多目的決定理論について

笹井　　均

I はじめに

多次元の対立する目標，あるいは不確実性の問題など，複雑な社会問題やビジネスの問題に直面した意思決定者は，常に将来生じうる結果についての自己の選好と不確実性の判断を比較検討し，決定を行わなければならない。

不確実性のモデル化がすでに行われたとしてもなお，不確実性の評価を価値選好と結びつける必要性が生じる。我々の直面する決定問題は，倫理，伝統，個人の価値の評価等を含む以上，完全に客観的な分析は不可能であり，主観的評価が必要となる。主観的な価値の定量化できる部分を，いかに評価し定量化するか，そして決定過程において，体系的にこれらを含むようなフレームワークをいかに作ることができるかということが問題となる。我々はこのような状況において役立つ，フォーマルな方法を学ぶことにする。これらは，von Neuman-Morgenstern の期待効用理論に端を発し，多属性効用理論へと発展してきたものである。

多目的意思決定の理論には，今一つの歴史的流れがある。有効解（パレート解）の概念から出発して，数理計画的接近法へと発展したものである。Kuhn-Tucker により，今日の基礎が確立されたといえる有効解の概念は，選好構造の定式化（明確化）を必要とせず，主観的評価のはいりこまない客観性を有する概念であるが，一般には，無数に存在する有効解から，時定の解を選択するという現実的行為は排除されるし，不確実性をもつ場合への拡張は容易ではない。数学的流麗さはあるものの，操作性に難点をもつと思われるために，ここでは触れないことにする。

本稿は主として，「R.L.Keeney and H.Raiffa: *Decision with Multiple Objects: Preferences and Value Tradeoffs*」と，「市川：多目的決定問題の理論と方法」の解説論文であり，これから多目的意思決定理論を学ぼうとする学生への，コンパクトな入門のための手引きでもある。

II 多目的決定問題の構造化

II-1 決定分析

多目的決定問題における分析の過程は，次の5段階に要約される。

① 事前分析　決定主体，外部環境，実行可能な代替案の集合などを明確にし，問題の状況を明らかにする。

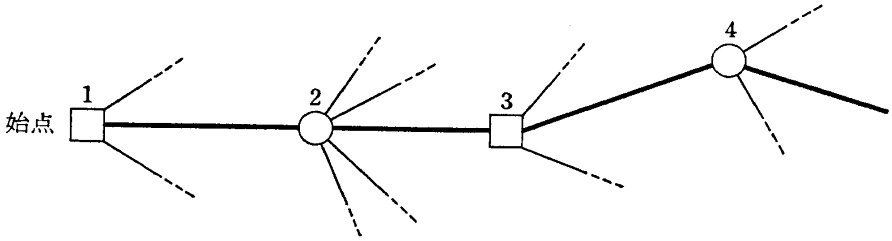
② 構造分析　代替案と確率事象の連鎖などの定性的分析を行い，問題を構造化する。構造分析の結果を表示する方法として，デシジョン・トリーが考えられる（図-1)。

③ 不確実性の分析　過去の経験，情報，専門家の予測，決定者の主観などにより，偶然ノードから出る枝に決定によって得られる結果の確率を割り当てる。

④ 効用分析（価値分析）　結果に対して効用価値を割り当て，決定者の選好を定める効用関数を求める。今，かりに図-2に示すくじ l' と l'' の選択を行う行為 a' と a'' を考える。次式のように期待効用最大化による判断規準に従うように，結果 C_i' には u_i' を，C_i'' には u_i'' を割りあてる。

$$a' \succ a'' \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} P_i' u_i' > \sum_{j=1}^{n} P_j'' u_j''$$

⑤ 最適化分析　代替案の集合と効用関数



□：決定者に選択の自由が許されたノード（決定ノード）
○：決定者に選択の自由が許されないノード（偶然ノード）
図-1

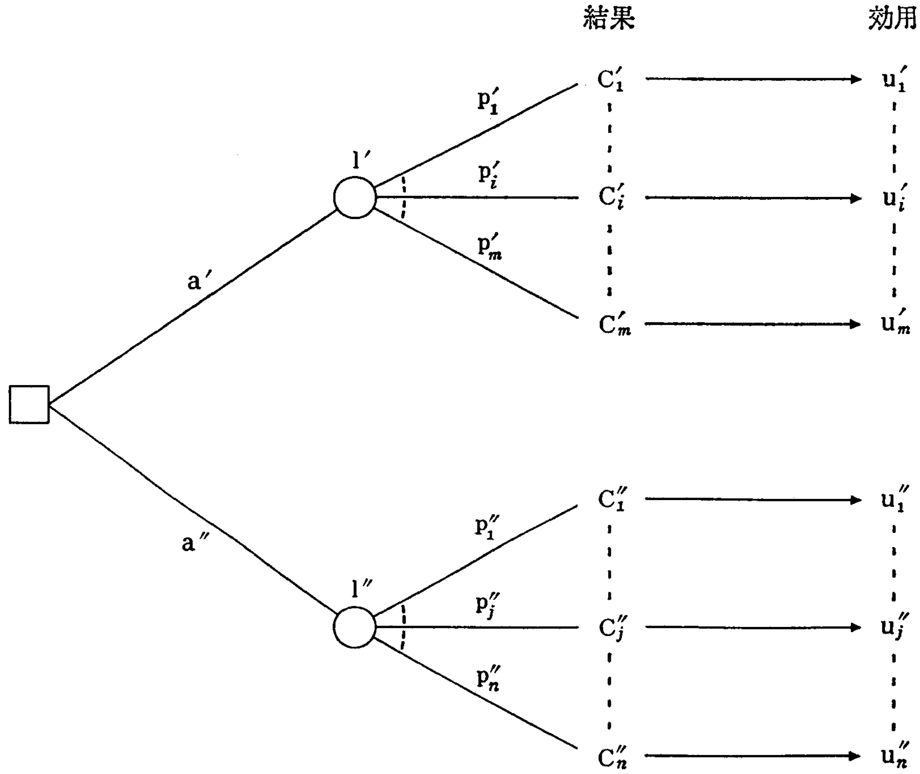


図-2

を用いて，期待効用を最大化する最適戦略を求める。

Ⅱ-2　目標の構造化

複雑な決定問題を分析する場合には，次のように決定者の目標を明確化し，その達成の程度を表現する指標を見つけ，目標階層を作りあげることが必要である。

①　目標の生成

②　目標に対する指標の生成　　目標について，どの程度達成されたかを示す指標には，スカラー量で測られるスカラー指標と，スカラー指標の結合によって示されるベクトル指標とがある。指標はそのレベルを知ることにより，その指標に対する目標の達成程度を知りうる（理論的適正さ）という意味で，包括的でなければならない。また，実際に必要な評価を得ることができるという意味で，測定可能でなければならない。

