

小学校算数科における図形についての美しさを感じ得る教材開発

池田敏和*・奥村利香**・小山健仁***・岩立忠****・純岡尚史*****・
関口慎吾*****・前田正男*・馬場裕*・橋本吉彦*

I. はじめに

中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会（第43回（第3期第29回））議事録の「算数・数学科の現状と課題、改善の方向性（検討素案）」で、次のように7つの改善の方向性が示された。①目標・内容について、②基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着、③数学的な思考力・表現力の育成、④数量や図形についての豊かな感覚の育成、⑤算数的活動・数学的活動の充実、⑥統計に関わる内容の指導の充実、⑦高等学校数学の科目構成

そして、上記の④に関連して、科学研究費補助金基盤研究（C）「図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させる指導」（研究代表者：前田正男、課題番号：2050074900）が、平成20年度より3年間に渡って実施されることになった。ここでは、次の3つの目的が設定された。

- (1) 図形についての豊かな感覚・美しさとは何かを具体的に明らかにすること。
- (2) (1)を基に、児童・生徒に図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させるにはどうしたらよいかを考えること。
- (3) 実際の授業にのせることによって、児童・生徒が図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得たかどうかを実証すること。

対象とする児童・生徒は、小学校第1学年から高等学校第1学年までの10学年とする。高等学校第1学年までとした訳は、図形と計量（三角比）、平面幾何までを範囲に入れた図形を考察することによって学校数学（小学校算数、中学校数学、高等学校数学）の図形領域を俯瞰することができると考えたからである。

本研究は、上記目的の（1）に関するもので、図形についての美しさに焦点を当て、図形の美しさとは何かを明らかにすると共に、それを意図した教材を開発することを目的としている。

また、本研究では、小学校1学年から高等学校1学年までの10学年を対象としているため、小学校段階と中学校・高等学校段階にわけて述べていくことにする。本論文は、小学校段階に関する教材開発に焦点を当てる。

II. 図形についての美しさとは

1. 本研究における美しさの捉え方

美しさの捉えについては、哲学的にいくつかの立場がある。本稿では、美しさは客観に備わるという立場と人間による創造物に見いだされるという立場に着目する（古在，1971）。前者は、唯物論における立場で、「対象のもつ全体と部分との均整・調和」ということに美しさが見いだされる。それに対して、後者は、弁証法的唯物論における立場で、「美は社会的・歴史的な実践による所産であって、社会的な存在としての人間が一定の歴史的条件のもとで、その創造的能力と才能を自由によく実現することができ、感覚による世界の諸対象の支配者となって、自己の肉体的、精神的な諸力をその仕事にそそぎこんで、これらの諸力を享受するところに生じるもの」と捉えられる。前者に関しては、全体と部分との均整・調和ということで、人間の行為であるかどうかに関わらず、対象のもつ構造、性質等に着目して規定されているのに対し、後者に関しては、人間の行為に限定して、その取り組みの所産として生じるものである点に着目して規定

*横浜国立大学、**横浜国立大学附属横浜小学校、***横浜市立浜中学校、****横浜国立大学附属鎌倉小学校、
*****川崎市立向小学校、*****学習院初等科

されている。前者では、対象のもつ構造や性質に限定して、人間が創り上げていくプロセス、考え方には言及されていないことがわかる。それに対して、後者では、人間が創り上げていくプロセス、考え方まで広げて捉えられているものの、美術や芸術上の作品等の人間が創ったものに限定されており、富士山や滝が美しいといった人間の行為を超越した美しさには言及されていないことがわかる。

本研究では、数学教育において美しさを捉えていくという立場から、対象のもつ構造や性質に限定せず、人間が創り上げていくプロセス、考え方までを含めて美しさを捉えることにする。また、数学は、原初的には自然現象を記述するところから始まり、それらを体系化、そして、さらなる抽象化を繰り返すことによって進展してきたことから、人間が創り上げたものに限定することなく、人間が探究することで明らかにされた、人間の行為を超越して存在している自然界の美しさにも言及して捉えていくとする。

さらに、後者の立場において、社会的な存在としての人間が感得できうるものだという点に注意を払う必要がある。すなわち、美しさは、個人的、階級的なものではなく、全ての人間が共有できるものであるという点である。数学は、本来、個人的、階級的なものではなく、社会・文化的な所産であることから、当然この立場に合致しているものである。

以上の考察により、美しさについては、それが人間の行為の所産として見いだされるものとして捉え、それらには、人間が創り出したものと、人間によって見いだされた、人間の行為を超越して存在しているものがあるという立場をとる。そして、その美しさの対象は、創り上げられたものの構造や性質に限定せず、人間が創り上げる際のプロセス、考え方にも及ぶものとして捉えることにする。そして、それらは、個人的・階級的なものではなく、全ての人を対象とした社会的なものであるという立場で考えていくことにする。

