

博士論文

格子上の量子ウォークのサポートに関する研究

Study on the support of quantum walks on lattices

横浜国立大学大学院
理工学府

学籍番号 18QC103
高橋 佐良人

Sarato Takahashi

学位授与 2022年3月

目次

1	序論	2
1.1	量子ウォークと本研究内容	2
1.2	ランダムウォークと量子ウォーク	3
1.2.1	ランダムウォークのダイナミクスと時間発展	3
1.2.2	量子ウォークのダイナミクスと時間発展	3
1.3	量子ウォークの特徴	6
1.3.1	線形的拡散	6
1.3.2	局在化	7
1.4	量子ウォークにおけるサポート	8
2	\mathbb{Z}^d 上の離散時間グローバールウォークのサポート	11
2.1	高次元グローバールウォークの研究	11
2.2	\mathbb{Z}^d 上の離散時間量子ウォーク	11
2.2.1	モデルの定義	11
2.2.2	\mathbb{Z}^d 上グローバールウォーク	12
2.2.3	定常測度	13
2.2.4	固有値問題	13
2.3	\mathbb{Z}^d 上の moving 型グローバールウォークのサポート	14
2.4	\mathbb{Z}^d 上の flip-flop 型グローバールウォークのサポート	26
2.5	有限サポートと定常分布	36
3	量子ウォークの定常振幅と極限振幅	38
3.1	シミュレーションから想定される極限振幅	38
3.2	1次元3状態の量子ウォーク	39
3.2.1	1次元3状態のモデルの定義	39
3.2.2	1次元3状態の極限振幅	40
3.2.3	1次元3状態の量子ウォークの定常振幅	40
3.3	2次元格子上的 moving 型グローバールウォークの極限振幅	42
3.3.1	フーリエ変換	42
3.3.2	極限振幅の計算	43
4	総括	46

1 序論

1.1 量子ウォークと本研究内容

量子ウォークは、ランダムウォークの量子版として紹介されることが多いが、その挙動はランダムウォークとは大きく異なる。また、100 年以上あるとされるランダムウォークの研究の歴史と比較して、量子ウォークの研究の歴史は浅く、主な研究結果は、ここ 20 年ほどの成果と言える。量子ウォークの基本的なアイデアは、いくつかの研究分野で生まれ、また紹介されているが (例えば Aharonov et al. [1]), 本研究では、その中でも離散時間の格子上の量子ウォークを研究対象として扱う。

ランダムウォークでは確認できない量子ウォークの主な特徴として、線形的拡散と局在化 (十分な時間が経過しても出発点に留まる性質) がよく知られているが、量子ウォークでは、有限なサポートが存在することも、大きな違いの一つとして認識されている。有限なサポートの具体的な構造、またその性質に関してはあまり研究がされていないのが現状であり、本研究では、そのサポートに関して研究することを主な目的とする。また、量子ウォークの研究においては、その多くが 1 次元での結果であり、高次元での量子ウォークの挙動に関しては、ほとんど解明されていないため、高次元への展開も試みた。

研究対象とする量子ウォークのモデルは、その初期状態により線形的拡散、局在化、またその両方が同時に確認できるグローバーウォークとする。量子ウォークの移動に関しては何種類か定義が存在するが、本研究では多くの研究で用いられている moving 型と flip-flop 型を対象とした。先行研究結果として、moving 型においては、2 次元では 4 点から構成されるサポートが Stefanak et al. (2010) [19] により紹介され、 d 次元では Komatsu and Konno (2017) [7] により 3^d 点でサポートが構築可能であることが証明されている。一方で flip-flop 型では、2 次元以上では 4 点でサポートが構成できることが Higuchi et al. (2014) [4] により証明されている。

本研究では、moving 型では、上記先行研究結果より少ない 2^d 点でサポートが構築できることを示し、その具体的な形を求めた。また、flip-flop 型では上記先行研究結果の別証明を与えた。具体的な解析手法としては、先行研究として用いられたフーリエ解析、スペクトル写像定理は用いず、固有値問題を巧妙に解析する手法を用いた。この手法により、サポートの具体的な形を求めることが可能となった。また、本研究結果は、Konno and Takahashi (2020) [12] にまとめられている。

最後に、この手法を応用することにより、1 次元 3 状態量子ウォークのグローバーウォークを含む量子コインにおけるサポートを求め、また既に求められている長時間極限の確率振幅が、このサポートの貼り合わせで構成できることを紹介する。また、2 次元 4 状態グローバーウォークでも同様にサポートの貼り合わせにより、時間平均極限振幅が得られることにも触れる。

1.2 ランダムウォークと量子ウォーク

1.2.1 ランダムウォークのダイナミクスと時間発展

はじめに, 標準的な1次元のランダムウォークを紹介する. また以降, 特に断りのない限り, 粒子 (しばしばランダムウォーカーとよばれる) は, 原点から出発するモデルを考え, 時間は離散時間, 空間は無限空間を考える. ランダムウォークは, 下図のようにランダムウォーカーが時刻が1経過する間に, 確率 p で左へ, 確率 $q (= 1 - p)$ で右へと空間上の場所を1つだけ移動するモデルである (Fig. 1 参照).

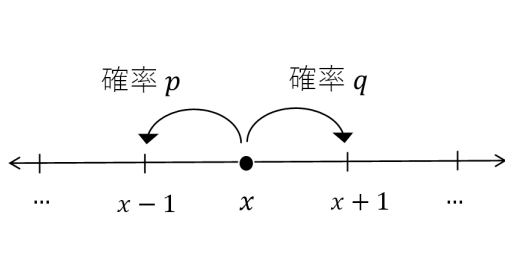


Fig. 1: ランダムウォークのダイナミクス

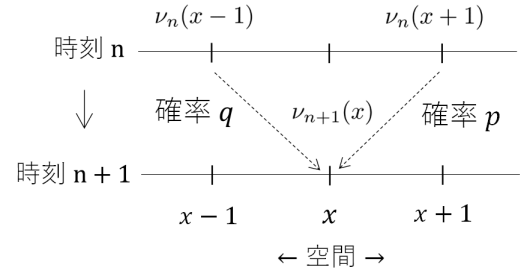


Fig. 2: ランダムウォークの時間発展

ここで, 時刻 n , 場所 x にランダムウォーカーが到達する確率を $\nu_n(x)$ とすると, 時刻 n から時刻 $n+1$ へのランダムウォークの時間発展の式は,

$$\nu_{n+1}(x) = p\nu_n(x+1) + q\nu_n(x-1) \quad (1.1)$$

と表すことができる (Fig. 2 参照). ただし, ランダムウォーカーは必ず右か左に移動し, $p+q=1$ ($0 \leq p, q \leq 1$) を満たすものとする. 例として, p と q を変化させた場合の, 原点から出発したランダムウォークの時刻 100 の確率分布を以下に紹介する.

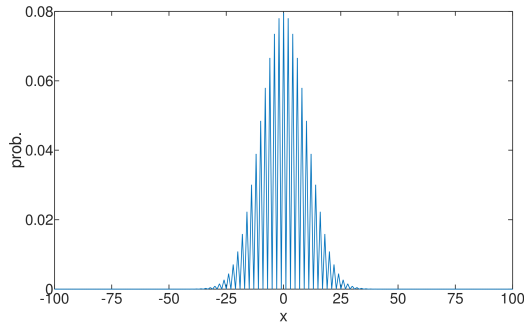


Fig. 3: ランダムウォークの確率分布 ($p=q=0.5$)

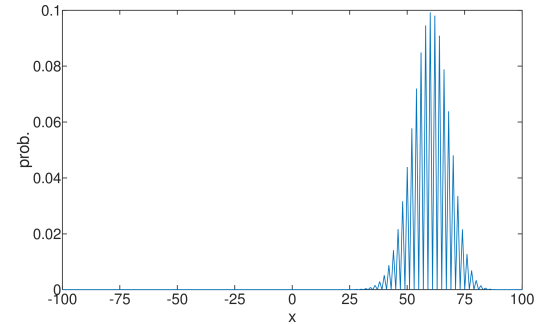


Fig. 4: ランダムウォークの確率分布 ($p=0.2, q=0.8$)

上記は, 横軸に場所 (原点 $x=0$), 縦軸に確率をプロットしたグラフであり, 一般的には, 単峰型となっていることで知られる. 次に, 量子ウォークのモデルに関して説明する.

