数学を身近なものと生徒に感得させる数学的モデリングに関する研究

橋本吉彦*，池田敏和*，平出雅一**，斎藤雅人***

Research on Mathematical Modelling to Help Students Feel "at Home" with Mathematics

HASHIMOTO Yoshihiko, IKEDA Toshikazu, HIRAIDE Masakazu, SAITO Masato

1．はじめに

数学的モデリングについては、日本数学教育学会八十五周年記念誌の「最近15年間の日数教の国際的な活動」(2003) の中で、ICMI研究の１つ「数学教育における応用・モデリング」という記述があるように、世界的に認知されている用語と捉えることができる。

文部科学省（平成14年１月17日）は、確かな学力の向上のための２００２アピール「学びのすすめ」の中で、次のように述べている。

> 昨年１２月に公表された、経済協力開発機構（OECD）の「生徒の学習到達度調査（PISA)」の結果によると、我が国の児童生徒の学力は、単なる知識の量だけでなく、それを活かして実生活上での課題を解決する能力についても国際的に見て上位に位置していることが明らかになりました。(中略)
>
> ３．学ぶことの楽しさを体験させ、学習意欲を高める

学習指導要領（中学校数学）の目標の中にも「数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」とある。

学ぶことの楽しさ、数学的活動の楽しさを生徒が感得することができるならば、日々授業を行っている教師の苦労も少なくて済むことであろうと考える。

そこで、本稿では、数学を身近なものと生徒に感得させる数学的モデリングに焦点をあてた研究について、２つの実践授業の考察を加味しながら述べることにする。

2．研究目的

数学を身近なものとするには、作業的、体験的な活動の重要性はすでに指摘されていることである。(教育課程審議会答申、1998)

作業をさせる中に、“モデル”そのもの自身を作らせる場合と教師側が用意した“モデル”を使って作業させる場合の２通りを考えることができる。ここでいうモデルは、島田が指摘するモデルと

* 横浜国立大学教育人間科学部
** 福島県立平工業高等学校
*** サレジオ学院中学校・高等学校

いう用語との関連で捉えると次のようになる。

島田（1977）は、『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』の第1章の中で、次のように述べている。

モデルという語は、現実 → モデル → 理論 という方向の中でのものとして用いられているが、この語は、その逆の向きにも用いられている。

ア．抽象的な公理系の無定義用語に、解釈を与えて作った表現モデル

イ．現実についてのことばに抽象的な理論での意味を付した擬似数学モデル

ウ．数学的な概念や関係の、それと部分的に同型と見られる経験世界の事物による表現

本稿におけるモデルは、操作しやすく、理解しやすくするという実践的な目的を有しており、「理論→モデル」のイ、ウと密接に関わりがある。しかし、「理論→モデル」という方向の中だけで捉えるものではない。というのは、現実場面に対して、いくつかの条件・仮定が設定されてつくられるという意味でのモデルの概念も含んでいるからである。すなわち、現実と理論が前もって定まっている状態において、それをつなぐものとしてモデルを捉えているわけである。図で示せば、下図のようになる。

現実 → モデル ← 理論

本稿では、モデルを「現実→モデル←理論」という現実と理論からの両方向から捉え、現実事象にある条件・仮定を設定してつくられるたもの、かつ、抽象的な理論を一段下の具体的な次元で表現したものを意味することにする。

そこで、この“モデル”を作る場合の授業をA. 与えられた“モデル”をもとに行われる場合の授業をBとして、2つの授業を通して、以下のことを明らかにするのが本研究の目的である。

（1）教材化にあたって、身近なものの“モデル”を考える際、数学的な視点から、どのような範疇を設定すればよいのかを明らかにすること。

（2）“モデル”を作成したり、活用したりすることに関して、どのような意義があるのかを明らかにすること。

3．目的（1）に関して、範疇の設定

伝統的な数学の領域の区別としては、解析学・代数学・幾何学・統計学などが挙げられる。これらは数学の概念的な部分をその性質によって区別したものである。一方、Steen(1990)は『On the Shoulders of Giants』の中で、想像力・数学・科学に根ざした主題として、

[1]次元(Dimension) [2]量(Quantity) [3]不確実性(Uncertainty)

[4]形(Shape) [5]変化(Change)

と5つの主題を提示している。また、Devlin(1994)は『Mathematics-The Science of Patterns』の中で、「抽象的なパターン」の具体例として、

[1]計算(Counting) [2]推論と伝達(Reasoning and Communicating)

[3]動きと変化(Motion and Change) [4]形(Shape)

[5]対称性と規則性(Symmetry and Regularity) [6]位置(Position)

と6つの主題を挙げている。これらはともに数理科学へのアプローチやつながり・数学の全体的な

構造や他領域への可能性などを示唆している。このような「数学」の捉え方を踏まえ、身近なものを数学の授業に教材化するにあたって、つぎの４つの観点を設定した。

1. 次元 ……… 二次元、三次元、二次元から三次元への拡張、三次元から二次元への射影
2. 形 ………… 表現、分類、分析、抽象化、単純化、理想化
3. 変化 ……… 変化の前後における状態、変化におけるパターン
4. 不確実性 …… データの収集、分析、表現、活用

