中・高等学校数学科における図形についての美しさを感得する教材開発

前田正男*，池田敏和*，藤原大樹**，鈴木誠***，橋本吉貴****，小山直人*****，
石谷優行******，小原美枝*******，馬場裕*，橋本吉彦*

Ⅰ．はじめに

中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会（第43回（第3期第29回））議事録の「算数・数学科の現状と課題、改善の方向性（検討素案）」で、次のように7つの改善の方向性が示された。①目標・内容について、②基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着、③数学的な思考力・表現力の育成、④数量や図形についての豊かな感覚の育成、⑤算数的活動・数学的活動の充実、⑥統計に関わる内容の指導の充実、⑦高等学校数学の科目構成

そして、上記の④に関連して、科学研究費補助金基盤研究（C）「図形についての豊かな感覚・美しさを感得させる指導」（研究代表者：前田正男 20500749）が、平成20年度より3年間に渡って実施されることになった。ここでは、次の3つの目的が設定された。

（１） 図形についての豊かな感覚・美しさとは何かを具体的に明らかにすること。

（２） （１）を基に、児童・生徒に図形についての豊かな感覚・美しさを感得させるにはどうしたらよいかを考えること。

（３） 実際の授業にのせることによって、児童・生徒が図形についての豊かな感覚・美しさを感得したかどうかを実証すること。

対象とする児童・生徒は、小学校第1学年から高等学校第1学年までの10学年とする。高等学校第1学年までとした訳は、図形と計量（三角比）、平面幾何までを範囲に入れた図形を考察することによって学校数学（小学校算数、中学校数学、高等学校数学）の図形領域を俯瞰することができると考えたからである。

本研究は、上記目的の（１）に関するもので、図形についての美しさに焦点を当て、中・高等学校数学科において、それを意図した教材を開発することを目的としている。図形の美しさについては、既に小学校段階に焦点を当てた教材開発のところで述べたので、ここでは、その類型だけを掲載する。

（美しさ１）図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

（美しさ２）複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ３）図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる情意的充実感

（美しさ４）図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

---

*横浜国立大学、**横浜国立大学附属横浜中学校，***東京学芸大学附属世田谷中学校，****鎌倉女子大学，*****鎌倉女子大学中等部・高等部，******神奈川県立横浜平沼高等学校，*******神奈川県立百合丘高等学校

（美しさ５）抽象的な数式の関係を、図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感

中・高等学校数学科において開発された教材を順に述べる。

Ⅱ．事例１

1. タイトル

シェルピンスキー四面体で数学的な美しさを味わおう！

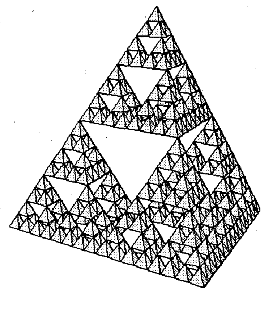


図１　シェルピンスキー四面体

2. 教材の位置づけ

（1）学年　　　中学校１年生

（2）関連単元　　空間図形（特に投影図）

3. 図形の美しさと教材との関連

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

（美しさ１）図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

（美しさ２）図形の操作等を行う中で引き出された，有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

（美しさ３）図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した知恵に感銘できる情意的充実感

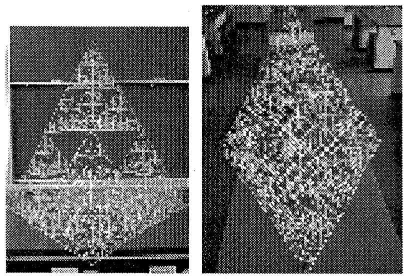


図２　穴が埋め尽くされる（生徒作品）

シェルピンスキー四面体とは，有名なフラクタル図形，シェルピンスキー・ガスケットの立体版である（図 1）．正四面体から中の正八面体をくり貫いて１辺が半分の正四面体４つになり，また各正四面体から正八面体をくり貫いて１辺が半分の正四面体が全部で 16 個になる．これを n 回繰り返していくと n 重になり，一辺が$(1/2)^n$の長さの正四面体が 4^n 個できることになる．4 つで 1 つというパターンが繰り返される構造がとてもユニークで美しい．

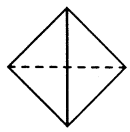


図３　正四面体

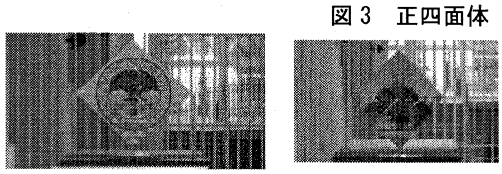


図４　オブジェの表側と裏側

（立木氏ホームページより）

また，シェルピンスキー四面体は大小の隙間だらけの立体であるが，最長辺の中点における垂直方向から見ると，隙間が全くないひし形に見える（図 2）．これを平行投影と考えると，遠近感による歪みがなくなって隙間のない正方形になることが，図 3 から想像できるだろう．シェルピンスキー四面体のこの性質が，実は社会で大いに活用されている．

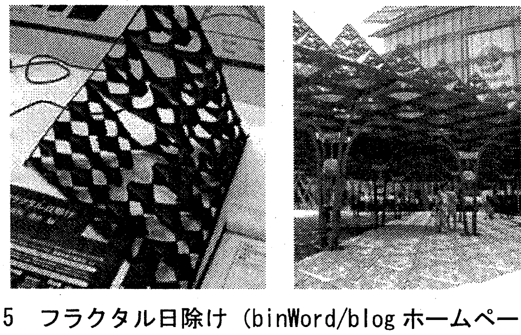


図５　フラクタル日除け（binWord/blog ホームページ，日本未来科学館ホームページより）

≪シェルピンスキー四面体の活用例≫

①「フラクタル・ユニバーシティーKYOTO」

立木秀樹氏（京都大学大学院人間・環境

学研究科）が作成したオブジェ「フラクタル・ユニバーシティーKYOTO」で，京都大学総合博物館のロビーに展示されている．シェルピンスキー四面体の最小面にそれぞれ写真の一部分が貼られており，一見すると穴だらけで何の写真かわからない．しかし，ある方向から見ると京都大学のロゴや時計台の写真（図 4）が表れる．

②「シェルピンスキーの森」

風通しが良くて日光を遮ることから，ヒート・アイランド現象の解消に向けた「フラクタル日除け」である．京都大学人間・環境学研究科の「みんなの科学プロジェクト」と積水化学工業とで，実用化に向けて研究・開発されている．2008 年 8 月の京都の新風館に続き，2009 年 6 月～8 月には東京お台場の日本科学未来館（毛利衛館長）で公開実験展示が行われ，話題を呼んだ．

