生存期間の不確実性とギフト経済[1)]

國府田 桂一・劉 慶彬

1. イントロダクション

各主体が親に対する利他性を持つ世代重複モデルは，Robert Barro（1974）の先駆的研究以来，Abel（1987），Laitner（1988），Hansson and Stuart（1989），Nishimura and Zhang（1992, 1993），O' Conell and Zeldes（1993），藤生（1999），Boldrin and Jones（2002），Boldrin, Nardi, and Jones（2005）等によって拡張され，人口成長，社会保障，年金等の問題の分析に応用されてきた．こうした経済では，各主体が利己的で，（親に対して）利他性を持たない経済とは異なって，子から親への移転支払い（ギフト）が内生的に生じるため，親に対する利他性を持つ主体はギフト動機を持つ主体とも呼ばれる．しかしながら，Abel（1987）が主張したように，ギフト動機を持つ主体からなる経済においても，ギフト動機が十分に強くないならば，均衡においてギフトは発生するとはかぎらない．均衡においてギフトが正値をとらない世代重複経済は，利他性のない主体からなる世代重複経済（たとえばDiamond1964）と変わらない．したがって，どのような条件のもとでギフトが正値をとるかを明らかにすること，すなわち，ギフト動機が有効である（operative gift motive）ための条件を求めることは重要である．

他方，公的年金や私的年金市場（private market for annuities）の役割を検討するためには，各主体の生存期間が不確実である経済を分析することが不可欠である．各主体の生存期間が不確実である（ただし利他性は存在しない）モデルは，Menachem Yaari（1965）の画期的研究以来，Hakasson（1969），Barro and Friedman（1977），Sheshinski and Weiss（1981），Abel（1985,1986），Eckstein, Eichenbaum, and Peled（1985a, 1985b）等によって分析された．特に，Abel（1985）およびEckstein et al（1985a）は，寿命に不確実性がある世界では，年金市場が不完全なら，主体が遺産動機を持たない（子に対する利他性がない）場合であっても，親から子への移転支払いが偶発的遺産（accidental bequests）という形をとって発生し，それが主体間の消費，資産の分布に大きな影響を与えることを明らかにした．

本稿の目的は，Diamondの世代重複モデルを，ギフト動機を持つと同時に生存期間が不確実である主体からなるモデルに拡張することである．そのための第一歩として，Abel（1985）あるいはEckstein et al（1985）とは反対に，完全な私的年金市場の存在を仮定し，ギフト動機がoperativeであるためのAbel（1987）の条件はどのように修正されるか（あるいは修正されないか）を検討し，さらにギフト動機がoperativeである状況のもとでこの経済の定常均衡，とくに各主体の消費，貯蓄，そしてギフトがどうなるかを特徴づける．

このモデルの分析を通じて明らかになったことは主として次の2点である．1つは，各主体

1）1月22日の國府田の最終講義のベースになった論文はKoda（2008）であるが，まだ推敲すべき点が残っており，論文のかたちでの発表は別の機会にしたい．本稿とKoda（2008）とは互いに密接に関連した主題を扱っており，いわばcompanion paperの関係にある．なお，本研究は国際社会科学研究科国際開発専攻の平成18年度プロジェクトの一部であり，劉慶彬はリサーチ・アシスタントしてこのプロジェクトにかかわった．

がギフト動機を持ち，かつ生存期間が不確実である経済では，親が短命である主体と親が長命である主体の2つのタイプしかないように見えるが，それは正しくない，ということである．親の代までどのくらい連続して「長命」が続いてきたか（家系のヒストリー）によって各主体の消費者行動（消費，ギフト，貯蓄）は同じではない．Abel（1985）と Eckstein et al（1985）が明らかにしたように，各主体が利他性を持たない経済においても，生存期間に不確実性があり，かつ年金市場が不完全であれば，各主体の消費行動，したがって定常状態の消費・資産分布は各主体の家系のヒストリーによって異なるが，それは年金市場の不完全性のために親の代までどのくらい連続して「短命」が続いてきたかによって各主体が受け取る偶発的遺産の大きさが異なるからである．本稿のように完全年金市場が仮定されるなら，Abel あるいは Eckstein et al の経済にはそうした現象はあらわれない．本稿の，各主体がギフト動機を持つ経済では，年金市場は完全であっても（したがって偶発的遺産は生じないにもかかわらず），主体間の消費，ギフト，資産の分布は家系のヒストリーに依存するのである．

もう1つは，各主体の消費・ギフトあるいは資産（貯蓄）の分布は，成立した（定常）均衡が動学的に効率的か，非効率的かによって大きく異なることが明らかになったことである．すなわち，この経済の定常状態においては長命が連続して長く続いた家系に生まれた主体ほど親へのギフトは大きく，資産は小さくなるが，前者では消費は小さくなるのに対し，後者では逆に消費は大きくなる．

以下，第Ⅱ節では，各主体はギフト動機を持つが，生存期間に不確実性が存在しない経済についてレビューし，ギフトが定常均衡において正となるための必要かつ十分な条件（ギフト動機が operative であるための Abel の条件）が成立することを確認する．第Ⅲ節は，第Ⅱ節のモデルに生存期間の不確実性を導入し，Abel の条件がそうした環境でも成立つことを示す．第Ⅲ節の残りの部分では，定常均衡がギフト動機が operative で，かつ動学的に効率的なときの，消費・ギフト・貯蓄の分布がどのようになるかを示す．第Ⅳ節は，定常状態が動学的に非効率的である場合について，消費・ギフト・貯蓄の分布がどのようになるのかを検討する．第Ⅴ節で本稿を締めくくる．

II. 予備的考察
——生存期間に不確実性が存在しない経済——

生存期間の不確実性を導入する前に，生存期間に不確実性は存在せず，各主体が2期間生きる世代重複経済を考えよう．世代 t の各消費者の生涯効用 U^t が

$$U^t = u(c_t^t) + \delta u(c_{t+1}^t) + \gamma U^{t-1} \tag{1}$$
$$0<\delta<1, \gamma \geq 0$$

で表わされ，かつ $\gamma>0$ のとき，各主体は親に対する利他性を持つ，あるいは親に対するギフト動機を持つという．ここで，c_t^t および は，c_{t+1}^t それぞれ世代 t の主体の t 期（若年期），t+1期（老年期）の消費であり，δ は異時点間の割引ファクター，γ は親への利他性あるいはギフト動機の大きさを表わすパラメータである．各主体が親に対するギフト動機を持つというのは，世代 t 主体の生涯効用は，自分の若年期，老年期の消費だけでなく，親（世代 t−1）の効用 U^{t-1} にも依存し，こうした経済では内生的に子から親への移転支払い（ギフト）が生じる可能性があるからである．なお，$u(.)$ は，$u'>0$, $u''<0, u'(0)=\infty$ を満たすとする．

いま，(1) を用いて親（世代 t−1）の効用 U^{t-1} を求め，それを再び(1)の右辺に代入すると，$U^t = u(c_t^t) + \delta u(c_{t+1}^t) + \gamma[u(c_{t-1}^{t-1}) + \delta u(c_t^{t-1})] + \gamma^2 U^{t-2}$ を得る．世代 t 主体の立場からすると，親の親（世代 t−2）の効用 U^{t-2} および親の若年期効用 $\gamma u(c_{t-1}^{t-1})$ はすでに決定されているので，(1) において U^t を最大化することは，

$$u(c_t^t) + \delta u(c_{t+1}^t) + \gamma\delta u(c_t^{t-1})$$

を最大化することと同値である．したがって，

効用関数 U^t を，$\gamma u(c^{t-1}_{t-1})$ と $\gamma^2 U^{t-2}$ を省略して，

$$U^t = u(c^t_t) + \delta u(c^t_{t+1}) + \gamma\delta u(c^{t-1}_t) \qquad (2)$$

と書いても一般性を失うことはない[2]．

各主体は，2期目（老年期）の期首には $n \geq 1$ の子供を持つとする．世代 t 主体は，若年期には1単位の労働を供給し，w_t の実質賃金を受け取り，それを自らの消費と親（世代 $t-1$）へのギフト q_t に支出し，残りを貯蓄する．老年期には退職し，貯蓄 S_t からの収益 $R_{t+1}s_t$ と子供たち（世代 $t+1$）からのギフト nq_{t+1} によって老後の生活を送る．したがって，世代 t の各消費者の最大化問題は，R_{t+1} を t 期から $t+1$ 期への貯蓄の粗収益率とするとき，予算制約

$$c^t_t = w_t - q_t - s_t \qquad (3)$$

$$c^t_{t+1} = R_{t+1}s_t + nq_{t+1} \qquad (4)$$

$$c^{t-1}_t = R_t s_{t-1} + nq_t \qquad (5)$$

のもとで（2）の U^t を最大化することである．1階の条件は

$$u'(c^t_t) = \delta R_{t+1} u'(c^t_{t+1}) \qquad (6)$$

$$u'(c^t_t) \geq \gamma\delta u'(c^{t-1}_t) \quad \text{ただし，} q_t > 0 \text{ のとき等号で成立} \qquad (7)$$

