

博士論文

一次元量子ウォークにおける局在化の解析
Analysis on localization of
quantum walks in one dimension

横浜国立大学大学院理工学府
数物・電子情報系理工学専攻
数学教育分野

黄海 仲星
CHUSEI KIUMI

学位授与：2023年3月

目次

1	序	3
2	二状態量子ウォーク	4
2.1	二状態量子ウォークと転送行列	4
2.2	有限欠陥二相系モデルの固有値解析	7
2.3	一欠陥二相系モデルの解析結果	10
3	二状態周期量子ウォーク	17
3.1	二状態周期モデルの固有値解析	17
3.2	一様周期モデルの固有値解析	22
3.3	一欠陥・二相系周期モデルの固有値解析	23
4	三状態量子ウォーク	26
4.1	多状態量子ウォークと転送行列	26
4.2	多状態量子ウォークの固有値解析	27
4.3	三状態グローバウォークの固有値解析	30
4.4	一欠陥二相系モデルの固有値解析	31

1 序

量子ウォークは粒子の量子的なダイナミクスを表すモデルの一つであり、量子版のランダムウォークと呼ばれる数理モデルである。ユニバーサルな量子計算モデル [5, 7, 28] や量子探索をはじめとした量子アルゴリズム [16, 36, 6, 31, 1] など、量子情報での研究を発端に、その応用可能性は多くの研究分野で広がりを見せている [21, 32]。特に一次元格子上的量子ウォークは、量子ウォーク特有の性質である線形的拡散と、局在化を示す基本的なモデルとして重要である [2, 27, 4]。線形的拡散は標準偏差がランダムウォークの標準偏差の二乗のオーダーであり、ウォーカーがより遠方に拡散することを表し、局在化はある場所でウォーカーが正の確率で留まり続けることを意味する。これら二つの相反するような性質が同時に現れることが興味深い問題として注目されている。本研究では特に、その発生条件が非自明な局在化に注目する。局在化は、二状態であつ、ウォーカーのダイナミクスが場所に依存しない空間一様型モデルでは、特殊な場合を除き起こり得ないのに対して、ダイナミクスが場所に依存する空間非一様型モデルや三以上の状態数を持つ多状態モデルでは線形的拡散と局在化が両立するようなモデルが存在することが明らかとなっている [18, 17, 14, 29]。

空間非一様型の量子ウォークは、応用的な側面からも盛んに研究されている。特に、原点のみで異なる作用をする一欠陥モデルは、量子探索アルゴリズム [36, 6, 3] と、正の領域と負の領域で異なる作用をする二相系モデルは、トポロジカル絶縁体の研究 [21, 12] と関連があるとされている。加えて、より発展的なモデルである多状態量子ウォークも同様に注目されている。多状態量子ウォークの中でも特にグローバウォークと呼ばれるクラスは、グローバの探索アルゴリズムをグラフ構造を持つ空間上に拡張する際に用いられており、重要な研究対象となっている。一様な三状態グローバウォークの局在化については [18, 29] など調べられているが、空間非一様型の三状態量子ウォークの研究は非常に限られており [41]、局在化についての議論は不十分である。

これらの背景を含め、上記の一欠陥、及び二相系モデルを包含する、有限個の欠陥をもつ二相系モデルの局在化に注目する。局在化の有無は時間発展作用素 U の固有値の存在性に帰着される [35, 38, 34, 33] など、 U の固有値解析が局在化の解析の基礎となることが知られている。一欠陥二相系モデルに対しては、代表的な解析法であるフーリエ変換を用いた手法 [15] を適用することができない一方で、[24, 25] で提案された転送行列を用いた手法により、固有値解析が可能であることが知られている。そこで、本研究の 2 章では、先行研究 [24, 25] の手法と解析結果を紹介する。初めに、有限個の欠陥を持つ二相系量子ウォークを定義し、このモデルに対する転送行列の構築、及び固有方程式の導出を行うことで、局在化が発生するための必要十分条件を与える。さらに、得られた固有方程式を解くことにより、[40, 13, 9, 12, 8] などの先行研究で扱われたモデルを包含する 5 つの具体的なモデルに対して、局在化の発生条件や、時間平均極限測度の導出など、局在化の解析的な評価を記す。

本研究では新たに、2 章で紹介する転送行列による固有値解析法をさらに発展させ、一般性の高いモデルに適用することに主眼を置く。これまで扱われてきた二相系モデルでは、原点から十分離れた場所において、時間発展を構成するコイン行列が一様なものを扱っているが、3 章ではモデル

をさらに拡張し、原点から十分離れた場所で周期的にコイン行列を配置したモデルでも同様に、転送行列を用いた局在化の議論をすることができることを示す。さらに、固有方程式を解くことにより、一欠陥周期モデルや二相系周期モデルに対して、局在化の具体的な解析を行うことを考える。さらに4章では、これまで二状態で行われていた固有値解析の議論を多状態量子ウォークに拡張する方法を紹介する。ここで扱われる多状態量子ウォークは自己ループを持つモデルであり、グローバールウォークを含むクラスである。この手法を用い、時間発展作用素の固有値を計算することで、グローバールウォークを含む一欠陥、及び二相系の三状態量子ウォークの局在化の発生について明らかにする。周期モデルの固有値解析については [22] を、三状態モデルの固有値解析については [23] の内容をもとに、まとめたものである。

2 二状態量子ウォーク

2.1 二状態量子ウォークと転送行列

初めに、整数格子 \mathbb{Z} 上の二状態離散時間量子ウォークを紹介する。 \mathcal{H} を以下で定めるヒルベルト空間とする。

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2) = \left\{ \Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\}.$$

量子状態を $\Psi \in \mathcal{H}$ とし、 $\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x) & \Psi_R(x) \end{bmatrix}^t \in \mathbb{C}^2$ と記述する。ここで、 t は転置を意味する。時間発展作用素は以下で定義される \mathcal{H} 上の作用素である、シフト作用素 S とコイン作用素 C を用いて $U = SC$ と定義される。

$$(S\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x+1) \\ \Psi_R(x-1) \end{bmatrix}, \quad (C\Psi)(x) = C_x \Psi(x).$$

ここで $\{C_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$ は 2×2 ユニタリ行列の列であり、コイン行列と呼ぶ。本研究では C_x を以下で表す。

$$C_x = e^{i\Delta_x} \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ -\beta_x & \alpha_x \end{bmatrix}.$$

ただし、各 $x \in \mathbb{Z}$ に対し $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{C}$, $\Delta_x \in [0, 2\pi)$, $|\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1$ であり、本研究ではさらに、 $\alpha_x \neq 0$ を仮定する。このとき、

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{C}_x, \quad Q_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{C}_x$$

とすると、定義から以下が得られる。

$$(U\Psi)(x) = P_{x+1}\Psi(x+1) + Q_{x-1}\Psi(x-1), \quad x \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

注意 2.1. ある $x_0 \in \mathbb{Z}$ において $\alpha_{x_0} = 0$ であれば、 $P_x P_{x+1} = Q_x Q_{x-1}$ が零行列となるため、場所 x_0 は反射壁となり、 \mathbb{Z} は非連結な領域に分割されるため、本質的に半直線上の量子ウォークと

なる。この場合、後述する転送行列を構築することができないので、本研究では任意の $x \in \mathbb{Z}$ において $\alpha_x \neq 0$ を仮定する。

初期状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ ($\|\Psi_0\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$) を用いて、時刻 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ における確率分布を $\mu_t^{(\Psi_0)}(x) = \|(U^t \Psi_0)(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2$ と定める。ここで $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負の整数とする。この量子ウォークモデルが局在化を起こすとは、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu_t^{(\Psi_0)}(x_0) > 0$ を満たす初期状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ と場所 $x_0 \in \mathbb{Z}$ が存在することである。よく知られた事実として、局在化の発生は時間発展作用素 U の固有値が存在することと同値である [35]。すなわち、量子ウォークモデルが局在化を起こすための必要十分条件は

$$U\Psi = e^{i\lambda}\Psi$$

を満たす $\lambda \in [0, 2\pi)$ と $\Psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ が存在することである。以下、 $\sigma_p(U)$ を時間発展作用素 U の固有値全体の集合とする。次に、 \mathcal{H} 上のユニタリ作用素 J を以下で与える。

$$(J\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x-1) \\ \Psi_R(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathcal{H}, x \in \mathbb{Z}.$$

J の逆作用素は

$$(J^{-1}\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x+1) \\ \Psi_R(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathcal{H}, x \in \mathbb{Z}$$

となる。さらに、 $\lambda \in [0, 2\pi)$ 、 $x \in \mathbb{Z}$ に対して転送行列 $T_x(\lambda)$ を以下に定める。

$$T_x(\lambda) = \frac{1}{\alpha_x} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda-\Delta_x)} & -\beta_x \\ -\overline{\beta_x} & e^{-i(\lambda-\Delta_x)} \end{bmatrix}.$$

転送行列は正規行列であり、逆行列は

$$T_x^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\overline{\alpha_x}} \begin{bmatrix} e^{-i(\lambda-\Delta_x)} & \beta_x \\ \overline{\beta_x} & e^{i(\lambda-\Delta_x)} \end{bmatrix}$$

で与えられる。これらの定義から次の重要な命題を得る。

命題 2.2. $\lambda \in [0, 2\pi)$ と $\Psi \in \mathcal{H}$ に対して、(i) と (ii) は同値である。

- (i) $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda})$.
- (ii) $(J\Psi)(x+1) = T_x(\lambda)(J\Psi)(x)$, $x \in \mathbb{Z}$.

ただし、 \ker は作用素の核を意味する。

証明. (1) より、 $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda})$ は $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$P_{x+1}\Psi(x+1) + Q_{x-1}\Psi(x-1) = e^{i\lambda}\Psi(x)$$

が成立することと同値である。左辺は

$$\begin{aligned} e^{i\Delta_{x+1}} \begin{bmatrix} \alpha_{x+1} & \beta_{x+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_L(x+1) \\ \Psi_R(x+1) \end{bmatrix} + e^{i\Delta_{x-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\overline{\beta_{x-1}} & \alpha_{x-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_L(x-1) \\ \Psi_R(x-1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} e^{i\Delta_{x+1}} (\alpha_{x+1}\Psi_L(x+1) + \beta_{x+1}\Psi_R(x+1)) \\ e^{i\Delta_{x-1}} (-\overline{\beta_{x-1}}\Psi_L(x-1) + \alpha_{x-1}\Psi_R(x-1)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} e^{i\Delta_x} (\alpha_x \Psi_L(x) + \beta_x \Psi_R(x)) &= e^{i\lambda} \Psi_L(x-1), \\ e^{i\Delta_x} (-\overline{\beta_x} \Psi_L(x) + \overline{\alpha_x} \Psi_R(x)) &= e^{i\lambda} \Psi_R(x+1) \end{aligned}$$

である. これを変形すると

$$\begin{aligned} e^{i\Delta_x} \alpha_x \Psi_L(x) &= e^{i\lambda} \Psi_L(x-1) - e^{i\Delta_x} \beta_x \Psi_R(x), \\ -e^{i\Delta_x} \overline{\beta_x} \Psi_L(x) - e^{i\lambda} \Psi_R(x+1) &= -e^{i\Delta_x} \overline{\alpha_x} \Psi_R(x), \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} e^{i\Delta_x} \alpha_x & 0 \\ -e^{i\Delta_x} \overline{\beta_x} & -e^{i\lambda} \end{bmatrix} (J\Psi)(x+1) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda} & -e^{i\Delta_x} \beta_x \\ 0 & -e^{i\Delta_x} \overline{\alpha_x} \end{bmatrix} (J\Psi)(x)$$

が得られる. これは

$$\begin{aligned} (J\Psi)(x+1) &= \frac{1}{\alpha_x} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda-\Delta_x)} & -\beta_x \\ -\overline{\beta_x} & e^{-i(\lambda-\Delta_x)} \end{bmatrix} (J\Psi)(x) \\ &= T_x(\lambda)(J\Psi)(x) \end{aligned}$$

と同値である. □

系 2.3. $\lambda \in [0, 2\pi)$ と $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, $\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を次のように定める.

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_{x-1}(\lambda)T_{x-2}(\lambda)\cdots T_1(\lambda)T_0(\lambda)\varphi, & x > 0, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1}(\lambda)T_{x+1}^{-1}(\lambda)\cdots T_{-2}^{-1}(\lambda)T_{-1}^{-1}(\lambda)\varphi, & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

$\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$ となる φ が存在することは $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であるための必要十分条件である.

証明. 初めに, $\lambda \in [0, 2\pi)$, に対して, $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$ を満たす φ が存在するとする. (2) は任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{\Psi}(x+1) = T_x(\lambda)\tilde{\Psi}(x)$ であるから, $\Psi = J^{-1}\tilde{\Psi}$ は命題 2.2 の (ii) を満たす. よって, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ である. 次に, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であり, $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ と仮定する. $\varphi = (J\Psi)(0)$ とおくと, 命題 2.2 から $\tilde{\Psi}(x+1) = T_x(\lambda)\tilde{\Psi}(x)$, $x \in \mathbb{Z}$ となることから, $\tilde{\Psi} = J\Psi$ は (2) を満たし $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$ であることがわかる. □

以下, φ を変化させたときにとりうる $\tilde{\Psi}$ 全体の集合を W_λ とする. すなわち,

$$W_\lambda = \left\{ \tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \tilde{\Psi} \text{ は (2) を満たす} \right\}.$$

なお, $\Psi = J^{-1}\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ であるが, 必ずしも $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$ ではないものは定常測度と呼ばれ, [11, 39, 19, 20, 10] などで盛んに研究されている. 以下 2 章の終わりにかけ, 先行研究 [24, 25] で行われた有限欠陥二相系モデルに対する転送行列を用いた固有値解析法及び, 具体的な解析結果を紹介する.

2.2 有限欠陥二相系モデルの固有値解析

以下のコイン行列で定められる有限欠陥二相系モデルを考える.

$$C_x = \begin{cases} C_\infty, & x \in [x_+, \infty), \\ C_{-\infty}, & x \in (-\infty, x_-]. \end{cases}$$

ただし, $x_+ > 0$, $x_- < 0$ である. 遠方のコイン行列には以下の表示を与える

$$C_{\pm\infty} = e^{i\Delta_{\pm\infty}} \begin{bmatrix} \alpha_{\pm\infty} & \beta_{\pm\infty} \\ -\beta_{\pm\infty} & \alpha_{\pm\infty} \end{bmatrix}.$$

ただし, $\alpha_{\pm\infty}, \beta_{\pm\infty} \in \mathbb{C}$, $\Delta_{\pm\infty} \in [0, 2\pi)$, $|\alpha_{\pm\infty}|^2 + |\beta_{\pm\infty}|^2 = 1$. このとき, (2) で定義される $\tilde{\Psi}$ は次のように表される.

