算数・数学科における図形についての美しさ
を感得させる教材開発とその指導

池田敏和*，馬場裕*，橋本吉彦*，岩立忠**，藤原大樹***，石谷優行****，
橋本吉貴*****，峰野宏祐******，東谷洵******，五十嵐潤******，前田正男*

Ⅰ．はじめに

図形についての豊かな感覚・美しさを感得させる指導について，平成 20 年度より 3 年間に渡って，科学研究費補助金基盤研究（C）「図形についての豊かな感覚・美しさを感得させる指導」（研究代表者：前田正男，課題番号：2050074900）が実施されることになった。そして，これまで 2 年間にわたって，小学校から高等学校 1 年までを対象に，図形についての美しさの指導に焦点を当てて研究が進められてきた（池田他，2010；前田他，2010）。

本稿では，2 年間の研究を受けて，下記の 2 点を研究の目的として設定し考察していくことにする。

（1）図形についての美しさを児童・生徒が感得するための指導法の開発に向けて，その基本的枠組みを設定し，具体的な指導のあり方を事例的に考察すること。

（2）図形についての５つの美しさに焦点を当てた教材を開発すること。

Ⅱ．図形についての美しさとそれを感得する指導の基本的枠組み

図形についての美しさの捉えを述べた上で，その指導をいかに行っていくのか，その基本的な枠組みについて考察する。

（1）図形についての美しさ

美しさは，人間の行為の所産として見いだされるものとして捉え，それらには，人間が創り出したものと，人間によって見いだされた，人間の行為を超越して存在しているものがあるという立場をとる。そして，その美しさの対象は，創り上げられたものの構造や性質に限定せず，人間が創り上げる際のプロセス，考え方にも及ぶものとして捉えることにする。そして，それらは，個人的・階級的なものではなく，全ての人を対象とした社会的なものであるという立場で考えていくことにする。

上記の考察を前提に，図形についての美しさについては，より幅広い視点から，児童・生徒が図形に関わる活動をする中で，どのような情意的充実感があったのかを明らかにするという立場で考える。開発された教材を分析した結果，図形についての美しさを下記の５つに類型化した。この類型化は，必ずしも独立なものではなく，複数の観点を同時に満たす教材も存在することに留意する必要がある。

---

*横浜国立大学，**横浜国立大学附属鎌倉小学校，***横浜国立大学附属横浜中学校，
****神奈川県立横浜平沼高等学校，*****鎌倉女子大学，******横浜国立大学大学院

（美しさ１）図形の視覚的な美しさ：図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

ここには，「この花は美しい」といった具合に，誰もが共通に思える，先天的に感じることのできる美しさと，経験を踏むことで徐々に感得できるようになる後天的な美しさがある。敷き詰め模様は，誰がみてもきれいにみえる。それに対して，その敷き詰め模様の背景にある数学的構造を直観的に見抜いた人は，それを見たとき，ただきれいだというだけではなく，数学的構造が内包されていることを関連づけた上でさらなる美しさを感得するのである。これは，数学的経験を踏むことによって感得できる洗練された美しさであろう。そして，この後者の経験の伴う美しさは，次の（美しさ２）の①に対応している。

（美しさ２）一般的に成立する図形的性質の美しさ：複数の図形を数学的に考察することにより，それらの間に，共通に，さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ１）を前提として始まる活動と，そうでない活動とが考えられる。

① 見た目で美しいと感じられる複数の図形（(美しさ１）で述べたもの）の性質を考察することを通して，そこに共通の数学的事実が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感：これは，上記（美しさ１）の根拠ではなく，美しいと感じることのできた複数の図形の性質を考察することにより，共通に同じ数学的事実が潜んでいたことに対する驚きであり，それゆえに生まれる畏敬の念である。この畏敬の念は，後天的なもので，経験を踏むことによって感得できるものであろう。それゆえ，人によって感得できたり，できなかったりする場合がある。

② 図形を数学的に考察することにより，複数の図形に一般的に成り立つ性質，あるいは，特定の図形に成り立つ特殊な性質に畏敬の念を感じとれる情意的充実感：これは，図形の研究そのもので，一般性があるほどより深く感得できるものである。この畏敬の念も，後天的なもので，経験を踏むことによって感得できるものであろう。

（美しさ３）図形を社会に応用できる美しさ：図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した，その知恵に感銘できる情意的充実感

ある特殊な機能や性質をもつ図形が，日常生活や社会において有効に活用されている場合がある。図形のもつ性質や機能と，日常生活や社会における課題とをいかに関連づけるかに焦点が当てられる。このような発明をするには，図形のもつ性質と機能を深く研究していくと共に，日常生活や社会において課題を見いだし，その解決策を探っていくことの両方が要求される。また，日常生活で既に応用されているものについては，「もしその図形でなかったらどうなるか」を考えることが重要となる。

（美しさ４）図形操作等における予想外の着想の美しさ：図形の操作等を行う中で引き出された，有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

これは，図形以外の領域（数量関係等）を対象とした場合にも，同様に存在するものである。どのような着想があるかについては，例えば，次のようなものがある。

① これまでバラバラのものとして見ていたことに，関連性があることに気づく。バラバラのものが関連づけられることに「すばらしい！」と感じられる情意的充実感である。

② 特殊な場合にしか成り立たない性質が，見方を変えることで，他の場合でも一般的に

成り立つことが見いだせる。拡張したり統合したりすることで同じものとみれることに「すばらしい！」と感じられる情意的充実感である。

（美しさ５）図形的に具体化して説明できる美しさ：抽象的な数式の関係を，図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感

数や数量間の関係は，抽象的な世界にあるものであり，視覚的に見ることができない。そのような抽象的な数や数量間の関係を図形によって視覚化し関連づけられたことは，目に見えないことを目に見える形に変形することであり，その行為が可能になったことに感銘を受けるわけである。

（２）図形についての美しさを感得する指導についての基本的枠組み

次の３つの流れを踏む授業展開を，図形についての美しさを感得する指導の基本的な枠組みとして設定した。これらについては，事例研究を積み重ねる中で，さらに明確にしていく必要がある。

①　児童・生徒に困難を感じさせる

図形についての美しさの感得は，前述の通り，児童・生徒の先行経験に大きく依存するものであり，同じ美しさに関わる側面を体験していても，美しさとして感得できる児童・生徒と感得できない児童・生徒が出てくるであろう。それでは，どのような先行経験をしていれば，図形についての美しさを感得できるのであろうか。そこで本研究では，上述の５つの美しさに関わる場面に遭遇できない状況で，児童・生徒が試行錯誤しながらさまよう経験が肝要であると考えた。すなわち，うまくいかない困難な状況を児童・生徒に経験してもらい，そのようなうまくいかない状況がごく普通に起こりうることを認識するわけである。このような経験を豊富にすることによって，そうでない美しさに関わる側面に遭遇したとき，より多くの児童・生徒が美しさを感得できるのではないかと考えたわけである。各々の美しさについて，どのような困難を児童・生徒に経験してもらえばよいかを特定して，指導を行っていく必要がある。

②「美しさ」に関わる事柄を見出す

次に，上記のようなうまくいかない状況の中で，児童・生徒の考えが引き金になって，美しさに関わる場面に遭遇できるような場面設定を工夫する。「うまくいかなかったことが，こんな風にうまくいくのか」といった解決の過程を児童・生徒が経験できるようにするわけである。美しさに関わる側面になかなか遭遇できない状況において，どのような発問を行い，どのような児童・生徒の考えを取り上げて，解決へと導いていくかが論点となる。児童・生徒から，「お～！」「すごい！」等の声が聞こえるような場面をいかに設定するかを考えていく必要がある。

③　よさを振り返る。A と nonA の対比

混沌とした状況から，美しさに関わる側面を経験することは重要であるが，それだけでは，何がどのように美しいのかを感得することはできない。これまでの活動を振り返り，何がうまくいかなかったのか，そして，どのような考えによって，うまくいくようになったのか等を振り返ることが肝要である。振り返りによって，直観的に行っていたことに理

由づけがなされ，何がどう美しいのかを感得することができる。その際，クラス内での話し合いを通して，「どこに目を付けたか」，「何が本質なのか」が明らかにされていくような展開を考えていく必要がある。