で与えられる．Abel（1987）に従って，各主体は自分の一族（dynastic family）の他のすべての成員の消費者行動を所与として行動するとする．とくに，自分が親に与えるギフトを決定するにあたって自分の子供たちからのギフトおよび自分の兄弟が親に与えるギフトを所与として行動するとしよう[3]．

この経済にはただ一つの財が存在し，この財の各期の粗産出量は収穫一定の新古典派の生産関数を通じて生産される．生産関数は，労働1単位あたりの集約形で表すと，$f(k)$ で与えられるが，k は労働1単位あたりの資本で，生産関数は $f'>0, f''<0, f(0)=\infty$ に従うとする．資本ストックは生産に使用されたあと完全に減耗すると仮定する．このとき，各競争的企業の利潤最大化条件より

$$R_t = R(k) \equiv f'(k_t) \qquad (8)$$

$$w_t = w(k_t) - k_t f'(k_t) \qquad (9)$$

が成立つ．

均衡条件 $s_t = nk_{t+1}$ を（3）-（7）に代入し，（8），（9）を用いると，完全予見定常均衡（以下では，単に定常均衡あるいは定常状態と呼ぶ）においては，

$$c_1 = w(k) - q - nk \qquad (10)$$

$$c_2 = R(k)nk + nq \qquad (11)$$

$$u'(c_1) = \delta R(k) u'(c_2) \qquad (12)$$

$$u'(c_1) \geq \gamma\delta u'(c_2) \text{ ただし，} q>0 \text{ のとき等号で成立} \qquad (13)$$

を満たさなければならない．ただし，c_1, c_2, q, k はそれぞれ $c^t_t, c^t_{t+1}, q_t, k_t$ の定常状態における値である．このとき，（12）と（13）より

$$R(k) \geq \gamma \text{ ただし，} q>0 \text{ のとき等号で成立} \qquad (14)$$

が成立つ．

いま，定常均衡においてギフト動機が operative，すなわち，$q>0$ ならば，（14）が等号で成立し，

$$R = R(k) = \gamma \qquad (15)$$

となる．このとき，k は，（8）によって $k = f'^{-1}(R) = f'^{-1}(\gamma)$ として一意に決定される．さらにこれを（10）-（12）に代入すれば，c_1, c_2 および q は，それぞれ k の関数として一意に決定される．

以下では，$q>0$ が成立するための条件を求めよう．まず，（3），（4），および（6）より，

2）ただし，厚生分析をする場合は $\gamma u(c^{t-1}_{t-1}) + \gamma^2 U^{t-2}$ の部分を無視することはできない．

3）この仮定はこの分野では標準的であって，しばしば Nash assumption と呼ばれている．これに対して O' Connell and Zeldes（1993）や藤生（1999）は，親と子供たちとのゲームにおいて親は Stackelberg game の先導者（逐次手番ゲームの先手番）として行動できることに注目し，サブゲーム完全均衡を求めようとする．同様なアプローチは Laitner（1988），Hansson and Stuart（1989）によっても採用されている．また，本稿の仮定は n 人の兄弟たちが親へのギフトを決定するにあたって独立的に（非協力的に）行動することを意味するが，彼らが協力的に行動するなら，1階の条件（7）の右辺は $\gamma\delta u'(c^{t-1}_t)$ ではなく，$\gamma\delta n u'(c^{t-1}_t)$ となる．Abel（1987）および Boldrin and Jones（2002）を見よ．

定常状態においては

$$u'(w-q-s)=\delta Ru'(Rs+nq) \tag{16}$$

を得る．次の結果はスタンダードな結果であるが（たとえば，De La Croix and Michel 2002, 12ページを参照），補題のかたちで示しておこう．

補題１ w, q, および R を所与としたとき，(16) を満たす s は一意に存在し，

$$s=S[w-q, nq, R]$$

と書くことができる．（貯蓄）関数 $S(.)$ は連続微分可能で，かつ $0<S_1<1$, $S_2<0$ が成立つ．ただし，S_i は S の i 番目の変数に関する偏導関数を表わしている．

貯蓄関数 $S(.)$ のこれらの性質と定常均衡においては $s=nk$ が成り立つことを用いると，

$$q>0 \Leftrightarrow S[w(k),0,R(k)]>nk \tag{17}$$

が成立することがわかる．ここで，Weil (1987) に従って，次の２つの仮定をおこう．

仮定１　$G(k)\equiv S[w(k),0,R(k)]-nk$ と定義するとき，$G(k)=0$ に正の解はただ一つ存在する．

仮定２．$G(k)=0$ の正の一意解を $\hat{k}$ と書くと，関数 $G(.)$ は次の条件を満たす．すなわち，

$$G(k)\begin{cases} >0 & k\in(0,\hat{k})\text{のとき} \\ =0 & k=\hat{k}\text{のとき} \\ <0 & k>\hat{k}\text{のとき} \end{cases}$$

が成立する．

(1)（したがって (2)）において，$\gamma=0$ である（親に対する利他性が存在しない）経済を Diamond (1965) 経済と呼ぶとき，仮定１は Diamond 経済において資本ストックが正値をとる定常均衡が一意に存在し，仮定２はその定常状態が局地的に安定であることを保証している．

これらの仮定のもとで次の命題が成立する．

命題１ (Abel 1987)．ギフトが定常状態において正値をとる ($q>0$) ための必要かつ十分な条件は

$$\gamma>\hat{R}$$

である．ここで，$\hat{R}$ は Diamond 経済の定常状態における資本の粗収益率，すなわち，$\hat{R}=R(\hat{k})$ である．

証明　$q>0$ としよう．(17) および仮定１, ２より $k<\hat{k}$. ところが，この事実と (15) より，$\gamma=R(k)=f'(k)>f'(\hat{k})=R(\hat{k})=\hat{R}$. 逆に，$\gamma>\hat{R}$ としよう．(14) より，$f'(k)=R(k)\geq\gamma>\hat{R}=R(\hat{k})=f'(\hat{k})$. よって，$k<\hat{k}$. したがって，仮定１，２，そして (17) により，$q>0$ となる．

ギフト動機の強さを表わすパラメータ γ の値は１より小さいと仮定されることがあるが（たとえば，O' Connell and Zeldes 1993），Abel (1987) が指摘しているように，γ の値をとくにそのように限定しなければならない強い根拠があるわけではない．命題１によって，親に対する利他性が十分大きく，$\gamma>\hat{R}$ ならば，定常状態においてギフトは正値を示し，命題１および (15) より，$R=\gamma>\hat{R}$，したがって Diamond 経済の定常均衡とは異なる定常状態が支配するが，逆に，親に対する利他性が小さく，$\gamma\leq\hat{R}$ ならば，この経済の定常均衡は $q=0$ で成立し，(17) および仮定１より $k=\hat{k}$ と，Diamond 経済と同じ定常状態が支配する．

Ⅲ．生存期間に不確実性が存在する経済

以上の議論を各主体の寿命あるいは生存期間が不確実である世界に拡張することを考えよう．Abel (1985) に従って，各主体は１期間（若年期）だけ生きるか，それとも２期間（若年期と老年期の両期間）を生きるかのいずれかであるとし，主体が１期間しか生きないとき，「短命」と呼び，２期間生きるとき，「長命」と呼ぶことにしよう．いま，すべての主体はある共通の確率 P で短命である（若年期末に死亡する）とし，このことはすべての主体にとって共有の情報であるが，若年期が終了するまでは，各主体の生存期間が短いか，長いかは，本人を含め

て誰にも知り得ないとしよう．また，世代tの各主体には，短命であるか，長命であるかにかかわらず，$t+1$期の期首には$n \geq 1$の子供が生まれると仮定しよう．いま，各主体は，親の代までj代にわたって連続して長命であったとき，タイプjに属すると呼ぶことにする．したがって，タイプ0（の主体）は親が短命，タイプ1は親が長命，親の親は短命，タイプ2は親と親の親とが長命，親の親の親は短命，等々であり，$j \in \{0,1,2,...\}$である．各世代において長命の主体の割合（確率）は$1-p$であるから，各世代を構成するタイプj主体の割合は$p(1-p)^j$で与えられることになる．世代t，タイプjの主体の期待生涯効用は

$$EU^t(j) = \begin{cases} u(c_t^t) + (1-p)\delta u(c_{t+1}^t) & j=0\text{のとき} \\ u(c_t^t) + (1-p)\delta u(c_{t+1}^t) + \gamma\delta u(c_t^{t-1}) & j \geq 1\text{のとき} \end{cases} \tag{18}$$