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_\infty^{-x} T_+ \varphi, & x_+ \leq x, \\ T_{x-1} \cdots T_0 \varphi, & 0 < x < x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1} \cdots T_{-1}^{-1} \varphi, & x_- < x < 0, \\ T_{-\infty}^{-x} T_- \varphi, & x \leq x_-. \end{cases} \quad (3)$$

ただし, $T_+ = T_{x_+-1} \cdots T_0$, $T_- = T_{x_-}^{-1} \cdots T_{-1}^{-1}$ かつ $T_{\pm\infty} = T_{x_\pm}$ である. 続いて, 実数 r に対して, 以下のように符号関数を定める.

$$\text{sgn}(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0, \\ -1, & r < 0. \end{cases}$$

すると $s_{\pm\infty} = \text{sgn}(\cos(\lambda - \Delta_{\pm\infty}))$ とおくことで, $T_{\pm\infty}$ の異なる二つの固有値をそれぞれ以下の $\zeta_{\pm\infty}^<$, $\zeta_{\pm\infty}^>$ で表すことができる.

$$\zeta_{\pm\infty}^> = \frac{\cos(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) + s_{\pm\infty} \sqrt{\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2}}{\alpha_{\pm\infty}},$$

$$\zeta_{\pm\infty}^< = \frac{\cos(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - s_{\pm\infty} \sqrt{\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2}}{\alpha_{\pm\infty}}.$$

ここで, $|\zeta_{\pm\infty}^>| |\zeta_{\pm\infty}^<| = 1$ であることに注意すると, $|\zeta_{\pm\infty}^>| \geq 1$, $|\zeta_{\pm\infty}^<| \leq 1$ となる.

定理 2.4. $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は以下の二つの条件を満たすことと同値である.

1. $\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2 > 0$,
2. $\ker((T_\infty - \zeta_\infty^<) T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>) T_-) \neq \{\mathbf{0}\}$.

さらに上記を満たすとき, 固有ベクトル $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\Psi = J^{-1} \tilde{\Psi}$ で与えられる. ただし $\tilde{\Psi}$ は $\varphi \in \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<) T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>) T_-) \setminus \{\mathbf{0}\}$ を用いて系 2.3 で定められるものである.

証明. 系 2.3 から, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ が成り立つことと $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ となる $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在することは同値である. もし $\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2 \leq 0$ であれば, $|\zeta_{\pm\infty}^<|$ 及び $|\zeta_{\pm\infty}^>|$ は 1 となる. $\tilde{\Psi}$ は (3) で与えられるので, 任意の $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ に対して, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \infty$ となる. よって, 一つ目の条件は $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であるための必要条件である. 次に, $\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2 > 0$ であると仮定する. すると, $|\zeta_{\pm\infty}^>| > 1$ 及び $|\zeta_{\pm\infty}^<| < 1$ が成立する. なので, (3) から, $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ が $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ であるための必要十分条件は

$$T_+\varphi \in \ker(T_\infty - \zeta_\infty^<) \text{ かつ } T_-\varphi \in \ker(T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)$$

となる. よってこれを満たす $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在すれば良いことがわかる. よって題意が示された. \square

この定理は, 注目している時間発展作用素の固有値問題が $\ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) \neq \{\mathbf{0}\}$ を満たすような $\lambda \in [0, 2\pi)$ を $\cos^2(\lambda - \Delta_{\pm\infty}) - |\alpha_{\pm\infty}|^2 > 0$ の範囲内で探す問題に帰着されることを意味している. さらに, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ としたときに, それに対応する固有ベクトル $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\Psi = J^{-1}\tilde{\Psi}$ で与えられ,

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \zeta_\infty^{x-x_+} T_+\varphi, & x_+ \leq x, \\ T_{x-1} \cdots T_0 \varphi, & 0 < x < x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1} \cdots T_{-1}^{-1} \varphi, & x_- < x < 0, \\ \zeta_{-\infty} T_-\varphi, & x \leq x_-. \end{cases}$$

ただし, $\varphi \in \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) \setminus \{\mathbf{0}\}$. 加えて, 得られた固有値, 固有ベクトルを用いて時間平均極限測度を求めることによって, 局在化を定量的に評価することができる. 以下, 時間平均極限測度 $\bar{\nu}_\infty$ を導出するための重要な事実を考える.

補題 2.5. $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ ならば, 以下が成り立つ.

- (1) $\dim \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) = \dim \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) = 1$.
- (2) $\ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) = \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-)$.

証明. 定理 2.4 より,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) \leq 2, \\ 1 &\leq \dim \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) \leq 2. \end{aligned}$$

よって, 以下を示せば十分である.

$$\dim \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) = \dim \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) \neq 2.$$

$\dim \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) = 2$ ならば, T_x が 2×2 行列なので, $(T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+$ は零行列となる. ここで, T_x は正則行列なので, $T_\infty = \zeta_\infty^<$ であるが, これは明らかに矛盾である. よって $\dim \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) \neq 2$ を満たす. $\dim \ker((T_{-\infty} - \zeta_\infty^>)T_-) \neq 2$ も同様に示すことができ, (1) が示された. さらに (2) は (1) から直ちに導かれる. \square

系 2.6. $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\dim \ker(U - e^{i\lambda}) = 1.$$

証明. 定理 2.4 と補題 2.5 から,

$$\dim \ker(U - e^{i\lambda}) = \dim (\ker((T_\infty - \zeta_\infty^<) T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>) T_-)) = 1.$$

□

系 2.7. 以下が成り立つ.

$$\sum_{e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)} \dim \ker(U - e^{i\lambda}) < \infty.$$

証明. 定理 2.4 から, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は以下の方程式の根でなくてはならない.

$$\det((T_\infty - \zeta_\infty^<) T_+) = 0.$$

よって, 上記の方程式を満たす $e^{i\lambda}$ の個数は有限である. 系 2.6 も考慮することで題意が示される. □

次に, 先行研究 [26, 35] などでも議論されている, strong trapping について紹介する. 量子ウォークが strong trapping を示すとは, 原点から量子ウォーカーがスタートする量子ウォークが, 任意の初期状態に対してある場所でウォーカーが留まり続けことを表す. 数学的な定義を与えるために, まず量子ウォークの時間平均極限測度を定義する. 初期状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ に対して, 時間平均極限測度は

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \|(U^t \Psi_0)(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2$$

で与えられる. 時間平均極限測度は U の固有値, 固有ベクトルで表されることが知られており, 局在化及び時間平均極限測度の関係については [35] で詳しく述べられている. 重複度 $m_\lambda = \dim \ker(U - e^{i\lambda})$ と $\Psi_j^\lambda \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $j = 1, 2, \dots, m_\lambda$ に対して

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \sum_{e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)} \sum_{j,k=1}^{m_\lambda} \overline{\langle \Psi_k^\lambda, \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_j^\lambda, \Psi_0 \rangle \langle \Psi_k^\lambda(x), \Psi_j^\lambda(x) \rangle$$

が成立する. 系 2.6 から任意の $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ に対して $m_\lambda = 1$ なので, 時間平均極限測度は

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \sum_{e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)} |\langle \Psi^\lambda, \Psi_0 \rangle|^2 \|\Psi^\lambda(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2$$

で与えられることがわかる. 以降, ウォーカーは原点からスタートする, すなわち, 初期状態 Ψ_0 は $\|\Psi_0(0)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = 1$ かつ $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ ($x \neq 0$) を満たすものとする. そして, strong trapping の定義は以下のように与えられる.

定義 2.8. 量子ウォークが strong trapping を示すとは任意の $\Psi_0(0) \in \mathbb{C}^2$ に対して $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \bar{\nu}_\infty(x) \neq 0$ となることである.

以下の定理を用いることで、モデルが strong trapping を示すか否かの判定を行うことができる。
 定理 2.9. 量子ウォークが strong trapping を示すことと $\Psi^\lambda(0)$ と $\Psi^{\lambda'}(0)$ が線型独立となるペア $e^{i\lambda}, e^{i\lambda'} \in \sigma_p(U)$ が存在することは同値である。ここで、 Ψ^λ と $\Psi^{\lambda'}$ はそれぞれ $e^{i\lambda}$ と $e^{i\lambda'}$ に対応する固有ベクトルである。

証明. 初めに、 $\sigma_p(U) = \emptyset$ であれば明らかに strong trapping でないので $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ を仮定する。定義から、

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \sum_{e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)} |\langle \Psi^\lambda(0), \Psi_0(0) \rangle|^2 \|\Psi^\lambda(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2$$

である。系 2.7 から、量子ウォークが strong trapping でない、すなわち、 $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \bar{\nu}_\infty(x) = 0$ を満たす $\Psi_0(0) \in \mathbb{C}^2$ が存在することと、任意の $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ に対して

$$\langle \Psi^\lambda(0), \Psi_0(0) \rangle = 0$$

を満たす $\Psi_0(0) \in \mathbb{C}^2$ が存在することは同値であり、 $\Psi_0(0)$ が全ての $\Psi^\lambda(0)$ と直交していることを意味する。これはベクトル $\{\Psi^\lambda(0)\}_{\Psi^\lambda \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{0\}, e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)} \subset \mathbb{C}^2$ の全てが線型従属であることと同値である。よって題意は示された。□

2.3 一欠陥二相系モデルの解析結果

この節では、一欠陥二相系モデル ($x_+ = 1, x_- = -1$) の解析を考える。

$$(\alpha_x, \beta_x, \Delta_x) = \begin{cases} (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m), & x < 0, \\ (\alpha_o, \beta_o, \Delta_o), & x = 0, \\ (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p), & x > 0. \end{cases}$$

ただし、 $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\Delta_j \in [0, 2\pi)$, $|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = 1$ かつ $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{p, o, m\}$. 同様に $T_x = T_j$, $\zeta_x^\pm = \zeta_j^\pm$, $j = p$ ($x > 0$), $= o$ ($x = 0$), $= m$ ($x < 0$) とする。このとき、 T_+ と T_- はそれぞれ T_o と T_m^{-1} となる。定理 2.4 を一欠陥二相系に適用することを考える。初めに、

$$\begin{aligned} \ker((T_\infty - \zeta_\infty^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>)T_-) \\ = \ker((T_p - \zeta_p^<)T_o) \cap \ker((T_m - \zeta_m^>)T_m^{-1}) \\ = \ker((T_p - \zeta_p^<)T_o) \cap \ker(T_m - \zeta_m^>) \end{aligned}$$

であり、 $\varphi \in \ker((T_p - \zeta_p^<)T_o) \cap \ker(T_m - \zeta_m^>) \setminus \{0\}$ を用いて、系 2.3 で定められる $\tilde{\Psi}$ は

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_p^{x-1} T_o \varphi, & x > 0, \\ T_m^x \varphi, & x \leq 0, \end{cases} = \begin{cases} (\zeta_p^<)^{x-1} T_o \varphi, & x > 0, \\ (\zeta_m^>)^x \varphi, & x \leq 0. \end{cases}$$

最後に、固有ベクトル $\Psi = J^{-1}\tilde{\Psi} \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は以下のように与えられる。

$$\Psi(x) = \begin{cases} (\zeta_p^<)^{x-1} \begin{bmatrix} \zeta_p^< & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T_o \varphi, & x \geq 1, \\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_o + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \varphi, & x = 0, \\ (\zeta_m^>)^x \begin{bmatrix} \zeta_m^> & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi, & x \leq -1. \end{cases} \quad (4)$$

続いて、一欠陥二相系の5つの具体的なモデルに対して時間発展作用素の固有値、固有ベクトルと時間平均極限測度の導出を行う。さらにこれらのモデルのうち4つは [40, 13, 9, 8, 12] などの研究で扱われたモデルを包含しており、より一般的な固有値解析の結果を得ることに成功している。定理 2.4 を用いて、時間発展作用素の固有値、固有ベクトルが得られ、定理 2.9 を用いることでモデルが strong trapping かどうかの判定をすることができる。ここで、初期状態は $\Psi_0(x) = [\psi_1 \ \psi_2]^t$, $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$, ($x = 0$), 及び $[\mathbf{0} \ 0]^t$, ($x \neq 0$) とする。

モデル 1. $(\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) = (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) = (\alpha, \beta, \Delta)$ 及び $\Delta_o = \Delta$ とする。

• 固有値:

$\sigma_p(U) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は $|\beta|^2 > \Re(\beta\bar{\beta}_o)$ である。ここで \Re は複素数の実部を表す。この条件を満たすとき、 $\sigma_p(U) = \{\pm e^{i\lambda_+}, \pm e^{i\lambda_-}\}$ である。ただし、

$$e^{i\lambda_{\pm}} = \frac{A \pm i\sqrt{K}}{\sqrt{A+B}} e^{i\Delta},$$

$$A = 1 - \Re(\beta\bar{\beta}_o), \quad B = |\beta|^2 - \Re(\beta\bar{\beta}_o), \quad K = |\beta|^2 - \Re^2(\beta\bar{\beta}_o)$$

である。

• 固有ベクトル:

$\pm e^{i\lambda_s}$ ($s \in \{+, -\}$) に対応する固有ベクトルは

$$\Psi_{\pm}^s(x) = \pm N \begin{cases} \frac{1}{\alpha_o} \begin{bmatrix} \beta(A + si\sqrt{K}) + \beta_o(B - si\sqrt{K}) \\ si\frac{(A+B)}{\bar{\alpha}}(\sqrt{K} - s\Im(\beta\bar{\beta}_o)) \end{bmatrix} (\zeta^<)^x, & x \geq 1, \\ \frac{1}{\alpha_o} \begin{bmatrix} \beta(A + si\sqrt{K}) + \beta_o(B - si\sqrt{K}) \\ -\alpha_o(B - si\sqrt{K}) \end{bmatrix}, & x = 0, \\ \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \beta(A+B) \\ -\alpha(B - si\sqrt{K}) \end{bmatrix} (\zeta^>)^x, & x \leq -1, \end{cases}$$

で表され、 \Im は複素数の虚部である。さらに、

$$\zeta^< = \pm \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{A+B}}, \quad \zeta^> = \pm \frac{\sqrt{A+B}}{\alpha},$$

であり, N は以下の正規化定数である.

$$N = \sqrt{\frac{|\alpha_o|^2 B}{2(A+B)^2 (\sqrt{K} - s \Im(\beta \bar{\beta}_o)) \sqrt{K}}}.$$

• 時間平均極限測度:

$$\bar{\nu}_\infty(x) = 2 \left(\frac{B}{A+B} \right)^2 \begin{cases} \frac{AC_+(\psi_1, \psi_2)}{|\alpha|^2 K} \left(\frac{|\alpha|^2}{A+B} \right)^x, & x \geq 1, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{AC_-(\psi_1, \psi_2)}{|\alpha|^2 K} \left(\frac{|\alpha|^2}{A+B} \right)^{-x}, & x \leq -1, \end{cases}$$

であり,

$$\begin{aligned} C_+(\psi_1, \psi_2) &= |\alpha_o|^2 |\beta|^2 + 2 \Im^2(\beta \bar{\beta}_o) |\psi_1|^2 + 2 \Im(\beta \bar{\beta}_o) \Im(\alpha_o \bar{\beta} \psi_1 \bar{\psi}_2), \\ C_-(\psi_1, \psi_2) &= |\alpha_o|^2 |\beta|^2 + 2 \Im^2(\beta \bar{\beta}_o) |\psi_2|^2 - 2 \Im(\beta \bar{\beta}_o) \Im(\alpha_o \bar{\beta} \psi_1 \bar{\psi}_2). \end{aligned}$$

なお, この時間平均極限測度が対称となる, すなわち x に対して $\bar{\nu}_\infty(x) = \bar{\nu}_\infty(-x)$ となるのは

$$\Im(\beta \bar{\beta}_o) (\Im(\beta \bar{\beta}_o) (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) + \Im(\alpha_o \bar{\beta} \psi_1 \bar{\psi}_2) + \Im(\alpha_o \bar{\beta} \psi_1 \bar{\psi}_2)) = 0$$

のときに限る.