2. 図形についての美しさの類型

学校数学で図形についての美しさといったとき、児童・生徒は、何に「美しさ」を感じるのであろうか。このような観点を明らかにしておくことは、指導のねらい、指導系列、指導方法等を考えていく上で土台となるものである。

本研究では、上記1の立場を基に、本研究会で報告された教材、実践例を振り返りながら、類型化を試みることにする。より幅広い視点から図形についての美しさが感得できる指導を行っていくために、人間が見いだした自然界に内在している図形、人間が創り出した図形、また、ものの形を抽象化した図形に限定せず、図形を操作したり考察したりする上でのプロセス、考え方等を含めて対象としていく。児童・生徒が、「すごい!」、「すばらしい!」と思えたとき、それは何に対してどのような情意的充実感があつたのかを明らかにするという立場で考える。これにより、図形についての美しさの指導のねらいが明確になると共に、そのねらいにいかに向っていけばよいかを考えていくことが可能になる。

事例を分析・考察した結果、児童・生徒が感得できる図形についての美しさを下記の5つに類型化した。この類型化は、現段階での捉えであり、今後変化していく可能性のあるものである。また、これらは、必ずしも独立であるとはいえない。複数の観点を同時に満たす教材も存在することに留意する必要がある。また、類型ごとに取り上げた例は、本研究で報告されたものであり、紙面の都合上、そのタイトルだけを掲載することにする。

(美しさ1) 図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

ここには、「この花は美しい」といった具合に、誰もが共通に思える、先天的に感じることでできる美しさと、経験を踏むことで徐々に感得できるようになる後天的な美しさがある。敷き詰め模様は、誰がみてもきれいにみえる。それに対して、その敷き詰め模様の背景にある数学的構造を直観的に見抜いた人は、それを見たとき、ただきれいだというだけではなく、数学的構造が内包されていることを関連づけた上でさらなる美しさを感じるのである。これは、数学的経験を踏むことによって感得できる洗練された美し

さであろう。そして、この後者の経験の伴う美しさは、次の(2)①の美しさに対応している。

例：幾何学的模様（敷き詰め）、彫刻、家紋、シェルピンスキーガasket

(美しさ2) 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

(美しさ1)を前提として始まる活動と、それを前提とせずに図形の研究から始まる活動とが考えられる。

- ① 見た目で美しいと感じられる複数の図形((美しさ1)で述べたもの)の性質を考察することを通して、そこに共通の数学的事実が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

これは、上記(美しさ1)の根拠ではなく、美しいと感じることのできた複数の図形の性質を考察することにより、共通に同じ数学的事実が潜んでいたことに対する驚きであり、それゆえに生まれる畏敬の念である。この畏敬の念は、後天的なもので、経験を踏むことによって感じ得るものであろう。それゆえ、人によって感じ得できたり、できなかったりする場合がある。どのような先行経験をもてば、この畏敬の念を感じることができるのか、子どもの実態に応じた指導が要求される。

例：パターン（繰り返し、フィボナッチ数列）、対称性（家紋）、黄金比や白銀比（日数教のロゴ）

- ② 図形を数学的に考察することにより、複数の図形に一般的に成り立つ性質、あるいは、特定の図形に成り立つ特殊な性質に畏敬の念を感じとれる情意的充実感

これは、図形の研究そのもので、一般性があるほどより深く感じ得るものである。この畏敬の念も、後天的なもので、経験を踏むことによって感じ得るものであろう。

(1)と同様に、どのような先行経験をもてば、この畏敬の念を感じることができるのか、子どもの実態に応じた指導が要求される。

例：外角の和（2次元、3次元）、三平方の定理、中点連結切り、オイラーの定理（重心、内心、外心）、クリフォードの定理

(美しさ3) 図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる情意的充実感

ある特殊な機能や性質をもつ図形が、日常生活や社会において有効に活用されている場合がある。図形のもつ性質や機能と、日常生活や社会における課題とをいかに関連づけるかに焦点が当てられる。このような発明をするには、図形のもつ性質と機能を深く研究していくと共に、日常生活や社会において課題を見だし、その解決策を探っていくことの両方が要求される。また、日常生活で既に応用されているものについては、「もしその図形でなかったらどうなるか」を考えることが重要となる。