で与えられる．(18) は，(2) から導かれる期待効用であるが，世代t主体の老年期の効用は状態依存的で，長命なら$\delta u(c_{t+1}^t)$であり，短命なら，恒等的にゼロであると仮定されている．したがって，t期（の期首）の情報の下では，世代t主体が老年期を生きる確率は$1-p$であるから，世代t主体の期待生涯効用は (18) の右辺で示されるようになる．注意すべきことは，タイプ$j \geq 1$主体の場合には，親が生きているので，親の老年期の効用が世代t主体の期待生涯効用に寄与するのに対して，タイプ0主体の場合は，自分が生まれたときには親はすでに亡くなっているので，親の老年期の効用（恒等的にゼロ）は世代tの期待生涯効用には寄与しないことである．

以下では，完全な私的年金市場（complete private annuity markets）が存在すると仮定しよう．この仮定によって，Abel (1985) あるいは Eckstein et al (1985) によって分析されたような偶発的遺産が発生する可能性は排除され，各主体の初期保有量は家系のヒストリーには依存せず，若年期に与えられた労働1単位だけになる．完全な年金市場あるとき，各世代t消費者は貯蓄を全額年金に投資し，$t+1$期には$\dfrac{R_{t+1}}{1-p} \equiv R_{t+1}^a$の粗収益を得ることに注意して，各主体の効用最大化問題を考えると，以下のようになる[4]．

世代t，タイプ$j \geq 1$主体は期待生涯効用

$$EU^t(j) = u[c_t^t(j)] + \alpha u[c_{t+1}^t(j)] + \beta u[c_t^{t-1}(j-1)]$$

を予算制約

$$c_t^t(j) = w_t - q_t(j) - s_t(j)$$
$$c_{t+1}^t(j) = R_{t+1}^a s_t(j) + nq_{t+1}(j+1)$$
$$c_t^{t-1}(j-1) = R_t^a s_{t-1}(j-1) + nq_t(j)$$

のもとで最大化する．ここで，$\alpha \equiv (1-p)\delta<1$，$\beta \equiv \gamma\delta>0$であり，また各（選択）変数の括弧内の$j$, $j-1$あるいは$j+1$はそれらの変数を選択する主体のタイプを表わしている．ある主体のタイプが$j \geq 1$であれば，主体の親のタイプは$j-1$である．主体$j \geq 0$の子供のタイプは，主体が長命であるなら，$j+1$であり，主体が短命であるなら，0となる．

一方，世代t，タイプ0主体は

$$EU^t(0) = u[c_t^t(0)] + \alpha u[c_{t+1}^t(0)]$$

を予算制約

$$c_t^t(0) = w_t - s_t(0)$$

$$c_{t+1}^t(0) = R_{t+1}^a s_t(0) + nq_{t+1}(1)$$

のもとで最大化する．タイプ0主体は，意思決定をするとき，親はすでに亡くなっているので，効用関数は親の老年期の効用に依存することはなく，したがって親へのギフトはもちろん存在しない．

世代t主体の効用最大化の1階の条件は，タイプ$j \geq 0$については

---

4) 年金会社はt期に若年世代から貯蓄を集めると，最終財企業に投資し，$t+1$期には貯蓄1単位あたりR_{t+1}の粗収益を稼ぎ，全額を老年期まで生き残った（すなわち，長命の）主体に彼らの貯蓄額に比例して配分する．

$u'[c_t^i(j)]=\alpha R_{t+1}^a u'[c_{t+1}^i(j)]$

さらに，タイプ $j\geq 1$ については，

$u'[c_t^i(j)]\geq \beta u'[c_{t-1}^i(j-1)]$ ただし，$q_t(j)>0$ のとき等式で成立

で与えられる．一方，生産側についてはタイプに依存しないので，いぜん (8)，(9) が成立つ．

以下では，前節と同様，定常状態に分析の焦点を合わせるので，前節の記号法に従って，定常状態におけるタイプ $j\geq 0$ 主体の若年期消費，老年期消費，貯蓄，ギフトを，それぞれ $c_1(j)$, $c_2(j)$, $s(j)$, $q(j)$ と書き，タイプに依存しない一人当たり資本，賃金，資本粗収益率，年金市場粗収益率の定常均衡値を，それぞれ k, w, R, R^a で表わそう．したがって，定常状態においては，タイプ $j\geq 0$ 主体については

$$u'[c_1(j)]=\alpha R^a u'[c_2(j)] \tag{19}$$

$$c_1(j)=w-q(j)-s(j) \tag{20}$$

$$c_2(j)=R^a s(j)+nq(j+1) \tag{21}$$

が成立ち，タイプ $j\geq 1$ 主体に対してはさらに

$u'[c_1(j)]\geq \beta u'[c_2(j-1)]$ ただし，$q(j)>0$ のとき等式で成立 (22)

が成立つ．また，(8)，(9) は，定常状態においては

$$R=R(k)=f'(k) \tag{23}$$

$$w=w(k)=f(k)-kf'(k) \tag{24}$$

となる．

(19) - (21) より，補題1と同様の補題が成立する．

補題2　$w, q(j)$, および R^a を所与としたとき，(19) - (21) を満たす $s(j)$, $c_1(j)$ は，すべての $j\geq 0$ について

$$s(j)=S[w-q(j),nq(j+1),R^a] \tag{25}$$

$$c_1(j)=C[w-q(j),nq(j+1),R^a] \tag{26}$$

によって与えられる．ただし，$q(0)\equiv 0$ である．貯蓄関数 $S(.)$ は補題1の関数 $S(.)$ と同様の性質を持ち，連続微分可能で，$0<S_1<1$, かつ $S_2<0$ であり，若年期の消費関数 $C(.)$ は，連続微分可能で，$0<C_1<1$, かつ $C_2<0$ である．ただし，S_i および C_i は，それぞれ S および C の i 番目の変数に関する偏導関数を表わしている．

証明　(25) の導出は補題1のそれとまったく同様であり，(25) を (20) に代入すれば，(26) を得る．関数 $C(.)$ の性質は関数 $S(.)$ の性質から直ちに従う．

(25) を用いると，定常均衡においては，

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j S[w(k)-q(j),nq(j+1),R^a(k)]=nk \tag{27}$$

が成立つことに注意すると，前節の (17) は，

$$\exists j\geq 1, q(j)>0 \quad \Leftrightarrow \quad S[w(k),0,R^a(k)]>nk \tag{28}$$

と書き換えられる．いま，前節の仮定1，仮定2の関数 $G(.)$ を

$G(k)\equiv S[w(k),0,R^a(k)]-nk$

と定義し直そう．ただし，関数 $S(.)$ は補題2で定義された貯蓄関数であり，$R^a(k)\equiv R(k)/(1-p)$ である．以下では，この $G(.)$ に対して前節の仮定1と2が成立つと仮定する．

この経済の定常均衡は，(19) - (25) および (27) を満たす $k>0$ および $q(j)\geq 0$, $j=0,1,2,...$ である．定常均衡は，すべての $j\geq 0$ に対して $q(j)=0$ が成立つとき，Diamond 経済に成立する定常均衡と相等しいので，Diamond 定常均衡と呼ぶことにしよう．すると，仮定1によって $G(k)=0$ は一意解 $\hat{k}>0$ を持つから，$k=\hat{k}$, $q(j)=0$, $j=0,1,2,...$ とおくと，以下で示すように，これが求める Diamond 定常均衡である．では，こうした定常均衡はどのような状況のもとで存在するのだろうか．次の補題は Diamond 定常均衡がこの経済に存在するための必要十分条件を与えている．

補題3　$q(j)=0$, $j=0,1,2,...$ となる定常均衡 (Diamond 定常均衡) は，$\gamma\leq\hat{R}$ のとき，かつそのときにかぎり，存在する．

証明　いま，$q(j)=0$, $j=0,1,2,...$ としよう．すると，(27) および仮定1より，$k=\hat{k}$ を得る．

これを (23) と (24) に代入することによって，それぞれ，$k=\hat{k}$のときの，資本収益率および賃金

$$\hat{R}=R(\hat{k})\equiv f'(\hat{k})$$

$$\hat{w}=w(\hat{k})\equiv f(\hat{k})-\hat{k}f'(\hat{k})$$

を得る．さらに，これらを補題2の (25) と (26) に代入すると，このときの各主体の貯蓄と若年期消費は，

$$\hat{s}(j)=S[\hat{w},0,\hat{R}^a]\equiv\hat{s} \qquad j=0,1,2,...$$

$$\hat{c}_1(j)=C[\hat{w},0,\hat{R}^a]\equiv\hat{c}_1 \qquad j=0,1,2,...$$

となることがわかる．ただし，$\hat{R}^a\equiv\hat{R}/(1-p)$ である．最後に，老年期消費 $\hat{c}_2(j)$ は，(21) を用いて

$$\hat{c}_2(j)=\hat{R}^a\hat{s}\equiv\hat{c}_2 \qquad j=0,1,2,...$$

で与えられる．$k=\hat{k}$ および $q(j)=0$, $j=0,1,2,...$ が当該経済の定常均衡であるためには，$k=\hat{k}$ および $q(j)=0, j=0,1,2,...$, したがって，$R\equiv\hat{R}$, $w=\hat{w}$, $c_1(j)=\hat{c}_1$, $c_2(j)=\hat{c}_2$, そして $s(j)=\hat{s}$ が (19) - (25) および (27) を満たすことが必要かつ十分である．ところが，これらが (19) - (21)，(23) - (25)，および (27) を満たすことはすでに示されているので，(22) を満たすための必要かつ十分な条件を求めればよい．いま，$c_1(j)=\hat{c}_1$, $c_2(j)=c_2(j-1)=\hat{c}_2$, および $R^a=R/(1-p)$ を (19) および (22) に代入したあと，(22) の両辺を (19) で除し，$\alpha=(1-p)\delta$ および $\beta=\gamma\delta$ に注意すると，求める結果

$$1\geq\frac{\beta(1-p)}{\alpha\hat{R}}=\frac{\gamma}{\hat{R}}$$

を得る．

次の命題2は，命題1の，各主体の生存期間が不確実であるが，完全な年金市場が存在する場合への拡張であるが，補題3から直ちに導かれる．

命題2　生存期間が不確実であるとき，完全な年金市場が存在する経済においては，$\gamma>\hat{R}$ のとき，かつそのときにかぎり，ギフトは定常状態において正値をとる．