• **Strong trapping** : このモデルは局在化を示すとき, strong trapping を示す.

証明. $\Psi_+^\dagger(0)$ と $\Psi_-^\dagger(0)$ は線型独立である. よって定理 2.9 から strong trapping を示すことがわかる. \square

モデル 2. $(\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) = (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) = (\alpha, \beta, \Delta)$ 及び $\beta_o = \beta$ とする.

• **固有値**:

$\sigma_p(U) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は以下の Condition 2a もしくは Condition 2b が成立することである.

$$\text{Condition 2a : } \gamma_+ = |\beta| \cos(\Delta - \Delta_o) + |\alpha| \sin(\Delta - \Delta_o) < |\beta|,$$

$$\text{Condition 2b : } \gamma_- = |\beta| \cos(\Delta - \Delta_o) - |\alpha| \sin(\Delta - \Delta_o) < |\beta|.$$

この条件を満たすとき, $\sigma_p(U)$ は以下で与えられる.

$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{\pm e^{i\lambda_+}\}, & \text{Condition 2a のみ満たす,} \\ \{\pm e^{i\lambda_-}\}, & \text{Condition 2b のみ満たす,} \\ \{\pm e^{i\lambda_+}, \pm e^{i\lambda_-}\}, & \text{Condition 2a も Condition 2b も満たす.} \end{cases}$$

ただし,

$$e^{i\lambda_\pm} = \frac{e^{i\Delta} - |\beta|(|\beta| \pm i|\alpha|)e^{i\Delta_o}}{|e^{i\Delta} - |\beta|(|\beta| \pm i|\alpha|)e^{i\Delta_o}|}.$$

ここで, $\sigma_p(U) = \emptyset$, すなわち Condition 2a も 2b も成立しないのは, $\Delta = \Delta_o$ または $\Delta - \Delta_o = \pi$, $|\beta| = 0$ のときに限る. 反対に, Conditions 2a と 2b が共に成立するのは $|\cos \frac{\Delta - \Delta_o}{2}| < |\beta|$ のときに限る.

• **固有ベクトル:**

$\pm e^{i\lambda_s}$ ($s \in \{+, -\}$) に対応する固有ベクトルは

$$\Psi_{\pm}^s(x) = \pm N \begin{cases} \frac{-si|\alpha||\beta|}{\alpha_o\bar{\alpha}\bar{\beta}} \left[\frac{\bar{\alpha}|\beta| (|\beta| - (|\beta| - is|\alpha|)e^{i(\Delta - \Delta_o)})}{\bar{\beta} (1 - 2|\beta|\gamma_s + |\beta|^2)} \right] (\zeta^<)^x, & x \geq 1, \\ \frac{-|\beta| (|\beta| - (|\beta| - is|\alpha|)e^{i(\Delta - \Delta_o)})}{\alpha_o\bar{\beta}} \left[\frac{si|\alpha||\beta|}{\alpha_o\bar{\beta}} \right], & x = 0, \\ \frac{1}{\bar{\alpha}} \left[\begin{array}{c} \beta (1 - 2|\beta|\gamma_s + |\beta|^2) \\ -\alpha|\beta| (|\beta| - (|\beta| - is|\alpha|)e^{i(\Delta - \Delta_o)}) \end{array} \right] (\zeta^>)^x, & x \leq -1, \end{cases}$$

で表される. ただし,

$$\zeta^< = \pm \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{1 - 2|\beta|\gamma_s + |\beta|^2}}, \quad \zeta^> = \pm \frac{\sqrt{1 - 2|\beta|\gamma_s + |\beta|^2}}{\alpha}$$

であり, N は以下の正規化定数である.

$$N = \frac{\sqrt{(|\beta| - \gamma_s)}}{\sqrt{2|\beta|} (1 - 2|\beta|\gamma_s + |\beta|^2)}.$$

• **時間平均極限測度:**

$$\bar{\nu}_{\infty}(x) = I_+ \bar{\nu}_{\infty}^+(x) + I_- \bar{\nu}_{\infty}^-(x).$$

ただし,

$$I_+ = \begin{cases} 1, & \gamma_+ < |\beta|, \\ 0, & \gamma_+ \geq |\beta|, \end{cases} \quad I_- = \begin{cases} 1, & \gamma_- < |\beta|, \\ 0, & \gamma_- \geq |\beta|, \end{cases}$$

かつ

$$\bar{\nu}_{\infty}^{\pm}(x) = C(\psi_1, \psi_2) \begin{cases} \frac{1 - |\beta|\gamma_{\pm}}{|\alpha|^2} \left(\frac{|\alpha|^2}{1 - 2|\beta|\gamma_{\pm} + |\beta|^2} \right)^x, & x \geq 1, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1 - |\beta|\gamma_{\pm}}{|\alpha|^2} \left(\frac{|\alpha|^2}{1 - 2|\beta|\gamma_{\pm} + |\beta|^2} \right)^{-x}, & x \leq -1, \end{cases}$$

であり,

$$C(\psi_1, \psi_2) = \frac{|\beta| (|\beta| - \gamma_{\pm})^2 (|\alpha||\beta| \pm 2\Im(\alpha_o\bar{\beta}\psi_1\bar{\psi}_2))}{|\alpha| (1 - 2|\beta|\gamma_{\pm} + |\beta|^2)^2}.$$

このモデルにおいて, 時間平均極限測度は常に対称である.

• **Strong trapping :** このモデルが strong trapping を示すのは Conditions 2a と 2b が共に成立する, すなわち, $|\cos \frac{\Delta - \Delta_o}{2}| < |\beta|$ のときに限る.

証明. もし Conditions 2a, 2b のうち一つの条件のみ満たす場合は, $\Psi_+^s(0)$ と $\Psi_-^s(0)$ は明らかに線形従属であり, 定理 2.9 からモデルは strong tapping を示さないことがわかる. 一方, 二つの条件が共に成り立つならば $\Psi_+^s(0)$ と $\Psi_-^s(0)$ は線型独立となり, このモデルが strong trapping を示すことがわかる. \square

モデル 3. $(\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p)$ と $\arg \beta_p = \arg \beta_m$ とする.

• 固有値:

$\sigma_p(U) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は $\cos(\Delta_m - \Delta_p) < |\beta_m| |\beta_p| - |\alpha_m| |\alpha_p|$ である. この条件を満たすとき, $\sigma_p(U) = \{\pm e^{i\lambda}\}$ である. ただし,

$$e^{i\lambda} = \frac{|\beta_p| e^{i\Delta_m} - |\beta_m| e^{i\Delta_p}}{||\beta_p| e^{i\Delta_m} - |\beta_m| e^{i\Delta_p}|}.$$

• 固有ベクトル:

$\pm e^{i\lambda}$ に対応する固有ベクトルは

$$\Psi_{\pm}(x) = \pm N \begin{cases} \frac{1}{\alpha_p} \begin{bmatrix} \beta_m (P + |\beta_p| \sqrt{K}) \\ -\alpha_p |\beta_m| (i \sin(\Delta_p - \Delta_m) + \sqrt{K}) \end{bmatrix} (\zeta_p^<)^x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{\alpha_m} \begin{bmatrix} \beta_m (M + |\beta_m| \sqrt{K}) \\ -\alpha_m |\beta_m| (i \sin(\Delta_p - \Delta_m) + \sqrt{K}) \end{bmatrix} (\zeta_m^>)^x, & x \leq -1, \end{cases}$$

と表される. ただし,

$$\zeta_p^< = \pm \frac{(P + |\beta_p| \sqrt{K})}{\alpha_p \sqrt{|\beta_p| M - |\beta_m| P}}, \quad \zeta_m^> = \pm \frac{(M + |\beta_m| \sqrt{K})}{\alpha_m \sqrt{|\beta_p| M - |\beta_m| P}}$$

であり, N は以下の正規化定数である.

$$N = \frac{\sqrt{|\beta_m| \sqrt{K}}}{\sqrt{|\beta_m| (|\beta_p| M - |\beta_m| P)}}.$$

ただし,

$$P = |\beta_p| \cos(\Delta_p - \Delta_m) - |\beta_m|, \quad M = |\beta_p| - |\beta_m| \cos(\Delta_p - \Delta_m),$$

$$K = (\cos(\Delta_p - \Delta_m) - |\beta_p| |\beta_m| - |\alpha_p| |\alpha_m|)(\cos(\Delta_p - \Delta_m) - |\beta_p| |\beta_m| + |\alpha_p| |\alpha_m|).$$

• 時間平均極限測度:

$$\bar{\nu}_{\infty}(x) = C(\psi_1, \psi_2) \begin{cases} \frac{P(P + |\beta_p| \sqrt{K})}{|\alpha_p|^2} |\zeta_p^<|^{2x}, & x \geq 0, \\ \frac{M(M + |\beta_m| \sqrt{K})}{|\alpha_m|^2} |\zeta_m^>|^{2x}, & x \leq -1. \end{cases}$$

ここで,

$$C(\psi_1, \psi_2) = \frac{4|\beta_m| |\beta_p|^2 K \left(|\alpha_p|^2 |\beta_m| (|\beta_p| M - |\beta_m| P) - 2(P + |\beta_p| \sqrt{K}) c(\psi_1, \psi_2) \right)}{|\alpha_p|^2 (|\beta_p| M - |\beta_m| P)^4},$$

及び

$$c(\psi_1, \psi_2) = \left(\Re(\alpha_p \overline{\beta_m} \psi_1 \overline{\psi_2}) - |\beta_m| |\beta_p| |\psi_1|^2 \right) \sqrt{K} - \sin(\Delta_p - \Delta_m) \Im(\alpha_p \overline{\beta_m} \psi_1 \overline{\psi_2}).$$

なお、このモデルにおいて、時間平均極限測度は常に非対称である。

• **Strong trapping** : このモデルは strong trapping を示さない。

証明. $\Psi_+(0)$ と $\Psi_-(0)$ は明らかに線形従属である、よって定理 2.9 から strong trapping を示さないことがわかる. \square

モデル 4. $(\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p)$ 及び、 $\Delta_p = \Delta_m = \Delta$ とする。

• **固有値:**

$\sigma_p(U) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は $PM > 0$ である。ここで、

$$P = |\beta_p|^2 - \Re(\beta_m \overline{\beta_p}), \quad M = |\beta_m|^2 - \Re(\beta_m \overline{\beta_p}).$$

この条件を満たすとき、 $\sigma_p(U) = \{\pm e^{i\lambda}\}$ であり、

$$e^{i\lambda} = \frac{e^{i\Delta} \left(\sqrt{K} + i \Im(\beta_m \overline{\beta_p}) \right)}{|\beta_p - \beta_m|},$$

$$K = \left(\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) + |\alpha_p| |\alpha_m| - 1 \right) \left(\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) - |\alpha_p| |\alpha_m| - 1 \right).$$

• **固有ベクトル:**

$\pm e^{i\lambda}$ に対応する固有ベクトルは

$$\Psi_{\pm}(x) = \pm N \begin{cases} \frac{1}{\alpha_p} \begin{bmatrix} -P + \sqrt{K} \\ \alpha_p (\overline{\beta_p} - \overline{\beta_m}) \end{bmatrix} (\zeta_p^<)^x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{\alpha_m} \begin{bmatrix} M + \sqrt{K} \\ \alpha_m (\overline{\beta_p} - \overline{\beta_m}) \end{bmatrix} (\zeta_m^>)^x, & x \leq -1, \end{cases}$$

で表される。ただし、

$$\zeta_p^< = \pm \frac{-P + \sqrt{P + M - \Im^2(\beta_m \overline{\beta_p})}}{\alpha_p \sqrt{P + M}}, \quad \zeta_m^> = \pm \frac{M + \sqrt{P + M - \Im^2(\beta_m \overline{\beta_p})}}{\alpha_m \sqrt{P + M}}$$

であり、 N は以下の正規化定数である。

$$N = \frac{\beta_m}{|\beta_m|(P + M)} \sqrt{\frac{PM}{\sqrt{K - \Im^2(\beta_m \overline{\beta_p})}}}.$$

• **時間平均極限測度:**

$$\bar{\nu}_{\infty}(x) = C(\psi_1, \psi_2) \begin{cases} \frac{(\sqrt{K} - P)}{|\alpha_p|^2} |\zeta_p^<|^{2x}, & x \geq 0, \\ \frac{(M + \sqrt{K})}{|\alpha_m|^2} |\zeta_m^>|^{2x}, & x \leq -1. \end{cases}$$

ただし,

$$C(\psi_1, \psi_2) = \frac{4P^2M^2 \left((P+M)|\alpha_p|^2 + 2 \left(\Re(\alpha_p (\overline{\beta_p} - \overline{\beta_m}) \psi_1 \overline{\psi_2}) - P|\psi_1|^2 \right) (\sqrt{K} - P) \right)}{(P+M)^4 |\alpha_p|^2 \sqrt{K}}.$$

なお, このモデルにおいて, 時間平均極限測度は常に非対称である.

• **Strong trapping** : このモデルは strong trapping を示さない.

