方法」昭和55年，計測自動制御学会 [2] は多属性効用理論ならびに多目的数理計画法（本稿では多属性効用理論のみをとりあげる）のこれまでの理論的成果を解説した我国における初めての著書である。ただし，[1]はそのボリュームにおいてあまりにも膨大であり，[2]は理論展開が数学的に忠実に記述されているため，初学者にとってはなじみにくいかもしれない。

したがって本稿では理論的基礎として [2] の「多属性効用理論」(p. 12〜p. 79) の要点を平易に紹介する。また[1，p. 429〜p. 568] の実際問題への適用例のうちで経営に深いかかわりをもつという点から，経営問題への適用例として「多目標に対する会社の選好の構造化」を，環境問題への適用例として「大気汚染の制御」を，地域問題への適用例として「メキシコ市における空港開発」を紹介する。また今後考慮されるべき最新の話題の１つとして [1，p. 569〜p. 619] でとりあげられている「時間に沿った選好」について紹介することにする。この話題は現在方法論それ自体発展途上にあり，現実問題への適用は将来的課題となっている。

II.　理論的基礎

ここでは理論的前提として [2，p. 12〜p. 79] の多属性効用理論の数学的成果をその構造的差異および類似性を明らかにするため，確実性下における場合と不確実性下における場合を対比させながら整理してみることにする。

結果の集合 $X(X=X_1\times X_2\times\cdots\cdots\times X_n)$ のある結果 $x\in X$ が決定者にとって $y\in X$ と同等 $(x\sim y)$ あるいはそれより好ましい $(x\succ y)$ とき x は y より選好されるといい $x\succsim y$ と書くことにする。X のすべての要素についての選好関係を [2] に従って $(X,\succsim)=\{(x,y)\}|x\succsim y, x\in X, y\in X\}\subseteq X\times X$ で表わすことにする。選好関係が比較可能で推移的であるとき選好弱順序構造が定義されたことになる。特定の決定状況には結果空間 X あるいは X_i に対してそれに適した弱順序構造が存在すると決定者は確信しているものと仮定する。このとき選好弱順序をつぎのように価値を表わすスカラー指標に結合させる実数値関数が存在することが証明されている [2, p. 27]。

$$x\succ y\Longleftrightarrow v(x)>v(y) \tag{1}$$

$$x\sim y\Longleftrightarrow v(x)=v(y) \tag{2}$$

$v(x)$ が (1)，(2) 式を満たすとき通常価値関数あるいは順序効用関数と呼ばれる。

$v(x)$ が求まれば決定者の選択行動は $v(X(a))$ が最大になるような $a\in A$ を求める問題に帰着される。数学的に定式化すれば拘束条件 $A=\{a|g_i(a)\leq 0,\ i=1,2,\cdots\cdots,m\}$ のもとに $\Phi(a)=v(X(a))$ を最大化する問題である。解を求めるプロセスは困難であっても形式的には非線形計画法の理論が有効となろう。価値関数 v は順序的意味しかもたないために単調増大変換の範囲で一意であることにも決意が必要である。この場合は代替案 $a\in A$ によって生ずる結果が確定的であるという意味において確実下における決定問題となる。

一方代替案 $a\in A$ によって生ずる結果については確定的には分らないが，どの代替案についても生じうる結果 $x\in X=X_1\times X_2\times\cdots\cdots X_n$ の可能性について確率を割りあてることができるものとする。すなわち確率分布がわかるものとする。このときには不確実性下における決定問題であり，代替案の選択は明らかに確率分布の選択と等価になる。

いま X 上の効用関数（基数効用関数）と呼ばれる実数値関数をあらかじめ導入する。X 上の単純確率測度 $p(x)$ についての期待値

$$E(u,p)=\sum_{x\in X}u(x)p(x) \tag{3}$$

を期待効用 (expected utility) と定義する。

そして [2, p. 48] においては期待効用最大化の原理から X 上のあらゆる確率測度からなる集合 $\tilde{X}$ に属する p，q に対してつぎの式が成立するような効用関数と呼ばれる実数値関数の存在のための Fishburn [3, p. 103〜p. 115] による必要十分条件が紹介されている。

$$p\succ q\Longleftrightarrow \sum u(x)p(x)>\sum u(x)q(x) \tag{4}$$

$$p\sim q\Longleftrightarrow \sum u(x)p(x)=\sum u(x)q(x) \tag{5}$$

必要条件は明らかであるが十分条件の証明はかなり難解である。しかしながら最初に無差別くじの存在を仮定できれば期待効用最大化の原理を用いて容易に基数効用関数が定義できる。すなわち，最良の結果を x，最悪の結果を z とし，$u(x)=1, u(z)=0$ と置く。$x\succ y\succ z$ となる任意の $y\in X$ に対して x を確率 p で z を確率 $1-p$ で受け取るくじ $\langle x,p,z\rangle$ と無差別 $y\sim\langle x,p,z\rangle$ になるような確率 p の存在を仮定し，

$$u(y)=pu(x)+(1-p)u(z) \tag{6}$$

と置けば X 上の効用関数が求まる。(6) 式はまた効用関数の測定法（[2, p. 55〜p. 56]）としてよく知られている。

●分解表現

価値関数，効用関数の存在が明らかになればつぎにはそれらを同定することが問題になる。多属性の場合次元が高くなれば全体の価値関数，効用関数を同定することは困難をきわめることが予想されるが，各属性に対する関数から全体の関数を構成することが可能ならば，多くの決定問題のアセスメントはその一部をスタッフに委譲でき操作的に容易になる。すなわち，