例：マンホールのふたはなぜ丸い？、紙コップはなぜ台形？、チェバ・メネラウスの定理の応用、テトラパック、ミウラ折り、シェルピンスキーガasket

(美しさ4) 図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

これは、図形以外の領域（数量関係等）を対象とした場合にも、同様に存在するものである。どのような着想があるかについては、例えば、次のようなものがある。

- ① これまでバラバラのものとして見ていたことに、関連性があることに気づく。バラバラのものが関連づけられることに「すばらしい！」と感じられる情意的充実感である。
- ② 特殊な場合にしか成り立たない性質が、見方を変えることで、他の場合でも一般的に成り立つことが見いだせる。拡張したり統合したりすることで同じものとみれることに「すばらしい！」と感じられる情意的充実感である。

例：オリガミクス（正三角形（正多角形まで）、角の三等分等）、三角形の内角の和と内心との関連性、三角形・四角形の敷き詰め、凹四角形における中点連結きり

(美しさ5) 抽象的な数式の関係を、図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感

数、数の関係は、抽象的な世界にあるものであり、視覚的に見ることはできない。そのような抽象的な数、数の関係を図形によって視覚化し関連づけられたことは、目に見えないことを目に見える形に変形することであり、その行為が可能になったことに感銘を受けるわけである。

例：大きな数を表現する際に、図形的な性質を生かして五、十、五十、百をつくって表現すること。平方数の和の公式を、6つの立体を組み合わせて直方体をつくるパズルにおきかえて表現すること。

Ⅲ. 事例1**1. タイトル**

形で数えよう

2. 教材の位置づけ

- (1) 学年 第2年生
- (2) 関連単元 1,000までの数

3. 図形の美しさ教材との関連性

本実践では、次の美しさに焦点が当てられる。

(美しさ5) 抽象的な数式の関係を、図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感
数を数えることは小学校に上がる前からできる子は多い。しかし、だからと言って1対1対応ができ、数を唱えることができることと数のしくみについて知っていることは別である。1年生では100までの数についての構成、大小、順序、系列について調べている。そのときに、東にして考えるよさについて学習してきている。そこでは、10のまとまりをつくるよさに気づいている。しかし、1,000までの数になったとき、10のまとまりがいくつあるのか数える不便さに気づき、100のまとまりにして考えることのよさを気づかせたい。さらにはこの活動を通して、まとまりを位と考えた十進位取り記数法について確認させたい。

そこで、形の同じパターブロックを数えることにする。最初の子どもたちは5や10の数のまとまりで考えようとするが、まとまりを形に置き換え、同じ形を同じ数と見るアイディアに気づくのである。抽象的な数を図形によって視覚化することは、目に見えないものを目に見える形に置き換えることであり、その合理的なよさに感銘できると考える。

ここでの大切にしたい数学的な考え方・態度としては、

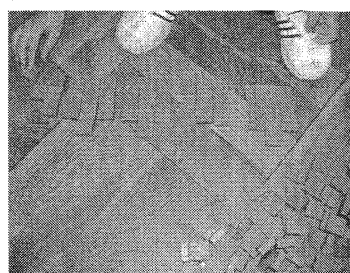
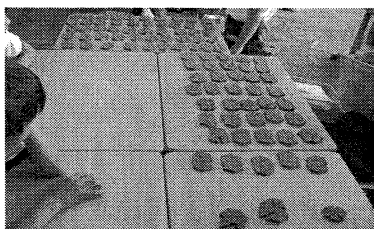
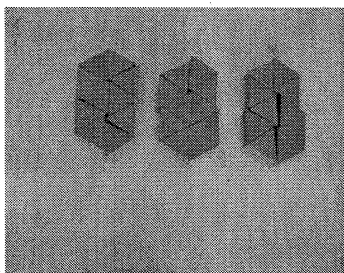
- ①単位の考え方・・・10ずつ、100ずつ順にまとまりをつくり考えようとする。共通な基準(単位)を用いて数量を表す。数を相対的に見るとらえ方も大切に扱っていきたい。
- ②整理し、簡潔明瞭に表そうとする態度・・・まとまりを作ったり、表や図に表すことによって分かりやすく表そうとする。