証明. $\Psi_+(0)$ と $\Psi_-(0)$ は明らかに線形従属である, よって定理 2.9 から strong trapping を示さないことがわかる. \square

モデル 5. $\beta_o = 0$, $|\beta_p| = |\beta_m| = |\beta|$ 及び, $\Delta_p = \Delta_m = \Delta$ とする.

• **固有値:**

$\gamma = \Delta_o + (\arg \beta_p - \arg \beta_m)/2$ とおく, $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は Condition 5a, もしくは Condition 5b が成立することである.

$$\text{Condition 5a : } \sin(\Delta - \gamma) \in (-|\beta|, 1],$$

$$\text{Condition 5b : } \sin(\Delta - \gamma) \in [-1, |\beta|).$$

この条件を満たすとき,

$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{\pm e^{i\lambda_+}\}, & \text{Condition 5a を満たすが 5b は満たさない,} \\ \{\pm e^{i\lambda_-}\}, & \text{Condition 5b を満たすが 5a は満たさない,} \\ \{\pm e^{i\lambda_+}, \pm e^{i\lambda_-}\}, & \text{Condition 5a も 5b も満たす,} \end{cases}$$

であり,

$$e^{i\lambda_{\pm}} = \frac{e^{i\Delta} \pm i|\beta|e^{i\gamma}}{|e^{i\Delta} \pm i|\beta|e^{i\gamma}|}.$$

• **固有ベクトル:**

$\pm e^{i\lambda_s}$, ($s \in \{+, -\}$) に対応する固有ベクトルは

$$\Psi_{\pm}^s(x) = \pm N \begin{cases} \frac{1}{\alpha_o \overline{\alpha_p}} \begin{bmatrix} \overline{\alpha_p} \beta_m e^{i(\Delta - \Delta_o)} (1 + si|\beta|e^{-i(\Delta - \gamma)}) \\ si|\beta|A_s e^{i(\Delta_o - \gamma)} \end{bmatrix} (\zeta_p^<)^x, & x \geq 1, \\ \frac{1}{\alpha_o} \begin{bmatrix} \beta_m e^{i(\Delta - \Delta_o)} (1 + si|\beta|e^{-i(\Delta - \gamma)}) \\ -\alpha_o |\beta| (|\beta| - sie^{i(\Delta - \gamma)}) \end{bmatrix}, & x = 0, \\ \frac{1}{\alpha_m} \begin{bmatrix} \beta_m A_s \\ -\alpha_m |\beta| (|\beta| - sie^{i(\Delta - \gamma)}) \end{bmatrix} (\zeta_m^>)^x, & x \leq -1, \end{cases}$$

と表される. ただし,

$$A_{\pm} = 1 \pm 2|\beta| \sin(\Delta - \gamma) + |\beta|^2, \quad \zeta_p^< = \pm \frac{\overline{\alpha_p}}{\sqrt{A_s}}, \quad \zeta_m^> = \pm \frac{\sqrt{A_s}}{\alpha_m},$$

であり, N は以下の正規化定数である.

$$N = \sqrt{\frac{|\beta| + s \sin(\Delta - \gamma)}{2|\beta|A_s^2}}.$$

• **時間平均極限測度:**

$$\bar{\nu}_\infty(x) = I_+ \bar{\nu}_\infty^+(x) + I_- \bar{\nu}_\infty^-(x).$$

ただし,

$$I_+ = \begin{cases} 1, & \sin(\Delta - \gamma) \in (-|\beta|, 1], \\ 0, & \sin(\Delta - \gamma) \in [-1, -|\beta|], \end{cases} \quad I_- = \begin{cases} 1, & \sin(\Delta - \gamma) \in [-1, |\beta|], \\ 0, & \sin(\Delta - \gamma) \in [|\beta|, 1], \end{cases}$$

かつ

$$\bar{\nu}_\infty^\pm(x) = C(\psi_1, \psi_2) \begin{cases} \frac{1 \pm |\beta| \sin(\Delta - \gamma)}{|\alpha|^2} \left(\frac{|\alpha|^2}{A_\pm}\right)^x, & x \geq 1, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1 \pm |\beta| \sin(\Delta - \gamma)}{|\alpha|^2} \left(\frac{|\alpha|^2}{A_\pm}\right)^{-x}, & x \leq -1, \end{cases}$$

であり,

$$C(\psi_1, \psi_2) = \frac{(|\beta| \pm \sin(\Delta - \gamma))^2 (|\beta|^2 \mp 2|\beta| \Im(e^{i(\Delta - \gamma)} \alpha_o \bar{\beta}_m \overline{\psi_1 \psi_2}))}{A_\pm^2}.$$

このモデルにおいて, 時間平均極限測度は常に対称である.

• **Strong trapping :** このモデルが strong trapping を示すのは Conditions 5a と 5b が共に成立するときに限る.

証明. もし Conditions 5a, 5b のうち一つの条件のみ満たす場合は, $\Psi_+^s(0)$ と $\Psi_-^s(0)$ は明らかに線形従属であり, 定理 2.9 からモデルは strong tapping を示さないことがわかる. 一方, 二つの条件が共に成り立つならば $\Psi_+^+(0)$ と $\Psi_+^-(0)$ は線型独立となり, このモデルが strong trapping を示すことがわかる. \square

3 二状態周期量子ウォーク

3.1 二状態周期モデルの固有値解析

2章で扱った有限欠陥二相系モデルは, 原点から離れた地点で, それぞれ一様なコインを持つモデルを扱った. 本章では, 2章で得られた転送行列を用いた固有値解析の手法を遠方のコインを周期的なコインに置き換えた拡張モデルにも適用できることを示す. ここでは, 2章での定義を引き続き用いるものとする. 初めに, $x_+, x_- \in \mathbb{Z}$ を $x_+ \geq 0, x_- \leq 0$ と定め, モデルの周期を場所 $x \geq x_+$ で $n_+ \in \mathbb{Z}_{>0}$, 場所 $x < x_-$ で $n_- \in \mathbb{Z}_{>0}$ であるとする. ただし, $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数を表す.

さらに、場所 $x \in \mathbb{Z}$ に対して、 $r_x^\pm \in \{0, \dots, n_\pm - 1\}$ を $x - x_\pm$ を $n_\pm \in \mathbb{Z}_{>0}$ で割った余りとする。すなわち、

$$r_x^\pm = x - x_\pm \pmod{n_\pm}.$$

ここで、コイン行列が以下で定まる周期モデルを扱う。

$$C_x = \begin{cases} C_{r_x^+}^+, & x \in [x_+, \infty), \\ C_x & x \in [x_-, x_+), \\ C_{r_x^-}^-, & x \in (-\infty, x_-). \end{cases}$$

このモデルは、 $x \in [x_-, x_+)$ で有限個の欠陥をもち、 $x \geq x_+$ と $x < x_-$ でそれぞれ周期 n_+ と n_- の周期をもつモデルである。 C_k^\pm を以下のように表す

$$C_k^\pm = e^{i\Delta_k^\pm} \begin{bmatrix} \alpha_k^\pm & \beta_k^\pm \\ -\beta_k^\pm & \alpha_k^\pm \end{bmatrix}.$$

ただし、 $\alpha_k^\pm, \beta_k^\pm \in \mathbb{C}$, $\Delta_k^\pm \in [0, 2\pi)$, $|\alpha_k^\pm|^2 + |\beta_k^\pm|^2 = 1$, かつ $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \{0, \dots, n_\pm - 1\}$ で $\alpha_x, \alpha_k^\pm \neq 0$ である。さらに、 $\lambda \in [0, 2\pi)$, $x \in \mathbb{Z}$ と $k \in \{0, \dots, n_\pm - 1\}$ に対して、以下の転送行列 $T_k^\pm(\lambda)$ を導入する。

$$T_k^\pm(\lambda) = \frac{1}{\alpha_k^\pm} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda - \Delta_k^\pm)} & -\beta_k^\pm \\ -\beta_k^\pm & e^{-i(\lambda - \Delta_k^\pm)} \end{bmatrix}.$$

転送行列 $T_k^\pm(\lambda)$ を T_k^\pm と略記する。さらに、本論文では、行列の積を表す記号 \amalg を以下のように定義する。

$$\amalg_{i=k}^n A_i = \begin{cases} A_n \cdots A_{k+1} A_k, & n \geq k, \\ 1, & n < k. \end{cases}$$

すると、(2) で定まる $\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2$ が以下のように表される。

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_{x-1} T_{x-2} \cdots T_1 T_0 \varphi, & x > 0, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1} T_{x+1}^{-1} \cdots T_{-2}^{-1} T_{-1}^{-1} \varphi, & x < 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=0}^{r_x^+-1} T_i^+ \left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ \right)^{m_x^+} T_+ \varphi, & x > x_+, \\ \prod_{i=0}^{x-1} T_i \varphi, & 0 < x \leq x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ \prod_{i=1}^{|x|} T_{-i}^{-1} \varphi, & x_- \leq x < 0, \\ \left(\prod_{i=r_x^-}^{n_- - 1} T_i^- \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{n_- - 1} T_i^- \right)^{-m_x^-} T_- \varphi, & x < x_-. \end{cases}$$

ただし, $T_+ = \prod_{i=0}^{x_+-1} T_i$, $T_- = \prod_{i=1}^{|x_-|} T_i^{-1}$ かつ $m_x^+ = \frac{x-x_+-r_x^+}{n_+} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m_x^- = \frac{|x-x_--r_x^-+n_-|}{n_-} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である. これは以下のように書き換えられる.

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \left(\tilde{T}_{r_x^+}^+\right)^{m_x^+} \prod_{i=0}^{r_x^+-1} T_i^+ T_+ \varphi, & x > x_+, \\ \prod_{i=0}^{x-1} T_i \varphi, & 0 < x \leq x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ \prod_{i=1}^{|x|} T_i^{-1} \varphi, & x_- \leq x < 0, \\ \left(\tilde{T}_{r_x^-}^-\right)^{-m_x^-} \left(\prod_{i=r_x^-}^{n_- - 1} T_i^-\right)^{-1} T_- \varphi, & x < x_-. \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $k \in \{0, \dots, n_{\pm} - 1\}$ に対して,

$$\tilde{T}_k^{\pm} = \prod_{i=0}^{k-1} T_i^{\pm} \prod_{i=k}^{n_{\pm}-1} T_i^{\pm}.$$

続いて, \tilde{T}_k^{\pm} ($k \in \{0, \dots, n_{\pm} - 1\}$) の二つの固有値は以下の $\zeta_{\pm}^>$, $\zeta_{\pm}^<$ で与えられる.

$$\zeta_{\pm}^> = \frac{A^{\pm} + \operatorname{sgn}(A^{\pm}) \sqrt{(A^{\pm})^2 - |\alpha_0^{\pm}|^2 |\alpha_1^{\pm}|^2 \cdots |\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}|^2}}{\alpha_0^{\pm} \alpha_1^{\pm} \cdots \alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}},$$

$$\zeta_{\pm}^< = \frac{A^{\pm} - \operatorname{sgn}(A^{\pm}) \sqrt{(A^{\pm})^2 - |\alpha_0^{\pm}|^2 |\alpha_1^{\pm}|^2 \cdots |\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}|^2}}{\alpha_0^{\pm} \alpha_1^{\pm} \cdots \alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}}.$$

ただし, $A^{\pm} = \frac{1}{2} \alpha_0^{\pm} \alpha_1^{\pm} \cdots \alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm} \operatorname{tr} \left(\prod_{i=0}^{n_{\pm}-1} T_i^{\pm} \right)$ であり, tr は行列のトレースを意味する. ここで, 固有値は k に依存しないことに注意する.

系 3.1. A^{\pm} は実数である.

証明.

$$M = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{array} \right] \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. ここで, 任意の $m_1, m_2 \in M$ に対して, $m_1 m_2 \in M$ であり, これは任意の $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ に対して $m_1 m_2 \cdots m_n \in M$ ($n > 1$) となることを意味する. ここで, $\alpha_k^{\pm} T_k^{\pm} \in M$ ($k \in \{0, \dots, n_{\pm} - 1\}$) となることから, $\alpha_0^{\pm} \alpha_1^{\pm} \cdots \alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm} \prod_{i=0}^{n_{\pm}-1} T_i^{\pm} \in M$ となり, A^{\pm} は実数であることがわかる.

続いて, $k \in \{0, \dots, n_{\pm} - 1\}$ に対して $|\det T_k^{\pm}| = \left| \frac{\overline{\alpha_k^{\pm}}}{\alpha_k^{\pm}} \right| = 1$ となるので,

$$|\det \tilde{T}_k^{\pm}| = \left| \frac{\overline{\alpha_0^{\pm}} \overline{\alpha_2^{\pm}} \cdots \overline{\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}}}{\alpha_0^{\pm} \alpha_2^{\pm} \cdots \alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}} \right| = 1$$

が成り立つ. これは $|\zeta_{\pm}^{\geq}| |\zeta_{\pm}^{\leq}| = 1$ を意味する. 系 3.1 から, $|\zeta_{\pm}^{\geq}| \geq 1$ と $|\zeta_{\pm}^{\leq}| \leq 1$ が成立することがわかり, 以下の定理を得る.

定理 3.2. 周期モデルにおいて, $\lambda \in [0, 2\pi)$ に対し, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は以下の二つの条件を満たすことと同値である.

1. $(A^{\pm})^2 - |\alpha_0^{\pm}|^2 |\alpha_1^{\pm}|^2 \cdots |\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}|^2 > 0$,
2. $\ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ - \zeta_+^{\leq} \right) T_+ \right) \cap \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_- -1} T_i^- - \zeta_-^{\geq} \right) T_- \right) \neq \{0\}$.