③　目標と指標の集合の構造化（階層の生成）　　目標リストを用いて階層性を導入し，構造化する。すなわち，下位レベルの目標は上位レベルの目標に対する手段として，下位レベ

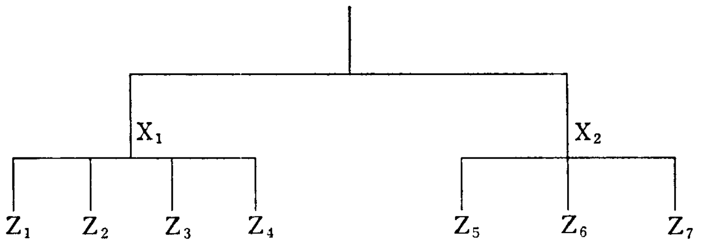


図-3

ルの目標から上位レベルの目標へと階層を作り上げる。図-3 は，2つの下位レベルの目標と，7つの下位レベルの目標ならびにそれらに対する指標 X_1、X_2 と，$Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_7$ を示すものである。

目標集合の詳細さおよび階層レベルは実用的なものであるべきであり，もし，ある目標を除外すれば，最適な行動は変化するかという重要性の検証を行い，除外すべきものは除外し望ましい指標のクラスを求める必要がある。

また，目標の階層は，細分すればするほど客観的な指標を見つけやすくなるものであるが，複雑な問題では，目標を測定するための指標をすべて容易に見出せるとは限らない。この場合は，目標に関する達成度を間接的に測定する代用指標か，あるいは主観的な指標尺度を用いる必要がある。

Ⅲ　確実下における選好の理論

複雑で大規模なシステムでは，評価すべき項目が多岐にわたり，多数の目標をすべて同時には達成できないような状況が生じる。このような状況においては，決定者はまず彼の選好構造を表わす価値関数を，明確にすべきである。そうすれば多次元的な評価に対する選好づけが可能になり，決定者は，技術的に達成可能な代替案の集合の中から最もよいものを選択することができる。このような価値問題を体系的に定式化する選好の理論（不確実性を伴わない）を考察することにする。

実行可能な代替案の集合 A の中からある代替案 $a \in A$ を選択すれば，それに対応してある結果が得られる。起こりうるすべての結果の集合 X は，評価項目など n 個の属性により特徴づけられているものとし，各属性に対して（代替案の集合いかんに拘らず）価値の指標（評価尺度）$X_1(a) \cdots X_n(a)$ が与えられているものとする。以下では属性（評価空間）とその属性の評価尺度を区別せずに，同じ記号 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ で表わすことにする。結果の記述，属性の選択が整備されたとすれば，決定者は彼のもつある規準のもとで，好ましい結果が実現することを望む。

結果の集合 X のある結果 $x \in X$ が，$y \in X$ と同等（$x \sim y$），あるいはそれより好ましい（$x \succ y$）と考えているとき，$x \succsim y$ と書くことにする。結果の集合 X から2つの対をすべてとりだし，$x \succsim y$ となる関係を調べあげれば，決定者の好みの全体が確定する。これを $(X, \succsim)$ と書き選好関係と呼ぶことにする。

$$(X, \succsim) = \{(x, y) \mid x \succsim y,\ x \in X,\ y \in X\} \subseteq X \times X$$

n 次元評価空間上 X において，比較可能で推移的な選好関係が存在するときに，X において選好構造が定義されたということにする。（換言すれば，X が弱順序構造をもつことあるいは選好関係 $(X, \succsim)$ が選好弱順序であることを意味する）。

決定者の選好構造が特定化されると，我々は評価空間上の各点 $x = (x_1 \cdots x_n) \in X$ にスカラー指標（実数値）を結合させ，この実数値の大小によって選好 $\succsim$ を表現することを考える。すなわち次の性質をもつ X 上の関数を規定できれ

ばよい。

$x \sim y \Longleftrightarrow v(x)=v(y)$ …………(1)

$x \succ y \Longleftrightarrow v(x)>v(y)$ …………(2)

このようなvが与えられれば，決定者の問題は，$v(X(a))$ が最大となるようなaをAの中から選択するという標準的な最適化問題に帰着する。

$v(x)$ が(1)式をみたすとき，vは決定者の選好構造を表現する価値関数 (value function) と呼ばれる。

価値関数vが存在すれば，無差別曲面が自動的に求まり，選好構造を一意的に定めるが，選好構造から価値関数は（存在すれば）単調増大変換の範囲で一意であることは明らかである。

Xがどのような順序構造をもち，どのような条件のもとで価値関数vが存在するかについての議論は省略するが，詳しくは文献〔2〕〔3〕を参照されたい。

価値関数の存在が明らかになったとしても，多属性の価値関数を直接評価するためには，多数個の属性を同時に評価検討しなければならないので，大変な困難さを伴うことが予想される。もし，属性をあるクラスに細分した上で，より低次元の価値関数から全体の価値関数が構成できれば，価値関数のアセスメントは容易になるであろう。このことは，選好構造にある種の条件が成立していれば可能になる。価値関数のアセスメントを簡単にするための分解表現を，定理の形で紹介することにする。

Ⅲ-1　2属性 ($X=Y\times Z$) 価値関数

〔定義Ⅲ-1〕　図-4の点において，(y_1, z_1) では，Zの増分bに対してYの支払いはa，(y_1, z_2) ではZの増分cに対してYの支払いはa, (y_2, z_1) ではZの増分dに対してYの支払いはdであるならば，$y_1, y_2, z_1, z_2, a, b, c, d$ の値にかかわらず (y_2, z_2) ではZの増分cに対してYの支払いがdとなるとき，対応トレードオフ条件 (corresponding tradeoffs condition) が