Ⅲ．中高等学校における実践事例

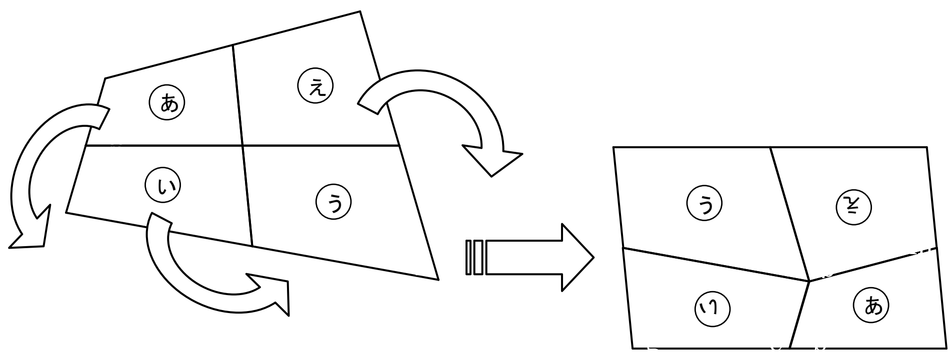
上記の指導の枠組みを受けて，中学校，高等学校において２つの実践を行った。

１．「鳩目返し」を題材にした指導実践

（１）焦点を当てる図形における美しさ

本実践では，四角形の鳩目返し，つまり，どんな四角形でも次のア～ウの操作を行うとすべて平行四辺形に変形できるという図形の性質を生徒自身に作業等を通して発見させ，既習を用いて証明していく。

ア．四角形の対辺の中点を結んで切る。
イ．できた 4 枚の四角形のうちの 3 枚を，つながっている頂点を中心に回転移動させる。
ウ．辺と辺とがうまく重なるようにつなげる。



この操作では，一般の四角形はすべて平行四辺形に変形する。よって，正方形も長方形も平行四辺形も台形もすべて平行四辺形になる。ところが，正方形を切ってつなげると正方形になり，長方形を切ってつなげると長方形になるため，これらから類推すると「もとの四角形と同じ種類の四角形になる」と予想できる。ところが，台形を切ってつなげると台形にはならず，平行四辺形になったり長方形になったりする（長方形も平行四辺形である）。生徒は「なぜ平行四辺形に変形できるのか？」あるいは「長方形に変形できるのはもとの四角形がどのような台形のときか？」などに問いをもつことが予想され，その後の証明，作業といった数学的活動のきっかけづくりになり得る。

そこで本時では，正方形，長方形で鳩目返しを考えた後に，主たる課題として台形について考えさせ，その後，他の四角形あるいは四角形以外の図形について新たな性質がないかどうかを発展的に考察していくような展開を実現したいと考えた。なお，変形してできる正方形や長方形はどちらも平行四辺形の特殊な形であり，四角形の包摂関係に着目して見れば，それらは別々のものではなくすべて統合的にとらえることもできる。すなわち，

既習の見方の活用場面となり，そのよさに気付くこともできるのである。

　このように，本時は，四角形の鳩目返しについて発展的考察と統合的考察を繰り返すことによって，次の図形についての美しさを感得させるものである。

（美しさ２）一般的に成立する図形的性質の美しさ （美しさ４）図形操作等における着想の美しさ

（２）指導の概要

①　日時　平成 22 年１月 27 日（水）第３校時，第５校時（２時間扱い）

②　横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校２年Ｂ組

③　単元名　　「三角形と四角形」

④　教材名　　鳩目返し　～台形から一般の四角形へ～

⑤　実施時期　平行四辺形の性質，平行四辺形になるための条件，いろいろな四角形を学習した後に行う。

⑥　本時の目標

　台形の中点を結んで切って回転させてつなげると平行四辺形に変形することの理由を，仮定や既習の性質を基にして考えることができる（主に第１時）。

　台形以外の四角形がどのような図形に変形するかを，台形の場合に関連付けながら，発展的，統合的に考えることができる（主に第２時）。

⑦　本時の展開（学習指導案）

《第１時》

<table>
<tr><th>学習活動と
授業者の発問</th><th>予想される生徒の主な反応</th><th>指導上の留意点（☆）
／ 評価（○）</th></tr>
<tr><td>1．鳩目返しの操作を理解し，成り立つ性質の見通しを立てる。</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">導入問題　　正方形の対辺の中点を結んで切ります。できた 4 枚の四角形のうちの 3 枚を，つながった頂点を中心に，辺と辺とが重なるように回転移動させてつなげていきます。（鳩目返しという）すると，もとの図形はどのような図形に変形するでしょうか。また，長方形だとどのような図形に変形するでしょうか。</td></tr>
<tr><td>[一斉]（5 分）</td><td>S :「正方形なら正方形になる。」
S :「長方形なら長方形ができる。」
S :「どれも同じ図形になると思う。」</td><td>☆実際に厚紙模型を黒板上で動かし操作を理解させる。</td></tr>
<tr><td>2．主問題を理解する</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">主問題　　台形で鳩目返しをすると，どのような図形に変形するでしょうか。」</td></tr>
<tr><td></td><td>S :「台形だから台形だ。」</td><td>☆予想を立てた後</td></tr>
</table>

「長方形と平行四辺形の２種類ができたようですが，２種類でいいのでしょうか。」 [個人]（10 分）	S :「いや，長方形になると思う。」 S :「実際に作ったら長方形だ。」 S :「あれ，平行四辺形になったよ。」 S :「どっちが正しいの？」 S :「長方形は平行四辺形の仲間だから，平行四辺形ができたと言っていいんじゃないかな。」	に，紙を切って作業し検証させる。 ☆長方形と平行四辺形のどちらになるのかを議論させ，四角形の包摂関係を引き出す。
3. 見いだした性質の証明を考える。 「台形が平行四辺形に変形する理由を考えましょう。」 [個人]（25 分） 「どのように理由を書いていくかに困っている人が多いようです。4 人班になり，互いの表現について見せ合い，よいところを吸収しましょう。」 [班]（10 分）	S :「辺が平行だから？」 S :「四角形になり，さらに 2 組の対角が等しくなるから。」 S :「2 組の対辺が等しくもなるよ。」 S :「頂点を文字で表すと，証明をかくときにとてもわかりやすい。」	☆平行四辺形になる理由の前に，四角形になる理由を考える必要があることを理解させる。 ○台形が平行四辺形に変形する理由を，仮定や既習の性質を基にして考えることができているか。[見方や考え方]

《第２時》

学習活動と授業者の発問	予想される生徒の主な反応	指導上の留意点（☆）／ 評価（○）
１．見いだした性質の証明を共有する。 「どのような証明ができましたか。説明してください。」 [一斉]10 分	S : できる図形の内部に隙間ができないこと，つなげた辺の長さが等しいこと，できた四角形が平行四辺形になること，の 3 つを順に証明できている。	

２．他の四角形について発展的に考える。 「台形以外の四角形はどのような図形に変形するでしょうか。」 「できる人は理由も考えましょう。」 [個人]（30 分）	S :「平行四辺形なら平行四辺形だ。」 S :「ひし形はひし形になった。」 S :「一般の四角形でも平行四辺形になった！」 S：「凹四角形も平行四辺形になった(註1)」	☆各自で図形を決めて作業に取りかからせる。 ○他の四角形などについて発展的に考えられているか。 ［見方や考え方］
３．本時を振り返る。 「いろいろな四角形で鳩目返しをして変形した四角形やその理由の説明を見て気付くことはありますか。」 [全体]（10 分）	S :「どんな四角形でも平行四辺形になるといえる！」 S :「不思議！　すごい！」 S :「理由の説明（証明）は台形のときと同じでいいと思う。」	○四角形の包摂関係に基づいて，様々な四角形を平行四辺形として統合的にとらえられているか。[見方や考え方]

（３）指導上の留意点

① 児童・生徒に困難を感じさせる

もとの図形を切ってつなげて変形するとどのような図形になるのか，念頭操作では容易には予想できない経験をさせることが大切である。そのために，できるだけ生徒の素朴な予想を多数引き出し，実際に検証したときに意外性を感じられるようにする。

また，台形が平行四辺形に変形する理由を証明することは，生徒にとってやや困難なことである。この困難に立ち向かい，証明を十分に理解しておくことが，その後の台形以外の発展的，統合的な考察にも生かされる。本時では記述的な証明にこだわった指導を行ったが，生徒の実態を鑑みると，口頭による証明でも十分であったと思われる。

②「美しさ」に関わる事柄を見出す

予想させ，実際に作業で確かめさせる。前述したが，正しい予想が困難な経験，また予想と検証を繰り返す経験により，予想外の結果に対する美しさを感得させられる。

また，台形が平行四辺形に変形することの証明をじっくり考えさせるようにする。台形のときの証明をしっかり理解することで，台形以外の四角形で考えたときに，台形のときの証明がこの場合も通用することに気付き，証明の一般性に関わる美しさを感得させられると考えられる。