4. 授業の概要

<p>1. 課題把握をする</p>	<p>T:ブロックの種類がバケツに入っているのだが、どれが一番少ないか知りたい。 C:見れば分かる。 C:手で持って重さを測る。 C:数える。</p>		
	<p>ブロックを数えよう</p>		
<p>2. グループ解決</p> <p>①まとめる ②10でまとめる ③100でまとめる</p>	<p>オレンジブロック班 (黄色・棒・みどり)</p> <p>②すぐに10のまとまりに気づく。いろいろな形で10のまとまりにする。 ②友だちの10のまとめ方を見て、合わせるようにする。みんな同じ形。 ③10がいくつあるかわかりづらいので、100 (10×10) のまとまりを作る。</p>	<p>赤ブロック班 (青)</p> <p>①好きな形で5ずつだったり、10ずつだったりにまとめる。 ①それぞれのやり方で数を数えてたず。 ②計算しないと分からないことから、5ずつの同じ形で50ずつまとめたり、120ずつまとめたりする。 ③まだ計算しないと分からないことから同じ数で同じ50のたばを作る。 ③0、100と50とびで数える。</p>	<p>白ブロック班</p> <p>①数にこだわらず、好きな形でまとめる。 ②好きな形で10ずつにまとめる。 ②同じ形で5ずつまとめる。 ②まとめたものを崩しながら5、10・・・数える。</p>
<p>3. 数え方を発表し、分かりやすい数え方を考える。 練り上げ</p> <p>4. まとめ</p>	<p>T:班の発表で似ていることはないかな?もしくはいいところ、ちょっとまずいところは? C:みんな5とか10とかにまとめている。 C:みんながばらばらの形だとわかりづらい。 C:100のたばにしているので見ていくつか分かりやすい。 C:10のたばが同じ形だとすぐ10と分かっている。 C:100のたばいくつと10のたばいくつとのこりいくつで数字になっちゃう。</p> <p>T:分かりやすく数える方法をまとめておこう。 C:10のたばを同じ形でつくる。 C:10のたばを10個で100のたばをつくる。</p>		



今回の学習では、結果とその過程を大切にしたい。各班とも、班で話し合いながら、他の班の様子を伺いつつ思考を深めていった。発表の時も班の数える過程をデジカメで撮影し、発表で使うことで、より思考の流れと他の班との違いが明確になり有効だった。



IV. 事例 2

1. タイトル

同じ種類の面のサイコロを作ろう！

2. 教材の位置づけ

- (1) 学年 第4年年
- (2) 関連単元 直方体と立方体

3. 図形の美しさと教材との関連

本教材では、次の2つの美しさに焦点が当てられる。

(美しさ3) 図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる情意的充実感

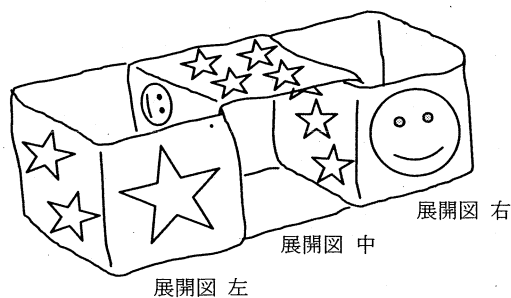
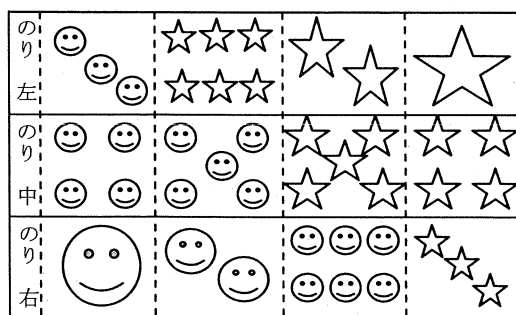
(美しさ4) 図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

(美しさ3) については、完成する立方体がサイコロの目になっているので、互いに平行な面の数の和が7になっていることを発見したり、オリジナルのパズル（無地の展開図にイラストをかく）を作るときに、目の和が7になるためにはどのような展開図にすればよいのかなど日常生活の中に、図形の性質が深く関わっていることを実感することができる。

(美しさ4) については、3つの帯を組み合わせることによって、ふたのある箱（立方体）ができることに驚きを感じる。また、同じ種類の面にするためには、どのようにすればよいのか試行錯誤する中から、展開図と立方体の面の位置関係に規則性があることを発見し、図形の不思議さや美しさを体感することができる。

4. 教材の特徴と授業実践

教材については、4つの正方形をかけた長方形の帯を3本使って、下図のようにリングをつくる。3つのリングを工夫して動かすと、同じ種類の面（スマイルの面だけ、星の面だけ）のサイコロが完成する。



○作業する中から、立方体にするためにはどの面を重ねればよいのかを考える必要があり、面の位置関係（面の平行や垂直）や構成要素（面の個数）などを自然と意識することができる。

○同じ種類の面に揃えることができた児童が仲間に説明することにより、その説明から揃えることがで

きなかった児童が揃えることができるようになるなど、お互いの理解を深めることができる。

○完成した立方体を観察すると、サイコロになっていることに気づきサイコロの面の位置関係から互いに平行な面の数の和が7であることを発見でき、立方体が日常生活の場面で活用されていることを実感することができる。