この４つの観点は、特に事象を「見ること（視覚)」に重点を置いた観点である。ある身近なものを教材化していく上では、まずその事象そのものが一体何であるのか、どのようなものであるのか、ということを捉えていくことが肝要である。そして、身近なものに対してこの４つの観点で考察していくことからさまざまな数学的な概念（あるいは数学的な概念につなぐことができる多くの原理や法則や規則など）を考え出すことができる。

このように、４つの観点から身近なものを数学的に捉えていくことによって、その事象におけるいくつかの“モデル”を設定していくことも可能である。こうして設定された“モデル”は、その“モデル”をつくる活動や活かす活動を数学の授業の中で行っていくことによって、さらに発展していくものである。

４. 数学的モデリングの授業の実際

(1)「階段の問題」に関する授業

① 本問題の設定理由

身近なものを数学の授業に教材化していくにあたり、本問題においては「階段」を題材に挙げ、「階段」について数学的に考察し、教材化していくこととした。

身近には様々な階段があるが、本問題で扱っていく階段は【同じ段の繰り返しでできている階段】を扱うこととする。これによって、「同じ段の繰り返し」というのは階段における１つのパターンであり、このことを基礎にして様々な数学的知識を生み出すことが可能となる。

＊階段１段の高さにあたる部分の長さを“蹴上げ（けあげ)”、階段１段の幅（足の踏み場）の部分の長さを“踏面（ふみづら)”と呼ぶ。「同じ段の繰り返しでできている階段」とは、この“けあげ”と“踏面”がすべての段で同じ長さであるということである。

このように設定した階段の蹴上げと踏面はすべての段で同じであるところから、$\dfrac{\text{蹴上げ}}{\text{踏面}}$ の値が一定であり、ちょうど階段の段にあたる部分を直線で表すことができる。つまり、階段全体を直角三角形で表すことができる。本問題ではこのようにつくられた直角三角形を階段の“モデル”とし、これを活用した一連の活動や問題を「階段の問題」として設定することにした。

「階段の問題」は大きく２つの授業形態に分けられる。１つはこの階段におけるパターンについて学び、それによって階段が直角三角形（＝階段の“モデル”）で表せることを学習する授業。もう１つはこの階段の“モデル”を用いた活動や問題を行う授業である。このように、ある身近なものについて基礎となる数学的知識を学ぶ授業を【Core 授業】、この Core 授業で得た知識を用いてより発展的な学習を行っていく授業を【Option 授業】と位置づける。今回の授業では、この２つの授業を実践することによって、「Ⅰ. 階段の“モデル”を理解する　→　Ⅱ. “モデル”をつくり、それを活かす」という流れによって、生徒から様々な反応を見るとともに、“モデル”がどのような意義

を持っているのかを検証した。

≪Core 授業・Option 授業と4観点による授業設定≫

階段について考えよう	＜Core 授業＞
① 次　　元	二次元に単純化して考える（立体的な階段を横から見た図を用いる）
②　　形	階段全体を直角三角形で表現して考える。（階段のモデル）
③ 変　　化	「同じ段の繰り返し」から関数関係を考える。
④ 不確実性	身近な階段にも様々な形や種類があることを知る。

身のまわりにある階段をモデルで表してみよう	＜Option 授業＞
① 次　　元	階段のモデル（Core-②）を折り曲げるなどの活動で三次元からの考察を行う。
②　　形	階段のモデル（Core-②）をもとに、様々な階段のモデルを表現できる。
③ 変　　化	傾斜と昇りやすさの関係について考える。
④ 不確実性	身近にある階段の「蹴上げ」、「踏面」などを調査する活動を行う。
＜備考＞	「昇りやすさ」をもっと実感できるような体験的な活動を含めた授業を構成する。

②　授業の実際

授業は、平成14年10月18日、11月1日の2日間にわたって、50分授業を2回行った。対象は、神奈川県平塚市立神明中学校の3年選択数学25名である。①を受けて、以下のような授業を行った。

1.「同じ段の繰り返しでできている階段」について考察し、関数的な見方や考え方から、階段全体を直角三角形（＝階段の“モデル”）で表現できることを知る。

≪第１時≫

2. 生徒各自が設定した蹴上げと踏面を用いて、実際に直角三角形（＝階段の“モデル”）を作成し、その“モデル”を現実場面に適合させる活動を行う。≪第2時≫

◇授業の流れ

(1) 身のまわりにある様々な階段の中で、「同じ段の繰り返しでできている階段」に着目し、それの持つパターンを関数的な見方・考え方から考察する。

階段はその設置場所・目的などにおいて、様々な形状を持つ。しかし、すべての階段は蹴上げと踏面で構成されている。そこで、身近にある階段として一般的な「同じ段の繰り返しでできている階段」に注目し、そのパターンについて考えさせた。

「同じ段の繰り返し」とは、蹴上げと踏面が同じ長さで繰り返されるということである。このことと１次関数で学んだ関数的な見方・考え方を対応させていくことによって、「階段の段の部分全体を直線で表すことができる」ということをクラス全体で示していく。（図１・図２）