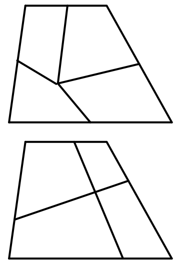
③ よさを振り返る。A と nonA の対比

本時では，予想に反して台形や一般の四角形が平行四辺形になることの美しさを感得させたかった。そのために，本来ならば，別の切り方などで台形が四角形にならない経験や特殊な四角形にならない経験をさせるべきであった。このことは，台形や他の四角形がすべて平行四辺形に変形することの意外性による美しさをよりいっそう誘発するだけでなく，

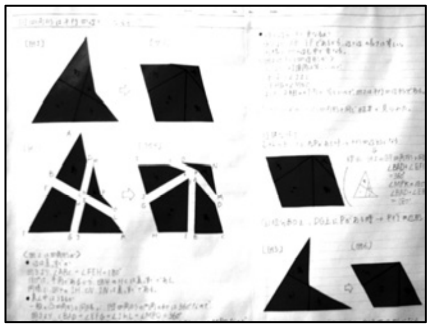
台形が四角形に変形することを証明する必要性を感得させる手だてになり得ると考える。今後，この対比をいかに授業に組み込んでいくかが課題となる。

④ 評価

本時では，どのくらいの割合の生徒が図形についての美しさを感得することができたかについて，量的に評価はしていない。しかし，生徒が図形の性質の意外性や証明の通用性に驚く姿や，一般の四角形や凹四角形で平行四辺形になることを見いだして感激する姿，三角形や六角形を似たきり方で切ってつなげることで新たな図形になることを発見し感嘆する姿，これらの友達の発見を鑑賞し褒め称える姿などから，ねらいとした２つの美しさをかなり多くの生徒に感得させられたのではないかと推測している。



別の切り方の例



凹四角形に関する生徒自主レポートの一部。証明や統合的考察もしてある。四角形の一頂点を対角線上に動かすと，三角形を四角形と見ることもできる。つまり，三角形も平行四辺形に変形できる。

２．ベクトルにおける指導実践

（１）焦点を当てる図形における美しさ

「（美しさ２）一般的に成立する図形的性質の美しさ」の「② 図形を数学的に考察することにより，複数の図形に一般的に成り立つ性質，あるいは，特定の図形に成り立つ特殊な性質に畏敬の念を感じとれる情意的充実感」に焦点を当てる。

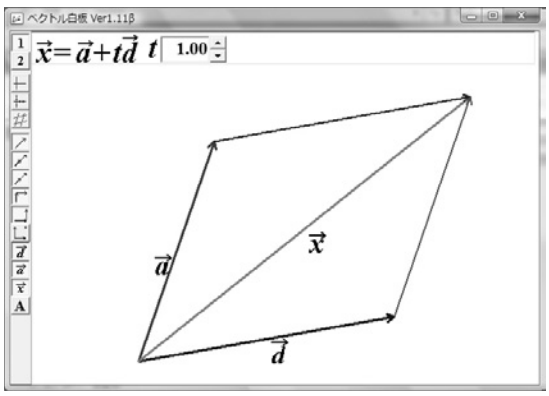
（２）指導の概要

① 黒板とチョークによる授業

まず，通常どおり黒板とチョークにより授業を進めていく。「ベクトルとは何か」という話を通して興味を持たせていった。

② ソフト「ベクトル白板」による授業

ベクトルそのものに触れてみるという感覚は，それこそ黒板とチョークの授業では，味わうことができないことである。そこで「ベクトル白板[註2]」というソフトを用いてベクトルそのものに触れてみる感じを体験してもらった。マウスの右クリックでベクトルの始点や終点をクリックすると，マーク「□」が表示され，それをドラッグすると，あたかも自分でベクトルを操作している感覚が味わえるというわけである。



図．ベクトル白板の第一歩（ｔの値をいろいろ変化）

そして，ベクトル白板の第一歩とも言うべきｔの値をいろいろと変化させ実感してもらった。この段階において生徒たちの感想が以下である。

・コンピュータを使うと変化が目に見えて面白った。
・動いているのを見るのはとても楽しかった。
・自由自在にベクトルを動かせて面白かった。
・黒板では見られない図で勉強できてわかりやすいし自分で想像つかないことが分かりやすかったです。
・とても楽しかったです。今までは平面で，味気のないものだったのですが，動いているようすを見ることでより頭に入ってきました。またやって欲しいです。
・自分で動かしてみると，仕組みがなんとなく分かった気がします。考えられるから楽しいです。
・直感的にベクトルをいじってｔの値で，いろいろとベクトルが変わるのがおもしろい。
・黒板の図と違い，自ら作れるし，色々と興味が湧くので時間が速く感じた！
・今日の授業で実際にベクトルに触れて動かしてみると，ベクトルの足し算，引き算の意味がすごく分かった気がしました！とにかく楽しかったです♪
・数学を違う視点から見ることが出来ておもしろかったです。パソコンは苦手ですが，授業についていけて良かったです。

この段階においては，コンピュータ活用によって生徒たちがベクトルというものに対し，通常の黒板とチョークの授業では味わうことのできない反応を示していた。

③　コンピュータ活用による生徒の無反応

さて，このような感想のあと，黒板とチョークによる授業が続いた。数学Ｂは過去に担当したときもそうであるが，説明の時間がなかなかとれずに苦労する。今回も同じである。そして６月のある日，以下の問題のところを解説していた。「△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを１：２に内分する点をＰ，辺ＡＣの中点をＱ，辺ＢＣを２：１に外分する点をＲとする。このとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。」(高等学校数学Ｂ改訂版 啓林館(数Ｂ 025)

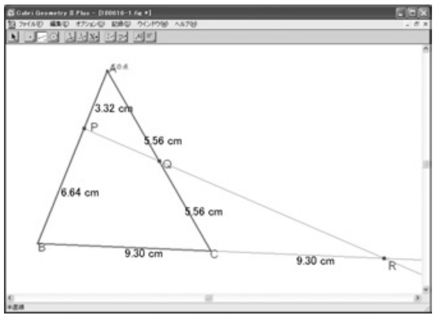


図.３点Ｐ，Ｑ，Ｒが一直線上にならぶ様子

普通どおり説明し，PR＝4PQ を黒板で解説してからカブリ(註3)により３点が一直線上を通ることを示した。また同様に，その例題８の下に出ている問題「平行四辺形ＯＡＢＣにおいて，辺ＯＡの中点をＤ，対角線ＯＢを２：５に内分する点をＥ，辺ＯＣを２：１に内分する点をＦとする。このとき，３点Ｄ，Ｅ，Ｆは一直線上にあることを証明せよ。」

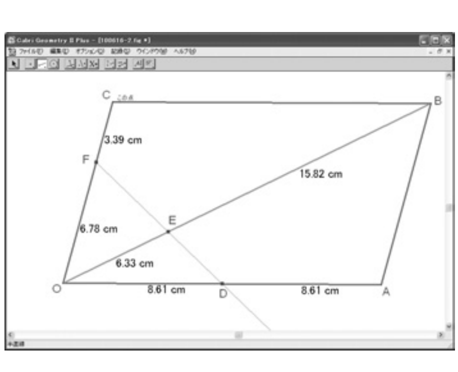


図.３点Ｄ，Ｅ，Ｆが一直線上にならぶ様子

この問題も，生徒たちがある程度，正解を得られたところでプロジェクタを使ってカブリを映してみた。

しかし，ここで驚いたことが起こってしまう。生徒たち，誰ひとりとして驚きの表情を表さなかったのである。教室内は平然と静まりかえり私の説明を淡々と聞いていた。驚いていたのは教員の私ひとりだったのかもしれない。それは「三点が一直線上に並ぶ」という現象は教科書に書いてあり，この授業の中では起こるべくして起こったわけであり，生徒たちにとっては全く珍しいものではなく，ただ普通の光景を筆者がコンピュータを使って示していたにすぎなかったのである。

図．教室の壁に映して解説している様子

これまでも筆者は，様々な授業展開においてコンピュータを活用してきた。特に数学Ｉにおいて $y=ax^2+bx+c$ の a,b,c のパラメータを変化させたときなどはいつも歓声があがってきた。今回のように図形に関してのコンピュータ活用においては，代数的な内容におけるコンピュータとは違ったアプローチが必要であると感じる。