○無地の展開図にイラストをかくことにより、展開図と立方体の見取り図の位置関係を理解することができる。

以下、小中交流授業で行った授業展開案（指導案）を示す。

学習活動・指導事項	備 考
<p>○ 指導教員の自己紹介（5分）</p> <p>○ 『同じ種類の面のサイコロを作ろう』のワークシートを配布し、パズルのつくり方を説明する。（10分） ※ パズルについては、右面を参照</p> <p>○ 各自、パズルを作成する。そのパズルで遊びながら、立方体の面や位置関係について理解する。また、パズルのしくみを自分のことばで説明できるようにする。（25分） ※ 2種類の模様があるので、2色で塗りわけをする。 ※ はやく終わった児童は、別の模様のパズルをもう一度作成し、しくみの理解を深める。 ※ 時間がある場合は、自分でオリジナルパズルを作成する。</p> <p>○ まとめ（5分） ・立方体の構成要素について確認する。 ・今日のパズルを周囲の人に説明したり、遊んだりすることを伝える。 ⇒自分のことばで、しくみを説明できることを期待したい。</p>	<p>○担任の先生の協力を得て、明るい雰囲気スタートできるようにする。</p> <p>○パズルのつくり方が理解できるように、丁寧に説明する。</p> <p>○机間指導の中で、パズルのしくみを意識できるような助言をする。</p> <p>○はさみなどを使うので、安全に配慮できるようにする。</p> <p>○今日の学習したことが、自分のことばで説明できるような場面を紹介し、自主的に活動できるようにする。</p>
<p>事前に準備すること等 ワークシート、のり、はさみ、色えんぴつ、筆記用具</p>	

V. 事例3

1. 教材名

同じ形を作ろう

2. 教材の位置づけ

(1)学年 第5学年

(2)関連単元

・いろいろな四角形（5年） ・内角の和の性質（5年） ・縮図や拡大図（6年）

3. 図形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の2つの美しさに焦点が当てられる。

（美しさ2）複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

（美しさ4）図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

平面図形は、ある形をいくつか並べるともとの形と相似になる場合がある。全ての三角形・平行四辺形は合同な形4つを決まった並べ方をする事で相似な形を作ることができる。三角形・平行四辺形以外では、特別な形の台形やカギ型で相似な形を作ることができる。これらは平面の敷き詰めの中でも特別な例であるが、他の形を敷き詰めていくときと比べ、「同じ形を作る」という条件がつくため、パズルを解いていくようなおもしろさ、美しさを感じることができる題材である。

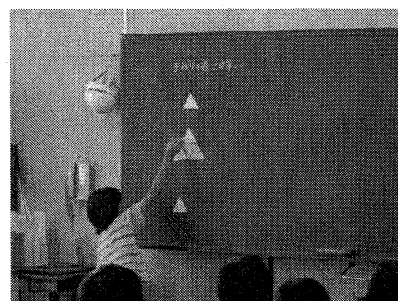
本事例では、題材を三角形に絞り、正三角形・直角三角形・直角二等辺三角形・二等辺三角形・一般の三角形について相似な図形を考えさせた。一般の三角形は一目見ただけではできないように感じるが、試行錯誤をしたり、角や辺の長さに着目したりすることで相似な形をつくることができる。また、一部の直角三角形は2枚や3枚で相似な形ができるものもあり、予想と違ったことに対する驚きも感じさせることができる。

できた形を比較してみると、どんな三角形でも同じ並べ方で並べれば4枚で相似な形をつくれることに気づく。そして、長さの比が一定になっていることや、使う枚数(面積)が1, 4, 9, 16・・・と平方数になっていることなど、図形の中に共通に存在している性質に驚きを感じると共に、相似に関する様々な素地的な見方や感覚を身に付けさせることができる。

4. 授業の概要

①課題提示

まず最初に黒板に正三角形をはり、「この三角形をいくつか使って、同じ形の三角形をつくることができますか。」と発問した。一人の児童が黒板の前に出て正三角形4枚で相似な三角形をつくった。そして、なぜ同じ形



と言えるかということで「角の大きさ」「辺の長さ」に

着目させた。角については、それぞれの次に、直角三角形・直角二等辺三角形・二等辺三角形・一般の三角形を提示し、同じように大きさが違っても同じ形の三角形ができるか予想させた。

②自力解決

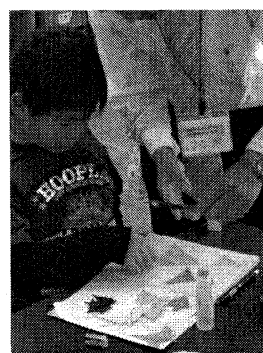
配られた教具を使って、それぞれの児童が自力解決に取り組み、できた形はノートにとっていった。