$X=X_1\times X_2\times\cdots\cdots\times X_n, x=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$

$v, u: X\longrightarrow R^1$

においてもし $v(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=g(v_1(x_1), v_2(x_2), \cdots\cdots, u_n(x_n)), u(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=f(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots\cdots, u_n(x_n))$ となることが何らかの情報により分っていれば，各属性ごとの価値関数 $v_i(x_i)$，効用関数 $u_i(x_i)$ から全体の価値関数，効用関数を構成できることになる。属性別価値関数，効用関数に基づく多属性価値関数，効用関数の分解表現を得るためには決定者の選好態度に対する基本的情報が必要とされる。分解表現に関しては，これまで多くの研究がなされてきているが，決定者の選好態度が属性間にある種の独立性を成立せしめているかどうかによって関数形を規定しようというのが基本的な考え方である。独立性については選好独立（preferentially independent），加法独立（additive independent），効用独立（utility independent）が従来からよく知られた代表的な概念である。これらの条件の組み合わせによって種々の分解表現が得られることになる。またこれらの条件を緩和した場合どのような分解表現が可能になるかについての研究は現在なお発展途上にあるため，ここでは従来から提案されている上記３つの概念の定義についてのみ紹介することにする。結果を分り易くするためここでは[2, p. 12～p. 79]とは異なった記法を使用する。

$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\cdots\times X_n$ を構成する属性の添字 $I=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の一部からなる部分集合 M に対して $y\in X_M$，補集合 $\overline{M}=I-M$ に対して $\bar{y}\in X_{\overline{M}}$ と書くことにする。ここでは一般性を失うことなく，$x=(y, \bar{y})\in X_M\times X_{\overline{M}}=X$ とする。

〔定義〕 任意の y, $y'\in X_M$, $z'\in X_{\overline{M}}$ に対して，$(y, z')\succsim(y', z')\Rightarrow(y, z)\succsim(y', z)$ であるならば X_M は $X_{\overline{M}}$ に選好独立であるという。すなわち X_M 上の条件付選好が $X_{\overline{M}}$ の値に依存しないことである。

〔定義〕 任意の MCI に対して X_M が $X_{\overline{M}}$ に選好独立ならば $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ は相互に選好独立（mutually preferentially independent）であるという。

$\tilde{X}_M$ によって X_M 上のすべての単純確率測度の集合とし，$(p_M, \bar{y})$，$p_M\in\tilde{X}_M$，$\bar{y}\in X_{\overline{M}}$ によって X_M 上の条件付くじを表わす。

〔定義〕 X_M 上の条件付くじに対する選好が $X_{\overline{M}}$ のレベルに依存しないとき X_M は $X_{\overline{M}}$ に効用独立であるという。

〔定義〕 任意の MCI に対して X_M が $X_{\overline{M}}$ に効用独立ならば $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ は相互に効用独立（mutually utility independent）であるという。

〔定義〕 $X=X_1\times X_2\times\cdots\cdots\times X_n$ 上のくじに対する選好が各 X_i, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ 上での周辺確率測度のみによって定まるならば $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ は加法独立（additive independent）であるという。

上記の各々の定義に対応していろいろな分解表現が可能となるわけであるが，これらの結果は多属性効用理論の標準的な文献においては必ず見い出すことのできる代表的な結果である。厳密な証明についてはいろいろな文献で紹介されているがかなり難解である。ここでは結果とその証明の要点を [2, p. 12～p. 79] の説明に従って紹介する。

（相互選好独立）$\Longleftrightarrow$（加法形価値関数）

$$v(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x_i) \quad (7)$$

ただし，v_i は x_i に関する価値関数である。

厳密には相互選好独立性のほかにもう少し条件が必要である [2, p. 41]。必要性については明らかであるが十分性の証明ははるかに困難である。その証明の要点は $X_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ のどの一対に対しても加法表現が可能となることを利用する。また２属性の場合には加法的価値関数はよく知られた Lock Step 法（[1, p. 116～p. 119] [2, p. 40]）と呼ばれる価値関数の測定法によって構成される。

(加法独立)$\Longleftrightarrow$(加法形効用関数)

$$u(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}u(x_i,\bar{x}_i{}^{\circ})=\sum k_iu_i(x_i)$$ ただし，$\bar{x}_i{}^{\circ}\in \bar{X}_i$

(i) $u(x_1{}^{\circ},x_2{}^{\circ},\cdots\cdots,x_n{}^{\circ})=0,$
$u(x_1{}^*,x_2{}^*,\cdots\cdots,x_n{}^*)=1$