証明. 系 2.3 から, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ が成り立つことと $\tilde{\Psi} \in W_{\lambda}$, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ となる $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ が存在することは同値である. もし $(A^{\pm})^2 - |\alpha_0^{\pm}|^2 |\alpha_1^{\pm}|^2 \cdots |\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}|^2 \leq 0$ であれば, $|\zeta_{\pm}^{\leq}|$ 及び $|\zeta_{\pm}^{\geq}|$ は 1 となる. $\tilde{\Psi}$ は (5) で与えられるので, 任意の $\tilde{\Psi} \in W_{\lambda}$ に対して, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \infty$ となる. よって, 一つ目の条件は $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であるための必要条件である. 次に, $(A^{\pm})^2 - |\alpha_0^{\pm}|^2 |\alpha_1^{\pm}|^2 \cdots |\alpha_{n_{\pm}-1}^{\pm}|^2 > 0$ であると仮定する. すると, $|\zeta_{\pm}^{\geq}| > 1$ 及び $|\zeta_{\pm}^{\leq}| < 1$ が成立する. なので, (5) から, $\tilde{\Psi} \in W_{\lambda}$, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ が成立するための必要十分条件は, 任意の $k \in \{0, \dots, n_+ - 1\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{k-1} T_i^+ T_+ \varphi &\in \ker \left(\tilde{T}_k^+ - \zeta_+^{\leq} \right) \\ \iff \varphi &\in \ker \left(\left(\tilde{T}_k^+ - \zeta_+^{\leq} \right) \prod_{i=0}^{k-1} T_i^+ T_+ \right) \end{aligned}$$

が成立し, 任意の $k \in \{0, \dots, n_- - 1\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=k}^{n_- -1} T_i^- \right)^{-1} T_- \varphi &\in \ker \left(\tilde{T}_k^- - \zeta_-^{\geq} \right) \\ \iff \varphi &\in \ker \left(\left(\tilde{T}_k^- - \zeta_-^{\geq} \right) \left(\prod_{i=k}^{n_- -1} T_i^- \right)^{-1} T_- \right) \end{aligned}$$

となるときである. ここで, \iff は同値であることを表す記号である. これを満たす $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ が存在すれば良いことがわかる. ただし, 任意の $k \in \{0, \dots, n_+ - 1\}$ に対して,

$$\ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ - \zeta_+^{\leq} \right) T_+ \right) = \ker \left(\left(\tilde{T}_k^+ - \zeta_+^{\leq} \right) \prod_{i=0}^{k-1} T_i^+ T_+ \right)$$

が成立し、任意の $k \in \{0, \dots, n_- - 1\}$ に対して、

$$\ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_- - 1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_- \right) = \ker \left(\left(\tilde{T}_k^- - \zeta_-^> \right) \left(\prod_{i=k}^{n_- - 1} T_i^- \right)^{-1} T_- \right)$$

が成立する。したがって、この条件は定理の第2条件にまとめることができる。よって、題意が示される。 \square

注目している時間発展作用素の固有値問題が定理の二つ目の条件を満たすような $\lambda \in [0, 2\pi)$ を $(A^\pm)^2 - |\alpha_0^\pm|^2 |\alpha_1^\pm|^2 \cdots |\alpha_{n_\pm - 1}^\pm|^2 > 0$ の範囲内で見つけることに帰着される。さらに、 $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ としたときに、それに対応する固有ベクトル $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\Psi = J^{-1} \tilde{\Psi}$ で与えられ、

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} (\zeta_+^<)^{m_x^+} \prod_{i=0}^{r_x^+ - 1} T_i^+ T_+ \varphi, & x > x_+, \\ \prod_{i=0}^{x-1} T_i \varphi, & 0 < x \leq x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ \prod_{i=1}^{|x|} T_{-i}^{-1} \varphi, & x_- \leq x < 0, \\ (\zeta_-^>)^{-m_x^-} \left(\prod_{i=r_x^-}^{n_- - 1} T_i^- \right)^{-1} T_- \varphi, & x < x_-, \end{cases}$$

となる。ただし、 $\varphi \in \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+ - 1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) \cap \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_- - 1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_- \right) \setminus \{\mathbf{0}\}$. 以下、2章と同様に、時間平均極限測度 $\bar{\nu}_\infty$ を求めるのに重要な事実を考える。

補題 3.3. U は高々有限個の、重複度が1の固有値しか持たない。

$$\dim \ker (U - e^{i\lambda}) = 1$$

かつ

$$\sum_{e^{i\lambda} \in \sigma(U)} \dim \ker (U - e^{i\lambda}) < \infty.$$

証明. 定義と定理 3.2 から、 $\dim \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+ - 1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) = 2$ であれば、 $\left(\prod_{i=0}^{n_+ - 1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+$ は零行列となり、 $\prod_{i=0}^{n_+ - 1} T_i^+ = \zeta_+^<$ となる。これは明らかに矛盾である。 $\left(\prod_{i=0}^{n_- - 1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_-$ に関して、同様の議論をすることによって、

$$\dim \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+ - 1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) = \dim \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_- - 1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_- \right) = 1$$

となる。また,

$$\ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) = \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_--1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_- \right)$$

がすぐに示される。続いて,

$$\begin{aligned} & \dim \ker (U - e^{i\lambda}) \\ &= \dim \left(\ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) \cap \ker \left(\left(\prod_{i=0}^{n_--1} T_i^- - \zeta_-^> \right) T_- \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

であることがわかる。さらに, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は

$$\det \left(\left(\prod_{i=0}^{n_+-1} T_i^+ - \zeta_+^< \right) T_+ \right) = 0$$

の根でなければならない。よって, 上の方程式を満たす $e^{i\lambda}$ は有限であることがわかる。 \square

このことから, 周期モデルにおいても時間平均極限測度 $\bar{\nu}_\infty(x)$ は

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \sum_{e^{i\lambda} \in \sigma(U)} |\langle \Psi^\lambda, \Psi_0 \rangle|^2 \|\Psi^\lambda(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2. \quad (6)$$

と表される。

3.2 一様周期モデルの固有値解析

命題 3.4. $n_+ = n_- = n$, $x_+ = x_- = 0$, $C_k^+ = C_k^- = C_k$, 及び $T_k^+ = T_k^- = T_k$ とする。コイン行列は

$$C_x = C_{r_x},$$

$r_x = x \pmod{n} \in \{0, \dots, n-1\}$ である。このとき, このモデルは局在化を起こさない, すなわち, $\sigma_p(U) = \emptyset$.

証明. モデルの一様性から $\zeta^< = \zeta_+^< = \zeta_-^<$ 及び $\zeta^> = \zeta_+^> = \zeta_-^>$ とすることができる。すると, 定理 3.2 の第一条件を満たすとき, 任意の λ に対して,

$$\ker \left(\prod_{i=0}^{n-1} T_i - \zeta^< \right) \cap \ker \left(\prod_{i=0}^{n-1} T_i - \zeta^> \right) = \{\mathbf{0}\}$$

が成立し, 定理 3.2 の第二条件を満たさないため, $\sigma_p(U) = \emptyset$ となることが示される。 \square

備考として, ある x で $\alpha_x = 0$ のとき (本論文で除外しているケース). ウォーカーは $\alpha_x = 0$ の位置で反射するので, モデルは有限区間で留まり続ける。この事実に関して [37] の補題において,

以下のコイン行列をもつモデルについて詳しく述べられており、局在化を起こすための十分条件が与えられている。

$$C_x = \begin{bmatrix} \cos(2\pi ax) & -\sin(2\pi ax) \\ \sin(2\pi ax) & \cos(2\pi ax) \end{bmatrix}.$$

ただし、 a は有理数である。ここで、本研究の命題 3.4 から、[37] の補題は局在化を起こすための必要条件でもあることが示される。加えて、周期 $n = 2$ であり、初期状態 Ψ_0 が任意の奇数地点 x もしくは任意の偶数地点 x で $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ となる場合、このモデルは [30] で研究されている時間二周期量子ウォークとみなせる。

3.3 一欠陥・二相系周期モデルの固有値解析

次に、上記の同様周期モデルに、原点にのみ異なるコイン行列 C_0 を作用する一欠陥周期モデルを考える。これは一般的な一欠陥モデルを原点以外のコインを周期的なコインに置き換えることによって拡張したモデルとなっている。具体的に、このモデルは $n_+ = n_- = n$, $x_+ = 1$, $x_- = 0$, $C_k^+ = C_k^- = C_{k+1}$ とすることによって定められ、転送行列も同様に $T_k^+ = T_k^- = T_{k+1}$ と書くことができる。このとき、コイン行列は

$$C_x = \begin{cases} C_{r_x^+ + 1}, & x > 0, \\ C_0, & x = 0, \\ C_{r_x^- + 1}, & x < 0, \end{cases}$$

となる。以下、 $n = 2$ のときの解析に注目する。定理 3.2 から、 $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は、以下の二つの条件を満たすことと同値である。

- (1) $(\cos(2\lambda - \Delta_1 - \Delta_2) + \Re(\beta_1 \overline{\beta_2}))^2 - |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 > 0$,
- (2) $\ker((T_2 T_1 - \zeta^<) T_0) \cap \ker(T_2 T_1 - \zeta^>) \neq \{\mathbf{0}\}$.

命題 3.5. $\beta_0 = 0$, $|\beta_1| = |\beta_2| = |\beta| \neq 0$, $\Delta_0 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \arg \beta_1 - \arg \beta_2 + \pi}{2}$ とする。このとき、

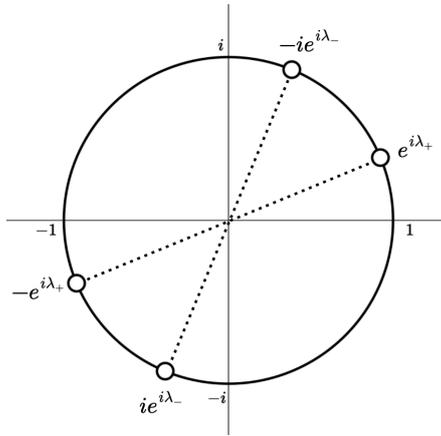
$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{\pm e^{i\lambda_+}, \pm i e^{i\lambda_-}\}, & \Im(\beta_1 \overline{\beta_2}) > 0, \\ \{\pm e^{i\lambda_-}, \pm i e^{i\lambda_+}\}, & \Im(\beta_1 \overline{\beta_2}) < 0, \\ \{\pm e^{i\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}\}, & \arg \beta_1 = \arg \beta_2, \\ \{\pm i e^{i\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}\}, & \arg \beta_1 = \arg \beta_2 + \pi, \end{cases}$$

であり、

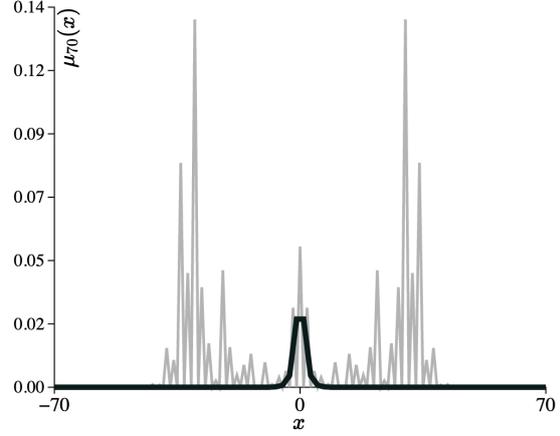
$$e^{i\lambda_{\pm}} = e^{i\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} (\pm \sqrt{B_+} + i \sqrt{B_-}), \quad B_{\pm} = \frac{|\beta| \pm \sqrt{|\beta|^2 - \Im^2(\beta_1 \overline{\beta_2})}}{2|\beta|},$$

となる。

命題 3.5 の例を図 1 で示す。次に、非負と負の地点でそれぞれ異なる二組の周期コイン行列が作用する二相系モデルを考える。これは、先行研究で扱った通常の二相系モデルを、非負部と負部



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図1: $\Delta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ としたときの命題 3.5 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 70 における確率分布 (灰色の線) 及び, (6) で定められる時間平均極限測度 (黒線) を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

のそれぞれのコイン行列を周期コインに置き換えることで拡張したモデルである. このモデルは $n_+ = n_- = n$, $x_+ = 0$, $x_- = 0$ とすることで定まる. $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対して,

$$\begin{aligned} (C_k^-, \alpha_k^-, \beta_k^-, \Delta_k^-, T_k^-) &= (C_{m,k}, \alpha_{m,k}, \beta_{m,k}, \Delta_{m,k}, T_{m,k}), \\ (C_k^+, \alpha_k^+, \beta_k^+, \Delta_k^+, T_k^+) &= (C_{p,k}, \alpha_{p,k}, \beta_{p,k}, \Delta_{p,k}, T_{p,k}) \end{aligned}$$

の表記を与える. コイン行列は

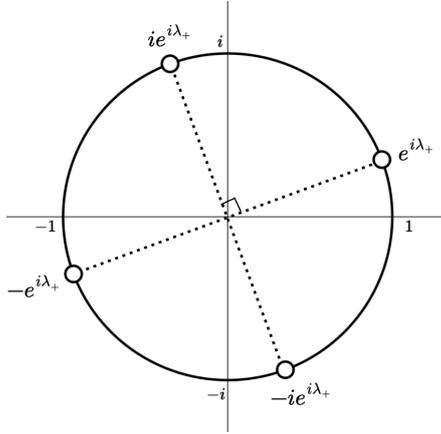
$$C_x = \begin{cases} C_{p,r_x}, & x \geq 0, \\ C_{m,r_x}, & x < 0, \end{cases}$$

となる. ただし, $r_x = x \pmod{n} \in \{0, \dots, n-1\}$. 以下, 周期 $n = 2$ における解析を考える. 定理 3.2 より, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は, 以下の二つの条件を満たすことと同値である.

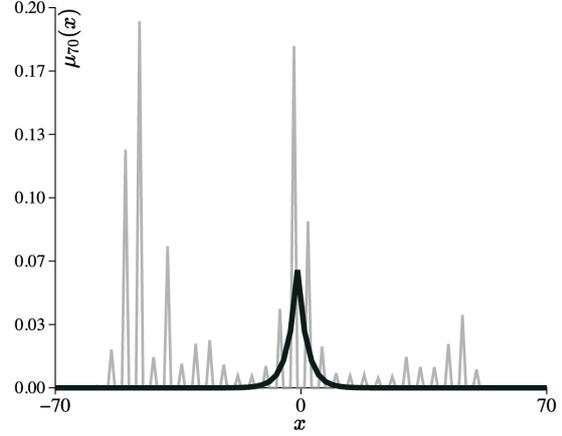
- (1) $(\cos(2\lambda - \Delta_{m,0} - \Delta_{m,1}) + \Re(\beta_{m,0}\overline{\beta_{m,1}}))^2 - |\alpha_{m,0}|^2|\alpha_{m,1}|^2 > 0$,
 $(\cos(2\lambda - \Delta_{p,0} - \Delta_{p,1}) + \Re(\beta_{p,0}\overline{\beta_{p,1}}))^2 - |\alpha_{p,0}|^2|\alpha_{p,1}|^2 > 0$,
- (2) $\ker(T_{p,1}T_{p,0} - \zeta_p^<) \cap \ker(T_{m,1}T_{m,0} - \zeta_m^>) \neq \{\mathbf{0}\}$.