1.2.2 量子ウォークのダイナミクスと時間発展

ここでは, 標準的な1次元の量子ウォークを紹介する. ランダムウォーク同様, 特に断りのない限り, 粒子 (しばしば量子ウォーカーとよばれる) は, 原点 ($x=0$) から出発するモデルを考え, 時間は離散時間, 空間は無限

空間とする。量子ウォークでは、量子ウォーカーの状態は確率振幅ベクトル $\Psi_n(x)$ で表され、行列 P との掛け算の結果が左へ、行列 Q との掛け算の結果が右へ、と空間上の場所を 1 つだけ移動するモデルである (Fig. 5 参照)。

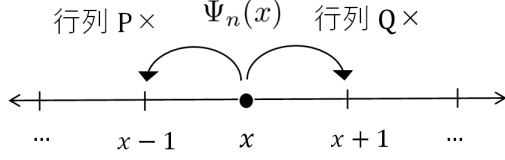


Fig. 5: 量子ウォークのダイナミクス

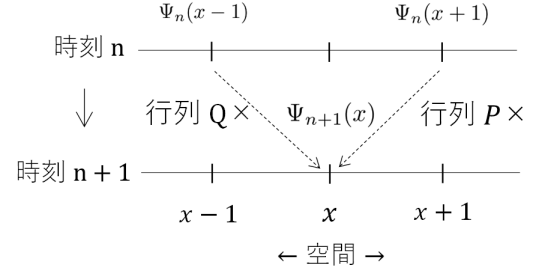


Fig. 6: 量子ウォークの時間発展

ここで、 P, Q は 2×2 の行列であり、 $\Psi_n(x)$ は、時刻 n 、場所 x における量子ウォーカーの確率振幅ベクトルとして、2つの複素数を成分に持つ縦ベクトルとする。このように量子ウォーカーには「カイラリティ」とよばれる2つの状態が存在し、確率振幅ベクトルの第1成分を左向きのカイラリティ、第2成分を右向きのカイラリティと考える（論文によっては左右逆で定義することもあるので注意が必要）。また、 $U = P + Q$ としたときの U は、しばしば量子コインとよばれ、後に定義する量子ウォーカーの存在確率を定義する上で U がユニタリ行列であることは、必要な条件となる。これらの定義を用いると、量子ウォークの確率振幅ベクトルの時間発展の式は、

$$\Psi_{n+1}(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1) \quad (1.2)$$

で表すことができる (Fig. 6 参照)。上記ランダムウォークの時間発展の式 (1.1) と量子ウォークの時間発展の式 (1.2) の類似性により、量子ウォークがランダムウォークの量子版と説明されることもある。量子ウォークの移動の定義には行列 P 、行列 Q の定義の仕方により何種類かあるが、ここでは、よく利用されている、moving 型（または Ambainis 型）と flip-flop 型と呼ばれる以下の定義を紹介する*。

$$\text{moving 型: } U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\text{flip-flop 型: } U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

この量子コイン U の行列 P と行列 Q への分解方法により量子ウォークの挙動が変わることも、量子ウォークの魅力の1つであると考えられる。次に量子ウォーカーが時刻 n において、場所 x に存在する確率 $P_n(x)$ を以下で定義する。

$$P_n(x) = \|\Psi_n(x)\|^2.$$

このとき、空間全体において、各場所に存在する確率の合計を 1 と定義するため、以下が成立することに注意する。

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} P_n(x) = 1.$$

*以降、特に断りのないときは moving 型の定義を使用する

ランダムウォークと違い、量子ウォークは内部状態を持つため、この存在確率の算出方法の違いが、挙動の違いにも影響し、その確率分布はランダムウォークとは大きく異なる分布となる。例として、アダマールウォークと、 $p = q = 0.5$ とした場合のランダムウォークとの分布の違いを以下で紹介する。ここで、アダマールウォークは、以下の量子コイン U で定義される量子ウォークであり、各成分の絶対値の 2 乗がすべて 0.5 となることと、以下の初期状態で原点のみから時間発展させた場合、任意の時刻でその確率分布が原点に対して左右対称となることから、 $p = q = 0.5$ とした場合のランダムウォークに対応するモデルとも考えられている。

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Psi_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

以下、ランダムウォーク (青) と量子ウォーク (赤) の確率分布を比較する。

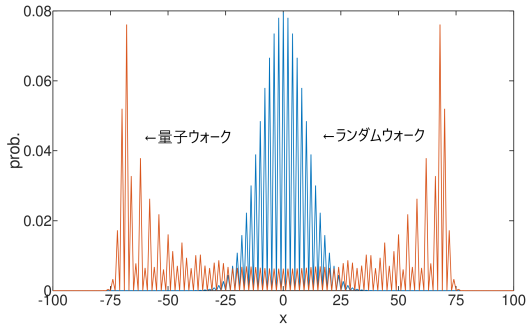


Fig. 7: 時刻 100 の確率分布

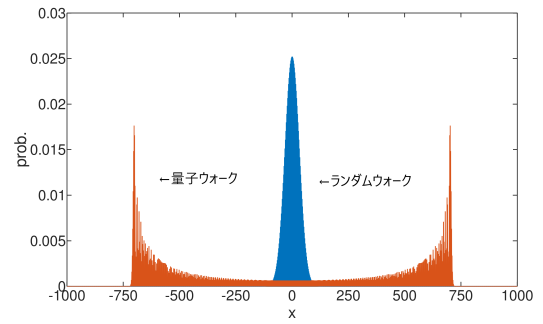


Fig. 8: 時刻 1000 の確率分布

このように上記時間発展の式 (1.1), (1.2) を比較すると非常に類似した式ではあるが、ランダムウォークではその時間経過後の確率分布を特徴付けるパラメータは、 p と q のみであるのに対し、量子ウォークでは、時間経過後の確率分布は、初期状態と量子コイン (ユニタリ行列) により大きく変わるため、様々な特徴を持った確率分布が現れることが知られている。量子ウォークの主な特徴に関しては、次節以降で触れることとして、最後に量子ウォークの物理学的な解釈に関して、簡単に触れる。量子ウォークにおける確率振幅ベクトルの時間発展の式 (1.2) は、以下のように書き換えることができる。

$$\Psi_{n+1}(x) = \sigma_1 U \Psi_n(x+1) + \sigma_2 U \Psi_n(x-1). \quad (1.3)$$

ただし、 σ_1, σ_2 は以下で与える。

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

式 (1.3) より、量子ウォークの時間発展は、以下の「状態変化」と「移動」の二段階の作用から定義されていると解釈できる。

- すべての場所の確率振幅ベクトルに対して、量子コイン U を作用させ、確率振幅ベクトルの状態を変化させる。
- 状態変化後のすべての場所の確率振幅ベクトルに対して、第一成分を左へ 1、第二成分を右へ 1 移動させる (行列 σ_1, σ_2 を作用させ、第一成分、第二成分をそれぞれ抽出する)。

上記二段階の作用の結果が、量子ウォークの確率振幅における時間発展となる (Fig. 9 参照)。この概念は、量子ウォークのダイナミクスの理解を深める上で参考となるため、ここで紹介した。その他、量子ウォークの移動に関するダイナミクス、モデル定義詳細に関しては、[13], [15], [16] に詳しい。

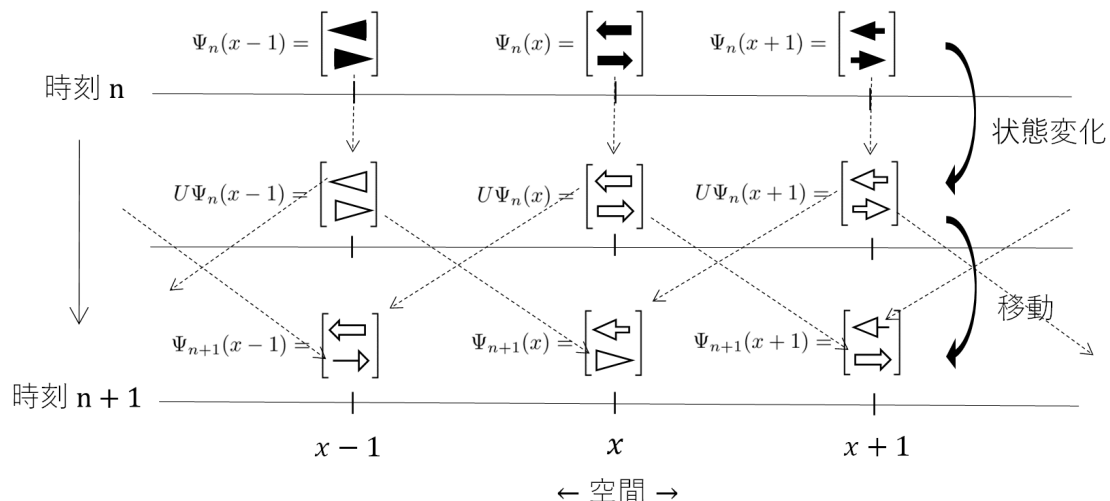


Fig. 9: 量子ウォークのダイナミクス

1.3 量子ウォークの特徴

本章では, 量子ウォークの特徴として良く知られている2つの特徴「線形的拡散」, そして「局在化」に関して触れる.