③　数学Ａの教科書から

ここで，彼らが昨年度使用した数学Ａの教科書を見てみる。平面図形のところに着目すると，「定理」を示し，それを「証明」して，その定理を使った「例題」を解くパターンが多いことがわかる。例えば最初に出てくる「△ＡＢＣの辺ＢＣ上の点Ｄについて，ＡＤが∠Ａの２等分線⇔ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣ」(高等学校数学Ａ改訂版　啓林館(数Ａ 027) p. 84 定理 1)の証明のところであるが，教師用指導書では「p⇒q」と「q⇒p」の両方をきちんと指導するようにある。いわゆる演繹中心の指導という形になっていて，この場合，∠Ａの２等分線がＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣを作り出す形を第一に持ってきており，その場合のおもしろさ，美しさに関しては述べられていない。△ＡＢＣの辺ＢＣに向かって線を引くならば，外心を通る場合や重心を通る場合，さらに内心や垂心ではどうだろうかとか，さらに「∠Ａの３等分線は？」や，「∠Ａの４等分線は？」というような帰納的な興味・関心をベースとした様々な疑問が発生してもよい場面である。

（３）指導上の留意点

① 児童・生徒に困難を感じさせる

そもそも数学の授業のあり方において，「いかに早く正解にたどり着くか」を長年経験してきた高校生段階においては，図形は「たのしみの宝庫（清宮，2001）」とも言われるように，様々な図を描かせてみることだと考える。例えば三角形の重心の作図であっても，我々が板書をするとき，チョークを用いているから重心は一致する。しかし，例えば，非常に細いシャープペンの芯を使用して大きな三角形を描いたとすればどうであろう。容易には一致しないはずである。また，科目として別になるが数学Ｉの三角比の正弦定理なども，実際に三角形を描き三辺の長さを計って，向かいあう角の sin の値で割ってみると，

特に割り算が絡むこともあり，３つの数値は一致しない。

②「美しさ」に関わる事柄を見出す

①での作業と通して考えてみると，重心の話にしても正弦定理の話にしても，精度を上げることやまたは有効数字の観点から，「（この作図においては）一致とみなす」ということができるであろう。そして前述したさらに多くの事象を作図することにより，教科書に出ていることが過去の偉人たちによってみつけられたすばらしい事柄であることに気づくことであろう。そしてそれを早期の段階から実施していくことが肝要である。

③ よさを振り返る。Ａと nonＡの対比

たとえば「△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを１：２に内分する点をＰ，辺ＡＣの中点をＱ，辺ＢＣを２：１に外分する点をＲとする。このとき，3 点Ｐ，Ｑ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。」という問題において，一つの条件でも違ったら三点は一直線上にはないということを，実際に示してみることが大切である。

④ 評価

現段階において(3)のように，何かひとつの条件を変化させたところで，生徒たちからは「3 点は一直線上にはないのはあたりまえ」と言われてしまうであろう。ここで大切なことは長い年月をかけて図形というものを様々な角度から見てきた生徒であれば，それだけで多くの知的好奇心を満たすことになる。だからこそ長い年月での図形の試行錯誤は大切なのである。しかし多くの生徒たちは前述したように「いかに早く正解にたどり着くか」が念頭にある。そのような生徒たちであっても，何かひとつの条件を変化させたところで，自分なりの「発見」ができることであれば，発見とともに，その美しさを感得できると考える。例えば「清宮の定理（清宮，2001）」をカブリで検証しようとしていて，その途中で別の 3 点が一直線上に並んでいることを「発見」したりすることである。

Ⅳ．小学校段階から高等学校段階における教材開発

小学校段階の教材 2 点，中・高等学校段階の教材を 3 点開発した。順に説明していく。

１．正方形が変身！

（１）教材の位置づけ

① 学年 小学校第５学年

② 関連単元 四角形と三角形の面積

（２）焦点を当てる図形における美しさ

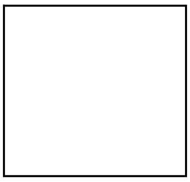
「(美しさ４）図形操作等における予想外の着想の美しさ」に焦点を当てる。

図形の面積の学習は第５学年でする。三角形や四角形を等積変形や倍積変形の考えを用いて既習の形に変えて面積を求める。この変形のしかたは重要なアイディアであるが，なかなか児童に定着しづらいところでもある。それは，このアイディアがこの単元の他には複合図形の面積や体積の学習以外あまり使われないという点が原因として考えられる。

この教材では，「三角形・四角形→正方形」の逆の操作をする経験をさせる。正方形を等積変形して三角形や四角形にすることで，図形相互の関係をより理解することができるとともに，一つの正方形が様々な形に変わっていく面白さがある。

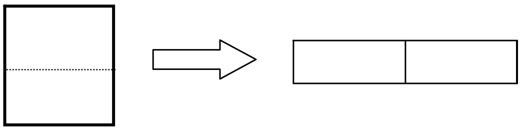
また，それぞれの課題は変形させる形だけではなく，数値を入れている。これは，その数値をもとにして論理的に考えることができるためである。「１２ｃｍ」とあれば，もとの正方形の１辺の２倍であり，等積変形をして辺が２つ分になるようにすればよい。角度についても，９０度の部分，４５度の部分など，鍵となる角度に着目して考えることができる。正方形をどう切って必要な長さや角度を作るのか，構成要素に着目して考えていく面白さもある。

（3）教材の概要

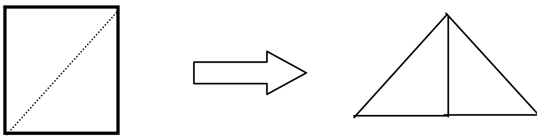


１辺が６ｃｍの正方形があります。
この正方形を１回だけ切って
いろいろな形に変身させましょう。

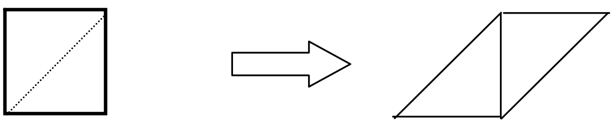
① 長方形「たて３ｃｍ，横１２ｃｍの長方形」：たてはもとの正方形の１辺の半分，横は２倍の長方形に変形される。

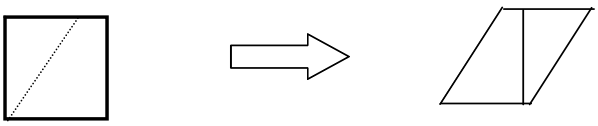


② 直角二等辺三角形「斜辺１２ｃｍの直角二等辺三角形」：斜辺がもとの正方形の１辺の２倍，４５度の角度が２ヶ所の直角三角形に変形できる。



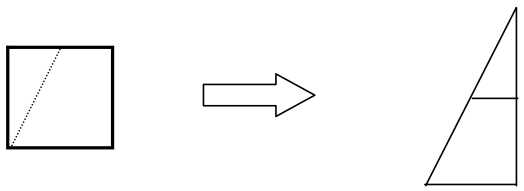
③ 平行四辺形「底辺６ｃｍ，高さ６ｃｍの平行四辺形」：底辺も高さももとの正方形の１辺になる平行四辺形に変形できる。



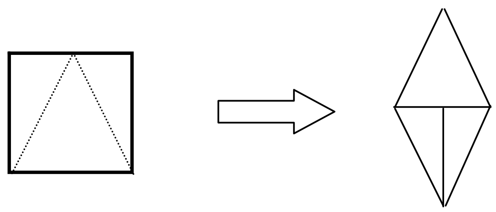


④ 直角三角形「底辺６ｃｍ，高さ１２ｃｍの直角三角形」：底辺はもとの正方形の１辺，

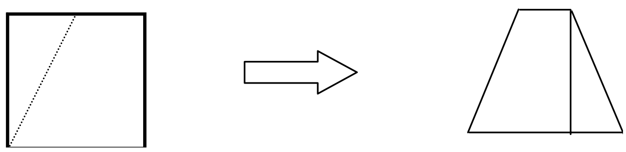
高さは２倍になる直角三角形に変形できる。



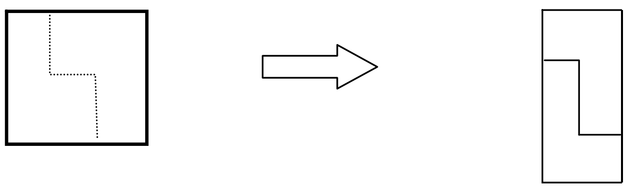
⑤　ひし形「対角線の長さが６ｃｍのひし形（２回切る)」: 対角線がもとの正方形の１辺になるひし形に変形できる。



⑥　台形「上底３ｃｍ，下底９ｃｍの台形（裏返しあり)」: 上底はもとの正方形の１辺の半分，下底は 1.5 倍になる台形に変形できる。



⑦　長方形「たて４ｃｍ，横９ｃｍの長方形」: たてはもとの正方形の２/３倍，横は 1.5 倍の長方形に変形できる。直線１回では作ることができないアイディアの面白さがある形である。