筆者は授業で，爪楊枝をグルーガン（過熱式接着剤）でくっつけて大きなシェルピンスキー四面体を生徒に作らせようと考えた（第 1 時）．その後で，n 重のシェルピンスキー四面体の爪楊枝の本数や最小正四面体の個数などを一般化する授業（第 2 時），さらには，上記①と②の活用例をパワーポイントを用いて紹介するとともに，実際にフラクタル日除けの模型を，爪楊枝模型に紙を貼って作る授業（第 3・4 時）を構想した（藤原，2008）．

4．授業の概要

第 1 時の爪楊枝による模型作りでは，全員が作業に熱中し，指数関数的にどんどん大きくなる様子に感激していた．図 2 は 4 クラス分の模型をさらに組み合わせたものである．

第 2 時の数量の一般化の授業では，模型をよく観察することでフラクタル構造を理解し，これを計算に生かし，文字を用いて累乗の指数を表す一般化を初めて成功させた．

第 3 時・第 4 時では，暗室でプロジェクターを使った立体模型投影から始め，正四面体とシェルピンスキー四面体の平行投影が共に隙間のない正方形になることを理解させた．生徒は予想外で驚きの様子であった．次に筆者によるプレゼンから，シェルピンスキー四面体という名称，美術・環境への活用場面について紹介した．活用させた研究者の知恵に，まさに感動といった様子であった．続いて，実際に手のひら大の爪楊枝模型に紙の面を貼り，日除けの模型を作った．どこに貼れば面の枚数が少なくて（低コスト），風通しがよく，隙間のない正方形（日光を遮断）になるかを考え，試行錯誤で完成させた（図 6）．

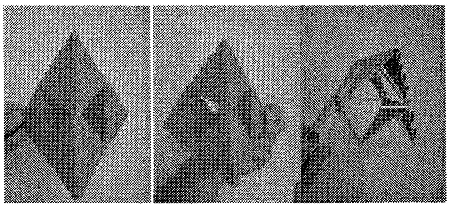


図 6　生徒が作った日除け模型

一連の授業を終えて，質問紙をとったところ，5 つの美しさのうち，Ⅰは 96%，Ⅱは 94%，Ⅲは 87%，ⅣとⅤは 100%の生徒が実感できたという結果となった．対象人数が 16 人とかなり少ないが，それを鑑みても，「図形の美しさ」という点でかなりの効果があったと評価できる．

Ⅲ．事例 2

1．タイトル

どんな四角形ができるかな？

2．教材の位置づけ

(1) 対象学年　中学校２年

(2) 関連単元　三角形と四角形（平行四辺形になるための条件の導入場面）

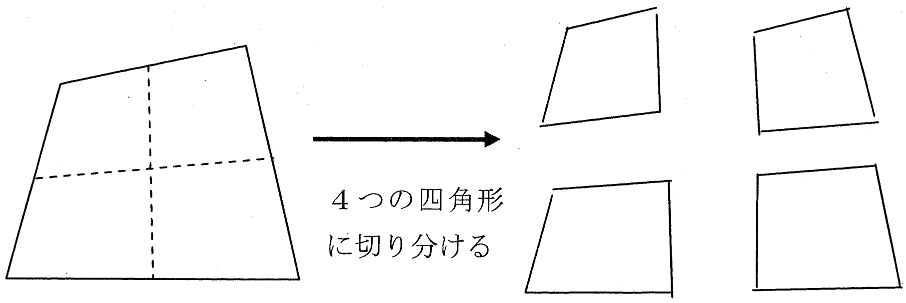
３．図形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

（美しさ２）複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

【課題】

四角形の２組の対辺の中点を結び、その線に沿って４つの四角形に切り分けます。
この４つの四角形を組み合わせてできる四角形はどんな四角形になりますか。



この課題では、最初につくる凸四角形がどのような形でも、それを課題に示したように４つに切り分け、組み合わせると出来上がる四角形が平行四辺形になるところに不思議さがある。生徒たちは、四角形の形によらず、平行四辺形となることに驚きを覚え、それが数学的に考察していこうとする原動力になっていく。この課題に取り組むことを通して、対角が等しい四角形は平行四辺形になることを発見し、図形には一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じるひとつの機会となる。

４．教材の特徴

(1)　この教材を扱う意義

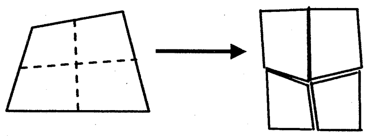
①　証明の必要性や意義を感じさせる

証明の指導で大切なことのひとつは、証明の必要性や意義をどのようにして生徒たちに感じさせるかにある。平行四辺形になる条件を学習する前には、平行四辺形の性質を学習しており、なぜ性質の逆、すなわち平行四辺形になるための条件を考える必要があるのかを感じさせることが重要となる。本事例ではまず適当な四角形（凸四角形）を描き、その四角形を２組の対辺の中点を結ぶ線で切り分け４つの四角形をつくり、その四角形を組合せて新しい四角形をつくる作業を行う。この作業からつくられる四角形は、はじめの四角形の形によらず平行四辺形であるように見え、このことに不思議さを感じる。そしてこの不思議さが、できあがった四角形は平行四辺形といっていいのか、またはじめの四角形がどんな四角形でも同じようにして組合せると平行四辺形になるのかということへとつながっていき、証明の必要性や意義を実感することになると考える。

②　性質と条件を区別させる

二等辺三角形の底角の性質とその逆や平行四辺形の性質とその逆など、性質とその性質の逆を同じことと考えてしまう誤りがしばしば見られる。このような誤りに対しては、仮定が何で結論が何かをしっかりと把握させることが指導上大切なことのひとつである。本事例では、切り分けてできた４つの四角形を組合せて新しい四角形をつくるとどの四角形も平行四辺形になりそうではあるが、なぜ平行四辺形といえるのかは生徒たちにすぐには分からない。そこで、新しくできた四角形の角について成り立つ性質を観察させ、その中で対角が等しくなっているということに気づかせる。そうすることで対角が等しい四角形ならば平行四辺形になるのかという問題意識を持たせることができ、対角が等しいということが新しくできた四角形において成り立っている事柄、すなわち仮定であることや、結論が新しくできた四角形が平行四辺形であることが意識化される。このようなことを通して、「平行四辺形の対角は等しい」という性質と、その逆「対角の等しい四角形は平行四辺形である」という平行四辺形になる条件が区別してとらえられるものと考える。