証明　$\gamma>\hat{R}$ のとき，$q(j)=0, \forall j\geq0$ と (矛盾に導くために) しよう．しかし，後者が成立つのは，補題3によって $\gamma\leq\hat{R}$ のときにかぎるから，矛盾．逆に，$\gamma\leq\hat{R}$ のとき，ある $j\geq1$ について $q(j)>0$ が成立つとしてみよう．しかし，補題3によって前者が成立つとき，$q(j)=0\ \ \forall j\geq0$でなければならないから，矛盾．よって，求める結果を得る．

したがって，生存期間に不確実性が存在する場合も，γ の値が十分に大きいときには，ギフト動機は (定常状態において) operative であることが示された．逆に，γ の値が小さいときには，(ギフト動機を持たない経済に成立する) Diamond 定常均衡が支配することがわかった (補題3)．

以下，補題4は，ギフト動機が operative である場合とない場合を資本蓄積，資本収益率および賃金について比較している．ギフト動機が operative な場合には，各主体の賃金所得の一部は，自らによって消費されるだけでなく，ギフトとして親に移転され，親によっても消費されるために，(ギフト動機が operative でない場合とくらべて) 貯蓄は小さく，資本の蓄積はそれだけ低くなる．したがって，資本の収益率は高く，賃金所得は低くなるのである．

また，命題2は，ギフト動機が十分に強い経済では少なくともあるタイプの主体のギフトは正の値をとることを明らかにしているが，タイプ $j=0$ を除くすべてのタイプの主体のギフトが正値をとるかどうかについては答えていない．補題5 (c) はこの問いに解答を与え，命題2の条件が満たされ，かつ内生的に決定される資本の粗収益率 R が γ 以下である経済については，親が生きている主体の，親へのギフトは，タイプにかかわらず，かならず正値をとることを主張している．

補題4　$\gamma>\hat{R}$ としよう．このとき定常均衡においては，

(a)　$k>\hat{k}$

(b) $R > \hat{R}$

(c) $w > \hat{w}$

が成立つ．

証明 (a) ある $j \geq 1$ について $q(j) \geq 0$ であるから，(29)，仮定1，仮定2より直ちに導かれる．

(b) (a)より直ちに従う．すなわち，
$R = R(k) = f'(k) > f'(\hat{k}) = R(\hat{k}) = \hat{R}$.

(c) (a)および $w(k) = f(k) - kf'(k)$ が k の増加関数である事実から直ちに従う．

補題5 この経済の定常均衡は，$\gamma > \hat{R}$ で，かつ $\gamma \geq R$ ならば，以下の条件を満たさなければならない．すなわち，

(a) $\gamma \geq R > \hat{R}$

(b) $c_1(0) \geq c_1(1) \geq c_1(2) \geq \ldots \geq \ldots$
$c_2(0) \geq c_2(1) \geq c_2(2) \geq \ldots \geq \ldots$

ただし，(a) において $\gamma > R$ ならば，厳密な不等号が成立ち，$c_1(\infty) = c_2(\infty) = 0$ である．

(c) $q(0) = 0, q(j) > 0 \ \forall j \geq 1$

証明 (a) 冒頭の仮定，命題2，および補題4(b)より直ちに従う．

(b) (19)，(22)，および $\gamma \geq R$ より，すべての $j \geq 1$ に対して

$$\frac{u'[c_1(j)]}{u'[c_1(j-1)]} \geq \frac{\gamma}{R} \geq 1 \tag{29a}$$

$$\frac{u'[c_2(j)]}{u'[c_2(j-1)]} \geq \frac{\gamma}{R} \geq 1 \tag{29b}$$

$u'' < 0$ に注意すると，(29a)，(29b) より，すべての $j \geq 1$ に対して

$$c_1(j) \leq c_1(j-1) \tag{30a}$$
$$c_2(j) \leq c_2(j-1) \tag{30b}$$

が成立ち，(b) の前半部分が示された．ただし，(30a)，(30b) の不等号は，$\gamma > R$ ならば，(29a)，(29b) の最後の不等号が厳密な不等号で成立つから，厳密な不等号が成立する．さらに，$\gamma > R$ ならば，$\gamma / R > 1$ であるから，(29a) および (29b) より，$j \to \infty$ のとき，$u'[c_1(j)]$ および $u'[c_2(j)]$ は無限大に発散し，したがって，$u'(0) = \infty$ を用いると，求める結果 $c_1(\infty) = c_2(\infty) = 0$ を得る．

(c) (20)，(21) をそれぞれ (30a)，(30b) に代入し，整理すると，すべての $j \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} n[q(j+1) - q(j)] &\leq R^a[s(j-1) - s(j)] \\ &\leq R^a[q(j) - q(j-1)] \end{aligned} \tag{31}$$

を得る．なお，(31) の不等式も，$\gamma > R$ のとき厳密な不等式で成立つことはもちろんである．いま，$q(j) > 0 \ \forall j \geq 1$ を（背理法で）示すために，ある $j \geq 1$ について $q(j) = 0$ を仮定し，$i = min\{j \geq 1 : q(j) = 0\}$ とおく．2つの場合について検討する．$i > 1$ の場合と $i = 1$ の場合である．前者については，(31) において $j = i$ とおき，$q(i) = 0, q(i-1) > 0$ を代入すると

$$nq(i+1) \leq -R^a q(i-1) < 0$$

となり，$q(i+1) \geq 0$ に矛盾する．後者の場合は，(31) において $j = 1$ とおき，$q(1) = q(0) = 0$ に注意し，これらを代入すると，$nq(2) \leq 0$ を得る．しかし，すべてのギフトは非負でなければならないから，$q(2) = 0$．この操作をすべての $j \geq 2$ に対して繰り返すと（帰納法），すべての $j \geq 0$ に対して $q(j) = 0$ となる．しかしながら，命題2によって，$\gamma > \hat{R}$ ならば，少なくともある $j \geq 1$ については $q(j) > 0$ であるという事実に矛盾する．

いま，定常状態にある経済を考えよう．タイプ $j \geq 0$ 主体の予算制約は，(20) および (21) を用いて

$$c_1(j) + \frac{c_2(j)}{R^a} + q(j) = w + \frac{n}{R^a} q(j+1) \tag{32}$$

と書き換えられる．この式から $q(j+h)$, $h = 1, 2, \ldots$ を順次消去していくと，

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^{\infty} [c_1(j+h) + \frac{c_2(j+h)}{R^a}] (\frac{n}{R^a})^h + q(j) \\ &= w \sum_{h=0}^{\infty} (\frac{n}{R^a})^h + lim_{N \to \infty} (\frac{n}{R^a})^{N+1} q(j+N+1) \end{aligned} \tag{33}$$