２．カンタベリー・パズルを用いた図形の等積変形

（１）教材の位置づけ

①　学年　小学校第５学年

②　関連単元　四角形と三角形の面積

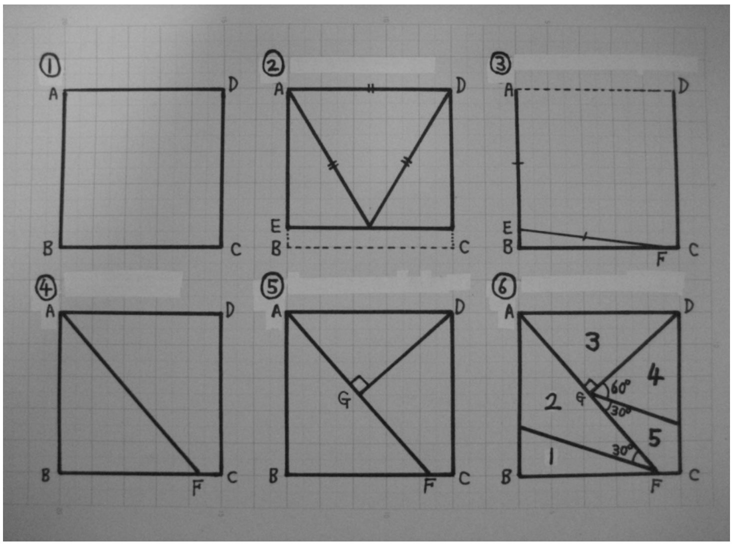
（２）図形の美しさと教材との関連性

「(美しさ４)：図形操作等における予想外の着想の美しさ」に焦点を当てる。

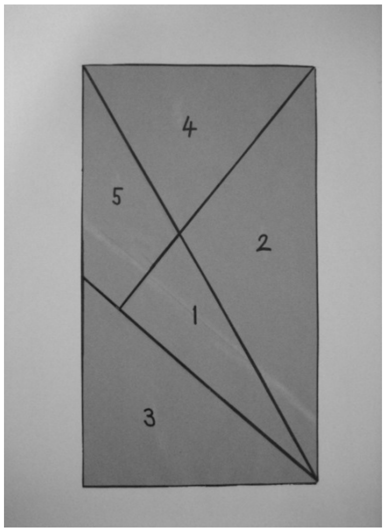
図形の等積変形は，第５学年の単元「四角形と三角形の面積」で，平行四辺形や三角形，台形などの面積を求める際に用いられる考え方である。今回紹介するカンタベリー・パズルでは，正方形を次頁の図（左）の手順にしたがって５枚のピースに分割し，並べ替えると長方形や正三角形ができる。並べ替えるという操作が，等積変形であり，児童は長方形や正三角形ができた瞬間に予想外のできごとに驚くであろう。

（３）教材の概要

このパズルは，第 68 回ハンズオン・マス研究会にて市谷壮氏から紹介された。パズルの詳細については，『カンタベリー・パズル』（デュードニー，2009）に掲載されている。



図．正方形の分割手順



図．長方形への等積変形

正方形の用紙（折り紙でよい）と三角定規または分度器を準備する。上図左の手順にしたがって，正方形を５つのピースに分割する。①正方形の紙を用意する。②正三角形をつくる。③ＥＡ＝ＥＦとなるような点Ｆをとる。④ＡとＦを結ぶ。⑤ＡＦ⊥ＧＤとなるような点Ｇをとる。⑥図のように分割する。

なお，正三角形への等積変形では，実際には２mm ほどの誤差ができる。近似的には正三角形といえるが，正確には正三角形とはいえない。

また，正方形と正三角形の等積変形に関連する話題としては，橋本（2009）の『算数教育原論』の中で「平面図形の正三角形を同じ面積の正方形に変形することは容易にできる。その逆，すなわち正方形を同じ面積の正三角形に変形することは簡単なことではないが，可能である。」ということが指摘されている。

（４）考察

本教材について，次の２点をねらいに調査を行い考察した。

① カンタベリー・パズルを用いた等積変形の問題について，本学の学生が体験することを通して，有意味で予想外の着想に感銘できるような問題であるかどうかを考察すること。

② カリキュラムの中での位置づけについて考察すること。

用いた手順は下記の通りである。

① 等積変形の問題を，折り紙を用いて作業的・体験的な算数的活動を通して理解させ，質問紙調査の内容から，有意味で予想外の着想に感銘できたかどうかを考察する。

② 等積変形の過程を追うことによって，小学校算数科における，どの単元に位置づけられるのかを考察する。

①については，「３．図形の美しさと教材との関連性」で述べた通りである。学生への質問紙調査では，「(1)この教材を通して児童にどのような力が身につくか」，「(2)等積変形を行っての感想」について尋ねた。その結果，(1)については，「図形をいろいろな方向から見ることができるようになる」，「試行錯誤して考える力が身につき，できたときの達成感を味わえる」という感想があった。(2)については，「正三角形の１つの角は 60°なので，30°＋30°と考えたらできた」，「正方形からこのように様々な図形ができたのが不思議だと思った」という感想があった。これらの記述から，有意味な活動であることと，予想外の展開になったということで，概ね本研究のねらいは達成されたと考える。②については，長方形や正三角形に直した操作は，実は等積変形の操作を行っていたということに学生自身，気がつくことが大切である。この題材を扱う場面として，例えば等積変形の学習後が考えられる。

３．平面の分割数はいくつ？

（１）教材の位置づけ

① 学年　　高等学校　第 2 学年

② 関連単元数学 B　数列（階差数列・漸化式）

（２）図形の美しさと教材との関連性

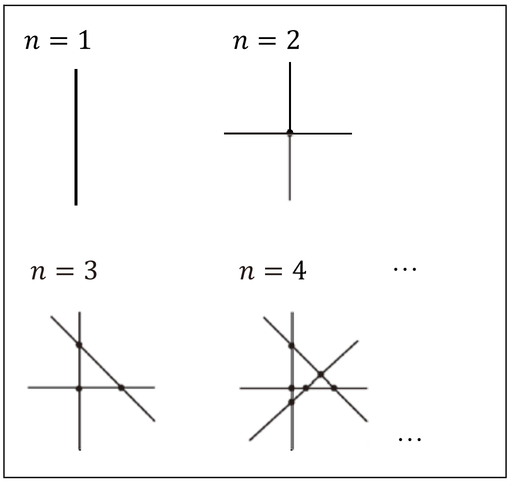
「(美しさ２)：一般的に成立する図形的性質の美しさ」，「(美しさ５)：図形的に具体化して説明できる美しさ」に焦点を当てる。最大分割数を求めることまでであれば，本教材は既によく扱われている。しかし，さらに発展させて式をよむ活動を加えて扱うことによって，(美しさ５) を感得することができると考える。また，平行や共点を含む場合についても同様に式の意味を図形において考えることができる。また，平面から空間へと発展させることで，(美しさ２) を感得することができると考える。

（３）教材の概要

①「平面分割数」の扱われ方の現状

数学 B の数列に関する問題で，階差数列を既習事項として，次のようにn本の直線による平面の最大分割数を求める問題がある。

平面上にあるn本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，平面の最大分割数a_nを求めよ。



$n=1,2,3,4,\cdots$と図や表を用いながら帰納的に考えていき，規則性を見つけて答えを求めていく問題である。新たに加える直線によって平面がいくつ増えるかを考えると，$(n+1)$本目の直線は既に存在しているn本の直線と交点を作り，平面は新たに$(n+1)$個増える。これを漸化式で表すと，

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)$$

となり，求めるa_nは次のような式になる。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

③　式をよむ活動

ここでは，a_nを一般化した後に，式をよむことで発展的に取り扱っていく。式をよむことで，なぜこの式になるのかを具体的な場面に関連付けて理解できることがそのよさである。前述のa_nは，次の式に変形できることが知られている（内海，1965)。

$$a_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2$$

この式を生徒自身が導き出せるようにするために，次の問題を取り上げ，生徒に考えさせることにする。

平面上にあるn本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，交点の最大数x_nを求めよ。

ここではa_nを求める時に用いた図において，交点について考える活動を行う。そこで，a_nを求める際に用いた表に「交点の個数」を加えることで次の規則に気付く手掛かりにしていくことにする。右のような表から，