命題 3.6. $\beta_{m,1} = \beta_{p,1} = 0$, $\beta_{m,0} = \beta_m$, $\beta_{p,0} = \beta_p$, $\Delta_{p,1} = \Delta_{m,1} = \Delta_1$, $\Delta_{p,0} = \Delta_{m,0} = \Delta_0$ とする, $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ となるのは $\Re(\beta_m\overline{\beta_p}) < |\beta_m|^2$ かつ $\Re(\beta_m\overline{\beta_p}) < |\beta_p|^2$ のときに限る. さらに, $\sigma_p(U)$ は

$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{\pm e^{i\lambda_-}, \pm ie^{i\lambda_-}\}, & \Im(\beta_m\overline{\beta_p}) < 0, \\ \{\pm e^{i\lambda_+}, \pm ie^{i\lambda_+}\}, & \Im(\beta_m\overline{\beta_p}) > 0, \end{cases}$$



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図2: $\Delta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_m = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\alpha_{p,0} = \alpha_{m,0} = \beta_p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{p,1} = \alpha_{m,1} = 1$ としたときの命題 3.6 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 70 における確率分布 (灰色の線) 及び, (6) で定められる時間平均極限測度 (黒線) を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

であり,

$$e^{i\lambda_{\pm}} = e^{i\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{2}} \left(\sqrt{B_{\pm}} \pm i\sqrt{B_{\mp}} \right), \quad B_{\pm} = \frac{|\beta_m - \beta_p| \pm \sqrt{|\beta_p - \beta_m|^2 - \Im^2(\beta_m \overline{\beta_p})}}{2|\beta_m - \beta_p|}$$

となる.

命題 3.6 の例を図 2 で示す.

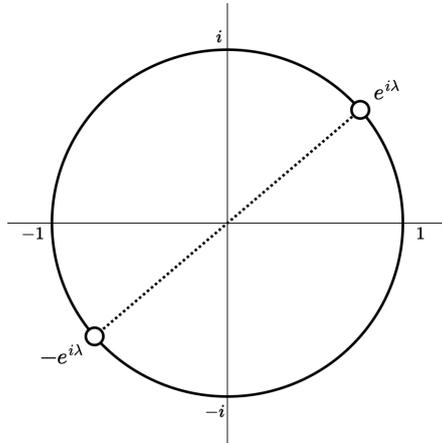
命題 3.7. $\Delta_{p,0} = \Delta_{m,0} = \Delta_0$, $\Delta_{p,1} = \Delta_{m,1} = \Delta_1$, $\beta_{m,0} = \beta_{m,1} = \beta_m$, $\beta_{p,0} = \beta_{p,1} = \beta_p$ とする, $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ となるのは $\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) < |\beta_m|^2$ かつ $\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) < |\beta_p|^2$ となるときに限る, またこのとき,

$$\sigma_p(U) = \{\pm e^{i\lambda}\}$$

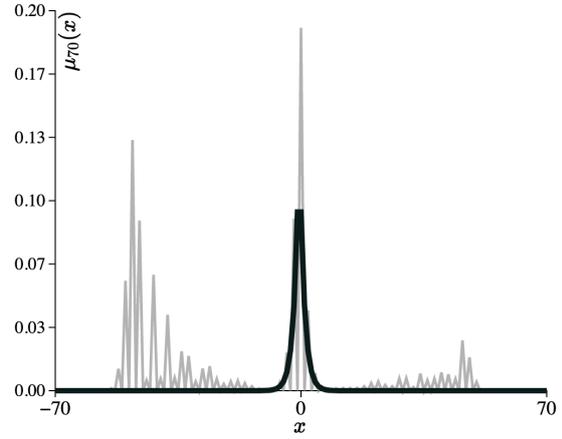
であり,

$$e^{i\lambda} = e^{i\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{2}} \frac{\sqrt{|\beta_p - \beta_m|^2 - \Im^2(\beta_m \overline{\beta_p})} + i\Im(\beta_m \overline{\beta_p})}{|\beta_m - \beta_p|}.$$

命題 3.7 の例を図 3 で示す.



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図3: $\Delta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_m = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\beta_p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ としたときの命題 3.7 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 70 における確率分布 (灰色の線) 及び, (6) で定められる時間平均極限測度 (黒線) を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

4 三状態量子ウォーク

4.1 多状態量子ウォークと転送行列

本章では 2 章で扱った二状態量子ウォークの固有値解析を, 自己ループを持つ三状態量子ウォークに拡張することを考える. 初めに, より一般的な議論するために, $n - 2$ 個の自己ループをもつ, 整数格子 \mathbb{Z} 上の n 状態量子ウォークを考えることとする. 本章では 2 章での記号の定義を用いずに, ヒルベルト空間 \mathcal{H} から以下のように定義し直す.

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^n) = \left\{ \Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 < \infty \right\}.$$

ただし, $n \geq 3$ とする. 量子状態 $\Psi \in \mathcal{H}$ を以下のように定める

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{bmatrix}.$$

$\{C_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$ を以下で定められる $n \times n$ ユニタリ行列の列とする.

$$C_x = e^{i\Delta_x} \begin{bmatrix} a_x^{(1,1)} & a_x^{(1,2)} & \cdots & a_x^{(1,n)} \\ a_x^{(2,1)} & a_x^{(2,2)} & \cdots & a_x^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_x^{(n,1)} & a_x^{(n,2)} & \cdots & a_x^{(n,n)} \end{bmatrix}.$$

ただし, $\Delta_x \in [0, 2\pi)$, $a_x^{(j,k)} \in \mathbb{C}$, $(1 \leq j, k \leq n)$ かつ $|a_x^{(k,k)}| \neq 1$ ($2 \leq k \leq n-1$) とする. ここでは, 4.2 節での議論を簡潔にするために, Δ_x を C_x に導入している. これらから, \mathcal{H} 上でのコイン作用素 C を

$$(C\Psi) = C_x\Psi(x)$$

と, \mathcal{H} 上の作用素であるシフト作用素 S は $\Psi_1(x)$ と $\Psi_n(x)$ を, それぞれ $\Psi_1(x-1)$ と $\Psi_n(x+1)$ に移し, $\Psi_k(x)$, $2 \leq k \leq n-1$ は固定するものとして定める. すなわち,

$$(S\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x+1) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_k(x) \\ \vdots \\ \Psi_{n-1}(x) \\ \Psi_n(x-1) \end{bmatrix}, \quad 2 \leq k \leq n-1.$$

すると, 時間発展作用素が以下に定まる

$$U = SC.$$

2 章と同様に以下の有限欠陥二相系モデルを考える.

$$C_x = \begin{cases} C_\infty, & x \in [x_+, \infty), \\ C_{-\infty}, & x \in (-\infty, x_-]. \end{cases}$$

ただし, $x_+ > 0$, $x_- < 0$ である. 初期状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ ($\|\Psi_0\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$) に対し, 場所 x , 時間 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ としたときの確率分布は

$$\mu_t^{(\Psi_0)}(x) = \|(U^t\Psi_0)(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2$$

で与えられる.

4.2 多状態量子ウォークの固有値解析

この節では, 転送行列を用いた固有値解析法が, $n-2$ 個の自己ループを持つ n 状態量子ウォークにも適用できることを示す. 初めに, $U\Psi = e^{i\lambda}\Psi$ は任意の $x \in \mathbb{Z}$ において, 以下の条件を満たすことと同値である.

$$e^{i(\lambda-\Delta_x)}\Psi_1(x-1) = \sum_{i=1}^n a_x^{(1,i)}\Psi_i(x), \quad e^{i(\lambda-\Delta_x)}\Psi_n(x+1) = \sum_{i=1}^n a_x^{(n,i)}\Psi_i(x),$$

かつ, $2 \leq k \leq n-1$ に対して,

$$e^{i(\lambda-\Delta_x)}\Psi_k(x) = \sum_{i=1}^n a_x^{(k,i)}\Psi_i(x) \iff \Psi_k(x) = \frac{\sum_{i=1, i \neq k}^n a_x^{(k,i)}\Psi_i(x)}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(k,k)}}.$$

代入の繰り返しにより, この連立方程式から $\Psi_k(x)$ ($2 \leq k \leq n-1$) を消去することができ, 以下の形に変形ができる.

$$e^{i(\lambda-\Delta_x)}\Psi_1(x-1) = A_x(\lambda)\Psi_1(x) + B_x(\lambda)\Psi_n(x), \quad (7)$$

$$e^{i(\lambda-\Delta_x)}\Psi_n(x+1) = C_x(\lambda)\Psi_1(x) + D_x(\lambda)\Psi_n(x), \quad (8)$$

$$\Psi_k(x) = E_{k,x}(\lambda)\Psi_1(x) + F_{k,x}(\lambda)\Psi_n(x). \quad (9)$$

ただし, $A_x(\lambda), B_x(\lambda), C_x(\lambda), D_x(\lambda), E_{k,x}(\lambda), F_{k,x}(\lambda)$ は複素数値関数であり, これらの絶対値は有限の実数となる. $n=3$ の場合, これらの値は

$$\begin{aligned} A_x(\lambda) &= a_x^{(1,1)} + \frac{a_x^{(1,2)}a_x^{(2,1)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}}, & B_x(\lambda) &= a_x^{(1,3)} + \frac{a_x^{(1,2)}a_x^{(2,3)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}}, \\ C_x(\lambda) &= a_x^{(3,1)} + \frac{a_x^{(3,2)}a_x^{(2,1)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}}, & D_x(\lambda) &= a_x^{(3,3)} + \frac{a_x^{(3,2)}a_x^{(2,3)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}}, \\ E_{2,x}(\lambda) &= \frac{a_x^{(2,1)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}}, & F_{2,x}(\lambda) &= \frac{a_x^{(2,3)}}{e^{i(\lambda-\Delta_x)} - a_x^{(2,2)}} \end{aligned}$$

となる. 転送行列 $T_x(\lambda)$ を以下で定義する.

$$T_x(\lambda) = \frac{1}{A_x(\lambda)} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda-\Delta_x)} & -B_x(\lambda) \\ C_x(\lambda) & -e^{-i(\lambda-\Delta_x)}(B_x(\lambda)C_x(\lambda) - A_x(\lambda)D_x(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

すると, 式 (7), (8) は次のとおりに表される.

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_n(x+1) \end{bmatrix} = T_x(\lambda) \begin{bmatrix} \Psi_1(x-1) \\ \Psi_n(x) \end{bmatrix}.$$

ただし, $A_x(\lambda) = 0$ のとき, 転送行列を構築することができないことに注意する必要がある. このことから, $A_x(\lambda) = 0$ となる場合は個別に扱う必要がある. 簡単のために, $T_x(\lambda)$ を T_x と略記する. 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して, $\lambda \in [0, 2\pi)$ が $A_x(\lambda) \neq 0$ を満たし, $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ とし, $\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x) &= \begin{cases} T_{x-1}T_{x-2}\cdots T_1T_0\varphi, & x > 0, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1}T_{x+1}^{-1}\cdots T_{-2}^{-1}T_{-1}^{-1}\varphi, & x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} T_\infty^{-x+}T_+\varphi, & x_+ \leq x, \\ T_{x-1}\cdots T_0\varphi, & 0 < x < x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1}\cdots T_{-1}^{-1}\varphi, & x_- < x < 0, \\ T_{-\infty}^{x-x-}T_-\varphi, & x \leq x_-. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし, $T_+ = T_{x_+-1} \cdots T_0$, $T_- = T_{x_-}^{-1} \cdots T_{-1}^{-1}$ かつ $T_{\pm\infty} = T_{x_{\pm}}$ とする. V_λ を一般化固有ベクトル全体の集合とし, W_λ を (10) で定義された縮退したベクトル $\tilde{\Psi}$ 全体の集合とする.

$$V_\lambda = \{\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \Psi \neq \mathbf{0}, \Psi \text{ は (7), (8), (9) を満たす}\},$$

$$W_\lambda = \left\{ \tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \tilde{\Psi} \text{ は (10) を満たす} \right\}.$$

ただし, $\lambda \in [0, 2\pi)$ を任意の $x \in \mathbb{Z}$ で $A_x(\lambda) \neq 0$ である. 全単射な写像 $\iota : V_\lambda \rightarrow W_\lambda$ を以下のように定義する.

$$(\iota\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x-1) \\ \Psi_n(x) \end{bmatrix}.$$

ここで, ι の逆写像は $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ に対して, 以下で与えられる.

$$(\iota^{-1}\tilde{\Psi})(x) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(x+1) \\ E_{2,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_1(x+1) + F_{2,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_2(x) \\ \vdots \\ E_{k,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_1(x+1) + F_{k,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_2(x) \\ \vdots \\ E_{n-1,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_1(x+1) + F_{n-1,x}(\lambda)\tilde{\Psi}_2(x) \\ \tilde{\Psi}_2(x) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

よって, $\Psi \in V_\lambda$ は $\Psi = \iota^{-1}\tilde{\Psi}$ を満たす $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ が存在することと同値である. ι の定義から, $\iota^{-1}\tilde{\Psi} \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ であるための必要十分条件は $\tilde{\Psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2) \setminus \{\mathbf{0}\}$ であることもわかる. このことから, 以下の系を得る.

系 4.1. 任意の x に対して $\lambda \in [0, 2\pi)$ が $A_x(\lambda) \neq 0$ を満たすとする. $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であるための必要十分条件は $\tilde{\Psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2)$ を満たす $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ が存在することであって, このとき, 固有値 $e^{i\lambda}$ に対応する固有ベクトルは $\iota^{-1}\tilde{\Psi}$ で与えられる.

本論文では, コイン行列で定義される一般化三状態グローバーク (12) の固有値問題に着目しているため, 以下の仮定を課す.

仮定 1. $\lambda \in [0, 2\pi)$ は以下を満たす.

1. $A_x(\lambda) \neq 0$, $x \in \mathbb{Z}$,
2. $\det(T_{\pm\infty}) = \frac{D_{\pm\infty}(\lambda)}{A_{\pm\infty}(\lambda)} = 1$,
3. $\text{tr}(T_{\pm\infty}) \in \mathbb{R}$.

$T_{\pm\infty}$ の二つの固有値のペアは以下で定められる $\zeta_{\pm\infty}^>$, $\zeta_{\pm\infty}^<$ で与えられる.

$$\zeta_{\pm\infty}^> = \frac{\text{tr}(T_{\pm\infty}) + \text{sgn}(\text{tr}(T_{\pm\infty}))\sqrt{\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4}}{2},$$

$$\zeta_{\pm\infty}^< = \frac{\text{tr}(T_{\pm\infty}) - \text{sgn}(\text{tr}(T_{\pm\infty}))\sqrt{\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4}}{2}.$$

ただし, $|\zeta_{\pm\infty}^>||\zeta_{\pm\infty}^<| = |\det(T_{\pm\infty})| = 1$ なので, $|\zeta_{\pm\infty}^>| \geq 1$ かつ $|\zeta_{\pm\infty}^<| \leq 1$ が成立する. このことから以下の定理を得る.

定理 4.2. 仮定 1 を満たすとき, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ と以下の二つの条件を満たすことは同値である.