を得る．(33) は，タイプ j 主体から出発する

一族（dynastic family）の現在から無限の将来にわたる予算制約を表わしている．(33) の両辺の無限級数は，$n/R^a<1$ のときにかぎって意味を持つが，このとき，(33) の右辺の第2項が正の値をとると，一族による，いわゆる Ponzi-game が成立することになる．Ponzi-game が成立しないためには，この項は非正でなければならないが，すべてのギフトは非負だから，結局，すべての $j\geq 1$ について

$$lim_{N\to\infty}(\frac{n}{R^a})^{N+1}q(j+N+1)=0 \qquad (34)$$

が必要である．この条件を課したとき，いうまでもなく，一族の総支出の現在価値は一族の総賃金所得の現在価値 $\dfrac{w}{1-n/R^a}$ に等しくなる．

以下では，定常均衡において $n/R^a<1$ が成立する経済を考え，次の2つの仮定をおく．

仮定3　定常状態において $R>(1-p)n$ ならば，(34) が成立する．

仮定4　定常状態において $R>(1-p)n$ が成立する．

もちろん，$R>(1-p)n$ のとき，ギフト列 $q(j)$ が上に有界であれば，(34) は自動的に満たされ，仮定3は成立するが，逆は真ではない．したがって，(34) は $q(j)$ の有界性よりも弱い条件である．また，前節で分析した生存期間に不確実性が存在しない経済は本節の経済の特殊な場合（すなわち $p=0$ の場合）であるが，その場合はタイプ0は存在せず，すべての主体がただ1つの長命のタイプに退化し，$q(j)=q,\ \forall j\geq 1$ となるので，$n<R^a(=R)$ ならば，(34) は満たされるから，仮定3が成立つ．仮定3と前節の分析とは完全に整合的である．仮定4に関しては，R は内生的に決定される変数であるから，もちろん，任意に与えられたパラメータのもとで成立した定常均衡が仮定4を満たしているという保証はない．けれども，たとえば，Diamond 経済が動学的に効率的で，かつ命題2の条件が満たされる（当該経済のギフト動機が operative である）ならば，仮定4は満たされるので，仮定4を満たす経済は空集合ではない．仮定4が満たされるような経済に集中することは，そうした経済では仮定3が成立するので，各主体の消費，ギフト，貯蓄（資産）の行動の分析が比較的容易になるという利点がある．仮定4は，$R>n$ と $R\leq n$ のいずれとも整合的であるから，仮定4によって動学的に非効率的な均衡の可能性が直ちに排除されるわけではない．にもかかわらず，仮定4は，前節で分析した経済に適用すると，$\gamma=R>n$（命題1を参照）となり，前節のモデルに対しては動学的に非効率な定常状態の可能性を完全に排除しているという意味で強い仮定であることに変わりはない．

以下では，命題2の条件が満たされる経済を考えよう．補題3の結果を用いると，命題2と仮定4とが整合的であるような $R, \hat{R}, (1-p)n$, および γ の（定常均衡における）組み合わせは潜在的には以下の5つの可能性がある．すなわち，(i) $R>(1-p)n\geq\gamma>\hat{R}$, (ii) $R\geq\gamma>(1-p)n\geq\hat{R}$, (iii) $R\geq\gamma>\hat{R}>(1-p)n$, (iv) $\gamma>R>(1-p)n\geq\hat{R}$, (v) $\gamma>R>\hat{R}>(1-p)n$ である．

しかしながら，次の補題が示すように，これらのケースの中で，(i)-(iii)のパターンを示す定常均衡は存在しない．以下ではまずこの事実を証明しよう．

補題6　(i)$R>(1-p)n\geq\gamma>\hat{R}$, あるいは (ii)$R\geq\gamma>(1-p)n\geq\hat{R}$, あるいは (iii)$R\geq\gamma>\hat{R}>(1-p)n$ となる定常均衡は存在しない．

証明　以下では，上記のような条件を満たす定常均衡が存在すると仮定すると，矛盾に導かれることを示そう．まず，いずれの場合も，$\gamma>\hat{R}$ であるから，命題2によって，ある $j\geq 1$ に対して $q(j)\geq 0$ となる．いま，$h=min\{j\geq 1:q(j)>0\}$ とおくと，$q(h)\geq 0$ より (22) は $j=$h のとき等式で成立し，(19)

を用いると，

$$\frac{u'[c_1(h)]}{u'[c_1(h-1)]}=\frac{u'[c_2(h)]}{u'[c_2(h-1)]}=\frac{\gamma}{R}\leq 1$$

を得る．よって，$u''<0$ に注意すると，

$$c_1(h)\geq c_1(h-1) \tag{35a}$$

$$c_2(h)\geq c_2(h-1) \tag{35b}$$

となる．(20) と (21) をそれぞれ (35a), (35b) に代入し，整理すると，

$$n[q(h+1)-q(h)]\geq R^a[s(h-1)-s(h)]$$
$$\geq R^a[q(h)-q(h-1)] \tag{36}$$

を得る．$q(h)>0$ かつ $q(h-1)=0$ に注意すると，不等式 (36) の最右辺は正，したがって

$$q(h+1)>q(h)>0$$

となる．数学的帰納法によって，すべての $j\geq h$ に対して

$$q(j)>0$$

が成立つ．よって，不等式 (34) はすべての $j\geq h$ に対して厳密な不等号で成立ち，

$$n[q(j+1)-q(j)]>R^a[s(j-1)-s(j)]$$
$$>R^a[q(j)-q(j-1)] \tag{37}$$

よって

$$q(j+1)-q(j)>(R^a/n)[q(j)-q(j-1)]$$

を得る．$q(h-1)=0$ に注意してこの不等式を解くと

$$q(j)>\frac{1-\lambda^{j+1-h}}{1-\lambda}q(h) \quad \forall j\geq h+1 \tag{38}$$

となる．ここで，$\lambda\equiv\frac{R^a}{n}=\frac{R}{(1-p)n}>1$である．

(38) の両辺の j を $j+N+1$ で置き換えたあと，両辺に $\lambda^{-(N+1)}$ を乗じ，$N\to\infty$ とすると

$$\lim_{N\to\infty}\lambda^{-(N+1)}q(j+N+1)\geq-\frac{\lambda^{j+1-h}}{1-\lambda}q(h)>0,$$
$$\forall j\geq h+1$$

となり，仮定3の (34) 式に矛盾する．よって，(i) - (iii) を示す定常均衡は存在しない．

以上より，$\gamma>\hat{R}$ のとき，仮定4と整合的な定常均衡は，上記の (iv) あるいは (v) のケース以外にはあり得ないことになる．これに注意してこの経済の（仮定4と整合的な）定常状態を特徴づけると次のようになる．

命題３　生存期間が不確実であるとき，完全な年金市場が存在する経済の定常状態は，$\gamma>\hat{R}$ および仮定4が成立つとき，次のように特徴づけられる．すなわち，

(a)　$\gamma>R>\hat{R}$

(b)　$c_1(0)>c_1(1)>c_2(2)>\ldots>c_1(\infty)=0$

$c_2(0)>c_2(1)>c_2(2)>\ldots>c_2(\infty)=0$

(c)　$0=q(0)<q(1)<q(2)<\ldots<q(\infty)=w/(1-1/\lambda)$

(d)　$s(0)>s(1)>\ldots>s(\infty)=w/(1-1/\lambda)$

ただし，$\lambda\equiv R/(1-p)n>1$，$q(\infty)=w/(1-1/\lambda)>0$，$s(\infty)=w/(1-\lambda)<0$ である．

証明　(a) 補題5より，$\gamma>R$ のとき，仮定4と整合的な $\gamma, R, \hat{R}$, および $(1-p)n$ の間の関係は，上記のケース (iv) あるいは (v) 以外にはあり得ない，したがって $\gamma>R>\hat{R}$ でなければならない．

(b) $\gamma>\hat{R}$ かつ $\gamma>R$ であるから，補題5の前提条件を満たすので，補題5が成立ち，求める結果を得る．

(c)　(33) と (34) より，すべての $j\geq 0$ に対して

$$q(j+1)-q(j)=\sum_{h=0}^{\infty}[c_1(j+h)+\frac{c_2(j+h)}{R^a}](\frac{n}{R^a})^h$$
$$-\sum_{h=0}^{\infty}[c_1(j+1+h)+\frac{c_2(j+1+h)}{R^a}](\frac{n}{R^a})^h$$
$$=\sum_{h=0}^{\infty}\left\{[c_1(j+h)-c_1(j+1+h)]+\frac{[c_2(j+h)-c_2(j+1+h)]}{R^a}\right\}(\frac{n}{R^a})^h$$

が成立つから，(c) は，(b) の結果より（最後の部分を除いて）直ちに従う．一方，(20) および (21) より，$c_1(j)=w-q(j)-s(j)$，$c_2(j)=R^a s(j)+nq(j+1)$ であるが，(b) の結果より，$c_1(j)$ と $c_2(j)$ はいずれも0に収束するので，この事実を用いると，

$$\lim_{j\to\infty}q(j)=\frac{R^a w}{R^a-n}=\frac{w}{1-n/R^a}=\frac{w}{1-1/\lambda}>0$$

$$\lim_{j\to\infty}s(j)=\frac{w}{1-\lambda}<0$$

を得る．

(d)　補題5の証明において示したように，不等式 (31)