(2)　展開

指導内容	主な発問と学習活動
ひとつの四角形を切り分け４つの四角形をつくる。 （課題把握）	Ｔ：凸四角形をひとつ描き、４辺の中点に印をつけましょう。 Ｓ：どんな四角形でもいいですか。 Ｔ：対辺の中点どうしを結ぶ線を描き、その線で四角形を切り分け４つの四角形をつくりましょう。
４つの四角形を組合せて別の四角形をつくり、それがどのような四角形になりそうか予想する。	Ｔ：新しくできた４つの四角形を組合せて四角形をつくることはできますか。 Ｓ１：同じ四角形をつくるの。　Ｓ２：どんな四角形でもいいですか。 Ｔ：４つの四角形を組合せて新しい四角形をつくりましょう。  Ｔ：できあがった四角形はどんな四角形だと言えそうですか。 Ｓ１：正方形、Ｓ２：長方形、Ｓ３ひし形、Ｓ４：平行四辺形 根拠をもって口頭で説明する。
予想を確かめる。	Ｔ：できあがった四角形が正方形だと言えるのはなぜですか。 Ｓ１：全ての辺が等しく、すべての角が 90°だから正方形。 Ｓ２：全ての辺が等しいから。
筋道立てて説明する活動	Ｔ：できあがった四角形が平行四辺形だと言えるのはなぜですか。 Ｓ１：２組の対辺が平行だから。Ｓ２：２組の対角が等しいから

学習した内容をまとめる。	T：できあがった四角形の対角や対辺の大きさについて分かることはありませんか。 S１：大きさが同じ、S２：わからない T：２組の対角が等しい四角形はいつでも平行四辺形と言えるのか理由を考えましょう。 T：２組の対角が等しい四角形が平行四辺形になる理由を自分なりにノートにまとめておきましょう。

Ⅳ．事例３

１．タイトル

折り紙を用いた「角の三等分」の作図問題について

２．教材の位置づけ

学年と関連単元　中学校第１学年「平面図形」と第２学年「合同な図形」

３．図形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

（美しさ４）図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

（１）折り紙を折るという操作との関連

折り紙を折ることによって、垂直などの様々な跡を紙に残すことができる。

図８のように辺ＥＦを折り目として折ると、ＥＦ⊥ＢＢ’，∠ＢＦＨ＝∠B’ＦＨ，さらに辺ＢＦ＝辺B’Ｆとなる（図８）。すなわち、折り紙を折る活動には、①角の二等分や同じ長さの辺が作れる、②垂直二等分線が作れる、という２つの数学的な意味がある。

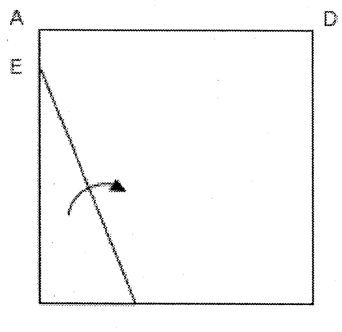


図７

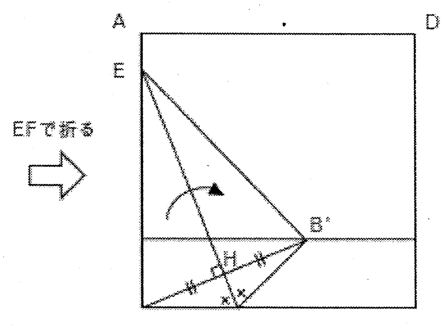


図８

三等分の操作を終えたあとの学生の質問紙調査では「道具を使っても難しいことなのに角の三等分を作る折り方があるのは画期的だと思った」、「折り目をつけるだけで三等分ができるので、定規を使うよりも作業しやすく正確にできる方法だと思った」という感想が見られた。これらの記述から、折り紙を使った角の三等分の操作は予想外のことで、道具を使わなくても作図が正確にできることに学生は感銘できたと考えられる。

（2）図形の合同との関連

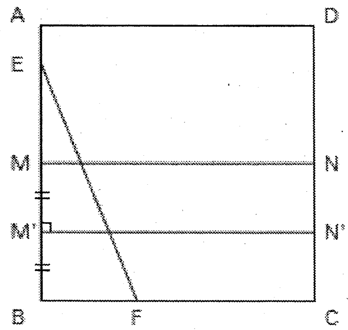


図 9

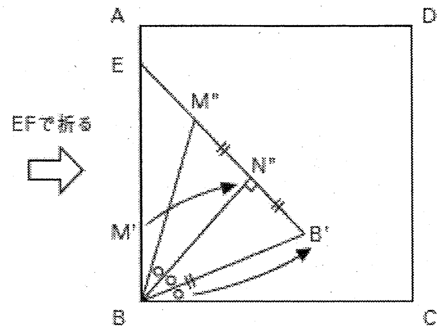


図 10

図 10 のように、△M”B N”≡△B’B N”から∠M”B N”＝∠B’B N”を証明する。

学生の質問紙調査では「小学生のうちから難しい証明の問題を折り紙を使った親しみやすいもので行い、触れていくことで小学校から中学校へ段階を追ったスパイラル学習をすることができると思う」、「証明や数学への苦手意識を生まないために、折り紙を使用して取り組むのは重要だと思った」という感想が見られた。これらの記述から、折り紙を使った作業的・体験的な活動は算数・数学の授業において具体から抽象への橋渡しをする意味で有意味な活動で、子どもの興味・関心を引きつけることができる活動だといえる。

4．授業の概要

（1）教材の特徴

定規とコンパスだけを用いて作図が可能な問題として、垂直二等分線の作図や角の二等分線の作図などがある。角の二等分ができるということは、角の 2^n 等分が可能だということである。しかし、角の三等分については不可能である。

吉田・赤（1954）は次のように述べている。

> 古来、次の三つの作図問題は‘三大難問’といわれて喧伝されてきた。①立方倍積問題…与えられた立方体の二倍の体積をもつ立方体を作ること。②円積問題…円と面積の等しい正方形を作ること。③角の三等分問題…角を三等分する一般的方法を見出すこと。これらは、平行線問題や五次方程式の解法の問題と同じく、ついに最後まで解けず、十九世紀にその不可能であることの証明が得られたものである。

今回は③の角の三等分問題について、学生が折り紙を使った作業的・体験的な活動を通して図形のもつ美しさを味わうとともに、筆者は角の三等分の過程を追うことによって、カリキュラムの中での位置づけを考えることである。

（2）授業実践の意図

本授業実践の意図は、以下の２点である。

① 角の三等分問題について、折り紙を用いれば可能であることを学生が体験し、作業的・体験的な数学的活動を通して有意味で予想外の着想に感銘すること。

② カリキュラムの中での位置づけについて考察すること。

上記の目的を達成させるために、以下の方法で研究を進める。

① 角の三等分問題を、折り紙を用いて作業的・体験的な数学的活動を通して理解させ、質問紙調査の内容から、有意味で予想外の着想に感銘できたかどうかを考察する。

② 角の三等分の作図の過程を追うことによって、小学校算数科や中学校数学科における、どの単元に位置づけられるのかを考察する。

（３）考察

(2)の①については、「３．図形の美しさと教材との関連性」で述べた通りである。質問紙調査の結果から、概ね本研究のねらいは達成されたといえる。

②については、第一に、小・中学校ともに作業的・体験的な算数的活動あるいは数学的活動を取り入れた実践例として価値のある題材である。第二に、定規とコンパスを用いた作図は、現行の教育課程では中学校第１学年の単元「平面図形」で扱われている。角の二等分の作図を行う活動があるので、その発展として位置づけることができる。また、証明の過程で三角形の合同が登場する。現行では中学校第２学年での「合同な図形」、新教育課程では小学校第５学年と中学校第２学年に位置づけられる。