1. $\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4 > 0$,
2. $\ker((T_{\infty} - \zeta_{\infty}^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>)T_-) \neq \{\mathbf{0}\}$.

証明. 系 4.1 から, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ が成り立つとは $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ を満たす $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ が存在することと同値である. 初めに, $\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4 \leq 0$ のとき, $|\zeta_{\pm\infty}^<|$ 及び $|\zeta_{\pm\infty}^>|$ は 1 となる. $\tilde{\Psi}(x)$ は (10) で与えられるため, 任意の $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ に対して, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \infty$ となる. このことから, $\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4 > 0$ は $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ であるための必要条件であることがわかる. 次に, $\text{tr}(T_{\pm\infty})^2 - 4 > 0$ とすると $|\zeta_{\pm\infty}^>| > 1$ かつ $|\zeta_{\pm\infty}^<| < 1$ が成立する. $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ は $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ と転送行列で構築されているので, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Psi}(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty$ が成立する $\tilde{\Psi} \in W_\lambda$ が存在することは, $T_+\varphi \in \ker(T_{\infty} - \zeta_{\infty}^<)$, $T_-\varphi \in \ker(T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>)$ を満たす, すなわち, $\varphi \in \ker((T_{\infty} - \zeta_{\infty}^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>)T_-)$ となる $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在することと同値となる. これらの事実から, 題意が示される. \square

定理 4.2 から, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ のとき, $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\Psi = \iota^{-1}\tilde{\Psi}$ で与えられる. ここで, $\tilde{\Psi} \in W_\lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\varphi \in \ker((T_{\infty} - \zeta_{\infty}^<)T_+) \cap \ker((T_{-\infty} - \zeta_{-\infty}^>)T_-) \setminus \{\mathbf{0}\}$ を用いて以下で与えられる.

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} (\zeta_{\infty}^<)^{x-x_+}T_+\varphi, & x_+ \leq x, \\ T_{x-1} \cdots T_0\varphi, & 0 < x < x_+, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1} \cdots T_{-1}^{-1}\varphi, & x_- < x < 0, \\ (\zeta_{-\infty}^>)^{x-x_-}T_-\varphi, & x \leq x_-. \end{cases}$$

4.3 三状態グローバークの固有値解析

この節では, 以下の拡張されたグローバーク行列をコインとするモデルを考える. この行列は [29] の研究で用いられた行列に $e^{i\Delta_x}$ をかけたものである.

$$C_x = e^{i\Delta_x} \begin{bmatrix} -\frac{1+c_x}{2} & \frac{s_x}{\sqrt{2}} & \frac{1-c_x}{2} \\ \frac{s_x}{\sqrt{2}} & c_x & \frac{s_x}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-c_x}{2} & \frac{s_x}{\sqrt{2}} & -\frac{1+c_x}{2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

ただし, $c_x = \cos \theta_x$, $s_x = \sin \theta_x$, $\theta_x \in [0, 2\pi)$ かつ $\theta_x \neq 0, \pi$ である. このとき,

$$A_x(\lambda) = D_x(\lambda) = \frac{(1+c_x)(1-e^{i(\lambda-\Delta_x)})}{2(e^{i(\lambda-\Delta_x)}-c_x)}, \quad B_x(\lambda) = C_x(\lambda) = \frac{(1-c_x)(1+e^{i(\lambda-\Delta_x)})}{2(e^{i(\lambda-\Delta_x)}-c_x)}.$$

さらに、転送行列は

$$T_x = \frac{1}{(1+c_x)(1-e^{i(\lambda-\Delta_x)})} \begin{bmatrix} 2e^{i(\lambda-\Delta_x)}(e^{i(\lambda-\Delta_x)}-c_x) & -(1-c_x)(1+e^{i(\lambda-\Delta_x)}) \\ (1-c_x)(1+e^{i(\lambda-\Delta_x)}) & -2e^{-i(\lambda-\Delta_x)}(1-c_x e^{i(\lambda-\Delta_x)}) \end{bmatrix}$$

であり、

$$\det(T_x) = \frac{D_x(\lambda)}{A_x(\lambda)} = 1,$$

$$\operatorname{tr}(T_x) = -\frac{2(2\cos(\lambda-\Delta_x)+1-c_x)}{(1+c_x)} \in \mathbb{R}$$

となる。よって任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\lambda \neq \Delta_x$ となる $\lambda \in (0, 2\pi]$ は仮定 1 を満たすことがわかる。

補題 4.3. $e^{i\Delta_{\pm\infty}} \in \sigma_p(U)$.

証明. $e^{i\lambda} = e^{i\Delta_{\pm\infty}}$ のとき、 λ は仮定 1 を満たさないで、これらの場合は別途考慮する。2章の議論から、 $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は (7), (8) 及び (9) を満たす $\Psi \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在することと同値である。 $A_{\infty}(\lambda) = 0$ の場合、すなわち、 $e^{i\lambda} = e^{i\Delta_{\infty}}$ となる場合、 $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^3$ が (7) と (8) を満たすことは Ψ が

$$\Psi_1(x-1) = \Psi_3(x), \quad \Psi_1(x) = \Psi_3(x+1) \quad (\Delta_x = \Delta_{\infty}), \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x+1) \end{bmatrix} = T_x(\lambda) \begin{bmatrix} \Psi_1(x-1) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} \quad (\Delta_x \neq \Delta_{\infty}) \quad (14)$$

を満たすことを意味する。 $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x_{\infty} \in (x_+, \infty)$ とし、以下を満たす $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^3$ を考える。

$$\Psi(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} k & E_{2,x}(\lambda)k & 0 \end{bmatrix}^t, & x = x_{\infty}, \\ \begin{bmatrix} 0 & F_{2,x}(\lambda)k & k \end{bmatrix}^t, & x = x_{\infty} + 1, \\ \mathbf{0}, & \text{その他.} \end{cases}$$

すると、 $\Psi \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が成立し、さらに Ψ は条件 (13) (14) 及び (9) を満たす。このことから $e^{i\Delta_{\infty}} \in \sigma_p(U)$ となる。 $A_{-\infty}(\lambda) = 0$ の場合も同様に考えることにより、 $e^{i\Delta_{-\infty}} \in \sigma_p(U)$ を得る。□

4.4 一欠陥二相系モデルの固有値解析

以下のコイン行列で与えられる一欠陥二相系モデルに注目する。

$$C_x = \begin{cases} C_m, & x < 0, \\ C_o, & x = 0, \\ C_p, & x > 0. \end{cases}$$

$j = p (x > 0), = o (x = 0), = m (x < 0)$ に対して, $T_x = T_j, \zeta_x^< = \zeta_j^<, \zeta_x^> = \zeta_j^>, A_x(\lambda) = A_j(\lambda)$ とする. このとき, T_+ と T_- はそれぞれ T_o と T_m^{-1} となる. 定理 4.2 を一欠陥二相系モデルに適用することを考える. 仮定 1 において, $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ が成り立つことと

1. $\cos(\lambda - \Delta_m) - c_m > 0, \cos(\lambda - \Delta_p) - c_p > 0,$
2. $T_o\varphi \in \ker(T_p - \zeta_p^<), \varphi \in \ker(T_m - \zeta_m^>)$

を満たす $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在ことは同値である. ここで, $e^{i\lambda} \neq \pm e^{i\Delta_j}$ に対して,

$$\ker(T_j - \zeta_j^>) = \left\{ k \begin{bmatrix} t_1 + t_2 \\ t_2 - t_1 - i \operatorname{sgn}(\sin(\lambda - \Delta_j)) \sqrt{4t_1 t_2} \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{C} \right\}, \quad (15)$$

$$\ker(T_j - \zeta_j^<) = \left\{ k \begin{bmatrix} t_1 + t_2 \\ t_2 - t_1 + i \operatorname{sgn}(\sin(\lambda - \Delta_j)) \sqrt{4t_1 t_2} \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{C} \right\}, \quad (16)$$

$t_1 = 1 - \cos(\lambda - \Delta_j), t_2 = \cos(\lambda - \Delta_j) - c_j (j = m, p)$ となる. また, $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ は $\Psi = \iota^{-1} \tilde{\Psi}$ であり,

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_p^{x-1} T_o \varphi, & x > 0, \\ T_m^x \varphi, & x \leq 0, \end{cases} = \begin{cases} (\zeta_p^<)^{x-1} T_o \varphi, & x > 0, \\ (\zeta_m^>)^x \varphi, & x \leq 0, \end{cases}$$

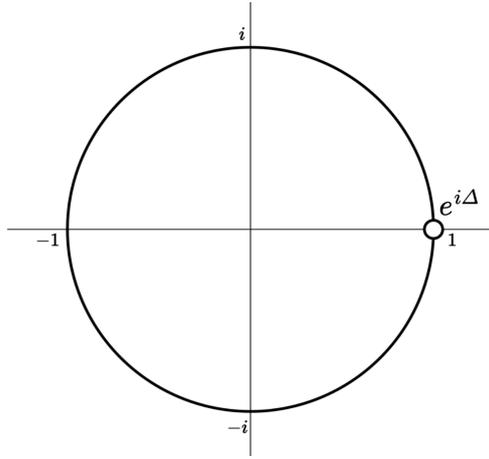
である. ここで, 一欠陥モデル, すなわち $\Delta_m = \Delta_p = \Delta, c_m = c_p = c, \zeta_m^> = \zeta^>, \zeta_p^< = \zeta^<, T_m = T_p = T$ を考える. 初めに, 仮定 1 を満たさない λ , すなわち $e^{i\lambda} = e^{i\Delta}, e^{i\Delta_o}$ を考える. 補題 4.3 から, $e^{i\Delta} \in \sigma_p(U)$ となることがわかる. ところが, $e^{i\lambda} = e^{i\Delta_o} (\Delta_o \neq \Delta)$ のとき, 式 (7), (8) は

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x-1) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{cases} T^{x-1} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}, & x > 0, \\ T^x \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}, & x \leq 0, \end{cases}$$

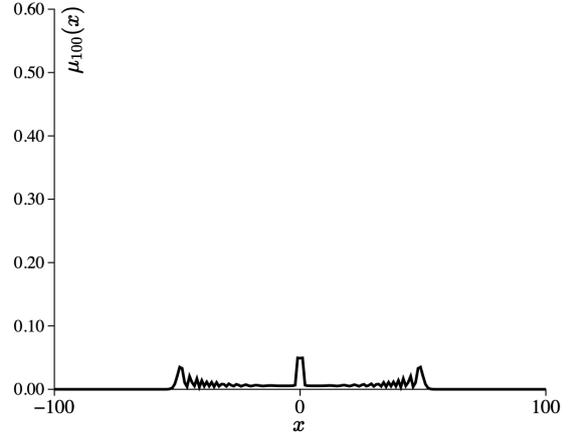
$k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ となる. 定理 4.2 と同様の議論から, $e^{i\Delta_o} \in \sigma_p(U)$ は以下と同値であることがわかる.

1. $\cos(\Delta_o - \Delta) - c > 0,$
2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(T - \zeta^<) \text{ もしくは } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(T - \zeta^>).$

しかしながら, (15), (16) から, $\cos(\Delta_o - \Delta) - c > 0$ ならば $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t \notin \ker(T - \zeta^<), \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t \notin \ker(T - \zeta^>)$ であることがわかるので, 任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ に対して, $\Psi \notin \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$ であり, $e^{i\Delta_o} \notin \sigma_p(U)$ であることがわかる. 仮定 1 が満たされるとき, すなわち $e^{i\lambda} \neq e^{i\Delta}, e^{i\Delta_o}$, 定理 4.2 から $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は $\cos(\lambda - \Delta) - c > 0$ 及び以下のいずれかを満たすことと同値であることが計



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図4: $\Delta_o = \Delta = 0$, $\theta_o = \frac{8}{12}$, $\theta = -\frac{8}{12}\pi$ としたときの命題 4.4 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 100 における確率分布を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

算をすることでわかる.

$$1. \sin^2(\lambda - \Delta_o)(\cos(\lambda - \Delta) - c) = (1 - \cos(\lambda - \Delta))(\cos(\lambda - \Delta_o) - c_o)^2,$$

かつ $\sin(\lambda - \Delta) \sin(\lambda - \Delta_o)(\cos(\lambda - \Delta_o) - c_o) < 0$.

$$2. (1 - \cos(\lambda - \Delta_o))(\cos(\lambda - \Delta) - c) = (1 - \cos(\lambda - \Delta))(1 + \cos(\lambda - \Delta_o)),$$

かつ $\sin(\lambda - \Delta) \sin(\lambda - \Delta_o)(2 \cos(\lambda - \Delta_o) + 1 - c_o) < 0$.

これらの議論から, 以下の命題を得る.

命題 4.4. $\Delta_o = \Delta$ のとき,

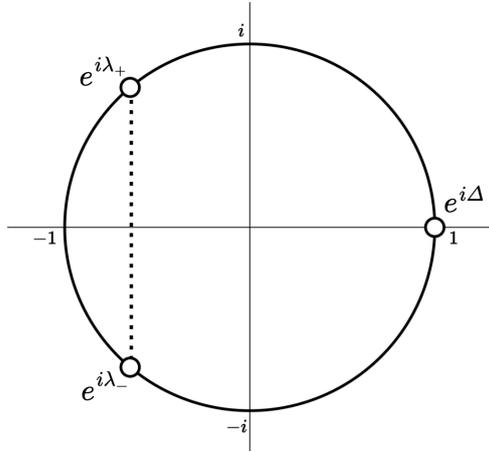
$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{e^{i\Delta}, e^{i\lambda_+}, e^{i\lambda_-}\}, & c < c_o, \\ \{e^{i\Delta}\}, & c \geq c_o. \end{cases}$$

ただし,

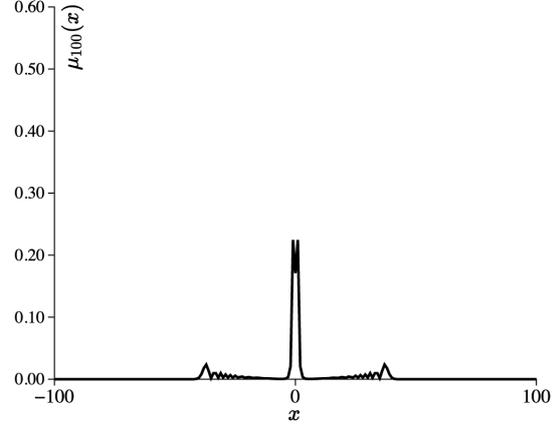
$$e^{i\lambda_{\pm}} = \frac{c + c_o^2 \pm i(1 + c_o)\sqrt{1 - c + 2c_o - (c + c_o^2)}}{1 - c + 2c_o} e^{i\Delta}.$$

命題 4.4 の例を図 4 及び図 5 で図示する.