$n[q(j+1)-q(j)]<R^a[s(j-1)-s(j)]<R^a[q(j)-q(j-1)]$ がすべての $j\geq 1$ について（この場合厳密な不等号で）成立つから，(c) の結果を用いると，すべての $j\geq 1$ に対して

$$s(j-1)>s(j)$$

を直ちに得る．また，$s(\infty)=w(1-\lambda)<0$ となることはすでに見た．

この命題によって，ギフト動機が十分大きく，かつ $R>(1-p)n$ が成立する経済では，親が生きている主体は，タイプにかかわらず，親へのギフトはかならず正値をとる（親へのギフト動機が operative である）ことがあきらかになった（命題 3 (c)）．長命が長く続いてきた家系に生まれた主体ほど，大きいギフトを親に与えるが，それは自らの若年期の消費を削減し，貯蓄を縮小することによって可能になる．そして貯蓄の縮小は，自分の子供たちからのさらに大きなギフトによって十分に補填されないかぎり，老年期の消費を小さくする．こうして長命が長く続いた家系に生まれた主体ほど，若年期ならびに老年期の消費，貯蓄（資産保有）はいずれもが小さくなる．タイプ j が非常に大きい値をとる主体を考えると，消費はほとんどゼロ，貯蓄は負（年金市場からの負債）となる．年金市場からの負債は，主体が長命の場合には老年期に自分の子供たちからのギフトによって返済される（この主体が短命の場合には債務不履行になる）[5]．したがって，主体自身の生涯消費水準 $c_1(j)+c_2(j)/R^a$ は，長命が長く続いてきた家系に生まれた主体（j の値が高い主体）ほど低くなるという一見すると逆説的な結果を得るが，もちろん，効用で測った経済状態が悪化するという意味ではない．この主体の家系は長命が長く続いてきたという事実によって，この主体の期待効用 $EU^t(j)$ を構成する，自分の消費以外がかかわる部分，$\gamma U^{t-1}(j-1)$ が j の値が大きいほど，大きい値をとるからである．この点を別の角度から見てみよう．すでに (32) で見たように，各主体は $R^a, w, q(j+1)$ を所与として

$$c_1(j)+\frac{c_2(j)}{R^a}+q(j)=w+\frac{nq(j+1)}{R^a}$$

という予算制約に直面しているが，タイプ j の値の高い主体ほど，子供たちからのギフト $nq(j+1)$ が大きくなり，上の式の右辺で示される wealth の値は高くなる．したがって，見かけとは反対に，高いタイプの値を持つ主体ほど効用で測った経済状態は改善するのである．高いタイプの値を持つ主体が，低いタイプの値を持つ主体にくらべて，自らの若年期および老年期のより低い消費と親に対するより高いギフトを選択するとしても，そうすることが当該主体にとって最適な行動であり，逆の行動（より高い自らの消費とより低い親へのギフト）に比べてより高い効用をもたらすからにほかならない．

IV. 残された問題

前節では，経済（の定常状態）が仮定 4 を満たすとき，定常状態は命題 3 で示されるような特徴が見られることを明らかにした．すでに指摘したように，Diamond 経済が動学的に効率的で命題 2 の条件が満たされる経済，すなわち，$\gamma>\hat{R}>n$ が成立つ経済ではかならず仮定 4 は満たされるが，逆に命題 2 の条件は満たしても，Diamond 経済が動学的に非効率的な経済，たとえば，$n>\gamma>\hat{R}$ が成立つような経済では，仮定 4 は満たされないかもしれない．では，定常均衡が仮定 4 を満たさない場合，すなわち，$R\leq(1-p)n$ となる経済では，上の結果はどのように修正されるだろうか．本節ではこの問題を検討してみよう．

定常均衡が $\gamma>\hat{R}$ で，かつ $R\leq(1-p)n$ という条件を満たすとすれば，補題 4 を考慮すると，そうした定常状態における γ, R, $\hat{R}$, および $(1-p)n$ の間の関係は

5) R^a と R の差 $pR/(1-p)$ は主体が短命であった場合に生ずる債務不履行リスクに対するリスク・プレミアムである．若年期に年金市場から借り入れた主体は長命だった場合にはリスク・プレミアム分だけ市場利子率より高い利子率で返済することになる．

(i) $\gamma \geq (1-p)n > R > \hat{R}$, (ii) $(1-p)n > \gamma \geq R > \hat{R}$, (iii) $(1-p)n = R = \gamma > \hat{R}$, (iv) $(1-p)n \geq R > \gamma > \hat{R}$ のいずれかでなければならない．しかし，次の結果が示すように，定常状態が(i)あるいは(ii)を示すような可能性は存在しない．

補題７ (i) $\gamma \geq (1-p)n > R > \hat{R}$，あるいは(ii) $(1-p)n > \gamma \geq R > \hat{R}$ となる定常均衡は存在しない．

証明　補題５を証明したときと同じように，(i)，(ii)を満たす定常均衡が存在すると仮定すると，矛盾に導かれることを示そう．(i)，(ii)のいずれのケースも，補題４の前提を満たしているので補題５（c）が成立つ．したがって（29a)，(29b）においてそれぞれの不等式の最初の不等号はいずれも等号で成立ち，かつ $\gamma \geq R$ であるから，すべての $j \geq i$ について

$$\frac{u'[c_1(j)]}{u'[c_1(j-1)]} = \frac{u'[c_2(j)]}{u'[c_2(j-1)]} = \frac{\gamma}{R} \geq 1 \quad (39)$$

が成立つ．よって

$$n[q(j+1)-q(j)] \leq R^a[s(j-1)-s(j)] \leq R^a[q(j)-q(j-1)] \quad (40)$$

を得る．いま，$i = \min\{j > 1 : q(j) \leq q(j-1)\}$ としよう．$i = \infty$ ならば，(40）より $q(j+1) \leq q(j)$ が成り立ち，帰納法を用いると，すべての $j \geq i$ について $q(j+1) \leq q(j)$ が成立つ．すなわち，ギフト系列 $q(j)$ はすべての $j \geq i$ に対して単調減少である．ところが，$q(j)$ は下に有界であるから，ある非負値に収束する．このとき，(40）より貯蓄系列 $s(j)$ は $j \geq i$ において単調に増加し，ある有限値に収束する．しかしながら，(39）によって $c_1(j) = w - q(j) - s(j)$ と $c_2(j) = R^a s(j) + nq(j+1)$ はいずれも０に収束するか（$\gamma > R$ のとき），あるいはそれぞれある非負値 $c_1(\infty)$, $c_2(\infty)$ に収束するか（$\gamma = R$ のとき）のいずれかである．これらの事実を用いて，$q(j)$ の $j \to \infty$ のときの極限値を計算すると，$R < (1-p)n$（したがって $\lambda \equiv R/(1-p)n < 1$）に注意して，

$$lim_{j \to \infty}\, q(j) = \frac{R^a c_1(\infty) + c_2(\infty) - R^a w}{n - R^a} = \frac{c_1(\infty) + c_2(\infty)/R^a - w}{1/\lambda - 1} < 0$$

となって矛盾．よって，$i = \infty$ としよう．この場合は，$q(j) > q(j-1)$, $\forall j \geq 1$ が成立しなければならないが，(40）を用いると，

$$q(j) \leq \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda} q(1), \ \forall j \geq 1$$

を得る．すなわち，単調増加系列 $q(j)$ は，

$$q(j) \leq \frac{q(1)}{1-\lambda}$$

と上に有界であり，したがって $q(j)$ はある正の有限値に収束しなければならない．しかしながら，この事実は，$i < \infty$ の場合と同じ理由によって，矛盾に導かれる．

以上のように，$\gamma > \hat{R}$ というギフトが正値をとる条件を満たし，かつ $R \leq (1-p)n$ となる定常均衡が存在するとすれば，R, $\hat{R}$, γ, $(1-p)n$ の間の関係は，(iii) $(1-p)n = R = \gamma > \hat{R}$，あるいは(iv) $(1-p)n \geq R > \gamma > \hat{R}$ となるようなものでなければならない．このとき，定常状態がどのようなものになるか検討してみよう．

まず，(iii)のケースは，補題５の条件を満たすので，消費の分布が

$$c_1(j) = c_1, \quad c_2(j) = c_2, \ \forall j \geq 0 \quad (41)$$

となることは直ちにわかる．このとき（31）が等式で成立ち，かつ $\lambda = R^a/n = 1$ に注意すると，ギフトの分布は，

$$q(j+1) - q(j) = s(j-1) - s(j) = q(j) - q(j-1) \quad \forall j \geq 1$$

を満たさなければならない．$q(0) = 0$ に注意して，これを解くと

$$q(j) = jq(1) \qquad \forall j \geq 0 \quad (42)$$

を得る．このとき，貯蓄の分布は，もちろん，(20)より

$$s(j) = w - c_1 - jq(1) \qquad \forall j \geq 0 \quad (43)$$

で与えられる．したがって，

$$0 = q(0) < q(1) < \ldots < q(\infty) = \infty$$
$$s(0) > s(1) > \ldots > s(\infty) = -\infty$$

と，家系のタイプが進行するとともに，ギフトの値は増大し，無限大に発散するとともに，貯蓄は減少し，負の無限大に発散する．

一方，ケース(iv)においては，$\gamma/R<1$ を満たすので，(19) および (22) より

$$\frac{u'[c_1(j)]}{u'[c_1(j-l)]}\geq\frac{\gamma}{R}<1$$
$$\frac{u'[c_2(j)]}{u'[c_2(j-1)]}\geq\frac{\gamma}{R}<1$$