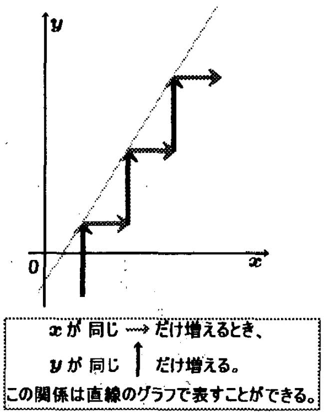

図１

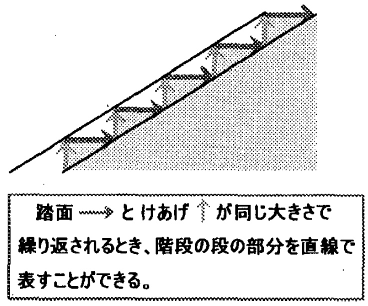

図２

これらのことから、「同じ段の繰り返しでできている階段は、段の部分全体を直線で表すことによって，その階段全体を直角三角形（＝階段の“モデル”）で表現できる」ということを，実際に階段の“モデル”を提示しながら説明し，生徒に理解させた。(図３)

さらに，３種類の階段の“モデル”を提示し「昇りやすさ」についての比較を行った。「昇りやすさ」の概念は生徒の主観が強く，このことが次の階段をつくる活動につながっていくものとなる。(図４)

最後に，生徒一人ひとりにレポートを与え，身のまわりにある様々な階段における蹴上げ・踏面・段数などを記述させ，このレポートを次時で用いることとした。≪第１時≫

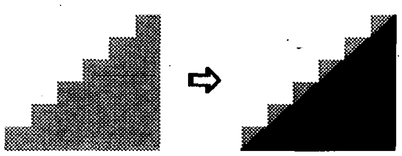

図３

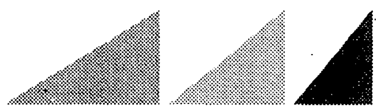

図４

第１時では階段を直角三角形の“モデル”で表現できることを学習した。これにより、現実場面にある階段を“モデル”で捉え、これ以後、“モデル”を用いて検討したり、操作したりできるようになる。また、複数の“モデル”を比較することで、実際の階段をイメージしたり、そのイメージした階段を俯瞰したりできるようになる。

(2)生徒各自が設定した蹴上げと踏面の数値を用いて、階段の“モデル”である直角三角形をつくる。

「縦・横・１階から２階までの高さが決められたビルの内部に、１階から２階まで続く階段をつくるにはどうすればよいか」という問題を設定し、レポートで決めさせた蹴上げと踏面の数値から、階段全体を表す“モデル”をつくる。“モデル”をつくる際に、その“モデル”の数値設定や“モデル”をつくっていく中で様々な工夫を行った。

≪第２時≫

(3)生徒が各自つくった階段の“モデル”を、現実場面や問題場面に合うように自由に操作・修正する活動を行う。

教師側で用意したビルの模型を用いて、生徒各自がつくった階段の“モデル”をビルの模型の中に設置していく。このとき、ビルの模型から階段がはみ出たり、あるいは階段を設置する位置が現実場面にそぐわなかったりしたときに、階段の“モデル”を折ったり曲げたりすることで、現実場面に適合するような配置にすると同時に、その操作したものが、実際の階段の形状を表していることを理解させた。（図５）≪第２時≫

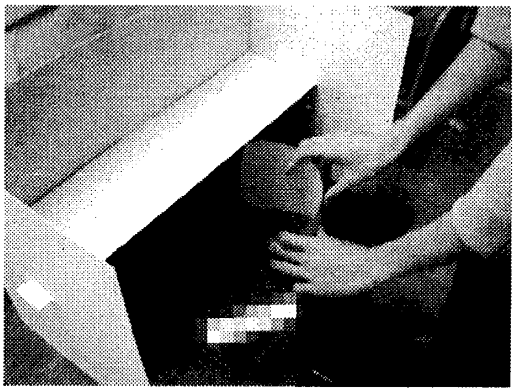

図５

（２）「テニスのサーブの問題」に関する授業

①本問題の設定理由

スポーツの場面においても、数学的な考え方をもとにみていくことで、直観や予想に反する意外な事実を発見することがある。

テニスのサーブの場面がその１つである。プロの選手が行うテニスのサーブをみていると、たいてい図６のAかBの位置からサーブを打っている。当然、各選手の打ちやすい位置や戦略によってどちらから打つかということが決まってくる。しかし、ここで、もしサーブを打ったあとのことは考えないで、単純にAとBのどちらから打った場合の方がサーブは入りやすいのかということを考えた場合、その答えはどうなるのであろうか。本問題では、この疑問に注目していくことにする。

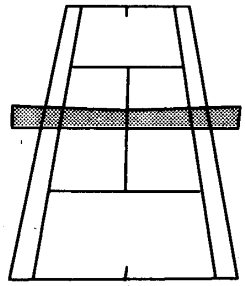

図６

「入りやすさ」というものは漠然としたものである。よって、これを客観的かつ合理的に比べていくためには、何らかの数値に置き換えていくことが考えられる。そして、この際、どのような数値に置き換えていくかということを考える場合に、「形」や「不確実性」といった視点が要求される。