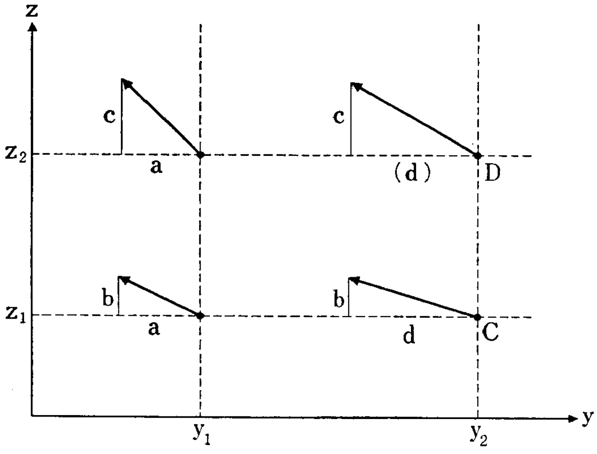


図-4

成立するという。以下 C.T. 条件と書くことにする。

〔定理Ⅲ-1〕　C.T. 条件が成立するための必要十分条件は，価値関数が加法的な関数

$$v(y, z)=v_Y(y)+v_Z(z)$$

で表わされることである。ただし，v_Y, v_Z は価値関数である*。

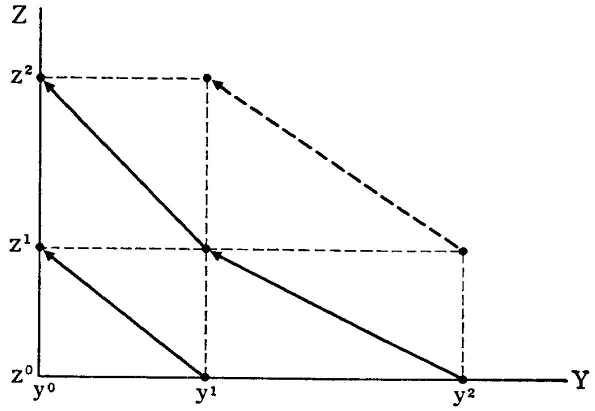
加法的価値関数が，C.T. 条件を満たすことは明らかであるが，逆はやっかいである。厳密な証明〔3〕は省略するが，証明の手順を示唆する加法的価値関数の測定法として知られているロック・ステップ (Lock Step) 法を示すことにする。

- Lock Step 法：

1. y^0, z^0 をそれぞれ Y, Z の最低レベルとし，$u(y^0, z^0)=u_Y(y^0)=u_Z(z^0)=0$ とする。
2. $y^1 \succ y^0$ なる y^1 をとり，$u_Y(y^1)=1$ とする。
3. $(y^0, z^1) \sim (y^1, z^0)$ なる z^1 を求め，$u_Z(z^1)=1$ とする。
4. $(y^2, z^0) \sim (y^1, z^1) \sim (y^0, z^2)$ なる y^2, z^2 を求め，$u_Y(y^2)=u_Z(z^2)=2$ とする。
5. このスケーリングが妥当であるためには，

$(y^1, z^2) \sim (y^2, z^1)$

* $v_1(y, z)=(y-\alpha_1)^{\alpha_2}(z-\beta_1)^{\beta_2}$ は $v=\log v_1$ の変換によって加法的価値関数となる。



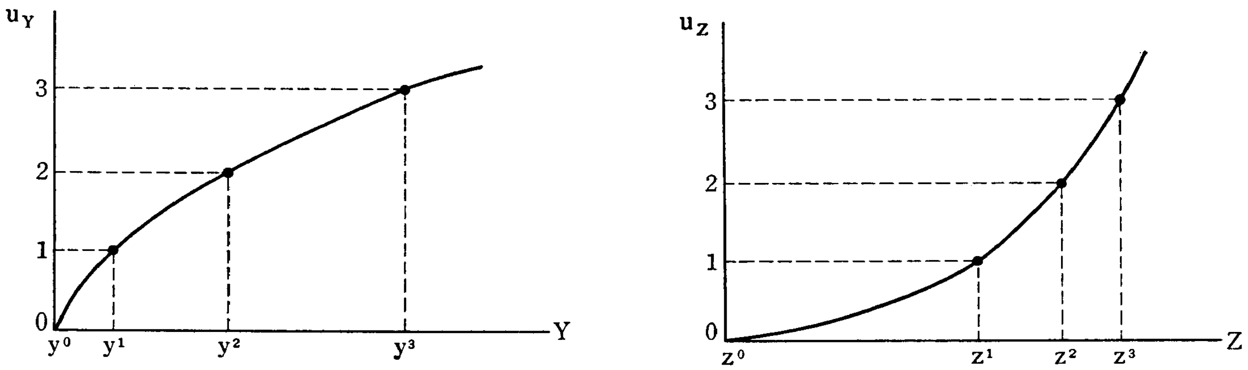


図-5

でなければならないが，これは C.T. 条件より出る。これが満足されていればつぎへ移る。満足されなければ加法形関数は得られない。

6. $(y^3, z^0)\sim(y^2, z^1)\sim(y^1, z^2)\sim(y^0, z^3)$ なる y^3, z^3 を求め，$u_Y(y^3)=u_Z(z^3)=3$ とする。
7. $(y^3, z^1)\sim(y^2, z^2)\sim(y^1, z^3)$ が成立するかどうかを調べる。
8. 同様に続ける。
9. u_Y, u_Z を適当なカーブフィッティングで求め，$u(y,z)=u_Y(y)+u_Z(z)$ とする。

Ⅲ-2　$\boldsymbol{n}$ 属性（$\boldsymbol{n}\geq3$）価値関数

〔**定義Ⅲ-2**〕　$x=(x_1, \cdots, x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ を構成する属性の添字 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ の一部からなる部分集合を $y=(x_1, \cdots, x_s)$，その補集合を $z=(x_{s+1}, \cdots, x_n)$ で表わし，$x=(y, z)$ と書くことにする。ただし一般性を失うことなく y は常に最初の s 個，z は残りの n-s 個を表わすものとする。

$$(y', z')\succsim(y'', z') \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

であるとき，z' のもとで y' は y'' より条件つきでより選好される，あるいは無差別であるという。

〔**定義Ⅲ-3**〕　与えられた z' のもとで y の条件付選好構造が z' の値に依存しないならば，Y は Z と選好独立(preferentially independent)であるという。すなわち任意の z, y', y'' に対