次に, 二相系モデル $C_o = C_p$ について考える. λ が仮定 1 を満たさない, すなわち $e^{i\lambda} = e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}$ のとき, 補題 4.3 から $e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p} \in \sigma_p(U)$ が示される. さらに仮定 1 を満たすとき, すなわち, $e^{i\lambda} \neq e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}$ のとき, 定理 4.2 から $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$ は以下の三条件が同時に満たされることと



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図5: $\Delta_o = \Delta = 0$, $\theta_o = \frac{8}{12}\pi$, $\theta = -\frac{9}{12}\pi$ としたときの命題 4.4 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 100 における確率分布を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

値であることが計算をすることで示される.

1. $e^{i\lambda} = \frac{(c_p - c_m) \pm i\sqrt{2(1 - c_m)(1 - c_p)(1 - \cos(\Delta_m - \Delta_p))}}{((1 - c_m)e^{-i\Delta_p} - (1 - c_p)e^{-i\Delta_m})}$,
2. $\sin(\lambda - \Delta_p)\sin(\lambda - \Delta_m) < 0$,
3. $\cos(\lambda - \Delta_m) > c_m$.

命題 4.5. $\Delta_m = \Delta_p = \Delta$ とする, このとき,

$$\sigma_p(U) = \{e^{i\Delta}\}.$$

命題 4.6. $c_m = c_p = c$ 及び $\Delta_m \neq \Delta_p$ とする, このとき,

$$\text{Condition 1: } \frac{\sin(\Delta_m - \Delta_p)}{\sqrt{2(1 - \cos(\Delta_m - \Delta_p))}} > -c,$$

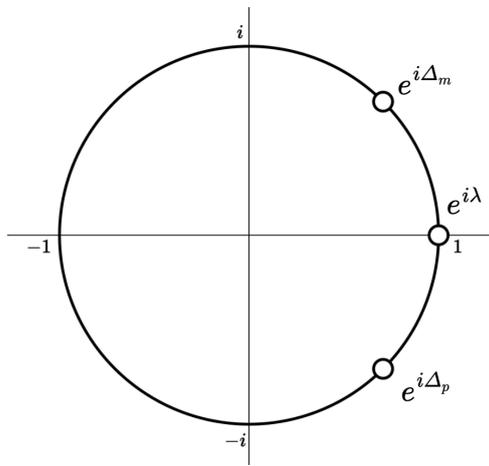
$$\text{Condition 2: } \frac{\sin(\Delta_m - \Delta_p)}{\sqrt{2(1 - \cos(\Delta_m - \Delta_p))}} < c,$$

とすると

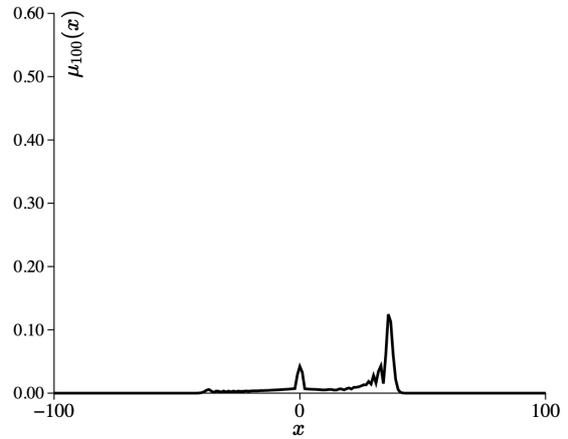
$$\sigma_p(U) = \begin{cases} \{e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}\}, & \text{Condition 1, 2 共に満たさない,} \\ \{e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}, e^{i\lambda}\}, & \text{Condition 1 を満たすが 2 は満たさない,} \\ \{e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}, -e^{i\lambda}\}, & \text{Condition 2 を満たすが 1 は満たさない,} \\ \{e^{i\Delta_m}, e^{i\Delta_p}, e^{i\lambda}, -e^{i\lambda}\}, & \text{Condition 1, 2 共に満たす,} \end{cases}$$

であり,

$$e^{i\lambda} = \frac{i(e^{i\Delta_p} - e^{i\Delta_m})}{\sqrt{2(1 - \cos(\Delta_m - \Delta_p))}}.$$

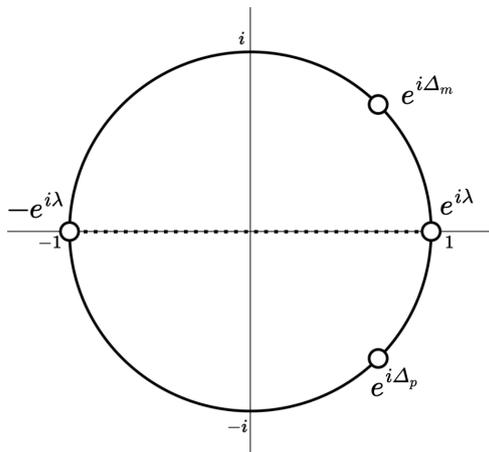


(a) U の固有値

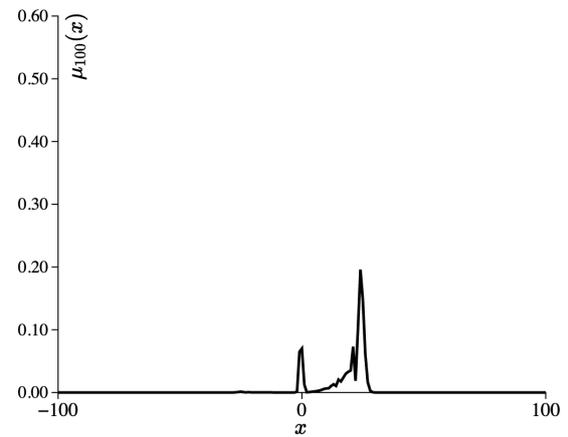


(b) 確率分布

図6: $\Delta_m = \frac{3}{12}\pi$, $\Delta_p = \frac{1}{12}\pi$, $\theta = \frac{11}{12}\pi$ としたときの命題 4.6 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 100 における確率分布を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.



(a) U の固有値



(b) 確率分布

図7: $\Delta_m = \frac{3}{12}\pi$, $\Delta_p = \frac{1}{12}\pi$, $\theta = \frac{1}{12}\pi$ としたときの命題 4.6 の例. (a) は時間発展作用素の固有値を図示したものであり, (b) は時刻 100 における確率分布を図示したものである. ここで, 初期状態は原点において, $\Psi_0(0) = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^t$, $x \neq 0$ において $\Psi_0(x) = \mathbf{0}$ であるとする.

命題 4.6 の例を図 6 及び図 7 で図示する.

謝辞

本論文を執筆するにあたり、多くの方の多大なるご支援、ご指導をいただきました。ここに、お世話になった全ての皆様への感謝を記させていただきます。

指導教員である今野紀雄教授には学部一年生の基礎演習の授業から、未解決問題などを通じて、数学の奥深さや面白さを教えていただきました。また、学年が上がるにつれ、量子ウォークの視点から数学の諸分野を一望する楽しさに触れることができ、本学位論文の執筆を志す大きなきっかけともなりました。学部生のうちから積極的に様々な研究集会での発表や論文執筆の機会をいただき、お忙しい中でも発表資料や論文の添削を何度も念入りしていただきました。学生の自由な発想を尊重しながらも丁寧な指導をしていただける環境で、のびのびとメリハリのある研究活動に尽力することができたことを非常に幸運に思います。本論文の執筆の際にも、大いにご助力いただき、心より感謝いたします。

また、私の研究活動に関わってくださった全ての先生方に心から感謝申し上げます。特に、学位論文の博論審査等にあたり、梶原教授、黒木教授、植木教授、竹居准教授、本田准教授には大変お世話になりました。私の研究の土台となる数理科学ユニットでの教育、研究環境を提供してくださったこと感謝いたします。

研究室の先輩である齋藤溪さんは本学位論文の研究の基礎となる内容についての共同研究を通じて、量子ウォークや論文の執筆など、多くのことを教えていただきました。さらには、学振の申請書類についても面倒を見ていただいたりなど、研究活動の様々な側面で多大な助言を賜りました。本当にありがとうございました。

また、毎週行われる今野研セミナーでは、瀬川准教授をはじめとして、発表や企画をしていただいた皆様のお力添えにより、多くの研究者と交流ができるかけがえのない時間と、新しい知見を広めることができるまたとない機会を得ることができたこと、御礼申し上げます。

研究室の先輩・後輩たちや、同期の皆様のおかげで研究はより楽しく豊かなものとなりました。ここまで多くの仲間と一緒に活動ができる環境で研究に励めたこと、非常に恵まれていたと深く痛感いたします。

ここに挙げた皆様に心から深く感謝します。

参考文献

- [1] A. Ambainis, Quantum walk algorithm for element distinctness, *SIAM Journal on Computing*, **37**, 210–239 (2007).
- [2] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, One-dimensional quantum walks, *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '01, 37–49, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA (2001).

- [3] A. Ambainis, J. Kempe, and A. Rivosh, Coins make quantum walks faster, *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, SODA '05, 1099–1108, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA (2005).
- [4] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral, and L. Velázquez, The CGMV method for quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1149–1192 (2012).
- [5] A. M. Childs, Universal computation by quantum walk, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 180501 (2009).
- [6] A. M. Childs and J. Goldstone, Spatial search by quantum walk, *Phys. Rev. A*, **70**, 022314 (2004).
- [7] A. M. Childs, D. Gosset, and Z. Webb, Universal computation by multiparticle quantum walk, *Science*, **339**, 791–794 (2013).
- [8] S. Endo, T. Endo, T. Komatsu, and N. Konno, Eigenvalues of two-state quantum walks induced by the hadamard walk, *Entropy*, **22**, 127 (2020).
- [9] S. Endo, T. Endo, N. Konno, M. Takei, and E. Segawa, Limit theorems of a two-phase quantum walk with one defect, *Quantum Inf. Comput.*, **15**, 1373–1396 (2015).
- [10] T. Endo, T. Komatsu, N. Konno, and T. Terada, Stationary measure for three-state quantum walk, *Quantum Inf. Comput.*, **19**, 901–912 (2019).
- [11] T. Endo and N. Konno, The stationary measure of a space-inhomogeneous quantum walk on the line, *Yokohama Math. J.*, **60**, 33–47 (2014).
- [12] T. Endo, N. Konno, and H. Obuse, Relation between two-phase quantum walks and the topological invariant, *Yokohama Math. J.*, **66**, 1–59 (2020).
- [13] T. Endo, N. Konno, E. Segawa, and M. Takei, A one-dimensional Hadamard walk with one defect, *Yokohama Math. J.*, **60**, 49–90 (2014).
- [14] S. Falkner and S. Boettcher, Weak limit of the three-state quantum walk on the line, *Phys. Rev. A*, **90**, 012307 (2014).
- [15] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, Weak limits for quantum random walks, *Phys. Rev. E*, **69**, 026119 (2004).
- [16] L. K. Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing*, STOC '96, 212–219, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA (1996).
- [17] N. Inui and N. Konno, Localization of multi-state quantum walk in one dimension, *Phys. A*, **353**, 133–144 (2005).
- [18] N. Inui, N. Konno, and E. Segawa, One-dimensional three-state quantum walk, *Phys. Rev. E*, **72**, 056112 (2005).
- [19] H. Kawai, T. Komatsu, and N. Konno, Stationary measures of three-state quantum walks on the one-dimensional lattice, *Yokohama Math. J.*, **63**, 59–74 (2017).
- [20] H. Kawai, T. Komatsu, and N. Konno, Stationary measure for two-state space-

- inhomogeneous quantum walk in one dimension, *Yokohama Math. J.*, **64**, 111–130 (2018).
- [21] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg, and E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Phys. Rev. A*, **82**, 033429 (2010).
- [22] C. Kiumi, Localization in quantum walks with periodically arranged coin matrices, *Int. J. Quantum Inf.*, **20**, 2250013 (2022).
- [23] C. Kiumi, Localization of space-inhomogeneous three-state quantum walks, *J. Phys. A Math. Theor.*, **55**, 225205 (2022).
- [24] C. Kiumi and K. Saito, Eigenvalues of two-phase quantum walks with one defect in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **20**, 171 (2021).
- [25] C. Kiumi and K. Saito, Strongly trapped space-inhomogeneous quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **21**, 330 (2022).
- [26] B. Kollár, T. Kiss, and I. Jex, Strongly trapped two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **91**, 022308 (2015).
- [27] N. Konno, Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **1**, 345–354 (2002).
- [28] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon, Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk, *Phys. Rev. A*, **81**, 042330 (2010).
- [29] T. Machida, Limit theorems of a 3-state quantum walk and its application for discrete uniform measures, *Quantum Inf. Comput.*, **15**, 406–418 (2015).
- [30] T. Machida and N. Konno, Limit theorem for a time-dependent coined quantum walk on the line, *Natural Computing*, 226–235, Springer Japan (2010).
- [31] F. Magniez, A. Nayak, J. Roland, and M. Santha, Search via quantum walk, *Proceedings of the thirty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing*, 575–584 (2007).
- [32] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd, and A. Aspuru-Guzik, Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer, *J. Chem. Phys.*, **129**, 11B603 (2008).
- [33] S. Richard, A. Suzuki, and R. T. de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin II: scattering theory, *Lett. Math. Phys.*, **109**, 61–88 (2019).
- [34] S. Richard, A. Suzuki, and R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin I: spectral theory, *Lett. Math. Phys.*, **108**, 331–357 (2018).
- [35] E. Segawa and A. Suzuki, Generator of an abstract quantum walk, *Quantum Stud.: Math. Found.*, **3**, 11–30 (2016).
- [36] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, Quantum random-walk search algorithm, *Phys. Rev. A*, **67**, 052307 (2003).
- [37] Y. Shikano and H. Katsura, Localization and fractality in inhomogeneous quantum walks with self-duality, *Phys. Rev. E*, **82**, 031122 (2010).
- [38] A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.*, **15**, 103–119 (2016).

- [39] C. Wang, X. Lu, and W. Wang, The stationary measure of a space-inhomogeneous three-state quantum walk on the line, *Quantum Inf. Process.*, **14**, 867–880 (2015).
- [40] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska-Bzdęga, Trapping a particle of a quantum walk on the line, *Phys. Rev. A*, **85**, 012329 (2012).
- [41] Y.-Z. Xu, G.-D. Guo, and S. Lin, One-dimensional three-state quantum walk with single-point phase defects, *Int. J. Theor. Phys.*, **55**, 4060–4074 (2016).