「形」という視点でみると、例えば、A、Bの各位置からサービスコートの中で狙える部分はどちらが大きいのか、ということを考えた上で入りやすさを比べる方法がある。また、「不確実性」という視点でみると、例えば、同じ選手がそれぞれの位置から同じ数だけサーブを打ち、そのうち、何回入ったかということを調査した上で入りやすさを比べる方法もある。ところが、後者の方法を用いる場合、得られる結果は、当然サーブを打った選手に依存したものである。よって、そこから一般的にどちらが入りやすいのかに対する答えを導くことは難しい。また、こうした調査を授業の中で行っていくことは容易なことでない。そこで、授業では、サーブの場面を「形」という視点でみていくことを意図して、サーブの入りやすさを考える授業展開を行うことにした。

図７は、Aからサーブを打つ場合を表現したもので、数学的に扱いやすくするために図形化したものである。Iは打点、Lはネットすれすれでボールが入るときのボールの落下点、Hはその際のネット上の通過点、また、C,N,DはそれぞれL,H,Aからネットラインに垂線を下ろしたときの足であ

る。

この中で、「次元」を１つ下げて、２方向から観察したときにみられる図８、図９のような形に注目する。すると、△HLN∽△IHM，△NLC∽△NADという関係をみいだすことができる。よって、これらの関係から、LCの長さは、ネットの高さと打点の高さの比によって決まる一定値になることがわかる。したがって、ネットおよび打点の高さが一定という条件のもとでは、Aから打つ場合の狙える部分は図10に示した長方形の部分（斜線部分）になる。同様に考えれば、Bから打つ場合でも狙える部分は同じである。以上から、狙える部分の大きさをもとにして入りやすさを比べると、ある条件の下では、入りやすさは同じになる。

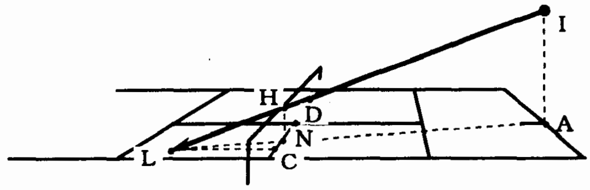

図７

多くの生徒にとって、こうした結果は意外なものとして受けとめられるだろう。そして、このような結果は、身の回りの事象を数学的に考えたときにはじめてみえてくるもので、こうした経験を通して、生徒たちは身の回りのものを数学的に考えることのおもしろさに気づき、数学を身近なものと感じてくれるものと考える。以上が、本問題を設定した理由である。

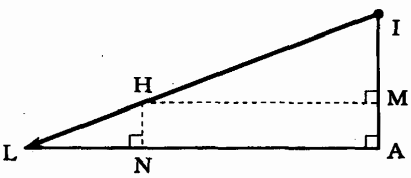

図８

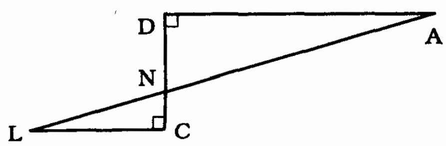

図９

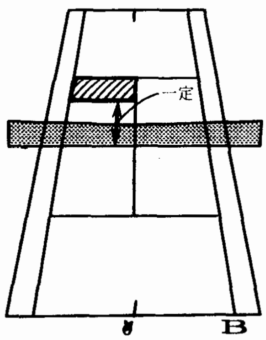

図 10

②授業の実際

授業は、平成14年12月16・19日の２日間、50分授業を２回行った。対象は、神奈川県立神奈川総合高等学校の生徒10名である。生徒たちを２つのグループに分け、各グループにテニスのサーブの場面の“モデル”を１組ずつ渡し、それをもとに「テニスのサーブの問題」に取り組ませた。

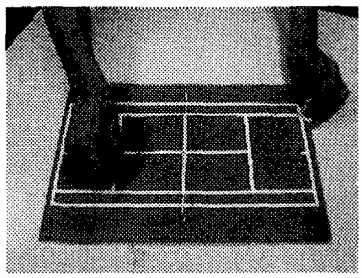
図 11

今回用意した“モデル”の写真は図11である。“モデル”は、実際の大きさの1.5％（コートの大きさ、ネットの高さ、サーブの打点の高さ、のすべてがこの縮尺になっている）であり、発砲スチロール製の板・糸・セロハンテープなどを主な材料として製作している。また、意図している「形」に注目した考察が行われるように打点やネットの高さを理想化して一定に設計してある。

授業は次のような流れで行った。

［１時間目］プロ選手がテニスをしているシーンのビデオを見せながらテニスのルールを解説し、「テニスのサーブの問題」を導入した。そして、グループごとに、用意した“モデル”をもとにして、どのような変数を考えると、その入りやすさを比べるのに都合がよいかについて話し合わせた。話し合いの際、教師は、意図的な方向指示はせずに、各グループの話し合いの中で出されたアイデ