が成立つ．ただし，両不等式の最初の（弱い）不等号は，$q(j)>0$ のときいずれも等号で成立つ．いま，$h=\min\{j\geq 1:q(j)>0\}$ とおくと，補題6を証明したときとまったく同様に進めて，

$$q(j)>0\ ,\ \forall j\geq h$$

となることがわかる．したがって，上の2つの不等式(の最初の部分)は等式として成立つから，$c_1(j)$ および $c_2(j)$ は $j\geq h$ について単調に増加し，$j\to\infty$ のとき無限大に発散する．すなわち，ギフト分布が

$$0=q(0)=\ldots=q(h-1)<q(h)<\ldots<q(\infty)$$

となることはすでに補題6の証明において見たが，これに注意すると，消費および貯蓄の分布は

$$c_1(0)=\ldots=c_1(h-2)<c_1(h-1)<c_1(h)<\ldots<c_1(\infty)=\infty$$
$$c_2(0)=\ldots=c_2(h-2)<c_2(h-1)<c_2(h)<\ldots<c_2(\infty)=\infty$$
$$s(0)=\ldots=s(h-2)>s(h-1)>s(h)>\ldots>s(\infty)$$

となる．この事実から，$c_1(j)=\mathrm{w}-q(j)-s(j)$，$c_2(j)=R^as(j)+nq(j+1)$ はいずれも無限大に発散するので，$q(\infty)$ は無限大に発散し，$s(\infty)$ は負の無限大に発散することがわかる．

なお，消費・貯蓄系列（の前半部分）が上記のようになることについては，補題2を用いるのが手っ取り早い．まず，$q(0)=\ldots=q(h-1)=0<q(h)$ に注意すると，

$$c_1(j)=C(w,0,R^a)<C[w,nq(h),R^a]=c_1(h-1),\ j=0,\ldots,h-2$$
$$s(j)=S(w,0,R^a)>S[w,nq(h),R^a]=s(h-1),\ j=0,\ldots,h-2$$

を得る．また，$s(j)$ が $j=h-1,\ h,h+1,\ldots$ に対して上記のようになることについては，$q(h-1)<q(h)<\ldots<q(\infty)$ に注意すると，

$$s(j)=S[w-q(j),nq(j+1),R^a]$$
$$>S[w-q(j+1),nq(j+2),R^a]=s(j+1)$$

から直ちにわかる．また，$c_2(j)$ の前半部分については，$c_2(j)=R^as(j)+nq(j+1)$ および上の結果より $c_2(0)=\ldots=c_2(h-2)$ は明らかであるから，$c_2(h-2)<c_2(h-1)$ を示せばよい．いま，タイプ j 主体の生涯予算制約 (32) を

$$c_1(j)+c_2(j)/R^a=w+nq(j+1)/R^a-q(j)$$

と書くと，タイプ $(h-1)$ 主体の wealth（上の式の右辺）は $w+nq(h)/R^a$，タイプ $(h-2)$ 主体の wealth は w で，タイプ $(h-1)$ 主体のほうが $nq(h)/R^a$ だけ大きい．ところが，各主体の若年期消費と老年期消費に対する選好（効用関数）は同一で，しかも上級財であるから，利子率が同一のとき，両財の消費は wealth が大きいほど，大きくなる．よって求める結果が得られる．

命題3と比較すると，(iii)および(iv)のケースに特徴的なことは2つある．1つは，主体のタイプ（のインデックス）が大きくなると，親に対するギフトが拡大し，貯蓄が縮小することは命題3の結果と同じであるが，ギフトは正の無限大に，貯蓄は負の無限大に発散する点で異なる．2つは，タイプの値が大きくなるにつれて，(iv)のケースでは，消費は増大し，しかも限りなく大きくなることである（ただし，(iii)のケースで消費は一定）．すなわち，長命が続いてきた家系に生まれた主体ほど，自らのために大きな消費を行うとともに，親に対しても大きなギフトを与えるが，それを可能にするのは将来自分の子供たちから得られると期待されるさらに大きなギフトとそれを見越した年金市場からの大きな借り入れ（負の貯蓄）である．

なお，各主体の消費，ギフトあるいは貯蓄が $j\to\infty$ のとき発散することは，かならずしも資源制約あるいは market clearing と矛盾するわけではない．最後に，この点を少しコメントしておこう．いま，(iv)の下での $c_1(j)$，$c_2(j)$，$q(j)$，あるいは $s(j)$ 系列が定常均衡だとすると，これらが無限大（あるいは負の無限大）に発散しても，

$$C_i=\sum_{j=1}^{\infty}p(1-p)^j c_i(j),\quad i=1,2$$

$$Q=\sum_{j=0}^{\infty}p(1-p)^j q(j)$$

$$S=\sum_{j=1}^{\infty}p(1-p)^j s(j)$$

の右辺の無限級数は，それぞれ左辺の正の有限値 C_i, Q, S に収束し，market clearing 条件

$$C_1+(1-p)n^{-1}C_2+nk=f(k)$$
$$C_1+Q+S=w$$
$$S=nk$$

が成立つ．ただし，C_1 は（若年世代の）一人あたり若年期消費，C_2 は全員が長生きした場合の一人あたり老年期消費，Q は一人あたりギフト，そして S は一人あたり貯蓄である[6]．以上のことは，$j\to\infty$ のとき，$c_i(j)$ は無限大に発散しても，タイプ j 主体の若年世代全体（あるいは平均）の消費である $p(1-p)^j c_i(j)$ はゼロに収束する（ギフトおよび貯蓄系列も同様）ことを意味し，経済全体の予算制約（資源制約）あるいはmarket clearing 条件に反することにはならない．この点は(iii)のケースにおいては明らかである．(41) を用いると，1人あたりの若年期あるいは老年期消費は

$$C_i=\sum_{j=0}^{\infty}p(1-p)^j c_i(j)=c_i,\quad i=1,2$$

と，収束する．一人あたり貯蓄は一人あたりギフトが収束するならば収束することは (42) と (43) の関係から直ちにわかる．一人あたりギフト（無限級数）は

$$Q=\sum_{j=0}^{\infty}p(1-p)^j q(j)=\sum_{j=1}^{\infty}p(1-p)^j jq(1)$$
$$=p(1-p)q(1)\sum_{j=1}^{\infty}j(1-p)^{j-1}=\frac{1-p}{p}q(1)$$

と収束するので，一人あたり貯蓄も収束し，

$$S=w-c_1-\frac{1-p}{p}q(1)$$

として与えられる．

最後に，ギフト動機が operative である場合について，第 IV 節で検討した内容を第 III 節の分析（命題3に要約されている）と比較するために，一つの命題のかたちにまとめておこう．

命題 4　生存期間が不確実であるとき，完全な年金市場が存在する経済の定常状態は，$\gamma>\hat{R}$ が成立つとき，次のように特徴づけられる．すなわち，

(i)　$\gamma>(1-p)n\geq\hat{R}$，あるいは $\gamma>\hat{R}>(1-p)n$ のとき

(a)　$\gamma>R>(1-p)n\geq\hat{R}$，あるいは $\gamma>R>\hat{R}>(1-p)n$

(b)　$c_1(0)>c_1(1)>c_1(2)>\ldots>c_1(\infty)=0$
$c_2(0)>c_2(1)>c_2(2)>\ldots>c_2(\infty)=0$

(c)　$0=q(0)<q(1)<q(2)<\ldots<q(\infty)=\dfrac{w}{1-(1-p)n/R}$

(d)　$s(0)>s(1)>s(2)>\ldots>s(\infty)=\dfrac{w}{1-R/(1-p)n}<0$

(ii)　$(1-p)n=\gamma>\hat{R}$ のとき

(a)　$(1-p)n=R=\gamma>\hat{R}$

(b)　$c_1(j)=c_1, c_2(j)=c_2\quad j=0,1,2,\ldots$

(c)　$0=q(0)<q(1)<q(2)<\ldots<q(\infty)=\infty$

(d)　$s(0)>s(1)>s(2)>\ldots>s(\infty)=-\infty$

(iii)　$(1-p)n>\gamma>\hat{R}$ のとき

(a)　$(1-p)n\geq R=\gamma>\hat{R}$

(b)　$c_1(0)=\ldots=c_1(h-2)<c_1(h-1)<c_1(h)<\ldots<c_1(\infty)=\infty$
$c_2(0)=\ldots=c_2(h-2)<c_2(h-1)<c_2(h)<\ldots<c_2(\infty)=\infty$

(c)　$0=q(0)=\ldots=q(h-1)<q(h)<\ldots<q(\infty)=\infty$

(d)　$s(0)=\ldots=s(h-1)>s(h)>\ldots>s(\infty)=-\infty$

ただし，$h=\min\{j\geq1:q(j)>0\}$である．

すでに見たように，命題 4 の(i)の環境と(iii)の環境とでは，定常状態において成立する利子率

6) 各世代において，老年世代は若年世代の n^{-1} の割合しか存在せず，しかも老年期まで生き残るのは $1-p$ の割合しかいないから，第 1 式の左辺の第 2 項は若年世代 1 人あたりで測った（老年期まで生き残った）老年世代の消費を表わしている．第 2 式は予算制約 (20) を若年世代全体について集計した式であり，第 2 式の下では第 1 式と第 3 式は同値である．