1.3.1 線形的拡散

ランダムウォークと量子ウォークでは, Fig. 7, Fig. 8からも確認できるように, 量子ウォークの方が, より遠くへ移動することが知られている. その性質を利用し, たとえば, 探索問題等への量子ウォークへの応用も研究されはじめている [14]. 実際, ランダムウォークと量子ウォークそれぞれの極限定理より, n を時刻とすると, ランダムウォークでは, その標準偏差が \sqrt{n} のオーダーで広がるのに対して, 量子ウォークでは, n のオーダーで広がることが知られている. これはランダムウォークより量子ウォークの方が, 遠くへ移動できる特徴を示し, この時刻に比例する広がり方は「線形的拡散」と呼ばれている.

ここでは, 線形的拡散が確認できる典型的な例の1つとして, 自由量子ウォークを紹介する. 以下の量子コインからなる量子ウォーカーの挙動は, 時刻に比例して線形的拡散を示し, しばしば「自由量子ウォーク」とよばれる.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり,} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

初期状態として, 原点のみに量子ウォーカーが存在する場合を想定し, 下記2つのパターンでのシミュレーション結果を紹介する.

$$\text{初期状態 1: } \Psi_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{初期状態 2: } \Psi_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

以下, 横軸に空間, 縦軸に時刻, 色の濃淡で確率を表したグラフを示す.

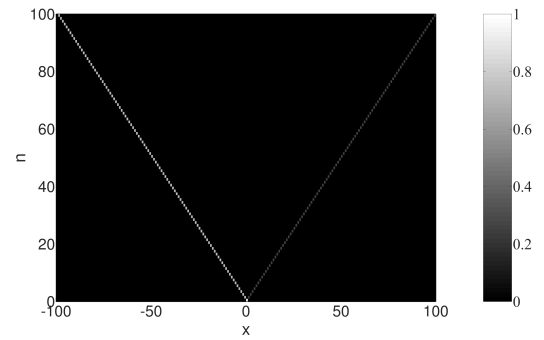
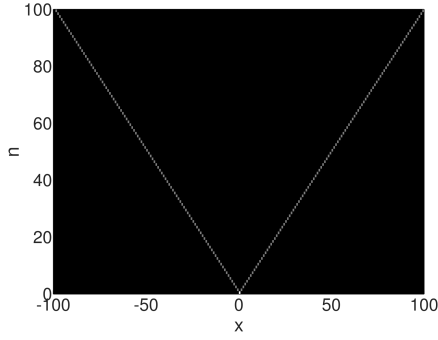


Fig. 10: 自由量子ウォークの時間発展 (初期状態 1) Fig. 11: 自由量子ウォークの時間発展 (初期状態 2)

グラフより, 任意の時刻において, 線形的に拡散していることが確認できる. この原点を挟んで両側に線形的に拡散する挙動は, ランダムウォークでは確認できない特徴であり, 量子ウォークの主な特徴の 1 つとして紹介されることが多い.

1.3.2 局在化

量子ウォークにおける「局在化」とは, $n \rightarrow \infty$ としたときに, ある場所 x において, 確率 $P_n(x)$ が 0 に収束しない, と定義するのが基本的な定義ではあるが, 1 次元 2 状態の場合など, 確率の値が時刻により振動する (偶奇性がある) モデルも多く, 上極限や時間平均極限で定義されることもある. 特に, 初期状態が原点のみの量子ウォークにおける原点での局在化は, ランダムウォークで研究される「再帰性 (recurrence)」と比較されることもあるが, 量子ウォークにおける局在化は「recurrent」というよりは「trapping」という表現に近いとも考えられている (第 3 章参照).

ここでは, 局在化が確認できる典型的な例の 1 つとして, 停留量子ウォークを紹介する. 以下の量子コインからなる量子ウォーカーの挙動は, 初期状態が原点のみの場合は, 空間 $\{-1, 0, 1\}$ に留まるため, しばしば「停留量子ウォーク」とよばれる[†].

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{つまり,} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

初期状態は, 原点のみに量子ウォーカーが存在する場合を想定し, 下記 2 つのパターンでのシミュレーション結果を紹介する.

$$\text{初期状態 1: } \Psi_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{初期状態 2: } \Psi_0(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

以下, 横軸に空間, 縦軸に時刻, 色の濃淡で確率を表したグラフを示す.

[†]この量子コインは, 後述するグローバウォークの 1 次元版でもある

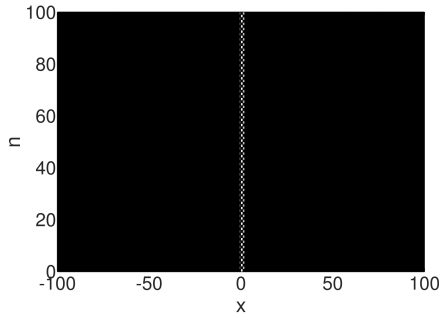


Fig. 12: 停留量子ウォークの時間発展 (初期状態 1)

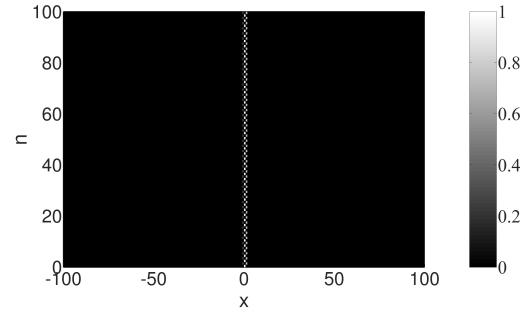


Fig. 13: 停留量子ウォークの時間発展 (初期状態 2)

局在化もまた、ランダムウォークでは確認できない特徴ではあるが、局在化が起こる条件は、空間構造や量子コイン、初期状態に大きく依存するため、その条件や性質の解析は重要なテーマとなっている。

1.4 量子ウォークにおけるサポート

量子ウォークにおいて、線形的拡散と局在化は、シミュレーションの結果として視覚的に捉えやすい特徴であり、様々な観点から研究されているのに対して、有限なサポート（ゼロベクトルでない振幅ベクトルが存在する場所の集合）の存在は、知られてはいるが、有限なサポートを主とした研究は多くはない。また、有限なサポートの存在が確認できない量子コインもあるため、このサポートの構成と性質に関して、非常に興味を持たれる。本研究ではこの有限なサポートの存在に注目し、特に、任意の時刻で、そのサポートが定常（不変）な場合[‡]を主とした解析結果を紹介する。

はじめに既知の自明な例として、式 (1.4) で紹介した量子コイン（1次元のグローバールウォーク）における有限なサポートを紹介する。下記初期状態から出発する1次元グローバールウォークは、時間に依存しない定常な振幅ベクトル[§]を与える。

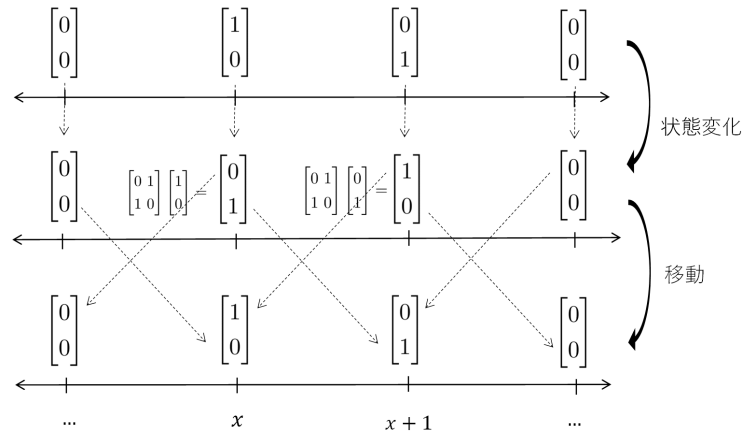


Fig. 14: 1次元格子上的グローバールウォークの有限サポート

[‡]例えば停留量子ウォークの場合、任意の時刻においてサポートは2点以下であるが、時刻によりサポートは変化する（他のサポートの例も含めて「付録」参照）。

[§]以後、見やすさを重視する場合など、正規化を省略した確率振幅ベクトルを、単に振幅ベクトルと記載する

2次元でのサポートに関連する研究として、例えば Stefanak et al. [19] は、moving 型グローバークウォークにおいて、フーリエ解析を用いた結果として、4点から構成されるサポートを紹介している。ここで、2次元グローバークウォークは、以下の量子コイン G を使用した量子ウォークであり、時間発展は以下で定義される。

$$\Psi_{n+1}(x, y) = L_G \Psi_n(x+1, y) + R_G \Psi_n(x-1, y) + D_G \Psi_n(x, y+1) + U_G \Psi_n(x, y-1).$$

$$L_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ただし、 $G = L_G + R_G + D_G + U_G$ とする。また、2次元格子上的グローバークウォークのダイナミクスと、4点から構成されるサポートを以下で紹介する。