なお、折り紙を用いた角の三等分の方法及びその証明については、紙幅の都合で割愛したので、例えば、「折り紙の数学」（ゲレトシュレーガー，2002)，「オイラー先生のおもしろ図形問題集」（細水編，2008）を参照していただきたい。

Ｖ．事例４

１．タイトル

重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の導入学習

― 実験・観察を取り入れた「数学的活動」による一般化 ―

２．教材の位置づけ

（１）学　　年　　高等学校 第１学年

（２）関連単元　　数学Ａ 平面図形「三角形の性質」

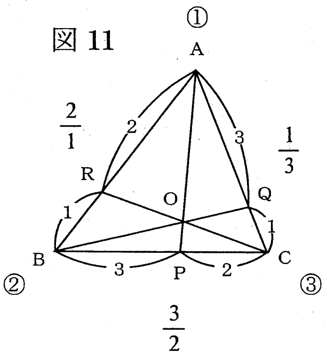
３．教材の特徴と授業の概要

高等学校で数学的活動を取り入れながら、図形に対する豊かな感覚や美しさを感得させることを目的として、数学Ａで取り扱う「チェバ・メネラウスの定理」（今井，1998）を題材とした授業のあり方について検討し、平成 21 年１月 26 日に高校１年生 27 名を対象に、実践授業を行った（小山，2002)。特に導入のあり方として、具体物を用いた操作活動や実験・観察の場面を取り入れ、それらの結果から帰納的に図形の性質を一般化させる方法で、授業を展開した。それによって、生徒自らが試行錯誤しながら、活動の楽しさを実感できるようにするのがねらいである。また特に、チェバ・メネラウスの定理の場合は、三角形の３辺の比の値の積が常に一定値（＝1）になることから、その整然とされた美しさを実感できるように工夫しながら、授業を展開した。最初に４人１組の班から構成された７つのグループをつくり、スチロールボードでつくられた３角形の模型を与え、水平につり合うように各頂点に適切な数のおもりをつり下げる作業を行った。(各班に与えられた三角形は、３辺の内分比が全て異なっており、つり合うために必要なおもりの数は、班ごとに全て異

なっている。)

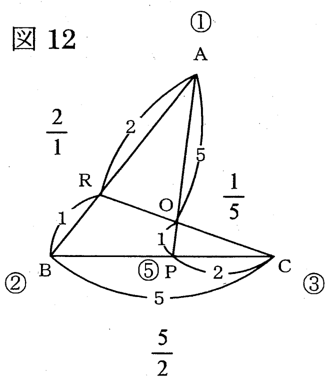
その後、各頂点のおもりの数と内分比・外分比が逆の関係になっていることを実験結果から導き出し、3辺の比の値の積が、各班で内分比が異なっても、必ず1になることを確かめさせた(図 11, 図 12)。

図 11



$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$$

図 12



$$\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}=1$$

三角形の各辺の分数は、内分比または外分比の値を表し、各頂点の ①, ②, … は、その頂点の位置における、三角形が水平につり合う状態でのおもりの数を表している。

最後に、図形に対する考察の結果を一般化するために、帰納的な考え方と演繹的な考え方の違いについて説明を行い、証明を行うことの必要性や価値に関する指導を行った。

4．形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

(美しさ2) 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの中に共通的または一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

(美しさ3) 図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用できる知恵に感銘できる情意的充実感

(美しさ4) 図形の操作等を行う過程で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

(美しさ2) に関しては、今回の実践授業の過程で、7つのグループがそれぞれの三角形の内分比・外分比の値について考察した結果、どれも必ず1になることへの驚きと、そのような性質をもっている図形そのものに対する美しさを感じとれる情意的充実感が挙げられる。また、(美しさ3) については、三角形が水平につり合うために、3つの頂点の重さの割合を、内分比と逆の関係になるようにつり下げればよいとする考えや知恵に対する感銘の心を表している。さらに (美しさ4) については、全てのグループが、三角形の内分比・外分比の値の積が必ず1になることに対する、有意味で予想外の着想に対する感銘の心を表している。このように、図形の美しさに関する観点の枠組みやとらえ方が変化することにより、さまざまな指導事例との関連や可能性が生まれることがわかる。実際、授業終了後の生徒の感想の中に、「三角形の内分比・外分比と、おもりの数が逆の比の関係に

なっていることに一番驚き、印象に残った。」というものが多く、活動を通して定理を発見する過程が、生徒の情意的側面に大きく影響を及ぼしていることがわかる。特に図形の美しさを、「畏敬の念を感じとれる情意的充実感」や「知恵や発想に感銘できる情意的充実感」という枠組みでとらえたとき、今回のような発見的学習が非常に有効であることがわかる。これと関連して、松尾（1999）は、「算数や数学の美しさを感得するとは、算数・数学の事実や考え方についての対象性やバランス、統一性などを見出し、それらに価値を認めることでもあると言える。また、算数・数学に特有な思考過程が簡潔、明瞭、的確であることを知り、それらに価値を認めることでもある」と述べている。このような視点を実際の指導場面に活かすことにより、数学学習に対する情意的側面を育て、生徒の数学そのものに対する興味・関心を今後より一層高めていきたいと考えている。また、今回の指導場面の中に、「三角形の３つの頂点のうち、２つのおもりの数が等しいときは、その両端を頂点とする辺の内分比も等しくなる。」と予想する生徒が現れたが、これは現実の物理的現象と、図形的性質を結びつけて考えようとする感覚があったことを意味している。このように、数学的活動を行う過程において、生徒が発した小さなつぶやきや意見を注意深く取り上げ、必要ならばそれを全体で共有し、子どもたちの図形に対する見方や考え方、感覚を豊かに育てていくことが重要であろう。

Ⅵ．事例５

１．タイトル

重心　その面白さ　美しさ

～テクノロジーを用いた四角形の重心の考察を通して～

２．教材の位置付け

(1)学年　　高等学校１年生

(2)関連単元　数学Ａ　平面図形「三角形の性質(三角形の重心)」

３．図形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

（美しさ２）複数の図形を数学的に考察することにより、それらの中に共通的または一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ４）図形の操作等を行う過程で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

数学の持つ不思議なことや現象は，幾何の分野に限らず多くある．しかし，とりわけ，幾何に関しては「ああ美しい！」と感じるものが多いのではないだろうか．コンピュータ等テクノロジーを用いた場合，不思議な現象を，知らずのうちに自ら操作することがある．そしてそこから，「なぜ」が生まれ，「確かめ」，そして理論的に考察していくといった「帰納」から「演繹」へという思考を今後も推進していきたいと考える．