して，

$$(y', z')\succsim(y'', z')$$
$$\Longrightarrow(y', z)\succsim(y'', z) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

が成立することである。

〔例〕 ある建設工事プロジェクトで，Q＝品質，T＝工期，C＝費用の属性を考える。特定の状況のもとでは品質と工期の間のトレードオフは，費用に依存しない。すなわち $\{Q, T\}$ の選好構造は，Cの水準に依存しない。このとき $\{Q, T\}$ は，Cと選好独立であると言える。

〔定義Ⅲ-4〕　属性 $X_1\cdots\cdots X_n$ のすべての部分集合が，その補集合と選好独立ならば，属性 $X_1\cdots\cdots X_n$ は相互選好独立（mutually preferentially independent）であるという。

〔定理Ⅲ-2〕　属性 $X_1\cdots\cdots X_n$ に対して，加法的な価値関数，

$$v(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} v_i(x_i)$$

が存在するための必要十分条件は，$X_1, \cdots, X_n$ が相互選好独立となることである。ただし，v_i は x_i に関する価値関数である。

証明は，相互選好独立性が成立するときには，どの一対に対しても C.T. 条件が成立することを利用する（〔3〕参照）。また，加法性の条件（相互選好独立性の条件）の緩和に対する議論については，種々の結果が〔1〕で得られている。

Ⅳ　不確実下における選好の理論

今，決定者が代替案の集合Aから1つの代替案 $a\in A$ を選択すれば，その結果は属性 $X_1\times\cdots\cdots\times X_n$ によって記述できる。それぞれの代替案から生ずる結果については正確（一義的）には分らないが，その可能性に対して確率を割り当てることはできるものとする。このような状況における決定問題，すなわちリスクと選択の問題を取り扱うのが不確実下における選好の理論である*。このような決定問題に対して，いろいろなアプローチが提案されているが，その中で最もポピュラーな多属性効用理論について解説することにする。

多属性効用理論は，効用と呼ばれる主観的価値を用いて期待効用最大化の規範に基づきリスクを伴う決定問題を体系化する，1つの理論的方法である。典型的な例をあげて説明することにする。今，株式投資を考えている決定者がいるとしよう。3種類の代替案（投資対象）a_1, a_2, a_3 があり，これらの投資による利益は，自然の状態 θ と呼ばれる不確実性を伴う状態に依存して，図-6 のように予測される。θの生起確率 $p(\theta_1)=0.6$，$p(\theta_2)=0.1$，$p(\theta_3)=0.3$ が分っているものとすれば，代替案 a_i $(i=1, 2, 3)$ を選択したとき x_i $(i=1, 2, 3)$ の利益を得る確率 p_i は，図-7 のようになる。このとき代替案 a_1, a_2, a_3 の選択問題は，確率分布 p_1, p_2, p_3 の選択問題に帰着される。ここで我々は，利益のもつ決定者の主観的価値（効用）を導入し，期待効用最大化により，この確率分布の選好を定量化し，決定者の行動を説明しようとする立場をとる。期待効用最大化の規範が意味をもつように，意思決定者の選好に関する公理系を初めて

A ＼ θ	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	10	−5	2
a_2	−5	10	2
a_3	2	2	2

図-6

A ＼ X	x_1	x_2	x_3	
	−5	2	10	
a_1	0.1	0.3	0.6	p_1
a_2	0.6	0.1	0.3	p_2
a_3	0.0	1.0	0.0	p_3

図-7

* 通常は結果の生起する確率が，客観的にせよ主観点にせよ，全く分らない場合を，不確実下での決定問題，分る場合をリスクを含む問題として区別している。

作りあげたのは，von Neumann-Morgenstern である。以下では，基礎的な確率論の事項については説明を加えることなく，話を進めていくことにする。

〔定義Ⅳ-1〕　X 上の効用関数(utility function) u: $X \to Re$，の X 上の完全加法的確率測度 $p(x)$ についての期待値，

$$E(u, p)=\int_X u(x)p(x)dx \cdots\cdots\cdots(5)$$

を，期待効用（expected utility）と定義する。

〔注意〕上記において，$X=X_1\times\cdots\times X_n \subseteq R^n$ と考えている。また，結果 $x_1, \cdots, x_n$ を，確率 $p_1, \cdots, p_n$ で生ずるような単純確率測度の場合は，$\underset{x\in X}{E}(u, p)=\sum u(x)p(x)$ と書くことにする。

結果集合 X 上のすべての確率測度の集合を $\tilde{X}$ と書くことにすれば，リスクを含む意思決定問題は，$\tilde{X}$ に対する決定者の選好関係 $(\tilde{X}, \succsim)$ を期待効用によって表現することになる。すなわち，

$$p \succ q \Longleftrightarrow E(u, p) > E(u, q) \cdots\cdots(6)$$

$$p \sim q \Longleftrightarrow E(u, p) = E(u, q) \cdots\cdots(7)$$

となる $u(x)$（効用関数）を見つけることである。まず，存在と一意性を保証する次の定理を証明なしで示す。証明について，詳しくは〔2〕を参照されたい。

〔定理Ⅳ-1〕　選好関係 $(\tilde{X}, \succsim)$ が与えられたとき，(6)，(7)を満足する効用関数が存在するための必要十分条件は，

（ⅰ）$(\tilde{X}, \succsim)$ は弱順序

（ⅱ）$p \succ q \quad \Longrightarrow \alpha p+(1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$ for any $r \in \tilde{X}$ and $\alpha \in (0, 1)$

（ⅲ）$p \succ q \succ r \quad \Longrightarrow$ ある $\alpha, \beta \in (0, 1)$ に対して $\alpha p+(1-\alpha)r \succ q \succ \beta p+(1-\beta)r$,