アを支援しながら授業をすすめた。話し合いの中で出された変数は、「サービスコートまでの距離」、「サービスコートの中の狙える部分の面積」、「ボールがネットを通過するときのボールとネットの間の開き」などであった。これらの変数の中で両方のグループで注目された変数は、「ボールがネットを通過するときのボールとネットの間の開き（図12）」という変数であった。

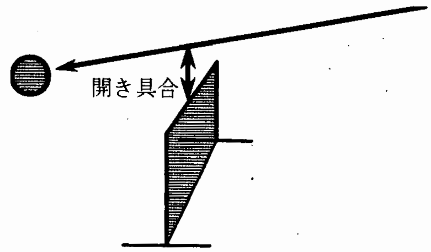

図 12

［２時間目］教師の判断のもとに、入りやすさを比べる変数を、「ボールがネットを通過するときのボールとネットの間の開き」に焦点化した。そして、１時間目に用いた“モデル”を与え、それをもとにこの変数について分析させた。どちらのグループとも、はじめは、“モデル”を観察・操作しながら、実験的に、A、Bのどちらから打った場合の方が開きがあるのかということを調べていた。しかし、次第に、観察した“モデル”の様子をワークシートにスケッチする生徒が現れ、その生徒はその後、スケッチした図形をもとに数学的に考察を始めた（図13・図14）。ここで、この焦点化した変数で入りやすさを比べる場合、実際には、サービスコートの中のさまざまな地点を狙う場合について、A、Bのどちらから打つ場合の方が開きが大きいかということを細かく分析し、それらを総合してAとBの入りやすさを比べていく必要がある。ところが、授業では、時間的な制約から、サービスコート内のある１点（サイドラインとサービスラインの交点）を狙う場合についてのみの分析を行った。

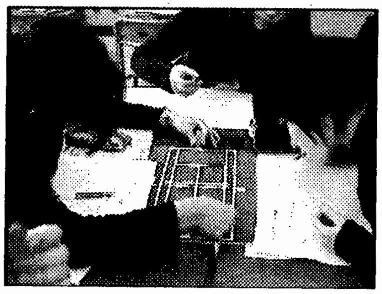

図 13

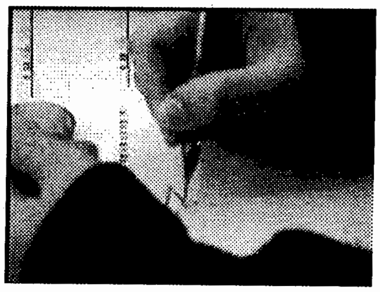

図 14

生徒たちの考察の結果、ネットの高さや打点の高さが一定という条件のもとでは、この変数に関して差は生じない、すなわち、入りやすさは同じである、という結論を導いた。

5．授業について考察

(1)「階段の問題」

①階段の問題における“モデル”の位置づけ

階段の問題における“モデル”の位置付けを図式化すると、図15のようになる。

生徒各自がつくった階段の“モデル”は、生徒自らが設定した数値によるものであり、それ自体が話し合いの対象となる。今回はグループ活動ではなく、各個人が考察していく活動であったが、“モデル”自体を操作することで、現実場面に適合させるためにはどうすればよいのかを、数値や変数をおおまかに捉えながら考えることができる。言い換えると、変数・関係の生成が促進されたといえる。また、操作した“モデル”は、現実場面を俯瞰したものであり、かつ図形化されたものである。そこから、図形化が促進され、その“モデル”が何を表したものであるのかをさらに検討することで、より深く現実場面とのつながりを考えることができることがわかった。

