，全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$ に対して，

$$f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

が成立することである．このことからただちに，“$\boldsymbol{x}^0$ が Ω の内点であれば凹関数の場合には，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0$ であることが最大値であるための必要十分条件である” ことがわかる．

20) 定理 3-5. より最大値であるための必要十分条件となっている．

〔ささい ひとし 横浜国立大学経営学部教授〕