(ii) $u_i(x_i{}^{\circ})=0, u_i(x_i{}^*)=1,$
$i=1,2,\cdots\cdots,n$

(iii) $k_i=u(x_i{}^*,\bar{x}_{i\circ})$

必要性は明らかであり，十分性については2属性の場合の証明を $X_i,\bar{X}_i$ に対してくり返していけばよい。2属性 $X=X_1\times X_2$ の場合には，X_1,X_2 が加法独立であることは任意の $y,y^{\circ}\in X_1,z,z^{\circ}\in X_2$ に対して2つのくじが

$$<(y,z),(y^{\circ},z^{\circ})>\sim<(y,z^{\circ}),(y^{\circ},z)>$$

となることと等価であることを用いれば自動的に求まる。ただし，記法 $<(y,z),(y^{\circ},z^{\circ})>$ は確率1/2で (y,z)，確率1/2で (y°,z°) が生起するくじを表わす。

(相互効用独立)$\Rightarrow$(乗法形効用関数)

$$u(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{k}_iu_i(x_i)$$

or

$$ku(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}(kk_iu_i(x_i)+1)$$

ただし，

(i) $u(x_1{}^{\circ},x_2{}^{\circ},\cdots\cdots,x_n{}^{\circ})=0,$
$u(x_1{}^*,x_2{}^*,\cdots\cdots x_n{}^*)=1$

(ii) $u_i(x_i{}^{\circ})=,u_i(x_i{}^*)=1,$
$i=1,2,\cdots\cdots,n$

(iii) $k_i=u(x_i{}^*,\bar{x}_i{}^{\circ}),\bar{x}_i{}^{\circ}\in\bar{X}_i$

(iv) $1+k=\prod_{i=1}^{n}(1+kk_i)$

この定理はKeeneyの分解表現定理と呼ばれるもので，証明の要点は任意の i に対して $\bar{X}_i$ は X_i に効用独立であるため，$\bar{X}_i$ 上の条件付効用関数がすべて等価であることを用いる。すなわち，正の線形変換が存在して

$$u(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=c_i(\bar{x}_i)+d_i(\bar{x}_i)u(x_i{}^{\circ},\bar{x}_i)$$

となる [2, p.70～p.72]。後は機械的な計算であるため省略する。

分解表現に必要な独立性の条件の検証は属性の数が多くなれば膨大な量となる。Keeney and Raiffa [1, p.393] は選好独立性と効用独立性の間の関係などを解明し，相互効用独立性と等価な条件など実際の検証を容易にする種々の条件を提案している。

独立性の検証と各属性に対する価値関数，効用関数が先に述べた同定法によって同定されれば分解表現を用いて全体の価値関数，効用関数が構成されるわけであるが，最後に残された作業は尺度構成系数 k，k_i の決定である。尺度構成系数はいろいろな無差別な点を選びだし，関数の値を等しいと置いた代数方程式を解けば原理的には求まる。より効率的な尺度構成系数の決定方法については [1, p.360～p.376] が参考になる。勿論このようにして作られた価値関数，効用関数が整合性をもっているかどうか一貫性のチェックを行うことは当然必要不可欠なことである。

●リスクに対する態度

1属性効用関数の場合は確実同値という概念を導入すれば決定者のリスクに対する態度の評価が可能になるということが知られている。このことは1属性効用関数を同定する場合，それらの定性的特性より関数形をある程度規定できるということを示唆していることになる。

まず X 上の単純確率測度 $p(x)$ をもつくじ p の確実同値は

$$u(\hat{x})=E(u,p) \tag{10}$$

となる量 $\hat{x}$ で定義される。いま，

$$\bar{x}=E(x,p)=\sum_{x\in X}xp(x) \tag{11}$$

とすれば任意の非退化くじ p に対して，$u(\bar{x})>u(\hat{x})$，$u(\bar{x})=u(\hat{x})$，$u(\bar{x})<u(\hat{x})$ となる場合に応じてそれぞれの効用関数はリスク回避的 (risk aversion)，リスク中立的 (risk neutral)，リスク受容的 (risk prone) と呼ばれる。例えば $u(\bar{x})>u(\hat{x})$ は決定者がくじそのものよりくじの期待値（確実的な結果）$\bar{x}$ を好む保守的な態度を意味している。効用関数が滑らかな場合はよく知られているようにリスクの回避度を示すリスク回避関数が次式によって定義される [2, p.58]。

$$r(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}=-\frac{d}{dx}(\log u'(x)) \tag{12}$$

ただし $u'(x),u''(x)$ は各々の1階微分，2階微分を表わす。効用関数が単調増大のとき，$r(x)>0$ ならば $u'(x)$ は常に正であるからリスク回避的となり逆に

$r(x)<0$ ならばリスク受容的になる。また，効用関数が単調増大で $r(x)$ が定数のときには更に効用関数の形につぎのような強い制約が課される [2, p. 59]。証明は $r(x)$ の定義式から簡単に導かれる。

〔定理〕

$$r(x)\equiv c>0 \Longleftrightarrow u(x)\sim -e^{-cx}$$
$$r(x)\equiv 0 \quad \Longleftrightarrow u(x)\sim x$$
$$r(x)\equiv c<0 \Longleftrightarrow u(x)\sim e^{-cx}$$