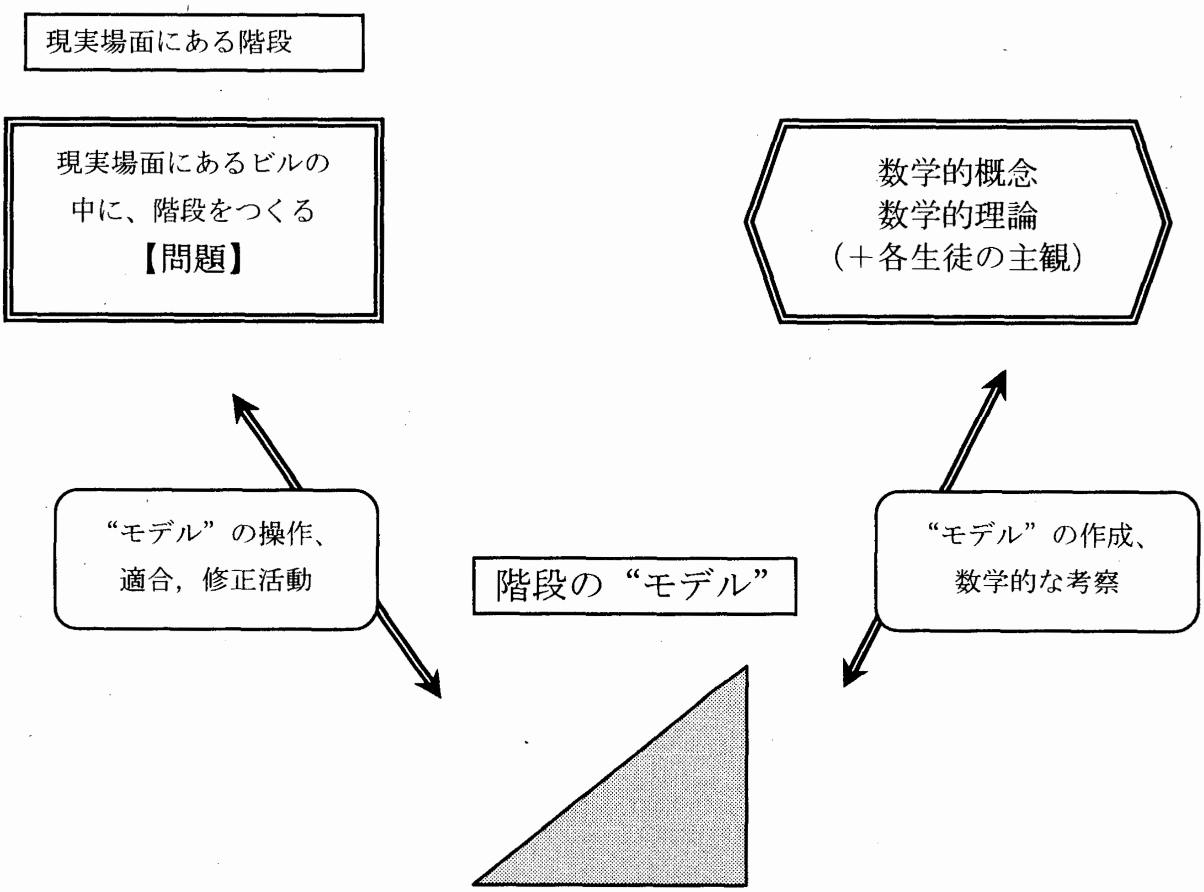

図15

今回の“モデル”をつくる活動では、数学の理論を用いて“モデル”をつくり、その“モデル”を用いて問題を解決していく活動であった。すなわち、“モデル”が数学的な理論と現実場面の問題をつなぐ役割を担うものである。また、“モデル”を操作することによって視覚的かつ概略的（厳密な数値を出すことはできないが、大まかなものをつかむことができる）な考察を行うことができる。授業では，得られた階段の“モデル”を操作・修正することで、数式や図よりも容易に修正を行え、現実場面における問題に取り組むことができた。

また、第1時において、階段を直角三角形で表せることを関数的な見方や考え方を用いて示した。このことから、授業後の生徒のレポートの中には、調査した階段を数式化（$y=ax$の形）したものがあった。

つくられた“モデル”には、その“モデル”だけではわからないが、それ自身に数学の理論（数学的知識）が含まれている。“モデル”をつくり、現実世界の事象を一度“モデル”に置き換えることで、現実世界のままでは気づかなかった、事象に含まれる数学の理論（数学的知識）をより考察しやすくなる。“モデル”はそれ自身での考察だけでなく、そこから数学的理論や概念への示唆をも与えてくれるものと考える。

② “モデル”の持つ価値

“モデル”をつくる活動はその活動そのものの楽しさ、自分なりの発想や考え方を活かすだけではなく、“モデル”自身による様々な考察を可能にする。これは“モデル”を活用する活動であり、

“モデル”をつくる活動とともに、それぞれが補完しあうことで数学を身近なものとして感得させるには有効な活動になる。

今回の授業を含め、“モデル”の価値を以下のように挙げる。

Ⅰ．“モデル”を通して現実場面と数学的概念の両方を考えることが可能である。

Ⅱ．“モデル”自身が現実場面と数学的概念をつなぐものと捉えられる。

“モデル”を数学の授業に活かしていくことは、現実場面（における問題）と数学的概念を捉えていく上で重要なことである。さらに、その“モデル”を操作することが数学的概念とどう関わるのか、数学的概念の形成にどう役立っているのかを考察していくことも必要である。

（２）「テニスのサーブの問題」

今回行った授業は、現実世界の事象を考察する上で、教師があらかじめその現実場面の“モデル”を用意し、それをもとに生徒たちがグループの中で課題に取り組んでいくというやり方で実施した。ここでいう“モデル”は、テニスのサーブという現実場面を、目前で操作したり、理解しやすくするために現実に近いかたちで縮小したものであるが、それに加えて、「形」に注目して考察を行った場合に、相似などの数学的な概念を応用することができるようにもなっているものである。

授業時間の制約や、対象となった生徒たちの多くが普段から数学に対して苦手意識を抱えているということ、そして、対象の生徒全員が数学的モデリングの初心者であるという実態があった中で、与えられた“モデル”をもとに取り組む数学的モデリングという数学的活動について、授業中に収録したVTRの記録、そして生徒たちが授業後に書いた感想から考察する。

① グループ活動における話し合いの活性化

数学的モデリングの授業を行う上で、しばしば生徒たちの話し合いの場を保障していくことが大切であるといわれる。そして、授業では、生徒たちが自由に話し合いながら共同で問題解決ができるようなグループ活動の形態がとられることが多い。ところが、実際にグループ活動を取り入れた授業を実施してみても、必ずしも数学的モデリングの促進につながる効果的な話し合いが行われるとは限らない。むしろ、多くの場合、グループを編成して、自由に話し合いながら課題に取り組もうと指示を出しても、生徒たちは主体的に課題に取り組んではくれない。なぜなら、話し合いを行っていく上での各生徒の準備が整っていないからである。