４．授業の概要

三角形の重心から四角形の重心へ

まず，三角形の重心に関して確認した．ここでカブリの操作に関しての基本的な事項を

おさえた（図 13）．そして発展的な内容ということで，四角形の重心を考えさせてみた．もちろん，まだ一般的な凸四角形である（図 14）．

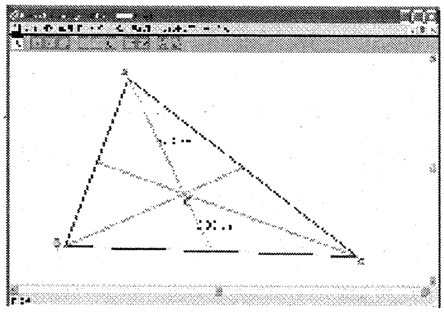


図 13「Cabri」による基本事項確認

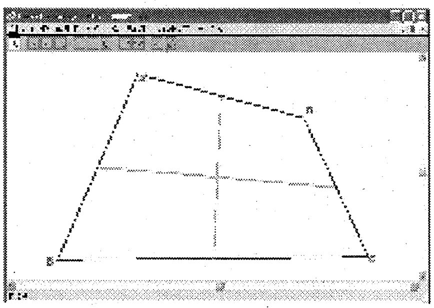


図 14　単純に中点を結んでみる．

そこで，三角形の重心で使った中点から生徒たちがまず示したのは図 14 である．しかし，それが四角形の重心にはあたらないことが，点を動かすことによって明確になってゆく．例えば，図 15 のように，点Ｃを点Ｄに限りなく近づけてみる．すると，交点は，三角形ＡＢＤ(C)の重心とは言えないことがはっきりする．しかしここで，三角形の中点をたどっていくことで，三角形の重心に限りなく近づいていくことを，示す生徒が出てきた．それが図 17 である．

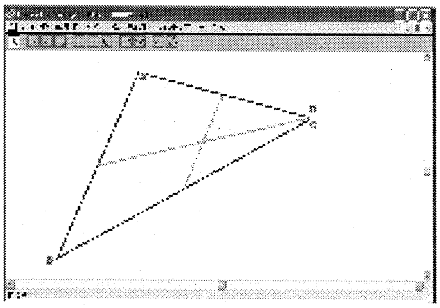


図 15.

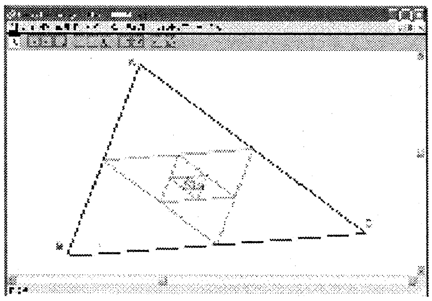


図 16.　中点を次々にとっていく

そして，確認のため中線をひいてみた．すると，これは，三角形ＡＢＣの重心に限りなく近づいて行っている様子がうかがえる．それが図 16 である．

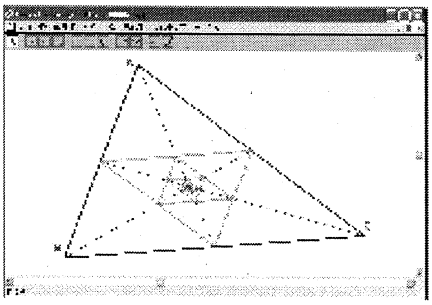


図 17. 中線をひいてみた

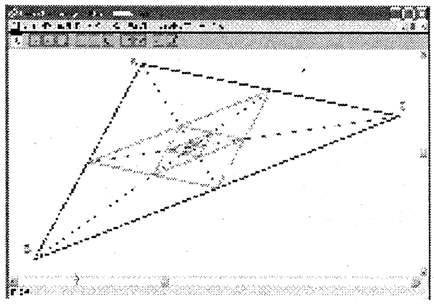


図 18.　図 17 の点Ｃを上にあげてみる

いま，図 18 では，点Cの移動のみの図であるが，実際には，点Aや点Bも移動させている．このように，具体的に点を移動させて確かめることができるコンピュータ操作は，非常に有意義なことである．

それでは，これを四角形に応用できないかと，その生徒は考えた．

そして，四角形の中点を結んでみた．それが図 19 である．するとこれだけで，平行四辺形が作られることに気づく．いや，最初は「平行四辺形らしい」であろう．この問題は，よく見かけるものである．任意の四角形の中点を結ぶと平行四辺形ができるというものである。しかし，それを意識しないで出会うという現象がここで起こったことになる．

もちろん，４つの点をつまんで動かしてみる．やはり，「平行四辺形らしい」という感覚が残る．そこで，４つの辺の長さを表示させてみる．もちろん，辺の長さを表示したまま，４つの点をいろいろ動かしてみる．(図 20)

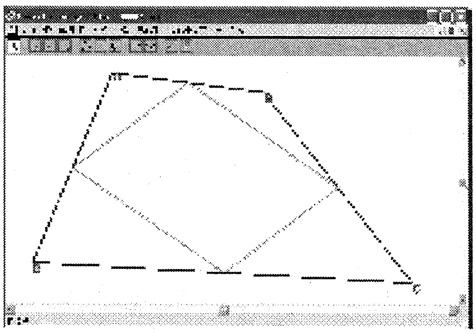


図 19. 四角形の中点を結ぶと平行四辺形

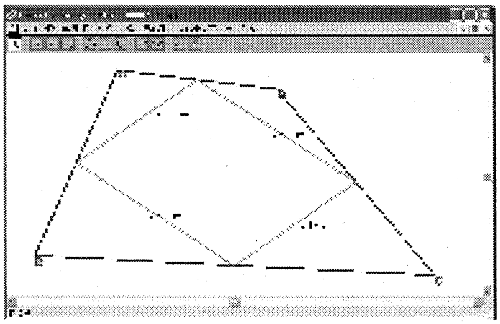


図 20. 向かいあう線の長さが同じ

これにより，向かいあう辺の長さがいつも同じになっていることに気づき，平行四辺形であると，確認できる．これは，テクノロジーを用いたことによるひとつの発見と考えられる．そして，演繹的な考えとして中学時代に学習した「中点連結定理」を思い出してもらえればいいのではないかと考える．とかく図形の証明は，すでに証明されていることを証明することが多い。このようにテクノロジーを用いることで，「帰納」から「演繹」へという思考を今後も大切にしていきたいと考える．尚，このあとの授業展開としては，凹四角形を考え，その具体物としてブーメランを用い，その長さやブーメランの中心角を測った．そしてカブリで計測値を用いた重心を算出し，実際に飛ばしたブーメランをカメラやビデオで撮影してその差について比較検討した．

Ⅶ．事例６

１．タイトル

重心・外心・垂心の関係を探る

２．教材の位置づけ

（１）対象学年　高等学校１年生

（２）関連単元　数学A　平面図形「三角形と比」

３．図形の美しさと教材との関連

本教材では，次の美しさに焦点が当てられる．

（美しさ２）複数の図形を数学的に考察することにより，それらの間に，共通に，さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ４）図形の操作等を行う中で引き出された，有意味で予想外の着想に感銘できる情意的概念