ここで記号～は効用関数の間の等価（正の線形変換が存在するという意味において）を表わす。

ここで紹介したリスク回避的という概念は決定者の選好に対する態度が保守的で，不確実性を好まないということを意味し，危険回避関数はその場合の決定者のリスクに対する態度を評価する上で有用な尺度を提供する。いままで紹介した結果によれば効用関数が既知であるとき，危険回避関数は決定者が危険回避的であるかどうかの判断を可能にするであろう。逆に，危険回避関数が定理のような形であれば，効用関数の形が定まる。このことは多属性効用関数の評価を行う際には有力な情報となるであろう。

III. 実際問題への適用例

●多目標に対する会社の選好の構造化

[1, p. 471～p. 491]

経営における最も重要な問題の１つは「社会の複雑な社会的，経済的，政治的な特性を考慮してどのような経営方針をとるべきか？ [1, p. 471]」という企業の経営戦略についての問題であろう。物的処理過程での各活動水準を決める業務的な意思決定とは異って，上記のような企業と環境との間の問題を扱う戦略的決定は非常に複雑である。

上記の問題に対して，1972年より長期計計画委員会を設置し，多属性効用関数による分析を行ってきたWoodward-Clyde Consultants 社（専門家によるコンサルタント・サービスを行う持株会社）のケースが[1, p. 471～p. 491] に示されているので紹介しよう。そこでは効用関数評価の目的は経営者がこの分析によって経営方針を決定するのを手助けするためというよりは，その基本的な仮定のいくつかを明確にすることで重役間のコミュニケーションを容易にすることであったと報告されている。

1972年には長期計画委員会は個人的，専門技術的，財政的ゴールの達成という上位目標を設定し，それを財政上の成長と専門能力の成長という副次目標に分割した。更に財政上の成長が株主の投資の増加，退職金制度，給与制度に分割され，専門能力の成長がサービス範囲と熟練という目標に分割され，結局12個の下位目標とそれらに関する指標と重みが決定された。それ以後1972年の指標リストについて有効性の尺度が理解可能性と測定可能性の規準に合致するかどうか，あるいはどの指標のペアがそれらの補集合と選好独立であるかということが詳細に検討された。その結果彼等は1974年につぎのような更新された10個の目標と指標を決めている [1, p. 482]。

X_1＝社内留保金（売上に対する％）

X_2＝退職金制度の拡張（現存する資産に対する％）

X_3＝基本給（毎年の増加率％）

X_4＝能力給（売上に対する％）

X_5＝米国内のサービス区域

$$\left(\frac{\text{十分にカバーされた地理的中心地}}{\text{関連する仕事が生じ得る中心地}}\%\right)$$

X_6＝米国外のサービス区域（米国内ビジネスに対する％）

X_7＝要求されるサービス範囲

$$\left(\frac{\text{潜在能力を持った技術者の数}}{\text{社会が必要としている技術者の数}}\%\right)$$

X_8＝必要経験（売上に対する％）

X_9＝学校教育（専門スタッフあたりの学位度数）

X_{10}＝専門能力開発（必要経験を除く）（売上に対する％）

そこでは各指標のペアがその補集合と選好独立であると仮定することは適切であると考えられている。また１つの指標（社内留保金）がその補集合と効用独立であることが検証された。したがって最終的な効用関数は(9)式の乗法形として表わされる。

$$1+ku(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{10})=\prod_{i=1}^{10}(1+kk_iu_i(x_i)) \tag{13}$$

ここまで作業がすすんでくると効用関数の評価のために残された仕事は効用関数 u_i の評価尺度構成係数 k_i, k の評価となる。彼等はこれらの仕事を順を追って検討している。まず u_i の評価については，10個の効用関数は全て１次元効用関数のアセスメント技法を用いて求められた（結果については [1, p. 483] 参照)。k_i

の評価については，ある指標が最高レベルで他のすべての指標が最低レベルである場合の相対的望ましさを考え，10個の尺度構成系数のランキングを決め，指標のペア間のトレードオフを評価して k_i の相対値を決めた。更に新たな無差別な点を選び出すことにより k_i の絶対値を求めている。また明らかなことであるが，$1+k=\prod_{i=1}^{10}(1+kk_i)$ を解くことにより k が決定されている。

以上のようにして長期計画委員会は Woodward-Clyde 社の効用関数を評価したわけであるが，それは Woodward-Clyde 社の役員会のコミュニケーションを促進し，専門的直観を手助けするために用いられた。その結果，役員会のメンバーの多くは1974年度に従来の持株会社から5分野の部門を持つ1つのコンサルタント会社に組織変更するという決定を下したと [1, p. 490] では報告されている。

ここで示されている適用例は，従来定式化の困難であった経営戦略を企業と環境とのかかわりあいにおいて明示的に分析したものとして意義深い。

●大気汚染の制御 [1, p. 430～p. 441]