③練り上げ

それぞれの児童がある程度相似な形をつくれたところで、黒板の前で発表させた。

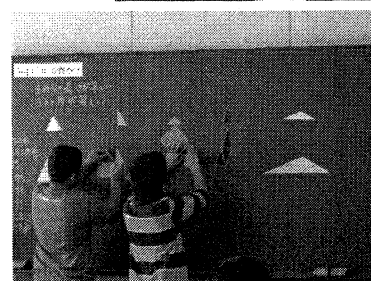
まずはどの三角形でも同じ形ができることを、3つの角度がそれぞれ同じになることを確かめながら確認した。

一般の三角形でも相似な形ができたことから、どんな三角形でも同じ形ができることを感覚的に理解できたようだ。また、授業の中では十分取り上げられなかったが、できた形の並び方に着目することで、同じ並べ方をすれば試行錯誤しなくても同じ形をつくれることがわかる。



次に、「どの三角形も4の倍数の枚数でできる」とい

うことに気づいた児童がいた。間違った気づきであるが、枚数に着目することができた。同じ形になったものの下にどんどん付け加えていくことでさらに大きな形をつくっていけることが確かめられた。そして、下に広げていくと1, 4, 9, 16, 25と枚数が増えていくことから、「 1×1 」「 2×2 」「 3×3 」「 4×4 」「 5×5 」となっていることに気づいた。また、三角形の面積公式と比べながら、「底辺も高さも2倍になっているから、枚数は4枚。」「底辺も高さも3倍になっているから、枚数は9枚」と、長さに着目して相似比に近い見方をもたせることができた。



話し合いが一段落した後、「2枚・3枚でもできる形があります。」ということを伝え、再度それぞれで試行錯誤をさせ、考えさせた。特に三角定規の直角三角形の形が3枚で相似な形をつくれることには、どの児童も驚き、おもしろさを感じる事ができたようだった。

④まとめ

学習後の感想には、次のようなものがあった。

- ・へんな形の三角形も同じ三角形が作れるなんてすごいと思いました。
- ・同じ角度であれば何個積み上げても角度が同じですごいと思った。
- ・同じ形を作るのが楽しくなった。直角二等辺三角形が2枚でできるのに驚いた。

VI. 事例4

1. タイトル

紋きり遊び

2. 教材の位置づけ

(1)学年 第6学年

(2)関連単元 対称な図形

3. 図形の美しさと教材との関連性

本教材では、次の美しさに焦点が当てられる。

(美しさ1) 図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

(美しさ2) 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

日本では、江戸時代から庶民の間で愛されてきた遊びに「紋きりあそび」がある。紙を折って、型通りに切り抜き、そっと広げれば、そこに美しい紋の模様があらわれる。それが「紋きり遊び」である。江戸時代の人々は着物や手ぬぐいなどの日常品、のれんや看板、そして長屋の障子にまで「紋」があしらわれていた。生活の中に溶け込んだ、ひとつの「美のカタチ」だった。

新学習指導要領解説算数編(2008)にも次のような記述が明記されている。

第6学年〔算数的活動〕ウ

- ・対称性については、身の回りから対象な図形を見付ける活動を通して、図形のもつ美しさや、日常生活に対象な形が用いられることを実感的に理解できるようにすることをねらいとしている。対象な図形については、敷き詰められた図形や敷き詰められた模様などを通して、整った形の美しさとして日常生活でも見付けることができる。また、対称な図形は、植物や動物、装飾品、模様、地図記号や都道府県のマークなど、身の回りのいたるところで見られるので、それを見付ける活動を大切にしていこうとする。

そこで、子どもたちと、自分だけのオリジナルな紋を考えたり、発表する活動は、図形の取り扱いを通して、美的な感覚など、情位的感性を豊かにするために有効な教材だと考えた。また、この「美」ということを、単に、形として目に見える事柄を対象とするだけにとどまらず、対象の概念の考察などのように、論理的な関係にも「美しさ」を認めることができるようにしたい。

こうした美しさに価値観をもち、それを追求しようとする事が、新しい創造活動を引き起こし、図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させることにつながっていくと考える。