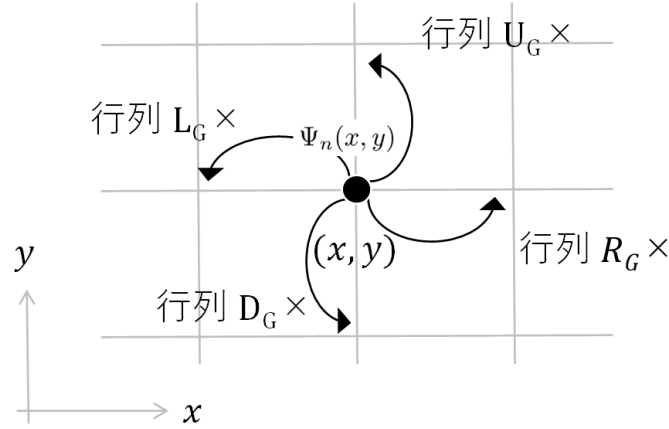


Fig. 15: 2次元格子上的グローバークウォークのダイナミクス

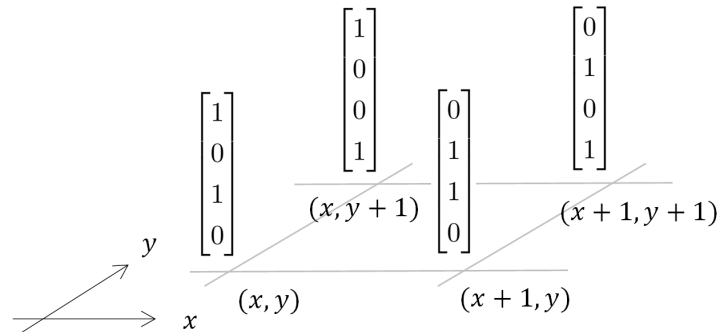


Fig. 16: 2次元格子上的グローバークウォークの4点サポートの例 (moving 型)

また、上記以外の高次元グローバークの結果としては、moving 型では、Komatsu and Konno [7] により、フーリエ解析を用いた結果として、 d 次元においては、 3^d 個からなるサポートを構築できることが示され、また具体的な形も紹介されている。

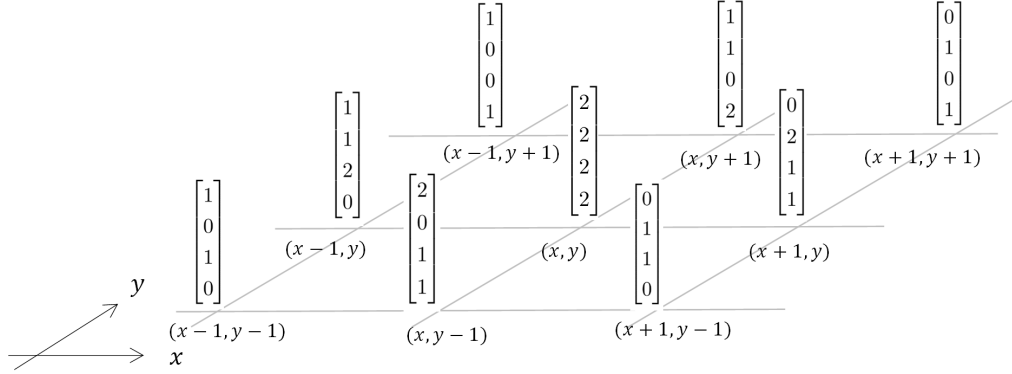


Fig. 17: 2次元格子上グローバークの 3^2 点サポートの例 (moving 型)

一方で、flip-flop 型では、Higuchi et al. [4] により、1次元では有限なサポートは存在せず、2次元以上では4点が最小であることがスペクトル写像定理の結果として紹介されている。

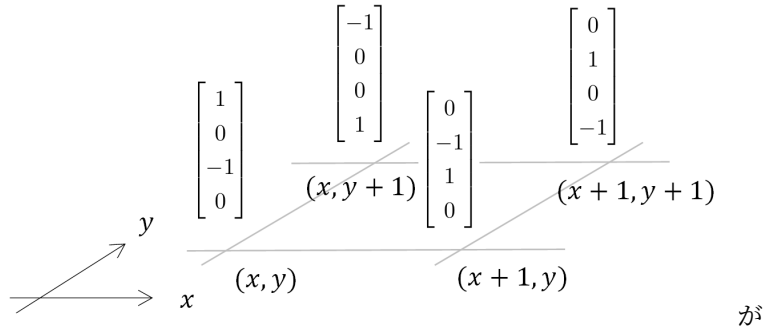


Fig. 18: 2次元格子上グローバークの有限サポートの例 (flip-flop 型)

これら上記の結果に対して、次章以降では、高次元格子上のグローバークを対象として、その最小なサポートの解析を行う。以下に先行研究結果として知られている、移動の型と最小サポートの数をまとめる。

著者	移動の型	1次元	2次元	3次元	...	d 次元
(既知/自明)	moving	2	-	-	...	-
Stefanak et al.	moving	-	4	-	...	-
Komatsu and Konno	moving	-	3^2	3^3	...	3^d
Higuchi et al.	flip-flop	なし	4	4	...	4

Table 1: グローバークのサポートに関する先行研究結果

また、最近のサポートに関する結果としては、Narimatsu [18] が高次元空間一様な量子ウォークの局在化の条件とサポートの関係を、フーリエ解析を用いて明らかにしたことに触れておく。

2 \mathbb{Z}^d 上の離散時間グローバークウォークのサポート

2.1 高次元グローバークウォークの研究

量子ウォークの研究結果の殆どは1次元での結果であり、高次元での結果は多くはない。 \mathbb{Z} を整数全体からなる集合としたとき、1次元格子状での研究としては、例えば Konno [10] にその結果がまとめられている。 \mathbb{Z}^2 上の量子ウォークとしては、局在化を起こすことで知られるグローバークウォークが主に研究されている。極限定理として、moving 型は、Watabe et al. [20], また、flip-flop 型は、Higuchi et al. [4] により解析され、局在化に関しては、moving 型は、Inui et al. [5], また、flip-flop 型は、Higuchi et al. [4] により研究結果が紹介されている。本章では、高次元における量子ウォーク、特に \mathbb{Z}^d 上のグローバークウォークの研究結果として、定常測度を構成する最小なサポートに関して、対応する固有値問題 (2.2.4 参照) を解くことにより求める方法を紹介する。

2.2 \mathbb{Z}^d 上の離散時間量子ウォーク

2.2.1 モデルの定義

ここでは、 \mathbb{Z}^d 上の内部自由度 $2d$ を持つ離散時間量子ウォークを考え、その数学的な定義を与える。 \mathbb{C} を複素数全体からなる集合とし、量子ウォークを、以下で紹介するユニタリ行列 C と移動作用素 τ を用いて定義する。はじめに、 $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,2d}$ を $2d \times 2d$ のユニタリ行列とし、量子ウォークの時間発展を与えるため、ユニタリ行列 C を $2d \times 2d$ の行列 σ_i を用いて、以下のように分解する。

$$C = \sum_{i=1}^{2d} \sigma_i C.$$

ここで、 $\sigma_i = (\sigma'_{kl})_{k,l=1,2,\dots,2d}$ として、下記で与える σ'_{kl} により定義する。

$$\sigma'_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l = i), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$$

次に、 $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ を \mathbb{Z}^d の標準基底として、移動作用素 τ_i を以下で与える。

$$(\tau_i f)(x) = f(x - e_i) \quad (f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}^{2d}, x \in \mathbb{Z}^d).$$

ここで τ_i は、プラス方向への移動を、以降で使用する τ_i^{-1} は、マイナス方向への移動を表すこととする。さらに、ユニタリ行列 C による量子ウォークを、moving 型と flip-flop 型として、以下でそれぞれ与える。

$$\begin{aligned} U_C &= \sum_{i=1}^d \left(\sigma_{2i-1} C \tau_i^{-1} + \sigma_{2i} C \tau_i \right), \\ U_C &= \sum_{i=1}^d \left(\sigma_{2i} C \tau_i^{-1} + \sigma_{2i-1} C \tau_i \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

また、 $\mathbb{Z}_{\geq} = \{0, 1, 2, \dots\}$ として、時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$ 、場所 $x \in \mathbb{Z}^d$ における確率振幅ベクトルを

$$\Psi_n(x) = {}^T \left[\Psi_n^1(x), \Psi_n^2(x), \dots, \Psi_n^{2d}(x) \right] \in \mathbb{C}^{2d}$$

で与える。ただし、 T は転置を表す。これより、 $\Psi_n : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}^{2d}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq}$) に対して、式 (2.1) より、moving 型は、

$$\Psi_{n+1}(x) \equiv (U_C \Psi_n)(x) = \sum_{i=1}^d \left(\sigma_{2i-1} C \Psi_n(x + e_i) + \sigma_{2i} C \Psi_n(x - e_i) \right)$$

また, flip-flop 型は,

$$\Psi_{n+1}(\mathbf{x}) \equiv (U_C \Psi_n)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \left(\sigma_{2i} C \Psi_n(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) + \sigma_{2i-1} C \Psi_n(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \right)$$

と表すことができる. この式は, 例えば moving 型の場合, 粒子が各時刻で, $\sigma_{2i} C$ により x_i 軸プラス方向に, また, $\sigma_{2i-1} C$ により x_i 軸マイナス方向に移動することを表している.