であり，さらに効用関数は正の線形変換の範囲で一意である。

〔注意〕定義により，価値関数は効用関数の特殊な場合になっている。

効用関数の測定は，次のような手順で行うことができる。確率 α で結果 x を得，確率 $(1-\alpha)$ で結果 y を得るくじを，$<x, \alpha, y>$ と書くことにする。X の要素のうちで，x^* をもっとも好ましい結果，x^0 をもっとも好ましくない結果とし，$u(x^*)=1$，$u(x^0)=0$ と尺度を定める。x と $<x^*, \alpha, x^0>$ が無差別になるように α を見積もる。

$$u(x)=\alpha u(x^*)+(1-\alpha)u(x^0)=\alpha$$

このようにして，全ての $x \in X$ に対して効用値を定めることができる。

Ⅳ-1　1属性（1次元）効用関数

(6)，(7)を満たす効用関数の存在が，決定者のリスクに対する態度の評価を可能にすることから示していこう。まず，確率測度 $p(x)$ をもったくじ p を考える。

〔定義Ⅳ-2〕　くじ p の確率同値（certainty equivalent）とは，くじ p と確実に $\hat{x}$ を得ることが無差別であるような量 $\hat{x}$ である。すなわち，

$$u(\hat{x})=E(u, p)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

単調な効用関数に対しては，任意のくじの確実同値は一意に定まり，くじそのものの価値を確実同値の効用値で表せることを示していることになる。

〔定義Ⅳ-3〕　2つの効用関数 u_1. u_2 が，任意の2つのくじに対して同等の選好を示すとき，同等であるといい，$u_1 \sim u_2$ と書く.

ある1点 $x \in X$ で $p(x)=1$ となるくじ p を退化くじ，どのような $x \in X$ においても $p(x) \neq 1$ となるくじを非退化くじということにす

る。

以上の準備をしてリスクに対する決定者の態度を評価してみよう。リスク回避をする者とは，直観的には保守的に行動することを好む者を意味している。くじpに直面している決定者を考えよう。このくじの結果の期待値 $\bar{x}=E(x, p)=\int xp(x)dx$ を，確実に受けとることと，くじpの間の選好を問われたとする。もし，決定者が確実な結果 $\bar{x}$ を，くじpより好むなら，彼はくじに伴う不確実性を回避することを好むことになる。

〔定義Ⅳ-4〕 任意の非退化くじpに対して，意思決定者が，くじそのものよりくじの期待値 $\bar{x}$ の方を好むとき，すなわち，

$$u(E(x, p))>E(u, p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

のとき，彼は危険回避的（risk aversion）であるという。

〔定義Ⅳ-5〕 任意の非退化くじpに対して，意思決定者がくじの期待値$\bar{x}$よりも，くじそのものの方を好むとき，すなわち，

$$u(E(x, p))<E(u, p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

のとき，彼は危険受容的（risk prone）であるという。

〔定義Ⅳ-6〕 任意の非退化くじpに対して，意思決定者が，くじそのものとくじの期待値$\bar{x}$を，無差別に思うとき，すなわち，

$$u(E(x, p))=E(u, p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

のとき，危険中立的（risk neutral）であるという。

〔注意〕 意思決定者の効用関数が（単調）増加の場合には，危険回避的であるときかつそのときに限り，$\bar{x}>\hat{x}$ となる。

〔定理Ⅳ-2〕 意思決定者は，彼の効用関数が凸（凹，線形）関数であるとき，またそのときに限り危険回避的（受容的，中立）である。

〔証明〕 確率pで結果 x_1，$(1-p)$で結果x_2を生ずるくじを考える（$0<p<1$）。危険回避的ならば，$u(px_1+(1-p)x_2)>pu(x_1)+(1-p)u(x_2)$，であるが，これは凸関数の定義である。

単純確率測度の場合について，逆を証明する。確率 p_i で結果 x_i（$i=1, \cdots, n$）を生ずるくじを考える（$0<p_i<1$）。uは凸関数であるから，

$$u(\sum p_i x_i)>\sum p_i u(x_i)$$

となる。

本稿では現実性という観点から，以下（単調）増加効用関数に議論を限定するが，（単調）減少効用関数についても，少し定義式を変更するだけで同様な結果が得られるであろうということは，容易に想像がつく。

〔定義Ⅳ-7〕 増加効用関数に対して，

$$RP(x)=\bar{x}-\hat{x} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

と置き，くじpのリスクプレミアム（risk premium）と呼ぶ。

RPはリスクを避けるため，期待値 $\hat{x}$ に上乗せして進んで支払う量である。

〔定義Ⅳ-8〕 増加効用関数$u(x)$に対して，

$$r(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}=-\frac{d}{dx}[\log u'(x)] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

を，xにおける危険回避度（local risk aversion）と呼び，$r(x)$ を危険回避関数と定義する。ただし $u(x)$ は，連続微分可能な関数とする。

定義から，2つの効用関数は，それらの危険回避関数が等しいとき，かつそのときに限り同等になる。

〔定理Ⅳ-3〕 増加効用関数において，任意

の x に対して，$r(x)>0$ ($r(x)<0$, $r(x)=0$) ならば危険回避的（受容的，中立）となる。

〔証明〕 $r(x)>0$ ならば，$u'(x)$ は常に正である以上 $u''(x)<0$ となり，u は凸関数となる。

〔注意〕 効用関数 $u_1(x), u_2(x)$ において（任意の x_0 に対して）$r_1(x_0)>r_2(x_0)$ ならば任意の x_0 と任意のくじ p（確率測度 $p(x)$）に対して $RP_1(x_0+x)>RP_2(x_0+x)$ であり，また，$r(x_0)$ が x_0 の減少（増加）関数であるとき，かつそのときに限り，すべてのくじ p に対して $RP(x_0+x)$ は x_0 の減少（増加）関数となることが示される〔1〕ので，危険回避関数は，危険回避の度合を反映していると考えられる。

〔注意〕 $<x_1, x_2>$ で確率½で x_1 と x_2 をとるくじを表わすものとする。危険回達的な決定者のくじ $<x+h, x-x>$ を考えることにする。減少型危険回避であることは，このくじについてのリスクプレミアムが，x が大きくなるにつれて減少することを意味している。x は決定者の資差額とすれば，資産が増すにつれてあるリスクを負うことが苦痛でなくなり，小額のリスクプレミアムしか支払わなくなる。