ここでいう大気汚染の制御の問題とは大気質の改善のために提案された実施計画を採用すべきかどうかという決定問題である。ニューヨーク市の大気汚染制御の実施計画に関する多属性効用理論の考え方に基づいた Ellis and Keeney による分析が [1, p. 430～p. 441] においてとりあげられている。[1, p. 430～p. 441] の簡単な概略を紹介することにする。

ニューヨーク市の SO_2 の放出量の90%以上は暖房および発電用燃料から生じており，大気改善のための実用的な方法は燃料の硫黄含有量を少なくすることであった。そこでニューヨーク市が直面した重要な決定問題は使用する燃料の硫黄含有量を（その当時，1971年は1%）をもっと低くすべきか否かの決定であった。SO_2 の減少により大気は改善されるが，硫黄含有量の少ない高価な燃料の使用により，暖房と電力料金の上昇を住民に負担させることになる。Ellis はニューヨーク市として基本的目標を市民の幸福の向上であるとし，5つの副次目標：(1)市民の健康に及ぼす悪影響を減らす (2)市民に及ぼす経済的悪影響を減らす (3)市民に及ぼす心理的悪影響の減少 (4)市政に対する大気汚染の総費用の減少 (5)できるだけ望ましい政治的解決を行う，に分割した。さらに適切な指標を得るため検討を加えた結果 (1)については死亡者数を減らすことと病人を減らすことに分割し，(2)については低所得市民に及ぼすものと他の市民に及ぼすものに分割した。このようにして得られた下位目標に対する有効性の尺度が [1, p. 440] においてつぎのように与えられている。

X_1＝1人当りの寿命日数の増加

X_2＝1人当りの1年間の病床日数の減少

X_3＝低所得住民に対する1人当りの1年間の総費用

X_4＝その他の住民に対する1人当りの1年間の総費用

X_5＝100万人の地域における1日の SO_2 の濃度

X_6＝市当局への1年間の総純費用

X_7＝政治的な望ましさの主観的な指数

彼はニューヨーク市で使用している石炭と石油の硫黄含有量を現状の1%に維持することと石油は0.37%に石炭は0.7%に下げるという2つの代替案についてのみ，適切だと思われる効用独立の仮定を利用して評価した。Ellis の研究は博士論文として行なわれたもので効用関数の厳密なアセスメントは行なわれていないけれど彼の多属性効用関数を用いた考え方と分析はニューヨーク市の大気汚染制御の実施計画責任者の考え方に大きな影響を与えまた実際にニューヨーク市の環境保護局に利用された（Ellis は論文完成後，市とのコンサルタントを続けた）と [1, p. 441] で報告されている。

ここでの適用例はたんに個別企業の意思決定問題にとどまらず環境にかかわる政策決定においても多属性効用理論が有効な手法として利用されうることを示している。Ellis は2つの代替案のみについて多属性効用理論の適用を企ったわけであるが，より詳細な分析を行うためには多くの代替案を同時に評価することが今後の課題である。種々の代替案を同時に評価するためには，効用独立性に対する詳細な検討をさらに加えたのち，効用関数のアセスメントが必要となる。このためには，さらに多くの研究者の協同作業を要することはいうまでもない。

●メキシコ市における空港開発

[1, p. 523～p. 568]

大規模な公共問題への適用例として Keeney 等によるメキシコ市の空港施設の開発に対する決定問題が

[1, p. 523〜p. 568] において示されているので，その概略を紹介することにする。

基本的な問題は「今日現在（この研究は1971年に行なわれた）から西暦2000年までに，メキシコ市一帯に適切なサービスを確保するにはメキシコ市の空港施設をどのように開発していったらよいか」という決定問題[1, p. 524]であった。これに対して２つの提案，すなわち，(1)現在の市の中心部から５マイル離れている既存の空港（Texcoco）を思いきって拡張する (2)メキシコ市の北方25マイルの Zumpango に新空港を設置しすべての航空機の運行をそこに移す，がそれぞれ SCT (Secretaria de Communicationesy Transportes＝Ministry of Communication and Transport) と SOP (Secretaria de Obras Publicas＝Ministry of Public Work) から1967年と1970年に提案されていたのであるが，共に採用されなかった。しかしながら，メキシコ政府はこの問題を解決することを強く望んでおり，騒音公害，安全性等の諸問題を含む２つの代替案の違いを評価し空港開発の最も有効な実施計画を打ち出すことが課題となっていた。以上が[1, p. 524]で述べられている問題の背景であり，Keeney 等はこの問題に対して多属性効用理論を使った分析に着手したのである。

まず過去の研究から静的分析についての代替案，目標，有効性の尺度が明らかにされた。代替案については，２つの飛行場において今世紀の終わりまでの間に，どんな種類の飛行機（国際線[I]，国内線[D]，一般用[G]，軍用[M]）がいつから（1975年，1985年，1995年）どちらの飛行場を利用するかで規定された。彼等は長時間にわたる検討の結果，目標と有効性の尺度を各々つぎのように定めている[1, p. 533]。