本教材を扱う目的は，任意の三角形における重心，外心，垂心の作図から，この三心に潜む性質『三角形の重心Ｇ，垂心Ｈ，外心Ｏは一直線上にあり，ＨＧ＝２ＧＯ』を帰納的に発見し，重心，外心，垂心の間に成り立つ関係の一般性を導くことで，生徒が三角形に潜む性質に畏敬の念を感じたり，有意味で予想外の着想に感銘したりすることにある．

これまで生徒は三角形の中線が１点で交わること，三角形の３辺の垂直二等分線が１点で交わること，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした３本の垂線が１点で交わることや，それぞれを重心，外心，垂心と呼ぶこと，例えば重心は中線を２：１に内分することや直角三角形の外心は斜辺の中点になることなど，個々の特徴について理解している．また，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした３つの垂線が１点で交わることの証明を通して，『三角形ＡＢＣの垂心Ｈ，外心Ｏ，Ｏから辺ＢＣに下ろした垂線の足をＬとすると，ＡＨ＝２ＬＯ』が成り立つことを学んでいる．今回，重心，外心，垂心における位置関係を扱うことで，これらの三心には共通した関係があることを知り，三角形のもつ性質のおもしろさや不思議さに触れることができると考える．また，一般性を導く過程では，中学校で学習してきた中点連結定理や平行四辺形の性質を利用しており，証明の簡潔さや巧みさにも触れることで，性質を導き出すまでの過程のおもしろさをも感得することができると考える．

４．授業の概要

導入では，任意の三角形に重心，垂心，外心の三心を作図させて，これらの位置関係について気づくことを挙げさせる．三角形の重心Ｇ，垂心Ｈ，外心Ｏが一直線上にあって，ＨＧ＝２ＧＯとなることが予想できたら，幾何ソフト「ＣａｂｒｉⅡＰｌｕｓ１．４」を

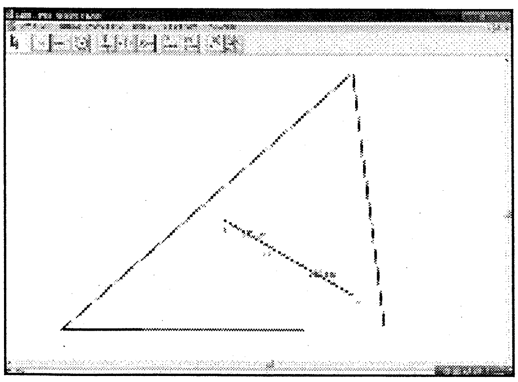


図 21

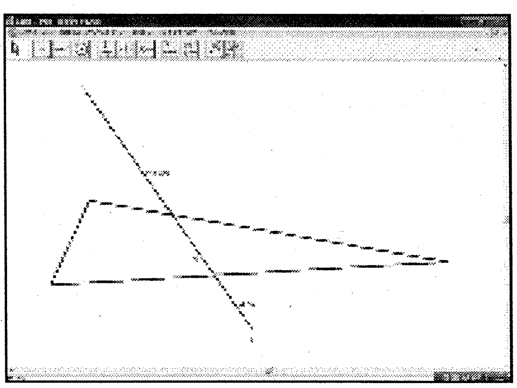


図 22

用いて，鋭角三角形や鈍角三角形など，どのような三角形においても予想が成り立つかどうかを，頂点を移動させて三角形の形を変える操作を通して帰納的に考察する（図 21，図 22）．このとき，ＨＧ，ＧＯの長さは，常に表示させておく．

次に，どのような三角形においても同様の結果が保たれることを証明するために，三角形ＡＢＣの外心Ｏから辺ＢＣに下ろした垂線の足をＬ，線分ＡＬとＯＨの交点をＧ$_1$としたとき，Ｇ$_1$が三角形ＡＢＣの重心となることと，ＨＧ$_1$＝２ＯＧ$_1$となることを示す．証明については難しさを感じる生徒も少なくないが，適宜助言を与えながら進めていく．具体的には，辺Ｇ$_1$Ｈ，辺Ｇ$_1$Ａの中点Ｐ，Ｑをとり，幾何ソフト「ＣａｂｒｉⅡＰｌｕｓ１．４」で描いた図形に補助線を加えていく（図 23）ことで，生徒が三角形ＡＧ$_1$Ｈに中点連結定理を見出すことや，四角形ＯＬＰＱが平行四辺形であることに気づくことを視覚的に助け，理解を促す．また，四角形ＯＬＰＱが平行四辺形となることを示すために，前時で扱った『三角形ＡＢＣの垂心Ｈ，外心Ｏ，Ｏから辺ＢＣに下ろした垂線の足をＬとすると，ＡＨ＝２ＬＯ』を想起させるように配慮する．

なお，本課題の証明は以下の通りである．（小平，2000）

［証明］

三角形ＡＧ$_1$Ｈの

辺Ｇ$_1$Ｈ，Ｇ$_1$Ａの中点をＰ，Ｑとすると，

中点連結定理よりＰＱ//ＡＨ，

ＡＨ＝２ＰＱ・・・①

また，ＡＨ＝２ＬＯ・・・②

①，②より

ＬＯ//ＰＱ，ＬＯ＝ＰＱ・・・③

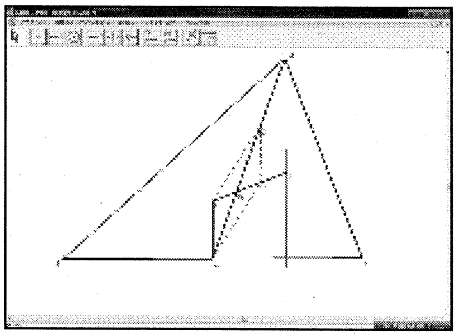


図 23

③から，四角形ＯＬＰＱは平行四辺形

（対辺が平行で等しい四角形は平行四辺形）

平行四辺形の対角線は互いに他を２等分するので，ＱＧ$_1$＝Ｇ$_1$Ｌ・・・④，

ＯＧ$_1$＝Ｇ$_1$Ｐ・・・⑤

④から，ＡＱ＝ＱＧ$_1$＝Ｇ$_1$Ｌとなり，ＡＧ$_1$：Ｇ$_1$Ｌ＝２：１となる。ゆえに，Ｇ$_1$は三角形ＡＢＣの重心であることが言える。⑤から，ＯＧ$_1$＝Ｇ$_1$Ｐ＝ＰＨとなり，ＨＧ$_1$＝２ＯＧ$_1$であることが言える。