2.2.2 \mathbb{Z}^d 上グローバーウォーク

\mathbb{Z}^d 上のグローバーウォークは, 量子コインとして, $2d \times 2d$ の行列 $G = (g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,2d}$ を時間発展に使用した量子ウォークである. ただし, g_{ij} は, 以下で与える.

$$g_{ij} = \frac{1}{d} - \delta_{ij}.$$

ここで,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

とする. グローバーウォークは, 量子ウォークの特徴である線形的拡散と局在化が確認できるモデルであり, そこから派生したモデルも含めて, 研究の対象としてよく扱われる. 以下, 原点から出発した場合の時刻 50 での 2 次元格子上のシミュレーション結果を簡単に紹介する. 2 次元でのグローバーウォークは, 9 頁で紹介した行列 $G = L_G + R_G + D_G + U_G$ で定義される量子コインを使用する. また初期状態はそれぞれ, 以下で与える.

$${}^T \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \quad {}^T \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right], \quad {}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right], \quad {}^T \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

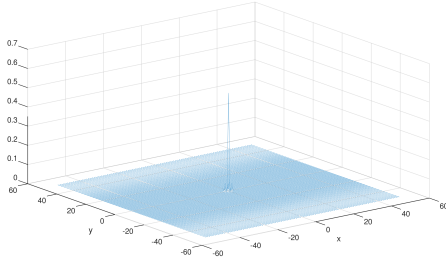


Fig. 19: グローバーウォークの確率分布 1

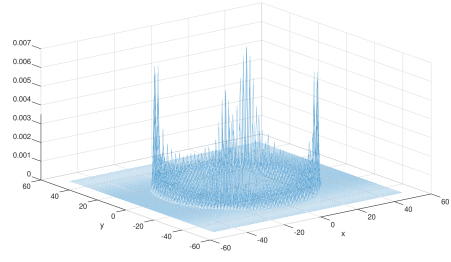


Fig. 20: グローバーウォークの確率分布 2

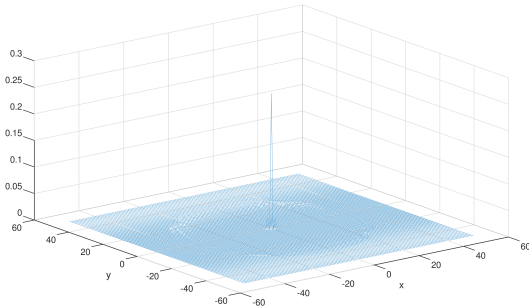


Fig. 21: グローバーウォークの確率分布 3

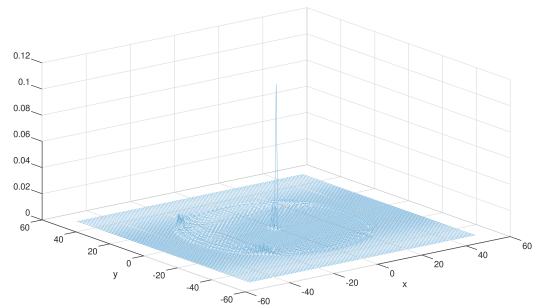


Fig. 22: グローバーウォークの確率分布 4

2.2.3 定常測度

ここでは、定常測度の定義とその研究に関して、簡単に触れる。はじめに、時刻 $n \in \mathbb{Z}_\geq$ 、場所 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して、測度 $\mu_n(\mathbf{x})$ を、

$$\mu_n(\mathbf{x}) = \|\Psi_n(\mathbf{x})\|_{\mathbb{C}^{2d}}^2$$

で定義する。ここで、 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{2d}}$ は、 \mathbb{C}^{2d} 上の標準ノルムとする。また、 $\mathbb{R}_\geq = [0, \infty)$ として、 $\Psi_n : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}^{2d}$ 、 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ のとき、写像 ϕ を、 $\phi : (\mathbb{C}^{2d})^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow (\mathbb{R}_\geq)^{\mathbb{Z}^d}$ と定義することにより、以下を得る。

$$\phi(\Psi_n)(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2d} |\Psi_n^j(\mathbf{x})|^2 = \mu_n(\mathbf{x}).$$

すなわち、この写像 ϕ は、振幅を測度へと変換することを意味する。次に、量子ウォークの定常測度全体の集合 $\mathcal{M}_s(U_C)$ を以下で与える。

$$\mathcal{M}_s(U_C) = \left\{ \mu \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}^d} \setminus \{\mathbf{0}\}; \text{ 任意の } n \in \mathbb{Z}_\geq \text{ に対して, } \phi(U_C^n \Psi_0) = \mu \text{ を満たす } \Psi_0 \in (\mathbb{C}^{2d})^{\mathbb{Z}^d} \text{ が存在する} \right\}.$$

ただし、 U_C は、ユニタリ行列 C における量子ウォークの時間発展の作用素とし、 $\mathbf{0}$ はゼロベクトルとする。この測度 $\mu \in \mathcal{M}_s(U_C)$ を、作用素 U_C により定義される量子ウォークの定常測度とする。ここで、 μ_n を時刻 n での U_C によって定義される量子ウォークの測度とすると、 $\mu \in \mathcal{M}_s(U_C)$ であれば、 $n \in \mathbb{Z}_\geq$ に対して、 $\mu_n = \mu$ である。また、特に各成分の和が 1 となるものは、定常確率測度と呼ばれる。

定常測度の研究に関しては、例えば、離散時間量子ウォークにおける一様測度の存在に関して、Konno [11] で議論されている。また、グローバールウォークに関しては、Stefanak et al. [19] や Komatsu and Konno [7] など、定常測度の構成に関して、紹介されている。

2.2.4 固有値問題

定常測度に関する研究においては、以下の固有値問題を満たす固有関数を見つけることにより、定常測度を構成する方法がある。すなわち U_C によって定義される量子ウォークの以下の固有値問題を考える。

$$U_C \Psi = \lambda \Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1). \quad (2.2)$$

ここで、固有値問題を考える理由としては、以下が成り立つからである。ただし、 $|\lambda| = 1$ に注意する。

$$\mu_n(\mathbf{x}) = \phi(\Psi_n)(\mathbf{x}) = \phi(U_C^n \Psi_0)(\mathbf{x}) = \phi(\lambda^n \Psi_0)(\mathbf{x}) = \phi(\Psi_0)(\mathbf{x}) = \mu_0(\mathbf{x}).$$

また、式 (2.2) を満たす集合を以下で与える。

$$W(\lambda) = \{\Psi \neq \mathbf{0} : U_C \Psi = \lambda \Psi\}.$$

$\Psi \in W(\lambda)$ に対しては、 $\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_s(U_C)$ が成り立ち、特に、 $\lambda = 1$ において、 Ψ が式 (2.2) を満たすとき、 Ψ を定常振幅と呼び、その各成分の和が 1 となるものを、定常確率振幅と呼ぶ。

2.3 \mathbb{Z}^d 上の moving 型グロバーウォークのサポート

本節では、 \mathbb{Z}^d 上の moving 型グロバーウォークの固有値問題を扱うことにより、本モデルでの最小なサポートの解析を行う。ここで、 d 次元グロバーウォークでは、式 (2.2) の固有値は、 $\lambda = \pm 1$ しか存在しないことが、Komatsu and Tate [8] によって示されているため、その結果を利用する。はじめに、固有値問題 $U_G \Psi = \lambda \Psi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$) は、以下と同値である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Psi^1(\mathbf{x}) = \frac{1-d}{d} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1), \\ \lambda \Psi^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \frac{1-d}{d} \Psi^2(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1), \\ \vdots \\ \lambda \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \cdots + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d), \\ \lambda \Psi^{2d}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

ただし、 $\Psi(\mathbf{x}) = {}^T [\Psi^1(\mathbf{x}), \Psi^2(\mathbf{x}), \dots, \Psi^{2d}(\mathbf{x})]$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$) とする。ここで、以降の議論を簡単にするため、式 (2.3) を以下のように書き換える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) = \frac{1-d}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \lambda \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1-d}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \vdots \\ \lambda \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \lambda \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

また、 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して、 $\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2d} \Psi^j(\mathbf{x})$ と定義して、 $\Gamma(\mathbf{x})$ を式 (2.4) に用いると、任意の $k = 1, 2, \dots, d$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して、次のように表すことができる。

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

$$\lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

ゆえに、式 (2.5), (2.6) より以下を得る。

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

つまり、式 (2.7) を満たす振幅ベクトルを見つけることが、定常なサポートの解析へ繋がる。ここで、最小なサポートの解析を進める準備として、 $\Psi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}^{2d}$ のサポートを次のように定義する。

$$S(\Psi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : \Psi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}.$$

以降、 $\#(A)$ を集合 A の個数としたとき、最小となる $\#(S(\Psi))$ を求めることを、目的として解析を進める。

補題 1 $\lambda = \pm 1$ に対して $\Psi \in W(\lambda)$, $\#(S(\Psi)) < \infty$ を仮定する. ここで,

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ が存在する場合, 以下が成立する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

証明 最初に, ある $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 次式が成立すると仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

さらに, 背理法により議論を進めるため, 以下の 2 つの式を仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

つまり, 次の 4 つの条件を仮定する.

