

数学のよさの感得を促す授業デザインに関する研究

—三角比を活用した最適化の教材を通して—

教科教育・特別支援教育プログラム 自然・生活グループ

高田 大輔

1. 研究の動機・目的・方法

勤務校（高等学校）では、基本的な知識・技能は身に付いており、思考・判断・表現も得意な生徒が多い。しかし、数学を学ぶ意義を受験勉強以外に感じている生徒は少ない。そのような中、受験勉強以外に数学を学ぶ意義を生徒が感じるようにし、数学的に考える資質・能力を育成するにはどうすればよいのかを考えるようになった。また、小学校算数科、中学校・高等学校数学科の目標では、学びに向かう力・人間性に関わる項目で「数学のよさ」という言葉が明記され、数学のよさを認識することの大切さが述べられている。本研究の目的は、三角比を活用した最適化の教材を開発し、生徒の思考過程や数学の働きについて調査・分析することで、どのような数学のよさの感得が促されるかを明らかにし、授業をデザインする上での留意点について示唆を得ることにある。研究の方法としては、授業を実践し、質問紙調査、授業内の生徒記述の分析、プロトコル分析を実施する。

2. 数学のよさとその感得を促す教材、授業展開モデル

清水（1995）は、数学のよさを分析的に捉える際には少なくとも2つの次元が必要であると述べている。

(1) 数量や図形などに関する概念や性質などに関する知識、計算や測定などの技能、数学的な考え方など観点別学習状況の評価の観点から見た数学の内容の次元。

(2) 数学の内容のもつ働きや有用性、つまり能率のよい処理を可能にしてくれる、肉体的にも精神的にも負担を軽減してくれる、表現を簡潔にし分かりやすくしてくれるなどの機能的な側面の次元。

そこで本研究では、上記のそれぞれについて、

(1) 三角比を活用した最適化

(2) あいまいさを解消し、明確な結果が得られることに焦点を当てることで、数学のよさを2次元で捉えることにした。そして、数学のよさを感得する授業展開について、反省的思考を核とした思考過程に着目して考えた。

J. Dewey（1951）は、反省的思考は、精神の内部に思考の問題を見だし、この問題を重視し、この問題を連続的に思考するものであると述べている。あいまいな雑然とした事態を反省的思考（観察、知識、関連する過去の経験）により振り返り、解明された事態（結果）が導かれるという。また、E. Wittmann（1981）は、数学をすでにできあがったものとしてではなく活動としてとらえ、次の3つの活動が重要であると述べている。

①直観的思考：直観的思考の発達は、豊富な例やモデルの操作的な探究に依存する。直観的経験は、生徒自身の活動を通して獲得されなければならない。

②反省的思考：生徒は、自身の直観的活動を反省するよう励まされなければならない。

③分析的思考：生徒は徐々に、概念、構成物、定理、証明を分析できるようにならなければならない。

以上を踏まえ、直観的に考えるだけでは判断があいまいになってしまう状況が生じたときに、反省的思考、分析的思考を行い、あいまいさが解消されるような、以下の硬貨を並べてデザインを作る教材を考案した。

（活動1）500円玉の周りに500円玉は何枚外接して並べられるか考えよう（理由も考える）。

（活動2）500円玉の周りに500円玉以外の硬貨をなるべく隙間なく外接して並べ、きれいな並べ方をデザインしよう。

活動2において「よりよい並べ方は？」という疑問により、見た目に基づいて様々に考え、議論する中で、例えば「隙間が最も小さくなる硬貨の組み合わせを考えよう」という意見が出て、そこに焦点化できると考えた。そして、感覚的なままでは正確に比べることができないと生徒が気づき、反省的思考を始め、分析的思考に進み、三角比を活用して最適化するという発想へとつながっていくと考えた。そして、本教材において、あいまいさが解消される過程で数学のよさが感得できる教材の授業展開モデルを図1の通り設定した。