〔定義Ⅳ-9〕

$r(x)>0$ and $r(x)$ 減少関数 $\models\!\!\Longrightarrow$ 減少型危険回避

$r(x)>0$ and $r(x)=$ 定数 $\models\!\!\Longrightarrow$ 不変型危険回避

$r(x)>0$ and $r(x)$ 増加関数 $\models\!\!\Longrightarrow$ 増加型危険回避

危険受容的な場合も，同じように区別できるが，繁雑であるため省略する。次に，$r(x)=$ 定数の場合には，効用関数の形に強い制約が課せられることを示す。

〔定理Ⅳ-4〕

$u(x)\sim -e^{-cx} \Longleftrightarrow r(x)\equiv c>0$ （不変型危険回避）

$u(x)\sim x \Longleftrightarrow r(x)\equiv 0$ （危険中立）

$u(x)\sim e^{-cx} \Longleftrightarrow r(x)\equiv c<0$ （不変型危険受容）

〔証明〕 $\Longleftarrow\!|$ は明らか。もし，$r(x)\equiv c>0$ ならば，

$$\frac{d}{dx}[\log u'(x)]=c$$

したがって，

$$e^{-cx}=e^{\log u'(x)+d}=e^d u'(x)$$

となる。再び積分して，

$$-\frac{e^{-cx}}{c}=e^d u(x)+h \quad (h\text{は積分定数})$$

となり，

$$u(x)\sim e^{-cx}$$

他の証明についても同様である。

〔例〕 $u(x)=a+bx-cx^2$, $b>0$, $c>0$, $x<\frac{b}{2c}$

$$r(x)=\frac{2c}{b-2cx}$$

明らかにすべての x に対して，$r>0$ であるが，r が x の増加関数であるので，$u(x)$ は減少型危険回避ではない。したがって，減少型危険回避が本質的なときには，2次効用関数は適当でない。

〔例〕 $u(x)=\log(x+b)$, $x>-b$

$$r(x)=\frac{1}{x+b}$$

明らかにすべての $x>-b$ に対して，$r(x)>0$ でかつ減少関数であるので，減少型危険回避である。

Ⅳ-2　n 属性（$n\geq 2$）効用関数

Ⅳ-1 では，1属性の場合のリスク下での意思決定における期待効用最大化の原理，リスクに対する態度の評価について議論した。この1次元効用理論における考え方，および結果は，多属性の場合にも利用できる。

X_i ($i=1, \cdots, n$) を i 番目の属性集合で，かつ $X_i\subseteq R_e$ とし，$\tilde{X}$ を結果集合 $X=X_1\times\cdots\times X_n$, 上の確率測度の集合とする。$p, q\in\tilde{X}$ に対して，(6), (7)を満足するような $u(x)$ の存在は仮定す

る。$u(x)$, $x=(x_1, \cdots, x_n)\in X$ は，前に述べたような直接評価法によって測定することも可能であるが，もし意思決定者の選好態度が，属性の間にある種の独立性を満足し，

$$u(x_1, \cdots, x_n)=f(f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))$$

の形に求まれば（条件付効用関数による分解表現）$u(x)$ を構成することは，非常に単純化できることになる。このような効用関数を規定するために必要な，主観的情報を削減するための分解表現について，考えていくことにする。多属性効用関数の基本概念の１つに，くじに対する選好関係の独立性として，効用独立（utility independent）の概念がある。効用独立性が成立すれば，以下で分るように，決定者は評価問題の一部を，スタッフに委譲することができる。

まず理解を助けるため，２属性 $X=Y\times Z$ の場合*から始めることにする。

〔定義Ⅳ-10〕　Y 上の条件付選好構造が，Z の値に依存しないとき，Y は Z と効用独立（utility independent）であるという。すなわち，任意の２つのくじ $p, q\in \tilde{Y}$ に対して，

$$(p, z^0)\succsim(q, z^0) \models\!\!\!\Longrightarrow (p, z)\succsim(q, z) \quad \text{for } \forall z\in Z$$

が成立することである。

〔注意〕この定義からただちに Y が Z と効用独立であることは，Y 上の条件付効用関数 $u(\cdot, z)$ がすべて同等であること，すなわちすべての y, z に対して，

$$u(y, z)=c_1(z)+c_2(z)u(y, z^0), \quad c_2(z)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

が成立することを意味する。

〔例〕

1. $u(y, z)=\dfrac{y^\alpha z^\beta}{y+z}$
2. $u(y, z)=g(z)+h(z)u_Y(y)$
3. $u(y, z)=k(y)+m(y)u_Z(z)$
4. $u(y, z)=k_1u_Y(y)+k_2u_Z(z)+k_3u_Y(y)u_Z(z)$
5. $u(y, z)=[\alpha+\beta u_Y(y)][\gamma+\delta u_Z(z)]$
6. $u(y, z)=k_Yu_Y(y)+k_Zu_Z(z)$

１の場合は，どの属性ももう一方の属性と効用独立ではない。２の場合は，Y は Z と効用独立であるが，逆は成立しない。３の場合は，Z は Y と効用独立であるが逆は言えない。４，５，６の場合は，それぞれ他の属性と効用独立である。

* n 属性 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ の場合も，$I\subset\{1, 2, \cdots n\}$ に対して $X_I, X_{\bar{I}}$ の条件付効用関数を求めることができれば，$X=X_I\times X_{\bar{I}}$ であるから，２属性の場合に帰着できる。ただし，$\bar{I}$ は I の補集合を表わす。

• 加法形効用関数（additive utility function）

$u(y, z)=y^\alpha z^\beta$, $1\leq y\leq 10$, $1\leq z\leq 10$ とすると，Y と Z は相互に効用独立であるが，加法的ではない。対数をとると，$\log u=\alpha\log y+\beta\log z$ となるが，対数変換は正の線形変換ではないので，$\log u$ は効用関数とはならない。加法的表現，

$$u(y, z)=k_Yu_Y(y)+k_Zu_Z(z), \quad k_Y, k_Z>0$$

を得るためには，より強い条件が必要となる。

〔定義Ⅳ-11〕　$Y\times Z$ 上の同時確率測度によって定義された２つのくじに対する選好が，その周辺確率測度のみによって定まるならば，Y, Z は加法的に独立（additive independent）であるという。

２つのくじ $p=<(y, z), (y^0, z^0)>$, $p'=<(y, z^0), (y^0, z)>$ は，同じ周辺確率測度をもつので，上の定義を実際に検証可能なように換言すれば，次のようになる。