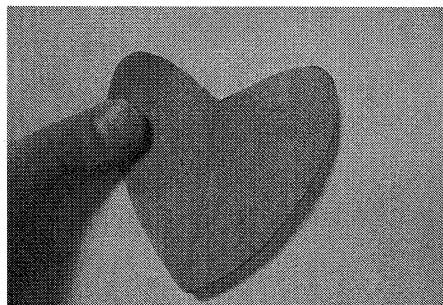
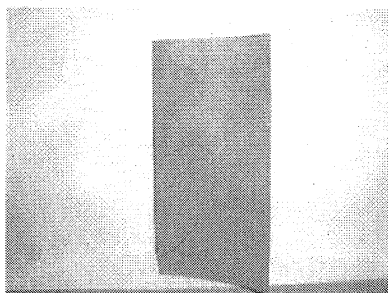
4. 教材の特徴

図形の対称性は、美しい模様や整った形として実社会においても多く活用されている。また、国会議事堂を始め平等院鳳凰堂、古代ローマ建築、古代ギリシア建築など美しいと言われる建物は対称性を取り入れたものが多く取り入れられている。

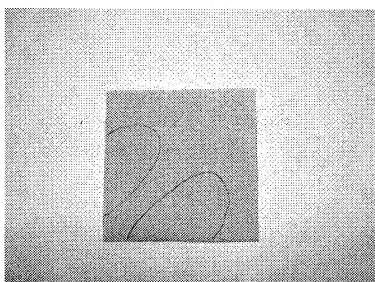
そこで、図形の対称性という観点として、江戸時代から日本で遊ばれてきた紋きり遊びは、対称性という観点に加え、図形がもつ美しさという2つの視点を学習できる優れた教材であると考ええる。

また、図形の切り口や、折り方からできあがりの図形を類推したり、できあがった図形を説明するなどの活動を行うことができる。以下は、2つおり、4つおり、6つおりの例である。

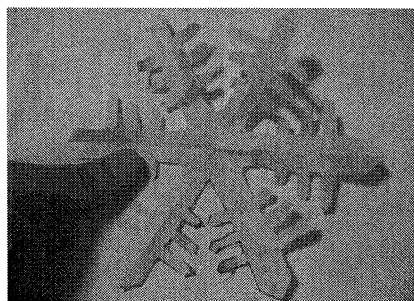
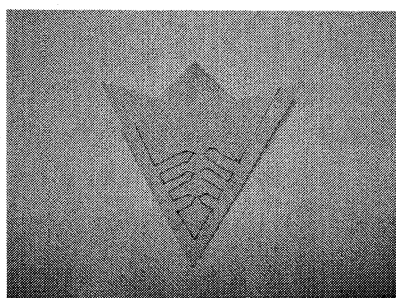
[2つおり]



[4つおり]



[6つおり]



Ⅶ. 事例5

1. タイトル

サッカーボールの形を作ろう

2. 教材の位置付け

(1)学年 第6学年

(2)関連単元 いろいろな立体

3. 図形の美しさと教材の関連性

本事例では、次の美しさに焦点が当てられる。

(美しさ2) 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り

立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

児童にとって、サッカーボールは身近でありながら、その構成について考察することは日常生活においてはほとんどない。しかし、正五角形と正六角形を規則的に敷き詰めることによってできるこの立体（切頂二十面体）は、その構成を考えていくことで、より「美しい」と思うことができるだろう。

切頂二十面体は20の正六角形と12の正五角形で成り立っている。これを教具を用いて組み立てていくことにより、「3つの正六角形を1つの頂点の周りに集めてしまうと、

「 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ 」となり、平面になってしまうから立体にならない。」といった図形の性質を児童に気付かせていきたい。また、他の正多面体や準正多面体でも同じようなことがいえるだろうかといったことに興味を持ち、単に「美しい」と感じるだけでなく、そこから数学的に応用していこうとする姿勢を育てたい。

4. 授業の概要

本授業において、ポリドロンという教具を用いた。ポリドロンは、プラスチックでできた三角形や四角形などのフレームのパーツで、それをはめ合わせることで平面図形の敷き詰めや立体図形の組み立てをするものである。本授業では、正五角形と正六角形のポリドロンを用いた。

(1) 正多面体を紹介する

- ・正六面体 …立方体のこと
- ・正四面体 …底面だけでなく、側面も合同な正三角形になっている三角錐
- ・正十二面体…合同な正五角形12枚で囲まれている立体
- ・正八面体 …合同な正三角形8枚で囲まれている立体
- ・正二十面体…合同な正三角形20枚で囲まれている立体

正六面体、正四面体は既習の立体であったため、子どもたちはすぐに理解していた様子である。面の形が正方形（正四角形）、正三角形ときたので、次は正五角形の面を持つ正十二面体を紹介した。正八面体と正二十面体については、面の形は正四面体と同じ正三角形だが、1つの頂点に集まる面の数が違うということを、ポリドロンを使って教師が示した。