ある生徒たちは、教師から課題を与えられた瞬間、「なるほど、おもしろい問題だな」と課題に取り組む意欲を示し、その問題の文脈に詳しい生徒や数学が比較的得意な生徒などは、課題を聞いてすぐに解決に向けた方針を立てることができる。しかし、一方では、課題の意味が分からない生徒や、空間的な問題場面の様子をイメージすることができず、解決の糸口さえ見つけ出すことができない生徒もいる。

こうした課題に取り組む準備のレベルが異なる者どうしが、顔を合わせて話し合っていく際には、やはり、分かる生徒、言い換えれば、何らかのアイデアが浮かんだ生徒が、そのアイデアを他の生徒たちに伝え、そして、そのアイデアをきっかけに有効な話し合いに発展させていくことが期待される。ここで、各自のアイデアを他者にわかりやすく伝えていくことが、有効な話し合いに発展していくための重要な要素になってくるが、この際に、“モデル”が有効に活かされるのである。

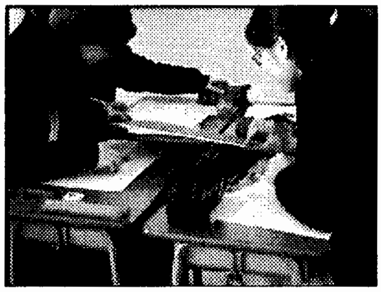

図 16

今回の授業においても、対象となった生徒たちは、普段の授業の際にグループ活動を行ってはいない。今回編成した2つのグループは、今回の授業のために構成したグループである。にもかかわらず、2時間の授業を通して、どちらのグループとも、質の違いはあるものの、図 16 にもみられるように、問題解決に関わる積極的な話し合いが行われていた。

問題の文脈に詳しい生徒、あるいは、ふとアイデアが浮かんだ生徒が、“モデル”を扱いながら他の生徒たちに説明したり、あるいは、自分の意見の同意を求めたりと、積極的に話を切り出す場面が観察された。

授業後の感想で、「今日の授業は、普段の授業よりも短く感じた」、「模型を使ってみんなで話し合いながら考える授業は新鮮で楽しい」ということを書いている生徒がいた。こうしたことからも、“モデル”を与えることが生徒たちの話し合いを活性化し、それによって活動自体を楽しくする効果がある、ということを示すことができた。

② 数学化の段階において主要な変数・関係をとらえやすくする

現実世界の問題を数学的に解決していく際には、まず、対象とする事象の中から問題解決にとって関係があると思われる変数を見出していかなければならない。そして、その見出したいくつかの変数の中から、設定した目的からみてより重要度の高い変数を選択し、それをもとに数学的に処理していくという段階を踏む必要がある。

「テニスのサーブの問題」の場合、はじめに、入りやすさをどのような変数で比べるか、ということを考える必要がある。この段階で、はじめに、目的とする変数を設定するのである。目的とする変数が決まったら、その次は、その変数について分析する段階へと進む。ここでは、この変数に関係した変数（従属変数）をみつけ、これらの変数を数学的に処理していくために、変数間に成立する数学的な関係を見出していかなければならない。

ところが、生徒たちにとって、実際のテニスの場面からこうした変数や関係を見出していくことは容易なことではない。なぜなら、生徒たちが実際にテニスのサーブをやってみたり、その事象を目前で観察するということが難しいからである。また、数学的に処理できるような変数を見つけていくには、ボールの軌道のように、実際には直線として残らないものでも直線があるものとみることができる力が必要になってくるからである。

今回の授業では、こうした点を考慮して、実際にテニスの実験ができない代わりに、それと似た実験を目前でできるように“モデル”を準備し、実際には観察することが難しいボールの軌道に関しても、目にみえる形で観察できるように設計した。

生徒たちは、こうした“モデル”のもつ特徴を活かしながら、“モデル”をいろいろと操作したり、さまざまな視点から観察したりするなどして、入りやすさを比べる変数として、「狙える面積」、「ネット上の開き」、「サーブを打つ位置（A または B）からサービスコートまでの距離」、といった変数に注目していた。2時間目には、「ネット上の開き」という変数に焦点化したが、この変数に関する考察の中でも、「サーバーの打点の高さ」、「ネットの高さ」、「サーブを打つ位置からボールの落下点までの距離などの変数」などの従属変数に注目し、一部の生徒たちは、自らこれらの変数の間に相似の関係を見出し、それをもとに「ネット上の開き」という変数の実際値を

求めていた。

こうした活動からも、実際の現実場面を実際に観察することが難しい状況で、生徒たちに“モデル”を与え、それをもとに課題に取り組ませる活動は、現実場面の問題を数学的に考察していく上で、主要な変数・関係をとらえやすくする役割があるといえる。