$a_n = 1 + (\text{直線の本数}) + (\text{交点の個数})$

という規則に気付かせ，言葉で置き換えたそれぞれの項をnで表す活動を行う。x_nを今までと同様に階差数列から導くこともできるが，式変形を先に見据え，交点がどのようにできるかを考えることで「交点の個数：x_n」を導いていくことにする。ある 2 本の直線を選び出すとき，選んだ 2 本の直線によってただ 1 つの交点ができる。つまり，組み合わせの考え方からn本の直線によってできるx_nを${}_n\mathrm{C}_2$と表せることに気付かせる。これを手掛かりに，直線の本数を${}_n\mathrm{C}_1$，残りの項を${}_n\mathrm{C}_0$と同様に表すことができる。${}_n\mathrm{C}_0$はnの値に関係なく常に 1 であることから，「平面そのものの個数」と意味付けることができ，a_nのそれぞれの項が図形においてどの部分を表すのかを言葉で言い換えることができる。

n	1	2	3	4	5	6	…
a_n	2	4	7	11	16	22	…
x_n	0	1	3	6	10	15	…

これによって，a_nが何を表しているのかをより具体的に考えることができ，式をよむ活動にもなる。式に具体性がある方が価値を見出しやすく，その式の美しさや式を発見できた喜びも大きいと考えられる。

③　条件変更による一般化

この式変形を手掛かりにしてこの問題を平面から空間へと発展させる。空間にあるn個の平面による最大分割数b_nとすると，

$$b_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3$$

となりそうだと予測することができ，帰納的に発見する活動から演繹的な活動を取り入れることができる。このb_nのそれぞれの項が何を表すのかについても，平面の場合から演繹的に予測させ，それを検証する活動になる。さらに次元を増やし，n次元まで考えることにもつなげることができると考える。

さらに，より一般的な，平行や共点を含む場合を考察する活動に発展させることができ

る。平行や共点をなす直線の本数やそれらの個数で場合分けをして図に表すと，平行，共点が１つで，それらをなす直線がそれぞれp本，q本のとき，最大分割数から${}_{p}\mathrm{C}_2$，${}_{q-1}\mathrm{C}_2$減少する。さらに平行，共点の個数が増えるに従って，これらの項を増やしていけばよい。この規則を図から帰納的に発見することができる。試行錯誤して，自ら考え，手を動かして規則を発見した喜びは大きく，図形の美しさを実感しやすいと考えられる。また，平行や共点によって減少する個数が，図形においてどこを表すのかを考える活動を取り入れることもできる。平行の場合，平面が減少する個数は，平行が含まれることによって減少する交点の個数と一致する。共点の場合，平面が減少する個数は，最大分割をするときに直線によって囲まれる平面の個数と一致する。

４．超立方体を調べよう

（１）教材の位置づけ

高等学校第１学年「空間図形」，高等学校第２学年「二項定理」，扱い方により中学校第１学年「空間図形」で取り扱うことも可能である。

（２）図形の美しさと教材との関連

「(美しさ１）：図形の視覚的な美しさ」，「(美しさ２）：一般的に成立する図形的性質の美しさ」に焦点を当てる。

（美しさ１）に関して，本教材では yogeometry（大野寛武氏による）を用いて，3 次元での立方体だけでなく超立方体と呼ばれる４次元の立方体・5 次元の立方体のモデル（下記の３つの図）を表す。そのモデルの作成や観察を行うことを通して，その構造が複雑に絡み合う美しさを視覚的に確認することが出来，またその図形の中に 3 次元立方体などのそのもの自体よりも低い次元の立方体がいくつも確認できることからさらに美しさを感じることができる。

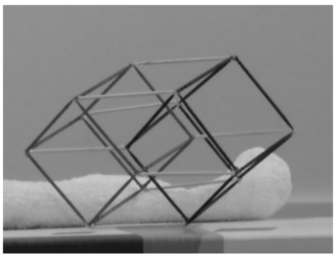


図.　４次元立方体(色分けあり）

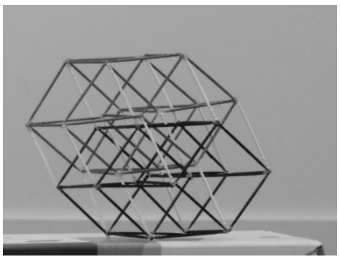


図.　５次元立方体（色分けあり）

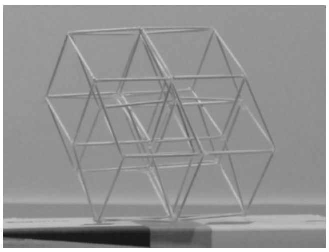


図.　５次元立方体（色分けなし）

（美しさ２）に関しては，n 次元の立方体の中に潜む要素の個数を表に表し，その和を考察することで，その和が3^{n}になるという隠れた性質を見出すことで，情意的充実感を得ることができる。また，その和を導き出す過程で暗記に偏りがちな二項定理を利用して考える場面を作ることが出来る。

（３）教材の特徴

本教材では，一般的に立方体と言われている 3 次元のものを 4 次元や 5 次元というように次元を上げたときの性質を調べる。ここで，n 次元立方体とは，(n－1)次元立方体を垂直方向に１単位移動させたときの軌跡とし，0 次元立方体を点と考える。そうすると１次元立

方体は線分(辺)，2 次元立方体は正方形と考えることが出来る。

① 4 次元立方体・5 次元立方体を作ってみよう

平面に 4 次元立方体を書くだけでは，構造を理解するのは容易でない。本教材では爪楊枝とグルーガンを使うことで比較的簡単に 4 次元の立方体のモデルを作る。すると，交差しているところを発見でき，空間でつくることの難しさを感じることが出来る。また，このモデルを色々な方向から眺めることで平面では分かりにくい構造を見つけられたり，新しい方向を垂直だと見立てると，様々な場所に立方体のあることがわかったりし，空間図形に対する感覚を豊かにすることにつながる。また，前頁の図のように色分けすることで，前の次元のものが移動している様子が分かりやすくなり，色分けしていないものをみることで，いくつも同じ構造の図形が隠れていることを探りやすくなると考える。

② 各要素の個数を数えてみよう

ここでは，n 次元立方体の中に隠れている要素（0 次元の構成要素，1 次元の構成要素，2 次元の構成要素，…，n 次元の構成要素）の個数を調べる。

【構成要素の増え方のルール】

ア．0 次元の構成要素（頂点）の個数は 2 倍ずつ増える。

イ．n 次元立方体（n -立方体で表記する）には，0 次元から n 次元までの（n+1）個の構成要素があり，n 次元立方体における r 次元の構成要素の個数を N（n,r）で表すと，次の式が成り立つ。　$N(n,r)=N(n-1,\ r-1)+2N(n-1,r)$

モデルが作れている場合は数えてもよいが，それでも n 次元まで考えるためには，増え方の関係を見つける必要があり，その関係をもとに表を作っていく。

	(点)	(線分)	(正方形)	(立方体)	(超立方体)		…		
	N(n,0)	N(n,1)	N(n,2)	N(n,3)	N(n,4)	N(n,5)…	N(n,r)	…N(n,n)	
0-立方体	1								… 1
1-立方体	2	1							… 3
2-立方体	4	4	1						… 9
3-立方体	8	12	6	1					… 27
4-立方体	16	32	24	8	1				… 81
5-立方体	32	80	80	40	10	1			…243
…			………………………………………						
n-立方体	${}_nC_0 2^n$	${}_nC_1 2^{n-1}$	${}_nC_2 2^{n-2}$	${}_nC_3 2^{n-3}$	${}_nC_4 2^{n-4}$	…	${}_nC_r 2^{n-r}$	${}_nC_n 2^0$	… 3^n

n 次元立方体がこの様に示せることは，r= 1 のとき，すなわち n 次元立方体の中の線分の個数を例に考えると，①各頂点の個数は 2^n，②各頂点から n 本の辺が出ているから n ($={}_nC_1$) 倍，③1 本の辺に関してダブルカウントしているから 1/2 倍となり，$({}_nC_1 2^n)/2={}_nC_1 2^{n-1}$ というように考えることが出来る。同様に，①各線分の個数は $n\cdot 2^{n-1}(={}_nC_1 2^{n-1})$，②各線分から(n-1)ケの平面が出ているから(n-1)倍，③一つの面に対して 4 回（=2+2）（点の数 2 ヶが移動して 2 つの線分になり，元々あった線分と新しくできた線分で 2 つある）ダブルカウ

ントしているから 1/4 倍となり，$n(n-1)\times 2^{n-1}/4 = {}_nC_2 2^{n-2}$ となる。この増え方がどの場合でも同じように考えられる。そして，n 次元立方体の構成要素の個数の和は，二項定理の考えを利用することで次のように計算される(註 4)。

$$\sum_{r=0}^{n} nCr\, 2^{n-r} = {}_nC_0 2^n + {}_nC_1 2^{n-1} + {}_nC_2 2^{n-2} + {}_nC_3 2^{n-3} + {}_nC_4 2^{n-4} + {}_nC_5 2^{n-5} + \cdots$$