X_1：建設費および維持費の最小化
（適当な割引率を用いて計算した100ペソ単位での費用）

X_2：航空運輸需要にみあう適切な処理能力の提供
（１時間当りの航空機の発着可能本数で測った処理能力）

X_3：空港への所要時間の最小化
（メキシコ市のそれぞれの地域の利用者により重みづけした空港までの平均所要時間）

X_4：システムの安全性の最大化
（１回の航空機事故で予想される重傷もしくは死亡者数）

X_5：新空港施設の提供による社会混乱の最小化
（空港開発により移転が必要な住民の数）

X_6：航空機による騒音公害の最小化
（高レベルの騒音公害をこうむっている者の人数，この場合は 90 CNR（騒音の指標である合成騒音度）かそれ以上）

ひとつの代替案による結果$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_6)$は需要の変化などその時の状況に左右された不確実をもち，確率分布によって定量的に表現されることになる。そのような確率的評価が過去の研究から得られた情報，SOP の研究結果及びメキシコ政府内の監督官庁の専門的判断などを用いてなされたということである。そして各々の代替案に対し，６つの属性は確率的に独立であり，与えられた代替案の下で各々の年におけるインパクトは確率的に独立（このように単純化しても結論に対する影響はほとんどないということが検討された）であるという単純な仮定がおかれた。更に属性の任意のペアはその補集合と選好独立であり，１つの属性はその補集合と効用独立であることが検証され，その結果として条件付効用関数 u_i から全体の効用関数 u が構成できると推論された。効用関数の正確な形は分解定理により，

$$ku(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_6)+1=\prod_{i=1}^{6}(kk_iu_i(x_i)+1) \tag{14}$$

となる。k の値は k_i の値から計算でき $\sum k_i=1$ なら $k=0$ となり効用関数は加法形となる。彼等は効用関数の形を乗法形と定めた後，u_i の評価，k_i の評価，k の評価を行っている。

u_i の評価については，まず属性の最小値と最大値を定め無差別くじと確実同値の概念により，処理能力を除く５つの属性に関して評価が行われた。処理能力については単一尺度では年ごとの処理能力を一括して考慮することはできないので，３つの属性から構成されるベクトル $x_2=(x_2^{75}, x_2^{85}, x_2^{95})$ が使用されている（x_2^{75} は1975年の処理能力を表わす[1, p. 550]）。処理能力の最大値と最小値を決めた後，それらの属性のどのペアも残りの属性と選好独立であり，各々の属性は他の２つの属性と効用独立であることが検証され，つぎのいずれかの形であるということがわかった[1, p. 550]。

$$u_2(x_2^{75}, x_2^{85}, x_2^{95})=\sum_j c_ju_2^j(x_2^j) \tag{15}$$

$$cu_2(x_2^{75}, x_2^{85}, x_2^{95})+1=\prod_j(cc_ju_2^j(x_2^j)+1) \tag{16}$$

このようにして行われた各目標に関する効用関数の評価についての結果が[1, p. 549]に図示されている。尺度構成系数の評価については，たとえば，「ある1つの属性に関して最も望ましい値をとり他のすべての属性については最も望ましくない値をとる結果」と「すべての属性が最良の値をとる結果を確率 p，すべての属性が最悪の値をとる結果を確率 $1-p$ でとるくじ」とを比較してこれらが無差別となる p の値（たとえば p_1)が求められた。そのとき $k_1=p_1$ であり，これを規準に k_i の値の対ごとの比較および一貫性のチェックから k_i の値が求められた。また，k の値は分解定理よりつぎの式の解となることは明らかである。

$$k+1=\prod_i(kk_i+1)$$

c_j と c の評価も同様の手続きにより求められた。これらはいずれもよく知られたオーソドックスなアセスメント手法である。最終的に決定された尺度構成系数の数値が[1, p. 552]に示されている。彼等はこのようにして求めた効用関数から各々の代替案の期待効用値を計算し，Zumpango 空港の段階的開発案も同空港の全面的開発案と同様に望ましいという結論を得ている[1, p. 555]。以上の分析に関しては図形入出力コンソール装置が対話形式システムとして利用されている。

ここまでの分析は静的分析であって1970年から2000年までの30年間全体としての行動を明らかにするマスタープランであった。しかしながらより適切なやり方はある初期決定を行ったあとで生起してくる出来事に基づいて必要に応じて戦略を修正するという時間を考慮した決定を行うことであり，これは[1, p. 557]では動的分析と名付けられている。詳しくは述べられていないが彼等は更に動的分析についても簡単に言及している。1971年時点での代替案はこのような観点にたてば，2つの用地（Texcoco と Zumpango）において当面どの程度（最小，低次，中庸，高次）の建設工事に着手するかによりそれぞれの組合わせから16通りの代替案に分かれてくる。これらの代替案に対して，動的分析においては4つの目標が考えられた[1, p. 559]。すなわち，各代替案の有効性（構成要素は静的モデルと同じ6つの尺度），政治的結果，外部性（その他の考えなければならない重要な要因），柔軟性（1971年から1975年にかけて生起する不確実な出来事を知った後で1971年の行動方針を修正したいときに残されている自由度）である。1971年時点の決定が後々になって全体としてどのようなインパクトを与えるかを示すため，各代替案に対して1971年から1976年の間にどんな出来事が生じ得るか等について詳細なシナリオが作られ代替案について検討がなされた。そしてKeeney 等は予備段階の評価を経た後，4つの代替案にしぼり，残ったものについて正確な規定と詳細な検討をくり返し再度ランクづけを行った。最終的には，SOPメンバーの主観的判断により，代替案「Texcoco には1本の滑走路を拡張し，従来の空港施設の改善を行う。Zumpango には第1級の国際空港のための土地を購入し，なおかつ1本の滑走路とそれに伴う乗降客施設と交通施設を建設する」が最適戦略として選択された[1, p. 564～p. 565]。1965年から1967年の研究ではSOP は Zumpango への大規模な移転がもっとも効果的な戦略であるとしていたのに対して，SOP の評価と選好を用いた静的分析では Zumpango への漸次移転も同程度に良い案だということがわかり，そして動的分析では Zumpango における段階的な開発の方がより優れているという結果になっている。こうして全面的に Zumpango へ移転するという代替案を提唱したいがため SOP により委託された分析の結果はより柔軟な立場をとる方が現実にはメキシコにとって利益をもたらすことを SOP に確信させ，その結果，段階的開発戦略が大統領に勧告されたと[1, p. 566]では報告されている。