（証明終）

Ⅷ．その他の教材

上記の事例の他に、ねらいや指導展開等は考えていないが、興味ある２つの教材を紹介する。

１．ピタゴラスの定理

平面幾何学の数ある定理のなかで、ピタゴラスの定理ほどいろいろな場面で語られてい

る定理は少ない。述べられている事実の簡潔さ、それが意味していることの重要性、証明方法の多様さ等で平面幾何学を代表する定理である。いろいろな意味で美しい性質をもっている定理である。

定理の発見は、名前からしてピタゴラスによるものと理解されているようである。しかしながらこれは正しくなく、事実の発見は何千年前に遡るようである。このことに関しては、いろいろな書物に述べられていて、大変興味ある事実が知られている。詳しい事実については、例えば、足立 (1988), ジョーゼフ (1996), 林 (1993), コンウェイ・ガイ (2001) などを参照されたい。定理について学習する際に、このような興味ある歴史などについて紹介してもらうことは、興味をもって算数・数学を学ぶという点からも大変重要な事であう。

更に、可能ならば何故ピタゴラスの定理が発見されたのか、というようなことについても言及してもらいたい。定理発見の経緯、背景まで説明できる定理はそんなに多くない。ピタゴラスの定理のような定理についてはこのようなことも可能である。例えば、ピタゴラスの定理は直角二等辺三角形による敷き詰めの中で見つかったというような説もある。直角二等辺三角形による敷き詰めの中で、ピタゴラスの定理を理解するのは大変容易であり、さもありなんという感じである。

ピタゴラスの定理の証明はピタゴラスにより言われるものを含めて数多く存在し、証明だけを集めた本なども出版されている。ピタゴラスの証明はどれもアイディアに溢れていてとても面白い。その中の一つに折り紙を用いて視覚的に証明できるものがある。これについて説明しよう。

図 24 のように、∠A＝∠R である直角三角形 △ABC に対し BC = a, CA = b, AB = c とする。

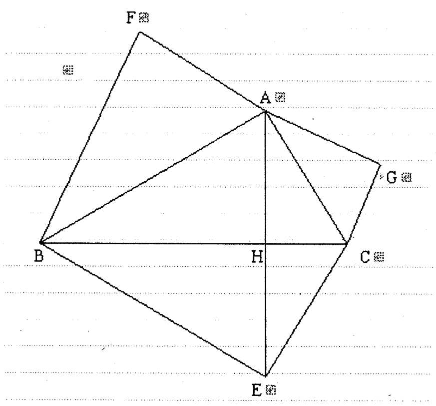


図 24

△ABC と同じものを３枚用意し、これを重ねる。そして、１枚の△ABC = Sa は BC を中心として△BCE として折り返す。もう１枚は A から BC に下した垂線 AH で△ABC を２つの３角形 △AHC = Sb と△BAH = Sc に分割し、それぞれを AB,AC を対称の軸にして、△AGC、△AFB として折り返す。このとき∠A＝∠R より、よく知られているように

$$\triangle ABC(=Sa) \backsim \triangle AHC(=Sb) \backsim \triangle BHA(=Sc)$$

よって、ある定数k（実際は$k=1/2 \cdot \cos B \cdot \cos C$)が存在して

$Sa = ka^2$, $Sb = kb^2$, $Sc = kc^2$

これを　$Sa = Sb + Sc$　に代入して

$$a^2 = b^2 + c^2$$

が得られる。

この証明の本質は $Sa \backsim Sb \backsim Sc$ なることである。このことは $\angle A = \angle R$ であることから保証される。

ところが、簡単なことではあるが、この事実の逆も成立する。即ち、

補題. $\angle A$ が最大の $\triangle ABC$ において、A から BC に下した垂線の足をHとするとき $\triangle ABC \backsim \triangle HBA \backsim \triangle HAC$

である必要十分条件は

$$\angle A = \angle R$$

となることである。

この補題を通してみれば、「何故、直角三角形にたいしてピタゴラスの定理が成立するか」という理由が大変よく理解できる。このようにピタゴラスの定理の一つ一つの証明から、直角三角形のもっているどのような性質がピタゴラスの定理の結論を導くのかが特定できるはずである。それ故、全てのピタゴラスの定理をもう一度厳密に検証してみる、ということは大変興味深いことである。

2．ピタゴラス数を生成する行列についての一考察

（1）ピタゴラス数について

正の整数の組 (a,b,c) がピタゴラスの定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たすとき，組 (a,b,c) のことを**ピタゴラス数**という．a, b, c の最大公約数が 1 であるようなピタゴラス数は，**原始ピタゴラス数**とか**既約ピタゴラス数**などと呼ばれる（英語では primitive Pythagorean triple，略して PPT）．すべてのピタゴラス数は，原始ピタゴラス数の正の整数倍として得られる．

原始ピタゴラス数は，たがいに素な正の整数 m,n　($m>n$) に対し，$m+n \equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$a = m^2 - n^2,\quad b = 2mn,\quad c = m^2 + n^2$$

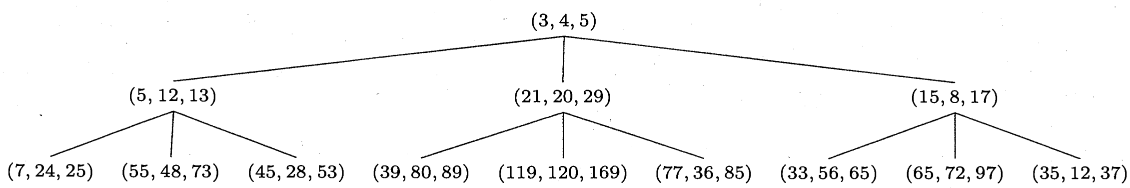
により得られることが知られている．

（2）PPT を生成する行列（その１）

Barning (1963) および Hall (1970) は独立に，すべての PPT は，${}^t(3,4,5)$ に次の 3 つの行列 A_1, B_1, C_1 によって生成される行列をかけることによって得られることを示した．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

すなわち，次のような3進木構造により次々とPPTが得られる．



A_1, B_1, C_1 の性質を調べると

$$\det A_1 = \det C_1 = 1, \quad \det B_1 = -1$$

A_1 の固有値は1（3重根），固有ベクトルは ${}^t(0,1,1)$ のみ，B_1 の固有値は $3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, -1$，対応する固有ベクトルはそれぞれ ${}^t(1,1,\sqrt{2}), {}^t(1,1,-\sqrt{2}), {}^t(1,-1,0)$，$C_1$ の固有値は1（3重根），固有ベクトルは ${}^t(1,0,1)$ のみである．さらに