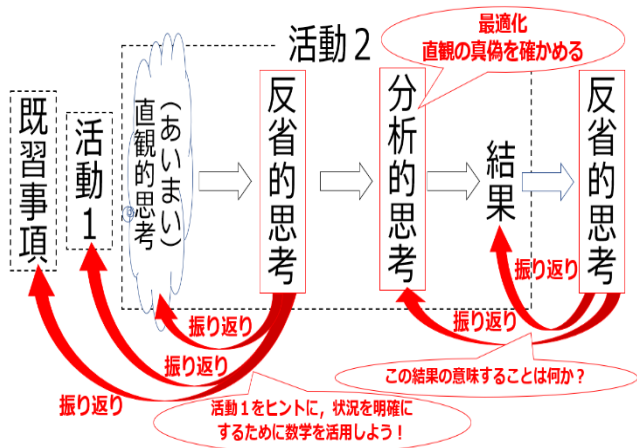


図1 数学のよさの感得を促す授業展開モデル

3. 授業実践、質問紙調査とその結果

1 学年の 2 クラスで授業を実践した。数学 I 「図形と計量」は既習であり、班に分かれて活動した。活動 2 において、余弦定理を用いて 500 円玉の中心角を計算し、隙間が最も小さい (360°との誤差が最も小さい) 並べ方を決めることとなった。授業の最後に各班で最もよい並べ方を 1 つ選び、黒板で発表してもらった。その中で更に、最もよい並べ方を順位付けをして決めた。一方のクラスでは、順位付けの際、2 つの並べ方で差異があるかどうか議論になった (図 2 参照)。50 円玉 2 枚、1 円玉 5 枚という点では同じだが、1 つは 50 円玉が隣り合い、もう 1 つは 50 円玉が隣り合わない。この並べ方の違いにより、考える角度が前者は 3 種類、後者は 2 種類となり、角度の合計が微妙に異なるという結論になった。図をかいて角度を具体的に捉える分析的思考により、「同じ種類の硬貨を同じ枚数使う場合であればどれも結果は同じだろう」という直観が誤りであることが分かり、最適化に役立ったといえる。2 クラスとも 50 円玉 2 枚、1 円玉 5 枚を使い 50 円玉が隣り合う並べ方が 1 位という結果になった。後で確認し、この並べ方が確かに最適であることが分かった。



図2 1位 (359.684°) と 2位 (359.671°) の並べ方

授業後、三角比の有用性をどの程度感得したのか調査

するため、授業を受けた生徒 79 人を対象に質問紙調査を行った。質問内容、集計結果は次の通りである。

今回の授業で、三角比を用いることはどの程度効果的だったと思いますか。理由も書いてください。

- | | |
|--------------------|------|
| A 大いに効果的だったと思う | 65 人 |
| B まあまあ効果的だったと思う | 13 人 |
| C あまり効果的ではなかったと思う | 1 人 |
| D ほとんど効果的ではなかったと思う | 0 人 |

A, B を選び、肯定的に回答した生徒が 79 人中 78 人 (99%) であった。A, B を選んだ理由は「角度 (値) が分かり、比較ができたから」というものが最も多く、78 人中 56 人 (72%) であった。

この結果から、本教材において、ほとんどの生徒が三角比の有用性を感じており、あいまいであった硬貨の並べ方の違いを明確にするよさや、同じ種類の硬貨を同じ枚数並べる場合でも、並べ方によって違いが生じることを明確にするよさを感得したと考えられる。

4. 研究の知見と課題

以上より、1 で述べた本研究の目的に対して以下の知見を得た。あいまいな状況に立たされたとき、その状況を明確にするためにある基準を考え、その基準に基づいて最適化していくことで、本教材においては、次のような数学のよさの感得を促すことができる。

- ・あいまいであった硬貨の並べ方の違いが、三角比を用いることで明確になること。
- ・「同じ種類の硬貨を同じ枚数使う場合であれば、どれも結果は同じだろう」という直観が、三角比を用いた分析的思考により誤ったものであることが分かり、最適化に役立つこと。

上記のよさを生徒が感得するには、生徒の思考にあいまいさを生み出し、それを共有することで問いが明確になるような場面設定をすることが大切である。

今後の課題として、質問紙調査の理由の中で、最適化し、結果を導くまでの思考過程に言及した上で、三角比を用いることは効果的であったという記述をしたものはなかった。その原因として、授業の最後に、本教材の内容は振り返ったが、思考過程を振り返ることはできなかったことが考えられる。今後は、思考過程の振り返りをどのように行っていくかを検討する必要がある。