〔定義Ⅳ-12〕　Y, Z が加法独立であるとは，任意に与えられた $y^0\in Y$, $z^0\in Z$ に対して，

$$<(y, z), (y^0, z^0)>\sim<(y, z^0), (y^0, z)>, \quad \forall y\in Y, \ \forall z\in Z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

が成立することである。

〔定理Ⅳ-5〕　属性 Y, Z が加法的に独立であるとき，かつそのときに限り，

$$u(y,\ z)=u(y,\ z^0)+u(y^0,\ z)\cdots\cdots(16)$$

あるいは，

$$u(y,\ z)=k_Y u_Y(y)+k_Z u_Z(z)\cdots\cdots(17)$$

の形で書ける。ただし，$(y^*,\ z^0)\succ(y^0,\ z^0)$，$(y^0,\ z^*)\succ(y^0,\ z^0)$ なる $(y^0,\ z^0)$，$(y^*,\ z^*)$ に対して，

（i）$u(y^0,\ z^0)=0$，$u(y^*,\ z^*)=1$

（ii）$u_Y(y^0)=0$，　$u_Y(y^*)=1$

（iii）$u_Z(z^0)=0$，　$u_Z(z^*)=1$

のように正規化する。このとき，

（iv）$k_Y=u(y^*,\ z^0)$

（v）$k_Z=u(y^0,\ z^*)$

〔証明〕 加法独立性の条件より，

$$\frac{1}{2}u(y,\ z)+\frac{1}{2}u(y^0,\ z^0)$$
$$=\frac{1}{2}u(y,\ z^0)+\frac{1}{2}u(y^0,\ z)$$

が成立する。$u(y^0,\ z^0)=0$ と定め，尺度構成係数を適当に選んで，$u(y,\ z^0)=k_Y u_Y(y)$，$u(y^0,\ z)=k_Z u(z)$ とすれば，(16)，(17) が求まる。逆は明らかである。

加法独立性の仮定は，選好の相互作用の存在を許さない。一方の属性の望ましさの度合いが，もう一方の属性の値によって異ってくることを許さないともいえる。次にある種の相互作用が存在するような場合を取り扱う。

- **乗法形効用関数 (multiplicative utility function) あるいは多重線形効用関数 (multi linear utility function)**

〔定理Ⅳ-6〕　Y と Z が相互に効用独立ならば，

$$u(y,\ z)=u(y,\ z^0)+u(y^0,\ z)$$
$$+ku(y,\ z^0)u(y^0,\ z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

あるいは，

$$u(y,\ z)=k_Y u_Y(y)+k_Z u_Z(z)$$
$$+k_{YZ}u_Y(y)u_Z(z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

の形で書ける。ただし $(y^*,\ z^0)\succ(y^0,\ z^0)$，$(y^0,\ z^*)\succ(y^0,\ z^0)$ なる $(y^0,\ z^0)$，$(y^*,\ z^*)$ に対して，

（i）$u(y^0,\ z^0)=0$，$u(y^*,\ z^*)=1$

（ii）$u_Y(y^0)=0$，　$u_Y(y^*)=1$

（iii）$u_Z(z^0)=0$，　$u_Z(z^*)=1$

のように正規化する。このとき，

（iv）$k_Y=u(y^*,\ z^0)$

（v）$k_Z=u(y^0,\ z^*)$

（vi）$k_{YZ}=1-k_Y-k_Z$，$k=k_{YZ}/(k_Y k_Z)$

〔証明〕 $u(y^0,\ z^0)=0$ として(14)式に $y=y^0$ を代入すれば，

$$u(y^0,\ z)=c_1(z)+c_2(z)u(y^0,\ z^0)$$
$$=c_1(z)$$

(14)式に $y=y^*$ を代入し，上式を用いると，

$$u(y^*,\ z)=u(y^0,\ z)+c_2(z)u(y^*,\ z^0)$$

あるいは，

$$c_2(z)=\frac{u(y^*,\ z)-u(y^0,\ z)}{u(y^*,\ z^0)}$$

となる。したがって，

$$u(y,\ z)=u(y^0,\ z)$$
$$+\frac{u(y^*,\ z)-u(y^0,\ z)}{u(y^*,\ z^0)}$$
$$u(y,\ z^0),\ \ \forall z\in Z\cdots(20)$$

また，Z が Y に効用独立という条件からも同様に，

$$u(y,\ z)=u(y,\ z^0)$$
$$+\frac{u(y,\ z^*)-u(y,\ z^0)}{u(y^0,\ z^*)}$$
$$u(y^0,\ z),\ \forall y\in Y\cdots(21)$$

を得る。

(21)を $y=y^*$ で評価し，(20)に代入すれば，

$$u(y,z)=u(y^0,z)+\left[\frac{u(y^*,z^0)+\dfrac{u(y^*,z^*)-u(y^*,z^0)}{u(y^0,z^*)}u(y^0,z)-u(y^0,z)}{u(y^*,z^0)}\right]u(y,z^0)$$
$$=u(y^0,z)+u(y,z^0)+\left[\frac{u(y^*,z^*)-u(y^*,z^0)-u(y^0,z^*)}{u(y^*,z^0)u(y^0,z^*)}\right]u(y^0,z)u(y,z^0)\cdots(22)$$

を得る。ここで,

$$k=\frac{u(y^*,z^*)-u(y^*,z^0)-u(y^0,z^*)}{u(y^*,z^0)u(y^0,z^*)}$$
$$k_Yu_Y=u(y,z^0),\ k_Zu_Z=u(y^0,z)$$

とし, $k_{YZ}=kk_Yk_Z$ と定めれば, (19)′式になる。ここに k_Y, k_Z は正の尺度構成係数である。$u(y^*, z^*)=1$ から, 結論が得られる。

〔注意〕 (18)は多重線形であるが, $k\neq0$ ならば同等な乗法的表現をもつ。$k>0$ のとき, $u'(y,z)=ku(y,z)+1$ と置けば,

$$u'(y,z)=u'(y,z^0)u'y^0,z)$$

となり, $k<0$ ならば, $u'(y,z)=-ku(y,z)-1$ と置くと,

$$-u'(y,z)=u'(g,z^0)u'(g^0,z)$$

となる。

効用独立の条件は対称的でないので, 一方だけが他方と効用独立である場合には, 次の定理が得られる。

〔定理Ⅳ-7〕 YがZに効用独立なら,

$$u(y,z)=u(y^0,z)+u(y,z^0)[u(y^*,z)-u(y^0,z)]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となる。ただし, $u(y^0, z^0)=0$, $u(y^*, z^0)=1$ で正規化されている。