〔$(\alpha+\beta)^n = {}_nC_0\alpha^n\beta^0 + {}_nC_1\alpha^{n-1}\beta^1 + {}_nC_2\alpha^{n-2}\beta^2 + {}_nC_3\alpha^{n-3}\beta^3 + {}_nC_4\alpha^{n-4}\beta^4 + {}_nC_5\alpha^{n-5}\beta^5 + \cdots$〕

ゆえに $\sum_{r=0}^{n} \mathrm{nCr}\, 2^{n-r} = {}_nC_0 2^n + {}_nC_1 2^{n-1} + {}_nC_2 2^{n-2} + {}_nC_3 2^{n-3} + {}_nC_4 2^{n-4} + {}_nC_5 2^{n-5} + \cdots$

$$= (2+1)^n = 3^n$$

５．塩の幾何学による楕円・双曲線の一般化

（１）教材の位置づけ

① 対象学年　　高等学校　第 3 学年（数学Ⅲ）

② 関連単元　　平面上の曲線

（２）図形の美しさと教材との関連

「(美しさ１)：図形の視覚的な美しさ」，「(美しさ２)：一般的に成立する図形的性質の美しさ」，「(美しさ５)：図形的に具体化して説明できる美しさ」に焦点を当てる。

(美しさ１)については，塩によってえがかれた稜線そのものの美しさである。(美しさ２)については，塩の幾何学によってつくられた図形がすべて「塩は１番近い穴から落ち，穴から等しい距離のところに稜線ができる」という基本的性質に基づいたものであることに起因する美しさである。(美しさ 5)については，塩であらわされた図形を数式やグラフ等によって解析し,また数式やグラフ等として得られたものを塩であらわせたときに得られる相互のつながりによる美しさである。

（３）教材の特徴

① 塩の幾何学とは

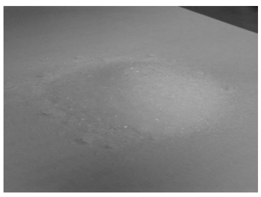


写真 1

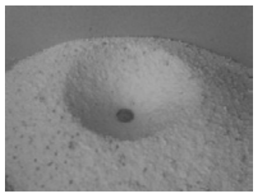


写真 2

塩の幾何学とは,ある図形の土台の上に,塩を積もらせたときにできる稜線の形を観察する教材である。塩は，平面の上の１点に目掛けて垂直に落下させると円錐を形作り，その端（底面の円）は，円錐の頂点を中心として同心円状に広がっていく(写真 1)。また，平面上に 1 点をあけて塩を流し込むと，すり鉢状に落下していき，その端もやはり穴を中心として同心円状に広がっていく(写真 2)。このとき，土台となる図形を変えることでできる稜線（積もった部分）の図形について考察していく。

この教材の基本的な性質は，「塩は１番近い穴から落ち，穴から等しい距離のところに稜線ができる」ということである。このときすなわち稜線は「ある条件（穴から等しい距離）を満たす点の集合」，つまり軌跡である。「塩の幾何学」を通して，図形の軌跡としての見方を育むとともに，塩がえがく図形の美しさを感得させることが本教材を扱う意義である。

② 教材例

多様な教材があるが,その中で楕円・双曲線の一般化についての教材を紹介する。尚,本教

材は楕円指導の後に行うものとする。

【課題】

円上の任意の点に穴をあけ(写真 3)，塩を上から積もらせると，稜線は写真 4 のようになる.

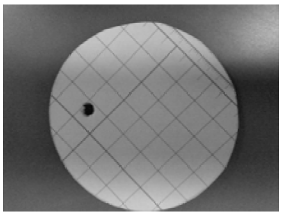
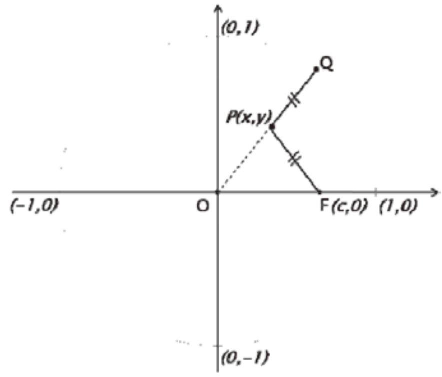


写真 3

写真 4

このとき，稜線はどのような図形をえがくだろうか？



稜線をつくる要素（土台の形，穴の位置，稜線）のみを抽出し，「塩の幾何学」の基本的性質をもとに座標平面上で表すと，次のようになる。

土台の円の半径を 1 とし，穴を x 軸上の点 F(c,0)，軌跡をえがく動点 P(x,y)を，円周上の点 Q を通る半径上で，PQ=PF となるようにおく。このとき，OP+PF=1 となり，動点 P は点 O，P からの距離の和が等しい点になるので，楕円をえがくことがわかる。

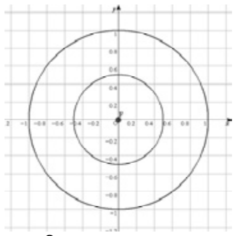
穴をあける位置によって楕円の形はどのように変わるだろうか？

形の変化を明確にとらえるために,グラフ描画ソフト GRAPES を用いる。その際,数式を入力する必要があるので,先に得られた座標をもとに数式に直すと,

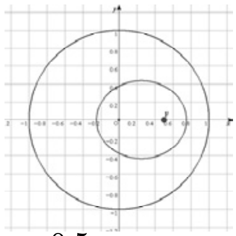
$$\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1-c^2}{4}}=1 \quad (-1<c<1)$$

という式が得られる。パラメータを c としてグラフに表し, c の値を変化させると右図のようになる。

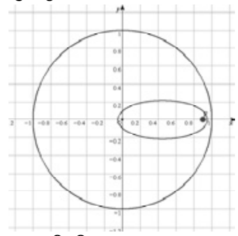
このとき,式と照らし合わせてグラフを観察すると,例えば y の分母は,$c \to 0$ のとき$(1-c^2)/4 \to 1/4$ となり,x の分母 1/4 に近づくことから形が円に近づくことがわかり,また $c \to 1$ のとき $(1-c^2)/4 \to 0$ となることからグラフがえがけないことがわかる（このことは,円周上に穴をあけることができないことからもわかる）。



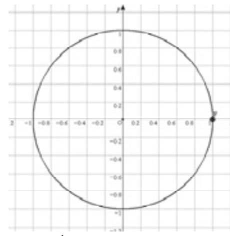
c=0



c=0.5

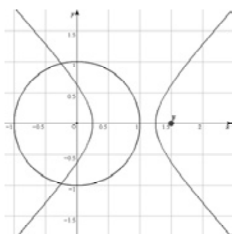


c=0.9



c=1

値の範囲を超えてさらに c を動かしていくと, $c>1$ のとき,グラフは次のようになる。これは双曲線であるが,式においても $1-c^2<0$ となるので,符号が変わる。すると,楕円の焦点の移動によって双曲線を導入することができる。



c=1.5

では,双曲線を「塩の幾何学」でつくることはできないだろうか。楕円から穴をずらすだけではできないが,一工夫すると,写真 5 のようにつくることができる。

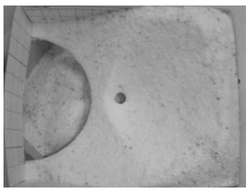


写真 5

６．四角形の重心を求める方法について

凸四角形 ABCD の重心を求める標準的な方法は

(1) 四角形 ABCD を対角線 AC により２つの三角形△ABC と△ADC に分け, それぞれの重心を求め２つの重心を通る直線を引く。

(2) 四角形 ABCD を対角線 BD により２つの三角形△ABD と△CBD に分け，それぞれの重心を求め２つの重心を通る直線を引く。

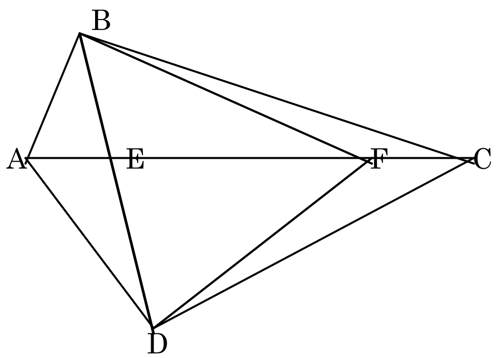
(3) (1),(2)によって得られた２つの直線の交点が四角形 ABCD の重心となる。