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) = 0, \quad (2.9)$$

$$\Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) = 0, \quad (2.10)$$

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) = 0,$$

$$\Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) = 0. \quad (2.11)$$

ここで, 式 (2.7), (2.9), (2.11) より

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

が成立する. また, 仮定 (2.8) より, $\Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \neq 0$ が成り立つため, $\eta \in \mathbb{C}$ ($\eta \neq 0$) を用いて, 式 (2.12) を,

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \Psi^{2k}(\mathbf{x}) = \eta \quad (2.13)$$

とおく. さらに, $\mathbf{x} - \mathbf{e}_k$ おいて, 式 (2.7) を用いることにより, 次式を得る.

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x}) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k). \quad (2.14)$$

式 (2.14) に, 式 (2.9), (2.10), (2.13) を代入し, $\lambda \neq 0$ に注意すると

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) = \eta \quad (2.15)$$

を得る. 同様に, $\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k$ において, 式 (2.7) を用いて

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) \quad (2.16)$$

を得る. $\lambda = \pm 1$ を考慮しながら, 式 (2.16) と式 (2.10), (2.15) を合わせて

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k) = \lambda \{\Psi^{2k}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) - \eta\}. \quad (2.17)$$

さらに, 同様に, $\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k$ において, 式 (2.7) を用いると

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 4\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k) \quad (2.18)$$

を得るので、式 (2.18) に式 (2.17) を代入し

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - 4\mathbf{e}_k) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_k) + \eta$$

を得る。この議論を繰り返すことにより、最終的に任意の $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して、以下の式を得る。

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - (j+1)\mathbf{e}_k) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} - j\mathbf{e}_k) + (-\lambda)^{j+1}\eta. \quad (2.19)$$

ここで、仮定 $\#(S(\Psi)) < \infty$ に注意すると、このサポートは有限個であるので、次式を満たす $J(j' \geq J)$ が存在することが分かる。

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - j'\mathbf{e}_k) = \Psi^{2k}(\mathbf{x} - j'\mathbf{e}_k) = 0. \quad (2.20)$$

上記、式 (2.19) と式 (2.20) より $\lambda \neq 0$ を考慮すると $\eta = 0$ を得る。これは最初の仮定と矛盾するため、補題 1 の証明は完了する。

ここで、補題 1 の意味することに関して、以下の図を用いて、簡単に補足する。

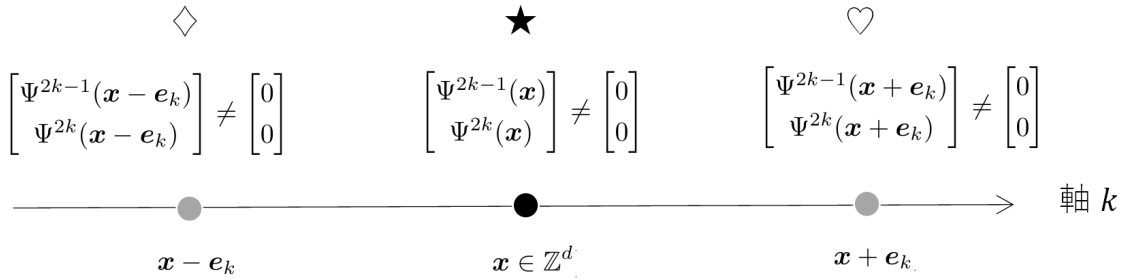


Fig. 23: 図において、★を仮定した場合、◇または、♡が成立する。つまり、 $\Psi \in W(\lambda)$ において、点 \mathbf{x} に量子ウォーカーが存在する可能性（確率）がある場合には、そのいずれかの隣接点にも量子ウォーカーが存在する可能性（確率）がある。正確には、★の場合には、軸 k 上の隣接点 $\mathbf{x} + \mathbf{e}_k$, $\mathbf{x} - \mathbf{e}_k$ いずれかに量子ウォーカーが存在する可能性（確率）がある。

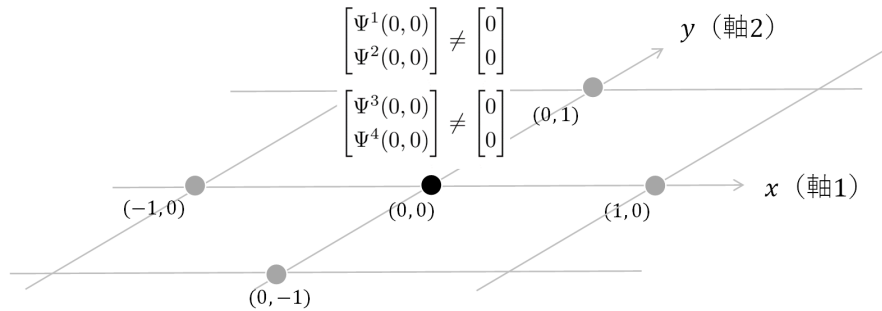


Fig. 24: 図の 2 次元の場合を例とすると、原点にて図の条件を満たすとき、点 $(-1,0)$ または点 $(1,0)$ に、点 $(0,-1)$ または点 $(0,1)$ に、それぞれ量子ウォーカーが存在する可能性（確率）がある。

補題 2 $\lambda = \pm 1$ に対して $\Psi \in W(\lambda)$, $\#(S(\Psi)) < \infty$ を仮定する. さらに $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ において, 以下を満たすとする.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

このとき $m^{(-)} < m^{(+)}$, また $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha\beta \neq 0$) として, 次式を満たす $m^{(-)} (\leq 0)$ と $m^{(+)} (\geq 0)$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m < m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \alpha, 0 \end{bmatrix} & (m = m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, \beta \end{bmatrix} & (m = m^{(+)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m > m^{(+)}). \end{cases} \quad (2.21)$$

さらに, 全ての $l \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{k\}$ に対して次の 2 つの式が成立する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

証明 補題 1 より, $\#(S(\Psi)) \geq 2$ は明らかである. これより $m^{(-)} < m^{(+)}$ において, 次式を満たす $m^{(-)} (\leq 0)$ と $m^{(+)} (\geq 0)$ が存在する. ただし, $|\alpha| + |\gamma| > 0$, $|\beta| + |\delta| > 0$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$) とする.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m < m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \alpha, \gamma \end{bmatrix} & (m = m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \delta, \beta \end{bmatrix} & (m = m^{(+)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m > m^{(+)}). \end{cases} \quad (2.22)$$

ここで, 点 $\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k$ における式 (2.7) より,

$$\begin{aligned} & \lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 2)\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) \\ &= \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

を得る. また, 式 (2.22), (2.23) より $\lambda \neq 0$ を考慮すると,

$$\Psi^{2k}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \gamma = 0 \quad (2.24)$$

を得る. 同様にして, 点 $\mathbf{x} + (m^{(+)} + 1)\mathbf{e}_k$ における式 (2.7) より, 次式を得る.

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) = \delta = 0. \quad (2.25)$$

これらの式 (2.22), (2.24), (2.25) より 式 (2.21) が成立する.

次に, 補題 2 の後半部分の証明に入る. 点 $\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k$ における式 (2.5) から, 以下を得る.

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k). \quad (2.26)$$

式 (2.26) と式 (2.21) を合わせて,

$$\frac{1}{d}\Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \alpha \quad (2.27)$$

が分かる. 同様に, 点 $\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k$ における式 (2.6) と 式 (2.21) より

$$\frac{1}{d}\Gamma(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) = \beta$$

を得る. ここで, 次式を満たす $l \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{k\}$ が存在すると仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

はじめに, 式 (2.28) の場合を考える. 式 (2.5) において, $k \rightarrow l$ と $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k$ を用いると, 次式を得る.

$$\lambda\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l) + \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \frac{1}{d}\Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k).$$

式 (2.27) を考慮すると, 以下を得る.

$$\lambda\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l) + \Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \alpha. \quad (2.30)$$

ここで式 (2.28) において仮定した $\Psi^{2l-1}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = 0$ より, $\lambda = \pm 1$ に注意すると, 式 (2.30) は以下のように書き換えることができる.