〔証明〕 図-8のように $u_A=u(y,z)$, $u_B=u(y_0,z)$, $u_C=u(y^*,z)$, $u_F=u(y,z^0)$, $u_D=0$, $u_E=1$ とする。

YがZに効用独立であるから,

$$\frac{u_A-u_B}{u_F-u_D}=\frac{u_C-u_B}{u_E-u_D}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

が成立する。

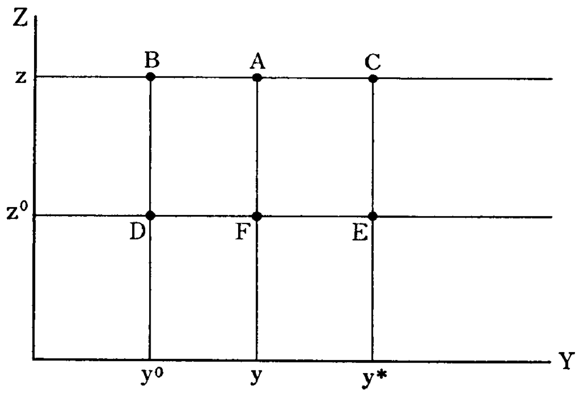


図-8

$X=X_1\times\cdots\times X_n$, $n\geq3$ の場合に, 今までの議論を拡張しよう。本質的には2属性の場合の結果を繰返し適用したものであるから証明は省略し, 結果のみを示すことにする。詳しくは, 〔1〕または〔2〕, 〔4〕を参照されたい。$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X=X_1\times\cdots\times X_n$ において, Xの部分集合Yとその補集合 $\bar{Y}$ に注目するとき, $x=(y,\bar{y})$ と書くことにする。

〔定義Ⅳ-13〕 属性 $X_1\times\cdots\times X_n$ 上のくじに対する選好が, その同時確率測度に依存せず, 周辺確率測度のみに依存するときに, 属性 $X_1,\cdots,X_n$ は加法的に独立であるという。

〔定理Ⅳ-8〕 (加法形効用関数) $X_1,\cdots,X_n$ が加法的に独立であるとき, かつそのときに限り,

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}u(x_i,\bar{x}_i{}^0)=\sum_{i=1}^{n}k_iu_i(x_i)\cdots(25)$$

が成立する。ただし,

(i) $u(x_1{}^0,\cdots,x_n{}^0)=0$, $u(x_1{}^*,\cdots,x_n{}^*)=1$ により正規化する

(ii) $u_i(x_i)$ は X_i 上の条件付効用関数で,

Ⅴ おわりに

効用関数のアセスメントを行う場合には，次のようなステップで考えるとよい。

- 1属性効用関数のアセスメント：

①アセスメントの準備　決定者に決定分析の概念と効用関数の評価に用いるフレームワークを説明し，決定者の選好構造が興味の対象であることを知らせる。

②関連する定性的特性の同定　効用関数が単調か，危険回避的（中立的，受容的）か，増加型（減少型，不変型）かなどの決定（図-9 参照)。

③定量的制約の決定　確実同値などを用いて，効用関数上にいくつかの点の効用値を決定し，一貫しない選好があるときは不一致を指摘し，評価手続きの一部をくり返して矛盾のないものとする。

④効用関数の選択　定性的，定量的評価を同時に満足する効用関数のクラスを定め，特定のものを選び出す。

⑤一貫性のチェック

$u(x)$	制　約	$r(x)$	減少型危険回避の範囲
$\log(x+b)$	—	$\dfrac{1}{x+b}$	$x \geqq -b$
$(x+b)^c$	$0<c<1$	$-\dfrac{(c-1)}{x+b}$	$x \geqq -b$
$(x+b)^{-c}$	$c>0$	$\dfrac{c+1}{x+b}$	$x \geqq -b$
$x+c\log(x+b)$	$c>0$	$\dfrac{c}{(x+b)(x+c+b)}$	$x>-b$
$-e^{-ax}-be^{-cx}$	$a, b, c>0$	$\dfrac{a^2e^{-ax}+bc^2e^{-cx}}{ae^{-ax}+bce^{-cx}}$	任意の x
$-e^{-ax}+bx$	$a, b>0$	$\dfrac{a^2e^{-ax}}{ae^{-ax}+b}$	任意の x

図-9　代表的な減少型危険回避的効用関数

- 多属性効用関数のアセスメント：

①アセスメントの準備。

②独立性のチェック　加法的独立性，効用独立性などの検証を行う。

③条件付効用関数のアセスメント　1属性の場合の手法が使える。

④尺度構成係数の決定　詳しくは〔1〕を参照。

⑤一貫性のチェック

本稿では，多目的決定論のうち，現在最も整備されていると思われる多属性効用理論について解説してきた（決定問題に対するアプローチとしては，この他に統計的決定理論，決定心理学などがある)。パレート最適の概念を中心に発展してきた有効解の解法，および有効解の中から，選好解を数理計画法により求めるアルゴリズムについては紹介しなかったが，これは次の機会に譲りたい。

近年，定性的定量的特性を規定するインプットデータから，コンピュータを利用した効用関数のアセスメント（対話型コンピュータプログラム）の開発も行われており，多目的決定理論の最近の進歩は，著しいものがある。これらも含めたup-to-dateな研究成果については〔5〕の文献リストが参考になる。

また，多目的決定理論の経営活動への適用例については，〔1〕〔6〕を参照されたい。

参考文献

1) R.L. Keeney & H. Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley (1976).
2) 市川編：多目的決定の理論と方法，計測自動制御学会 (1980).
3) P.H. Krantz, R.D. Luse, P. Suppes & A. Tversky: *Foundations of Measurement*, 1, Academic Press (1971).
4) Fishburn: *Utility Theory for Decision Making*, Wiley (1970).
5) 竹田：最近の多目的決定理論の動向，オペレーションズ・リサーチ，25 (1980), pp.40-48.
6) 笹井，境：多目的決定理論による広告予算配分モデルの作成，横浜経営研究，3 (1982), pp. 31-42.

〔横浜国立大学経営学部助教授〕