というものである。しかし，この方法では凹四角形の場合に重心を求めることができない。

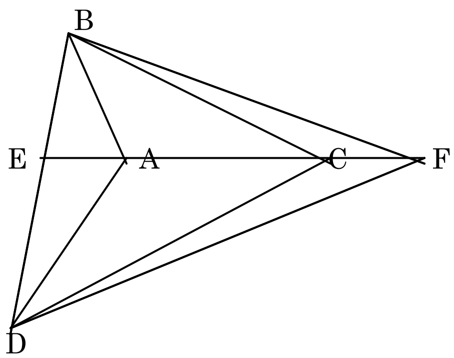
最近 Khorshidi(2007)は, ４つの三角形ではなくただひとつの三角形の重心を使って，凸や凹にかかわらずすべての四角形の重心を求める簡単な方法を示した。その概要を次に示す。

四角形 ABCD の対角線 AC と BD の交点を E とし，直線 AC 上に点 F を CF=AE となるようにとると次の定理を得る（下図参照，(a)は凸の場合，(b)は凹の場合)。

(a)



(b)



定理　四角形 ABCD の重心は△DBF の重心である。

この定理に対して Khorshidi が与えた証明はそれほど難しいものではないが，さらにやさしい証明ができたのでここに示す。

（新証明）　凸四角形の場合を証明する。凹四角形の場合も同様に証明できる。AC と EF の中点は一致するから，△ABC と△EBF は同一の重心 G をもち △ADC と△EDF は同一の重心 H をもつ。△DBF を四角形 DEBF が退化したものと考えると，△DBF の重心 I と四角形 ABCD の重心 J はどちらも G と H を結ぶ線分上にある。また I は GH を△EBF：△EDF に内分する点であり, J は GH を△ABC：△ADC に内分する点であるが, △ABC：△ADC=△EBF：△EDF であることより I と J は一致する。

Ⅴ．終わりに

本稿では，図形についての美しさを児童・生徒が感得する指導法の開発に向けて，５つの図形についての美しさに焦点を当て，指導の基本的枠組みを設定して，その指導のあり

方を事例的に考察した。また，図形についての美しさを感得する教材について開発した。

具体的には，図形についての美しさとして，

(美しさ 1)：図形の視覚的な美しさ

(美しさ 2)：一般的に成立する図形的性質の美しさ

(美しさ 3)：図形を社会に応用できる美しさ

(美しさ 4)：図形操作等における予想外の着想の美しさ

(美しさ 5)：図形的に具体化して説明できる美しさ

の５つに焦点を当て，下記の３つの流れを図形における美しさを感得する指導の基本的枠組みとして設定した。

①児童・生徒に困難を感じさせる

②「美しさ」に関わる事柄を見出す

③よさを振り返る。A と nonA の対比

上記の枠組みに基づき，中・高等学校において２つの指導実践を行った。一つは，中学２年生を対象にした「鳩目返し」を題材にした指導で，（美しさ 2），（美しさ 4）に焦点を当てている。もう一つは，高等学校における数学 A，数学 B を履修した生徒を対象に，ベクトルを題材にしたコンピュータを用いた指導で，（美しさ 2）に焦点を当てている。実践事例を通して，図形における美しさに対応する生徒にとっての困難な活動を的確に特定すること，並びに，長期にわたってこのような指導を繰り返し指導していくこと，の重要性が示唆された。

さらに，小・中・高等学校において，下記のように，図形についての美しさに焦点を当てた教材を５つ開発した。

(a) 正方形に変身！（小 5，美しさ 4）

(b) カンタベリー・パズルを用いた図形の等積変形（小 5，美しさ 4）

(c) 平面の分割数はいくつ？（高 2，美しさ 2・美しさ 5）

(d) 超立方体を調べよう（高 1･2，美しさ 1・美しさ 2）

(e) 塩の幾何学による楕円・双曲線の一般化（高 3，美しさ 1・美しさ 2・美しさ 5）

最後に，四角形の重心を求める方法の教材開発に関連して，新たな証明方法が見出されたのでここで紹介した。

今後とも，さらなる教材を開発すると共に，その指導のあり方について継続的に研究を進めていく必要がある。

［参考・引用文献］

Banchoff, T.F.(1990)，“Dimension” In *On the Shoulders of GIANTS*，edited by Steen, L., National Academy Press，pp.53-58.

橋本吉彦（2009)，『算数教育原論』，東洋館出版，p.42.

H.E.デュードニー, 伴田良輔訳(2009),『カンタベリー･パズル』, ちくま学芸文庫, pp.62-63.

市谷壮（2010)，「正方形→正三角形の等積変形」，『第 68 回ハンズオン・マス研究会配付資料』.

池田敏和(2009)，「数学的モデリングと数学的知識の構成―モデル主義に基づく数学教育の

構想―」,『第 33 回科学教育学会年会論文集』, pp.251-254.
池田敏和・奥村利香・小山健仁・岩立忠・純岡尚史・関口慎吾・前田正男・馬場裕・橋本吉彦（2010),「小学校算数科における図形についての美しさを感得する教材開発」,『横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ（教育科学)』No.12, pp.1-12.
Khorshidi, B.(2007), A new and improved method for finding the center of gravity of a quadrilateral, *The College Mathematics Journal* 38 (2007), pp.225-226.
黒田俊郎(2000),『塩が教える幾何学』, 横山正道 編集・発行.
前田正男・池田敏和・藤原大樹・鈴木誠・橋本吉貴・小山直人・石谷優行・小原美枝・馬場裕・橋本吉彦（2010),「中・高等学校数学科における図形についての美しさを感得する教材開発」,『横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ（教育科学)』No. 12, pp.135-154.
中谷宇吉郎(1958),『科学の方法』, 岩波新書.
清宮俊雄(2001),『初等幾何のたのしみ』, 日本評論社.
数学教育協議会・小沢健一（編）(1998)『算数・数学おもちゃ箱』, 国土社, p.32.
鈴木誠(2009),「どんな四角形ができるかな？」, 前田正男・池田敏和他『中・高等学校数学科における図形についての美しさを感得する教材開発』, 横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ（教育科学）No.12, pp.137-140.
竹内芳男・沢田利夫(1984),『問題から問題へ―問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善―』, 東洋館出版社.
内海庄三(1965),「問題解決における規則性の発見とその思考の様相について」,『日本数学教育会誌 臨時増刊号 数学教育学論究Ⅸ』, pp.33-55.
吉田明史(2004),「数学を通した人間形成とは何か」, 長崎栄三・長尾篤志・吉田明史・一楽重雄・渡邊公夫・国宗進著,『授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方』, 明治図書, pp. 21-35.
Ziman, J., 桜井邦朋・大江秀房訳(1985),『科学理論の本質』, 地人書館.

［註］

(1) 凹四角形の平行四辺形への変形は, 凹四角形の形に依存してできる場合とできない場合がある。しかし, できない場合でも, 考え方を拡張することで, 平行四辺形へと変形することが可能になる。詳しくは, 次の文献に掲載されている。池田敏和(2009),「革命的知識獲得と累積的知識獲得の境界線をめぐって－拡張のプロセスに焦点を当てて－」, 数学的活動「連載：さまよいから気づき, そして納得へ」,『数学教育』No.615, 明治図書, pp.92-97.

(2) 赤岡正毅,「ベクトル白板」, 山梨県立韮崎高校(当時)の赤岡正毅先生が１２年ほど前に作られたソフト。(赤岡先生からの依頼を受け石谷のホームページからダウンロードできる。http://www.ishitani.com/vector1.htm)

(3) カブリの評価バージョン「http://www.naoco.com/cabri/download/」

(4) 結果がきれいに 3^n になるわけであるが, この意味について補足する。

(n-1)次元立方体から n 次元立方体を構成することは, (n-1)次元立方体における(n-1)個の構成要素の各々の個数の和に 3(=2+1)をかけたことになる。次の式をみれば, 何故 3 (=1+2) をかけるとよいかが解釈できるであろう。

$$\{N(n-1,0)+N(n-1,1)+\cdots+N(n-1,r)+\cdots+n(n-1,n-1)\}\times(2+1)$$
$$=N(n-1,0)\times 2+\{N(n-1,0)\times 1+N(n-1,1)\times 2\}+\cdots+\underline{\{N(n-1,r-1)\times 1+N(n-1,r)\times 2\}}+$$
$$\cdots+\{N(n-1,n-2)\times 1+N(n-1,n-1)\times 2\}+N(n-1,n-1)\times 1$$
$$=N(n,0)+N(n,1)+\cdots+\underline{N(n,r)}+\cdots+N(n,n-1)+N(n,n)$$

上式の下線部を対応させると, 3^n の意味は最初に述べたア, イのルールに他ならないことがわかる。