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l) = \lambda\alpha. \quad (2.31)$$

次に, $k \rightarrow l$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l$ として式 (2.7) に代入すると

$$\begin{aligned} & \lambda\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - 2\mathbf{e}_l) + \Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l) \\ &= \lambda\Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) + \Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l). \end{aligned}$$

式 (2.31) と, 式 (2.28) において仮定した $\Psi^{2l}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = 0$ を用いて, $\lambda = \pm 1$ に注意すると, 以下を得る.

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - 2\mathbf{e}_l) = \lambda\Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_l) - \lambda^2\alpha.$$

上記の議論を繰り返すことにより, 任意の $j = 1, 2, \dots$ に対して次式が成立することが分かる.

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - (j+1)\mathbf{e}_l) = \lambda\Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - j\mathbf{e}_l) - (-\lambda)^{j+1}\alpha. \quad (2.32)$$

ここで, 前提とした $\#(S(\Psi)) < \infty$ を考慮すると, 以下を満たす j' に対して, $j' \geq J$ を満たす J が存在することが言える.

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - j'\mathbf{e}_l) = \Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - j'\mathbf{e}_l) = 0. \quad (2.33)$$

よって, 式 (2.32) と式 (2.33) より,

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - (J+1)\mathbf{e}_l) = \lambda\Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - J\mathbf{e}_l) - (-\lambda)^{J+1}\alpha,$$

$$\Psi^{2l-1}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - J\mathbf{e}_l) = \Psi^{2l}((\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) - J\mathbf{e}_l) = 0$$

を得る. $\lambda \neq 0$ を考慮すると $\alpha = 0$ を得るため, 最初の仮定に矛盾が生じる. 式 (2.29) の場合も, 同様の計算により, $\beta = 0$ となり, 矛盾が生じる. 以上より補題 2 の証明は終了する.

ここで、補題 2 の意味することに関して、以下の図を用いて、簡単に補足する.

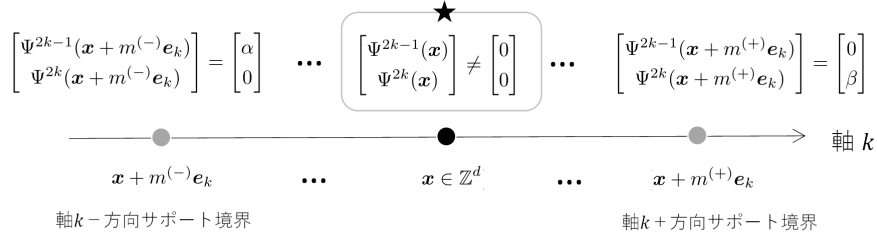


Fig. 25: 図において, \star を仮定した場合, 軸 k でのサポート境界において, マイナス方向境界では第 $(2k-1)$ 成分 $\neq 0$ と第 $(2k)$ 成分 $= 0$, プラス方向境界では第 $(2k-1)$ 成分 $= 0$ と第 $(2k)$ 成分 $\neq 0$ であることが分かる.

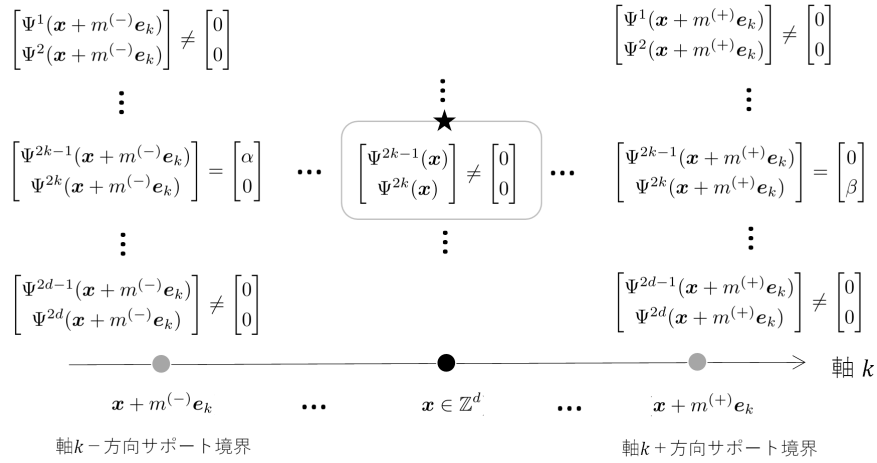


Fig. 26: 図のとおり, 軸 k のサポート境界では, その他の軸 k の成分がすべてゼロベクトルでないことも, 分かる.

前出の補題 1 と補題 2 より, $\Psi \in W(\lambda)$ における Ψ の形がある程度見えてくる. 特に, サポートを構成する点の個数「 $\#(S(\Psi))$ 」を最小とするサポートは, 補題 1 と補題 2 より, 次の定理として成立する.

定理 1 \mathbb{Z}^d 上の moving 型 グローバーウォークでは, $\lambda = \pm 1$ において, $\Psi \in W(\lambda)$ のときに, 次式が成立する.

$$\#(S(\Psi)) \geq 2^d.$$

また特に, 以下を満たす $\Psi_\star^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ が存在する.

$$\#(S(\Psi_\star^{(\lambda)})) = 2^d.$$

実際に,

$$S(\Psi_\star^{(\lambda)}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_k \in \{0, 1\} \ (k = 1, 2, \dots, d)\}$$

のときに以下が成立する.

$$\Psi_\star^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda^{x_1+x_2+\dots+x_d} \times {}^T \begin{bmatrix} |x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_d\rangle \end{bmatrix} \quad (\mathbf{x} \in S(\Psi_\star^{(\lambda)})).$$

ここで, $|0\rangle = {}^T[1, 0]$, また $|1\rangle = {}^T[0, 1]$ とする.

証明 $\lambda = \pm 1$ として, $\Psi \in W(\lambda)$ を考える. ここで, 次式を満たす $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ が存在すると仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

つまり, $\mathbf{x} \in S(\Psi)$ である.

最初に $d = 1$ の場合を考える. 補題 1 より, $\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 \in S(\Psi)$ または, $\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 \in S(\Psi)$ が成立するため, $\#(S(\Psi)) \geq 2$ を得る. 実際に $\lambda = \pm 1$ において, $\#(S(\Psi_\star^{(\lambda)})) = 2$ を満たす $\Psi_\star^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ が以下のとおり存在する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1) \\ \Psi^2(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T[0, 0] & (m_1 < 0), \\ \lambda^{m_1} \times {}^T[1, 0] & (m_1 = 0), \\ \lambda^{m_1} \times {}^T[0, 1] & (m_1 = 1), \\ {}^T[0, 0] & (m_1 > 1). \end{cases}$$

ここで $m_1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意する.

次に $d = 2$ の場合について議論する. $d = 1$ での議論より, 以下の条件を仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x}) \\ \Psi^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \\ \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

式 (2.34) と補題 2 より, $\#(S(\Psi))$ を最小化する目的で, $m^{(-)} = 0$ と $m^{(+)} = 1$ を仮定し, 以下の 2 つの式を得る.

$$\begin{bmatrix} \Psi^3(\mathbf{x}) \\ \Psi^4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^3(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \\ \Psi^4(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

補題 1 と式 (2.35), (2.36) より, “ $\mathbf{x} - \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ または, $\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ ”, “ $\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ または, $\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ ” がそれぞれ成立し, $\#(S(\Psi)) \geq 4$ を導くことができる. 実際に, $\lambda = \pm 1$ において,

$\#(S(\Psi_*^{(\lambda)})) = 4$ を満たす $\Psi_*^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ を次のように構築できる.

$$\Psi(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = \begin{cases} \lambda^{m_1+m_2} \times^T \begin{bmatrix} 1, 0, 1, 0 \end{bmatrix} & (m_1, m_2) = (0, 0), \\ \lambda^{m_1+m_2} \times^T \begin{bmatrix} 0, 1, 1, 0 \end{bmatrix} & (m_1, m_2) = (1, 0), \\ \lambda^{m_1+m_2} \times^T \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 1 \end{bmatrix} & (m_1, m_2) = (0, 1), \\ \lambda^{m_1+m_2} \times^T \begin{bmatrix} 0, 1, 0, 1 \end{bmatrix} & (m_1, m_2) = (1, 1), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix} & (\text{上記以外}). \end{cases} \quad (2.37)$$

但し, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ とする. また, 式 (2.37) は, Stefanak et al. [19] に紹介されていることに留意する. 同じ議論を $d = 3, 4, \dots$, に適用することにより, 定理 1 を得る.

例として, 式 (2.37) より, $\lambda = 1$ における \mathbb{Z}^2 上のグローバーウォークの定常測度として, 任意の $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ に対して, 以下を構築することができる.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(x,y)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(x+1,y)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(x,y+1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(x+1,y+1)}.$$

ただし,

$$\delta_{(a,b)}(a', b') = \begin{cases} 1 & (a, b) = (a', b'), \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

とする.