③　図形化を促進する

現実世界の事象を数学的に解明していく際に、その事象を、数学的に処理できるような図で表現していくことは欠かせない手続きである。ところが、特にモデリングの初心者にとって、この手続きを自ら行っていくことは容易なことではない。それは、モデリングを行う場合には、事象のありのままをスケッチすることをこえて、そこから理想化・単純化・抽象化といった考え方を踏まえて図を洗練させていく必要があるからである。また、数学的に扱えるような図をかくには、ある１つの視点からのスケッチだけではなく、事象をいろいろな視点から観察した上で、目的にあった必要な部分の図を抽出していかなければならない。時には、数学的な処理を容易にしていくために、事象が空間的なものであっても、そこから平面的な図を取り出していく必要もでてくる。

“モデル”は、数学的モデリングを円滑に進めていく上でのこうした難しさを軽減する役割がある。実際、半数以上の生徒たちは、２時間目の活動の中で、各自“モデル”の観察を通して、「ネット上の開き」という変数を分析していく上での必要な図を抽出し、そこからこの変数の値を求めていた（図 17）。

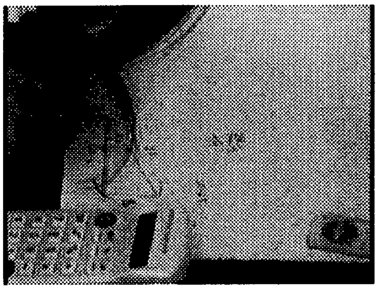

図 17

最終的には、現実世界の問題に取り組む際に、生徒たちが自ら生の事象を観察し、そこから解決に必要な図をかいていくことができるようになることが期待される。しかし、数学的モデリングの初心者が、一連のモデリング過程を踏んでいくためには、図をかく際の困難さをある程度緩和したかたちで、数学的モデリングを行わせる経験も大切なことである。そのために、与えられた“モデル”をもとに行う数学的モデリングは意義があると考える。

６．主な知見と問題提起

主な知見として、次の２点をあげることができる。

（1）身近なものを数学の授業に教材化するにあたっては、４つの要素――①次元　②形　③変化　④不確実性――を視点にそえ、それらのいくつかの要素に対応した意味を吟味するとよいことがわかった。この意味を生徒に意図的に意識させることによって、事例的にではあるが、数学を生徒に身近なものとして感得させることができることが明らかになった。

（2）数学的問題解決にあたって、現実の世界を反映した“モデル”を考えたり、その“モデル”を操作して、数学的な概念を引き出すことにより、数学を生徒に身近なものとして感得させることができることが事例的に明らかになった。

また、“モデル”を考えること、あるいは活用することは、次の点で意義があることが明らかになった。

①　話し合いの活性化、②　変数・関係の生成の促進、③　図形化の促進

また、次のような問題提起を考える。

２つの事例ではあるが、数学の基礎・基本を考える際、橋本（2003）が指摘するように、「何が大事なことか、何が基になっているのか」という視点から次のことがわかった。

①　三角形について、　直角三角形

②　相似について、　相似な三角形、　相似比

③　定理として、　三平方の定理

現行学習指導要領では、直角三角形は小学校３年生、相似な三角形・相似比は中学校３年生、三平方の定理は中学校３年生で学習する内容である。従前は、拡大図・縮図として「相似」の基になる話は、第６学年で取り扱われていた。三平方の定理に関しては、帰納的に関係を見つける、というように生徒に捉えさせるならば、小学校６年生に対しても可能なことと考える。

個人の力では何ともしがたいが、日本の算数・数学の学習指導要領の中に、上記①、②、③の内容の取り扱いを現行学習指導要領よりも下の学年に移行することを、数学的モデリングという視点から問題提起する次第である。

なお、「階段の問題」は平出が実践し、桑原嘉明教諭、南部由美教諭に特にお世話になった。「テニスのサーブの問題」は斎籐が実践し、石谷優行教諭に特にお世話になった。これらの先生方に謝意を表する次第です。

引用文献・参考文献

Devlin, Keith (1994)：Mathematics -The Science of Patterns, Scientific American Library。

翻訳書，K. デブリン（山下純一訳）：数学－パターンの科学（宇宙・生命・心の秩序の探求），日経サイエンス社，1995.

Steen, Lynn Arthur (1990)：On the Shoulders of Giants-New Approach to Numeracy, National Academy Press.

翻訳書，L. A. スティーン編（三輪辰郎訳）：世界は数理でできている，丸善，2000.

橋本吉彦（2003）：何が大事なことか，何が基になっているか，新しい算数研究，NO. 385，２月号，p. 1.

橋本吉彦・小山正孝・池田敏和（2003）：最近15年間の日数教の国際的な活動，日本数学教育学会誌第85巻第７・８号，pp. 23-26.

教育課程審議会（1998）：幼稚園，小学校，中学校，高等学校，盲学校，聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について（答申），平成10年７月29日，p. 6，pp. 48-50.

文部科学省（2002）：確かな学力の向上のための2002アピール「学びのすすめ」，（小冊子）.

島田茂編 (1977)：算数・数学科のオープンエンドアプローチ－授業改善への新しい提案－，みずうみ書房.

翻訳書，The Open-Ended Approach, A New Proposal for Teaching Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics，1997.