と消費の分布パターンに大きな違いがある．前者の環境のもとでは，利子率は $\gamma>R>(1-p)n$ が成立し，各主体の消費（若年期ならびに老年期）は長命が連続して続いた家系に生まれた主体（高い j の値を持つ主体）ほど低くなるのに対し，後者の環境においては，利子率は $(1-p)n \geq R>\gamma>\hat{R}$ が成立し，高い j の値を持つ主体ほど消費は高くなる．すでに述べたように，いずれの場合も高い j の値を持つ主体ほど，経済厚生は高くなるが，消費のパターンにこのような違いが出る背景を少し別な角度から考えてみよう．

いま，各主体の生涯予算制約を表わす（32）式を

$$c_1(j)+\frac{c_2(j)}{R^a}=w+\frac{1}{R^a}\left[\frac{nq(j+1)}{q(j)}-R^a\right]q(j) \tag{44}$$

と書き換えよう．$nq(j+1)/q(j)$ がタイプ j 主体にとってのギフトの「粗収益率」を意味することに注意すると，右辺の第2項は，ギフトの「超過収益」(ギフトの粗収益が，ギフトを親に与える代わりに年金市場で運用するとしたときに得られる粗収益を超える部分）の（若年期で見た）現在価値を表わしている．この式より，各主体の生涯消費水準（の現在価値）が賃金所得より大きくなるのは，ギフトの収益率が年金の収益率より大きい（ギフトの超過収益が正である）とき，また生涯消費水準が j の値が大きいほど高くなるのは，ギフトの超過収益が j の値とともに大きくなるとき，かつそのときにかぎることがわかる．すでに見たように，高い j の値を持つ主体ほど，親に対して大きなギフトを与えるから，$q(j+1)/q(j)>1$ が成立つ．したがって，$R^a \leq n$，すなわち，$R \leq (1-p)n$ ならば，ギフトの収益率のほうが年金市場の収益率よりも高く，したがって，ギフトの超過収益は正であり，生涯消費は賃金所得を超えることになる．さらに $\gamma<R \leq (1-p)n$ ならば，ギフトの超過収益は高い j の値を持つ主体ほど高くなる．逆に，$R^a>n$，すなわち，$R>(1-p)n$ の場合には，j が十分大きい値をとるとき，(34) によって $q(j+1)/q(j)$ は R^a/n よりも小さい値をとるので，ギフトの超過収益は負，しかも負の程度は j の値とともに拡大し，消費水準は j の値が大きくなるにつれて0に向かって低下することになる．臨界的なケース，すなわち，$\gamma=R=(1-p)n$ の場合には，(42) を (44) の右辺に代入し，$R^a=R/(1-p)=n$ に注意すると，(44) 式は

$$c_1(j)+c_2(j)/n=w+q(1)$$

となる．ギフトの超過収益は主体のタイプには依存せず，つねに $q(1)$ に等しく，生涯消費水準もタイプにかかわらず一定である．この事実はすでに求めた消費についての結果—命題5 (iib) あるいは (41) —と一致する．消費がタイプにかかわらず一定値をとるのはこの特殊の場合だけである[7]．

V. 結論

本稿を結ぶにあたって，上で強調してきたことを繰り返しておきたい．この経済には，親が短命である主体と親が長命である主体の，2つのタイプの主体しか存在しないように見えるかもしれないが，そうではない．命題4が示すように，親の代まで連続してどのくらい長命が続いてきたかによって各主体の「状態」，あるいは消費者行動（消費，ギフト，貯蓄）は異なるからである．親が短命である主体と親が長命である主体の間には効用関数に違いがあるので，消費者行動に違いがあっても驚くにはあたらない．しかし，主体の親が長命であり，したがって効用関数が同じであっても，親の代までどのくらい長命が続いてきたかによって，主体の行動が異なるのはなぜだろうか．各主体は，自分の生涯効用を最大化するため，自分の若年期の

7) $p>0$ の場合についてである．$p=0$（第II節の経済）の場合は，そもそもタイプは存在せず，(44) において $R^a=R$，$q(j)=(j+1)=q$ とおくと，ギフトの超過収益が正となるのは，$n>R$ のとき，かつそのときにかぎることがわかる．

消費の限界効用と親の老年期の消費の（割引された）限界効用を等しくするように自らの消費と親へのギフトの配分を決定する．各主体による親へのギフトは，親の老年期の資産所得（親が自分の若年期に行った貯蓄の元利合計）が大きいほど，小さくなる．では，親の貯蓄の違いを決定するのは何だろうか．これを見るために，主体の親の代までの長命が1代しか続いていない場合（親の親は短命，すなわち，親のタイプは0，当該主体のタイプは1の場合）と主体の親まで2代連続して長命の場合（すなわち，親のタイプは1，当該主体のタイプは2）の場合を比較してみよう．前者の場合は，親が親の親へ与えるギフトはゼロ，したがって親の賃金所得は自分の若年期消費を除いてすべて自分の老後のために貯蓄されるのに対し，後者の場合は，親の親が長命なので，親の貯蓄は，（消費が前者の親と同じなら）親の親に与えるギフトの分だけ前者の親よりも小さくなる．このように，家系において親の代まで連続して長命が続く家系に生まれた主体ほど（すなわち，タイプ j の値が大きい主体ほど），親の貯蓄は小さく，それだけ親に与えるギフトを大きくする誘因が存在することになる．

このように，親に対してギフト動機を持ち，生存期間に不確実性がある主体からなる経済では，各主体が利己的で，生存期間に不確実性を持つ Abel (1985) あるいは Eckstein et al (1985) の経済とは異なって，完備した年金市場が存在しても，各主体の消費あるいはギフト行動は家系のヒストリーに依存するのである．

参考文献

Abel, Andrew B. "Precautinary Saving and Accidental Bequests." *American Economic Review*, September 1985, 4, 75(4), 777-91.

______________, "Operative Gift and Bequest Motives." *American Economic Review*, December 1987, 75(4), 1037-47.

Barro, Robert J. "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy*, November/December 1974, 82, 1095-1117.

_______and Friedman, James W. "On Uncertain Lifetimes." *Journal of Political Economy*, August 1977, 85(4), 843-49.

Boldrin, Michele and Jones, Larry E. "Mortality, Fertility, and Saving in a Malthusian Economy." *Review of Economic Dynamics* 2002, 5, 775-814.

__________, De Nardi, Mariacristina, and Jones, Larry E. "Fertility and Social Security." Working Paper 11146, Feburuary 2005, National Burea of Economic Research

de la Croix, David, and Michel, Philippe, *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge UK: Cambridge University Press, 2002

Diamond, Peter D. "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review*, December 1965, 55, 1126-50.

Ekstein, Zvi; Eichenbaum, Martin S, and Peled Dan. " The Distribution of Wealth and Welfare in the Presence of Incomplete Annuity Markets." *Quarterly Journal of Economics*, August 1985, 789-806.

_________,_________, and________. "Uncertain Lifetimes and the Welfare Enhancing Properties of Annuity Markets and Social Welfare." *Journal of Public Economics*, 1985, 26, 303-26.

Hakansson, Nils H. "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk, and an Uncertain Lifetime, and Insurance." *International Economic Review*, October 1969, 10(3), 443-66.

Hansson, Ingemar and Stuart, Charles. "Social Security as Trading among Living Generations." *American Economic Review*, December 1989, 79(5), 1182-95.

Koda, Keiichi, "Uncertain Gifts and Risk Sharing" Manuscript, Yokohama National University, January 2008.

Laitner, John. "Bequests, Gifts, and Social Security." *Review of Economic Studies*, April 1988, 55(2), 275-99.

Nishimura, Kazuo and Zhang, Junsen. "Pay-As-You-Go Pensions with Endogenous Fertility." *Journal of Public Economics*, 1992, 48, 239-258.

__________, and _________, "The Old-Age Hypothesis Revisited." *Journal of Development Economics*, 1993, 41, 191-202

O' Connel, Stephen A. and Zeldes, Stephen P. "Dynamic Efficiency in the Gifts Economy." *Journal of Monetary Economics*, 1993, 31, 363-79.

Sheshinski, Eytan and Weiss, Yoram. "Uncertain Lifetime and Optimal Social Security Systems." *Quarterly Journal of Economics*, May 1981, 96, 189-206.

Weil, Philippe. "Love Thy Children: Reflections on the Barro Debt Neutrality Theorem." *Journal of Monetary Economics*, 1987, 19, 377-91.

Yaari, Menachem E. "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of Consumer." *Review of Economic Studies*, April 1965. 32, 137-50.

藤生裕.「後方利他性の研究―世代間所得移転と成長経路を特徴付けて」博士請求論文，横浜国立大学大学院国際開発研究科 1999 年 3 月

(國府田桂一　横浜国立大学大学院国際社会科学研究科教授)

(劉慶彬　横浜国立大学大学院国際社会科学研究科)