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから，$\mathrm{PPT}(x,y,z)$ の親 $\mathrm{PPT}(x',y',z')$ は

$$x' = |x+2y-2z|, \quad y' = |2x+y-2z|, \quad z' = -2x-2y+3z$$

で計算され，最後には $(3,4,5)$ に帰着する．

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

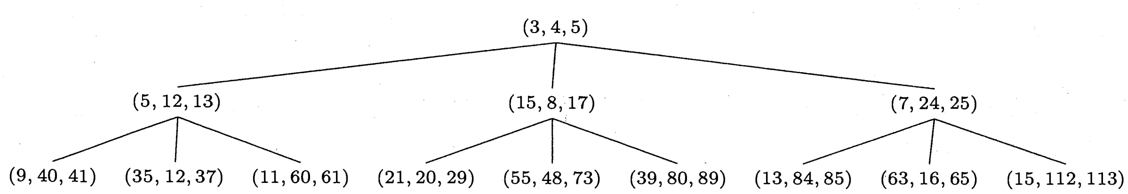
とおくと，A_2, B_2, C_2 は (m,n) の変換行列になっている．さらに，A_2, B_2, C_2 の逆行列を用いることによっても任意のPPTからその親PPTをたどって，最終的にはPPT$(3,4,5)$ に対応する $(2,1)$ に到達できる．

（3）PPTを生成する行列（その2）

最近 Price(2008) は Barning(1963) や Hall [3] とは別の3つの行列

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

により，親PPT$(3,4,5)$ からすべてのPPTが得られることを示した．前節と同様に3進木は次のようになる．



P_1, Q_1, R_1 の性質を調べると

$$\det P_1 = \det R_1 = 8, \quad \det Q_1 = -8$$

P_1 の固有値は $4, 2, 1$，対応する固有ベクトルはそれぞれ ${}^t(0,1,1), {}^t(1,1,1), {}^t(1,0,1)$，$Q_1$ の固有値は $4, -2, 1$，対応する固有ベクトルはそれぞれ ${}^t(4,3,5), {}^t(1,-3,-1), {}^t(1,0,-1)$，$R_1$ の固有値は $4, 2, 1$，対応する固有ベクトルはそれぞれ ${}^t(0,1,1), {}^t(1,-1,-1), {}^t(1,0,-1)$ である．前節の行列と違って $P_1^{-1}, Q_1^{-1}, R_1^{-1}$ の成分は整数にならないが，$\mathrm{PPT}(x,y,z)$ から順に親 PPT を求めることはできる．

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P_2, Q_2, R_2 は (m,n) の変換行列になっている．P_2, Q_2, R_2 の逆行列を用いることによっても前節と同様に，任意の PPT からその親 PPT をたどって，最終的には $\mathrm{PPT}(3,4,5)$ に対応する $(2,1)$ に到達できる．

（4）考察

1634 年にフェルマーがメルセンヌに出した手紙で，フェルマーは直角三角形の斜辺 c が平方数で他の 2 辺の和 $a+b$ も平方数であるものの中で最小な数の組として

$$(a,b,c) = (4565486027761, 1061652293520, 4687298610289)$$

を示した．実際

$$a + b = 5627138321281 = 1009^2 2351^2, \quad c = 2165017^2$$

である．この数の組は Barning と Hall による行列では 43 代目の子孫，Price による行列では 32 代目の子孫として得られる．

2009 年現在，この小論で紹介したように，すべての PPT が得られる 3 進木構造による行列の例は上記の 2 つしか知られていないようである．他にこのような行列があるか，また次々に得られる PPT において祖先と子孫にどのような関係があるか等を研究することは興味深い．

VII. 終わりに

本稿では、図形における美しさを次の 5 つで捉え、中・高等学科の段階において、その美しさを感得するための教材を開発した。これらの美しさは、現段階での捉えであり、必ずしも独立であるとはいえない。

（美しさ 1） 図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

（美しさ 2） 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ 3） 図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる情意的充実感

（美しさ 4） 図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

（美しさ 5） 抽象的な数式の関係を、図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感

開発した教材は、以下の通りである。

(1) シェルピンスキー四面体で数学的な美しさを味わおう！（中１）

(2) どんな四角形ができるかな？（中２）

(3) 折り紙を用いた「角の三等分」の作図問題について（中１，２）

(4) 重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の導入学習（高１）

(5) 重心　その面白さ　美しさ（高１）

(6) 重心・外心・垂心の関係を探る（高１）

(7) ピタゴラスの定理

(8) ピタゴラス数を生成する行列についての一考察

今後は、図形の美しさを感得するために、どのような点に留意して指導を行っていけばよいか、また、生徒が美しさを感得できたかどうかをどのように評価していけばよいかを実践的に明らかにしていく必要がある。

［参考・引用文献］

足立恒雄(1988),「楽しむ数学１０話」, 岩波書店.

藤原大樹（2008),「図形の美しさと有用性を実感させる数学的活動の授業ーシェルピンスキー四面体を題材としてー」, 第 41 回数学教育論文発表会論文集, pp. 387-392.

ジョージ・G・ジョーゼフ著（垣田高夫、大町比佐栄訳）(1996), 非ヨーロッパ起源の数学, ブルーバックス.

林隆夫（1993), インドの数学, 中公新書.

細水保宏編(2008),「オイラー先生のおもしろ図形問題集」, 東洋館出版, pp.119-122.

今井貞三(1998), メネラウスの定理と重心,「話題源数学 — 心を揺する楽しい授業 — 」, p.193, 東京法令出版.

J.H.コンウェイ＆R.K.ガイ著（根上生也訳）(2001),「数の本」, シュプリンガーフェアラーク東京.

小平邦彦(2000),「幾何への誘い」, 岩波現代文庫, p.94.

小林吹代(2008), 「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」, ペレ出版.

小山直人(2002),「操作活動を取り入れた正の数・負の数の指導法 — 発達段階に応じた概念理解を主軸とした授業研究 — 」, 平成 14 年度神奈川県私立中学高等学校協会研究論文集, pp.57-61.

松尾七重(1999),「算数数学の美しさを感得するための方法」, 千葉大学教育学部研究紀要, 第 47 巻 I：教育科学編, pp.71-78.

ロベルト・ゲレトシュレーガー, 深川英俊訳（2002),「折紙の数学」, 森北出版, pp.39-41.

吉田明史(2009),「高等学校の数学教育に求められるもの」. 日本数学教育学会誌 第 91 巻 第 7 号, p.19.

吉田洋一・赤攝也（1954),「数学序説」, 培風館, p.183.

Barning, F. J. M. (1963), On Pythagorean and quasi-Pythagorean triangles and a generation process with the help of unimodular matrices. (Dutch) Math.

Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk. ZW-001 (1963).

Hall, A. (1970), Geneology of Pythagorean Triads, Mathematical Gazette, Vol. 54, No. 390, 377--379.

Price, H. L. (2008), The Pythagorean Tree: A New Species, arXiv:math/0809.4324v1 (2008).

[ホームページ]

立木秀樹ホームページ　http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki/

みんなの地球科学プロジェクトホームページ
http://www.gaia.h.kyoto-u.ac.jp/~minchika/

bin word / blog ホームページ（2007），9月30日付
http://www.binword.com/blog/archives/000552.html

日本未来科学館ホームページ　http://www.miraikan.jst.go.jp/