近年地域問題は社会的関心を集めている重要な研究課題であるが，ここで紹介したマクロ的政策に対して効用分析を用いる方法と考え方はこの問題にたいして有効な現実的処方箋になるものといえよう。[1, p. 557～p. 568] では動的分析に関しては厳密な定式化はなされていない。数量的に動的分析のフレームワークを提示することは今後興味深い課題となるものと思われるが，後で紹介する「時間に沿った選好」についての考え方を導入することも1つの方法論として有力視できよう。

IV. 最近のトピック

今後考慮されるべき最新の話題として，時間に沿った選好問題が [1, p. 569～p. 619] においてとりあげられている。このトピックは現在方法論それ自体発展途

上にあり，[1，p. 569〜p. 619] では厳密な理論展開の詳細よりは，むしろ，考え方と今までに得られている結果が示されている。ここではその要点を紹介する。

いま，X_i を期間 i における結果を記述する属性ベクトル，$x_i \in X_i$ を期間 i における結果とする。ある結果の流れを $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots)$ で表わすことにすると，結果を生ずる代替案の選択問題は結果の流れを順序づける問題と等価になる。$x=(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots)$ で記述される結果の流れは長期投資の結果生ずる収益と現金の流れである場合もあるし，あるいは消費の流れである場合もある。このような時間的流れの決定問題も確実性下における場合と不確実性下（不確定時間範囲問題も含めて）における場合とにわけることができる。前者の場合には，可能な流れについて価値関数を評価し，後者の場合には効用関数を評価することが問題になる。

確実性下の時間の流れに沿った価値関数として昔からよく用いられる方法は純現在価値を求めてそれらの比較によって確実性流れを評価するやり方である。例えば，$x=(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)$をある収入の流れ，$r$ を割引き率と考えれば純現在価値は $\hat{x}_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(1+r)^{i-1}}$ となる。割引きの形式に関しては，支配性，逐次対選好独立性，一定代替率，対不変性を満足する唯一の評価基準が一定割引き率 r を用いた純現在価値となることが知られている [1，p. 579]。さらに一般的には Koopmans の意味での選好独立性 [1，p. 592] を仮定すれば加法的価値関数

$$v(x)=v_1(x_1)+v_2(x_2)+\cdots\cdots$$

が得られ，更に定常性を仮定すれば

$$v(x)=v^*(x_1)+\alpha v^*(x_2)+\alpha^2 v^*(x_3)+\cdots\cdots$$
$$0<\alpha<1$$

となることが知られている [1，p. 583]。

不確実性下における時間流れに沿った効用関数 u の場合（n 期間の場合）はつぎの分解表現が可能となる [1，p. 591]。ただし [1，p. 591] では $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$\vec{x}_m=(x_m, x_{m+1}, \cdots\cdots, x_n)\in \vec{X}_m$，$\bar{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)\in \bar{X}_m$ という記法が用いられ，下限が $x^\circ=(x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots, x_n^\circ)$，上限が $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_n^*)$ と表わされている。

$\bar{X}_m$ が $\bar{X}_{m-1}$ と効用独立 $(m=2, 3, \cdots\cdots, n)$ $\Rightarrow$ $u(x)=\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i)$ $(\sum k_i=1)$ (17)

or

$\bar{X}_{n-1}$ が X_n と効用独立 $\quad 1+ku(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+kk_iu_i(x_i))\ (\sum k_i \neq 1)$ (18)

ただし，

(i) $u(x^\circ)=0, u(x^*)=1$

(ii) $u_i(x_i^\circ)=0, u_i(x_i^*)=1 \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$

(iii) $k_i=u(x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{i-1}^\circ, x_i^*, \cdots\cdots, x_n^\circ)$ $\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$