(2) グループでポリドロンにふれる

子どもたちは4人グループを作り、各グループには正六角形（20枚）と正五角形（12枚）のポリドロンが配られた。正多面体について学習した直後であったので、各グループで正十二面体や正二十面体を作っていた。多くのグループが一通り正多面体を作り終わる頃になると、正六角形で平面を敷き詰めていくグループや、正六角形と正五角形を組み合わせて立体を作ろうとしているグループがでてきた。その中で、「サッカーボールの形」になると発言した児童がいたので、全体の動きを止め、サッカーボールの話へ移った。

(3) グループでサッカーボール型を作る

教師はポリドロンで作ったサッカーボール型を提示した。その後、グループごとに作業をさせた。早いグループは5分程度で出来上がったが、7分以上かかっても、なかなか完成させられないグループもあった。

まだ完成していないグループがあったが、一度全員の手を止めさせ、一旦話し合いに移った。どのように組み立てていけばいいかを考える前に、「どのようにしてはいけないか」を聞くと、正六角形の面3つが1つの頂点に集まっていけないというものが出た。「 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ 」で平面になってしまうため、これは正 n 角形（ $n \geq 6$ ）で正多面体が作れないことの証明にもつながっている。これがわからずに、やみくもに作っていたグループもあり、友達の説明を聞いて納得していたようだ。

また、立体をよく観察すると、正五角形の面が隣り合っていないことがわかる。その結果、正五角形の面の周りには、すべて正六角形が集まる形になる。これに気付いた児童がいたグループは、4人がこの形を作るところから組み立てていた。立体の観察の仕方から、正五角形の面の場所を対称性を用いて考えているようにも見られた。

上記の2つの条件から、正六角形の面の周りには、正五角形の面と正六角形の面が交互に集まるのだが、

そのことを発表した児童がいなかったため、教師側で紹介した。

この後、まだ完成していないグループはつづきをして、無事に時間内にすべてのグループが完成にこぎつけられた。

(4)授業を終えて

小学校段階では、立体を扱う場面が少なく、子どもたちも慣れていない場面が多かったように思えた。特に、展開図という平面で表されたものを、実際の立体に組み立てるということは、多くの作業を経ることで経験されていくことだろう。

今回のサッカーボール型のように、立体図形の構成では、平面図形の「頂点」「辺」に加えて、「面」について考える必要が出てくる。面の形や配置、ときには数や向きなどに注目させることで、立体図形についてより深く考察し、豊かな感覚を持つ児童を育てることができだろう。

この授業では、「対称」という言葉を引き出せなかったことが残念だが、対称性についても注目して操作をさせることができたなら、図形の持つ数学的な美しさをより感得させることができたのではないかと感じている。

VIII. 終わりに

本稿では、美しさを、それが人間の行為の所産として見いだされるものとして捉え、それらには、人間が創り出したものと、人間によって見いだされた、人間の行為を超越して存在しているものがあるという立場をとった。そして、その美しさの対象は、対象としたものの構造や性質に限定せず、人間が創り上げる際のプロセス、考え方にも及ぶものとして捉えた。また、それらは、個人的・階級的なものではなく、全ての人を対象とした社会的なものであるという立場で考えていくことにした。

そして、図形における美しさの類型として、次の5つを特定した。これらは、現段階での捉えであり、必ずしも独立であるとはいえない。

(美しさ1) 図形そのものを見て美しいと思える情意的充実感

(美しさ2) 複数の図形を数学的に考察することにより、それらの間に、共通に、さらには一般的に成り立つ性質が潜んでいることに畏敬の念を感じとれる情意的充実感

(美しさ3) 図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる情意的充実感

(美しさ4) 図形の操作等を行う中で引き出された、有意味で予想外の着想に感銘できる情意的充実感

(美しさ5) 抽象的な数式の関係をも、図形的に具体化して視覚化できたことに感銘できる情意的充実感

これらの捉えを前提に、小学校段階において、その美しさを感じ得するための教材を次のように5つ開発した。

(1)形で数えよう (小2)

(2)同じ種類の面のサイコロを作ろう! (小4)

(3)同じ形を作ろう (小5)

(4)紋きり遊び (小6)

(5)サッカーボールの形を作ろう (小6)

今後は、図形の美しさを感じ得するために、どのような点に留意して指導を行っていけばよいか、また、児童が美しさを感じ得できたかどうかをどのように評価していけばよいかを実践的に明らかにしていく必要がある。

[参考・引用文献]

文部科学省(2008),「小学校学習指導要領解説算数編」, 東洋館出版社, pp. 175-176.

古在由重(1971),「哲学辞典」, 青木書店, p. 383.