(iv) $1+k=\prod_{i=1}^{n}(1+kk_i)$, $k>-1$

この結果は属性 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ が仮定より相互効用独立になることから，多属性効用理論の分解定理より明らかである。また，$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ を消費流れ，x_n を遺産と考えれば効用独立性の意味は理解しやすいであろう。また，更に定常性を仮定すれば $u_i=u^*$ と置くことができる。上記の後半の仮定を削除した場合にはつぎのような準分解表現が可能となることが知られている [1，p. 596]。

$$\vec{X}_m \text{ が } \bar{X}_{m-1} \text{ と効用独立} \Rightarrow u(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i)\left(\prod_{j=1}^{m-1} b_j(x_j)\right)$$
$$\prod_{j=1}^{n} b_j(x_j)=1 \quad (19)$$

証明は $\vec{X}_m$ が $\bar{X}_{m-1}$ と効用独立であるから分解定理により

$$\vec{u}_n(\vec{x}_m)=a_m(x_m)+b_m(x_m)\vec{u}_{m+1}(\vec{x}_{m+1})$$
$$b_m(\cdot)>0, \ m=1, 2, \cdots\cdots, n$$

が成立するのでこの式を逐次的に解くことにより求まる。

ここまでの議論は決定問題の時間範囲が固定されている場合についてのものであるが，可変または不確定時間範囲をもった問題に対してもいままでの方法論が適用できる。すなわち，範囲属性 N を導入し，長さの異なる流れ $x^n=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ に対して，同時効用関数を $u(x^n, n)$ と定義すれば，前と類似の適当な条件のもとでつぎのような乗法形，準分離可能形効用関数が求まる [1，p. 598〜p. 602]。

$$1+ku(x^n, n)=g(n)\prod_{i=1}^{n-1}(1+kk_iu_i(x_i))(1+kl_nw_n(x_n)) \quad (20)$$

$$u(x^n, n)=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(x_i)\prod_{j=1}^{i-1}b_j(x_j)+w_n(x_n)\prod_{j=1}^{n-1}b_j(x^f) \quad (21)$$

(17)式〜(21)式のような形で分解表現が求まり，それらの表現によって効用構造を規定するためには単変数（単期間）効用，多変数効用の決定がなされねばならない。これらの効用を求めるための対話形コンピュータプログラムが Harvard Business School で開発されている。

ここで紹介した話題は現在方法論それ自体発展途上にある。分解表現に表われている $\bar{X}_m$ が $\bar{X}_{m-1}$ と効用独立という条件は未来の選好は過去と効用独立であるということを意味している。しかしながら通常は未来に対する選好は過去の経験に依存すると考える方が自然であろう。このような場合の効用構造がどのようなものであるか，時間選好の定式化がどうなるかについての議論は大変興味深い今後の課題となろう。

V. おわりに

本稿は決定者の意思決定のための理論的指針を提供する方法論として多属性効用理論とその適用例について解説を行ったものである。多属性効用理論の理論的基礎については決定問題の基本的構造を確実下における場合と不確実下における場合にわけて両者を対比させながら [2, p. 12〜p. 79] の数学的成果を整理し紹介した。その中心となるものは効用独立性の概念による分解表現定理である。この定理によれば各属性に対する効用関数から全体の効用関数が構成できることになり，決定問題は1属性効用関数の評価問題に帰着することになる。この結果として決定者のリスクに対する態度を評価し，効用関数のパラメーターの推定，あるいはロックステップ法を用いることにより1属性効用関数の同定は比較的容易なものとなる。

多属性効用理論の現実問題への応用に関しては従来から大きな関心がよせられていたが Keeney と Raiffa によって初めてその端緒が開かれ，彼等の著作 [1, p. 429〜p. 568] でその全容が提示されたといえる。ここでは [1, p. 429〜p. 568] の中から経営に深いかかわりをもつという意味で経営問題への適用例として「多目標に対する会社の選好の構造化」を，環境問題への適用例として「大気汚染の制御」を，地域問題への適用例として「メキシコ市における空港開発」を紹介した。これらの適用例から多属性効用理論が個別企業の決定問題に止まらず，公共的な決定問題においても実際的な状況の中で有効な手法として利用されていることが理解できるであろう。

最後に今後のトピックとして [1, p. 569〜p. 619] の時間に沿った選好の問題を紹介した。このテーマは現在，方法論それ自体発展途上にあるものである。本稿で紹介したケース・スタディはいずれも厳密には時間の流れに沿った決定問題としてのとらえ方をすべきであろうが，その意味でも時間選好の理論体系の確立，現実問題への適用は将来的に興味深い研究課題となるであろう。今後，更に新たな展開が期待されるのである。

参考文献

[1] R. L. Keeney and H. Raiffa: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, John Wiley & Sons, New York・Chichester・Brisbane・Toronto (1976)（高原康彦，高橋亮一，中野一夫監訳，多目標問題解決の理論と実例，構造計画研究所）.

[2] 市川惇信編，青木洋一，市川惇信，江藤　肇，小林重信，志水清孝，杉野　昇，瀬尾芙巳子，中山弘隆，西川禕一，宮武信春著：多目的決定の理論と方法，計測自動制御学会（昭和55年)。

[3] P. C. Fishburn: Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York (1970).

〔横浜国立大学経営学部助教授〕