またここで, $x, y \in \{0, -1\}$ とすると, Komatsu and Konno [7] によって紹介されている $\#(S(\Psi)) = 9$ となる定常測度を構築することができることも触れておく.

$$\begin{aligned} \Psi = & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \delta_{(0,0)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \delta_{(0,1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(1,0)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(0,-1)} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(-1,0)} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(1,1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(1,-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(-1,-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(-1,1)}. \end{aligned}$$

ここで、定理 1 に関して、以下の図を用いて、簡単に補足する。3 次元でのグローバークウォークにおいて、 $\lambda = 1$ の場合を考える。ここで、サポートを最小とするため、軸上のサポート境界は隣接する、つまり、補題 2 において $m^{(-)} + 1 = m^{(+)}$ を仮定すると、式 (2.7) より、式 (2.21) における α, β は、 $\alpha = \beta$ が成立することに注意する。

はじめに、 $[\Psi^1(0,0,0), \Psi^2(0,0,0)] \neq [0,0]$ を前提として、補題 1 と補題 2 を満たす、有限なサポートの構成を、以下の手順に従い説明する。

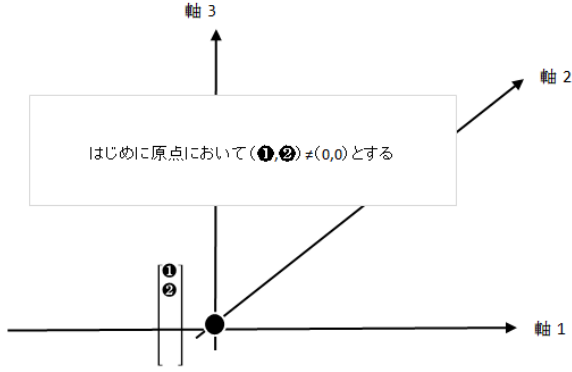


Fig. 27: 最初の前提を置く

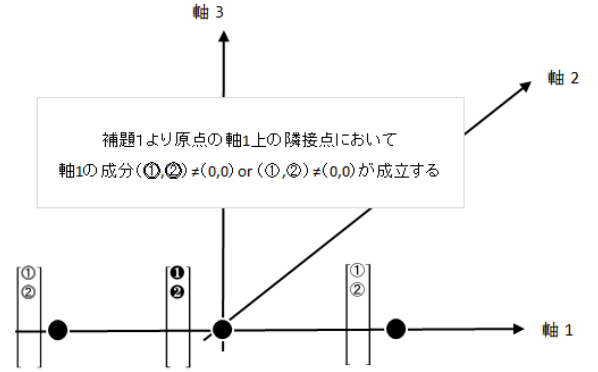


Fig. 28: 補題 1 を利用する

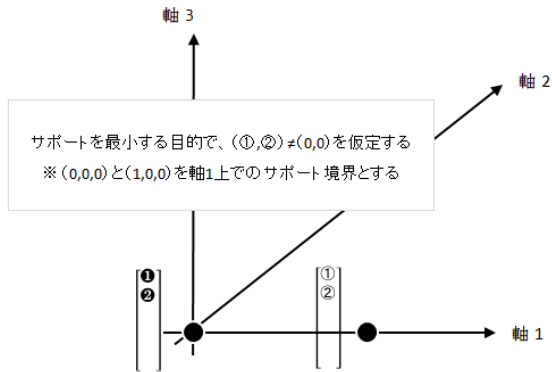


Fig. 29: サポート境界とする

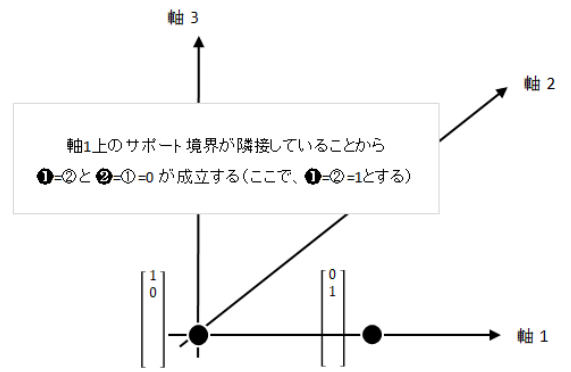


Fig. 30: 具体的な成分の値を置く

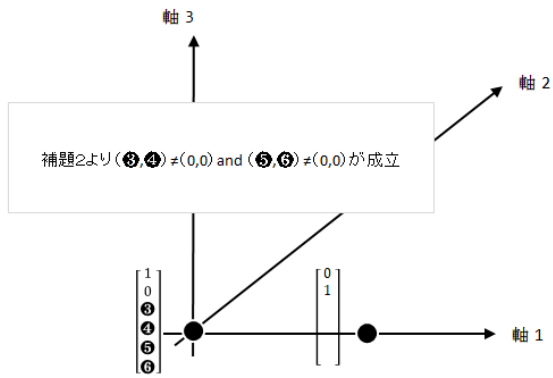


Fig. 31: 補題 2 を利用する

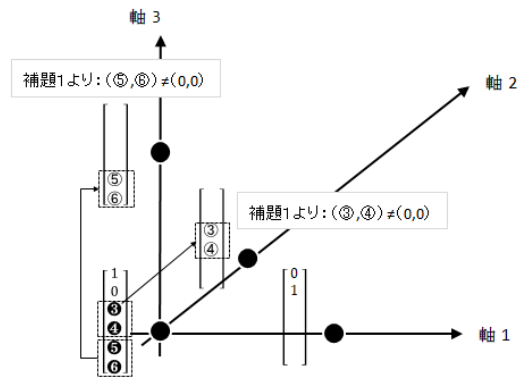


Fig. 32: 補題 1 を利用する

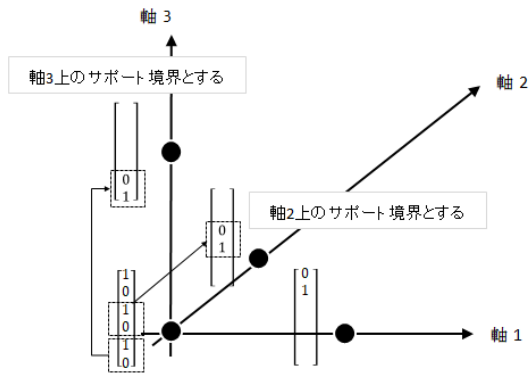


Fig. 33: サポート境界とする

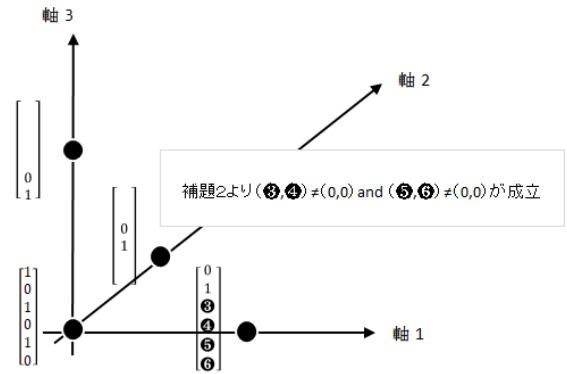


Fig. 34: 補題 2 を利用する

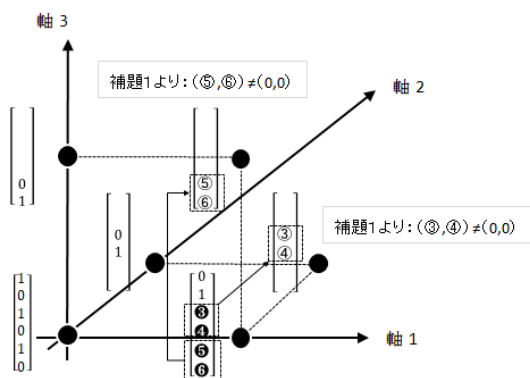


Fig. 35: 補題 1 を利用する

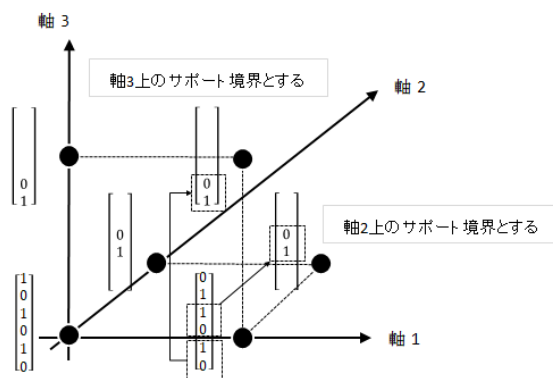


Fig. 36: サポート境界とする

上記の議論を繰り返すことにより, moving 型の 3 次元グローバークのサポートは, その 1 つの例として, 下記の立方体で構成することができることが分かる.

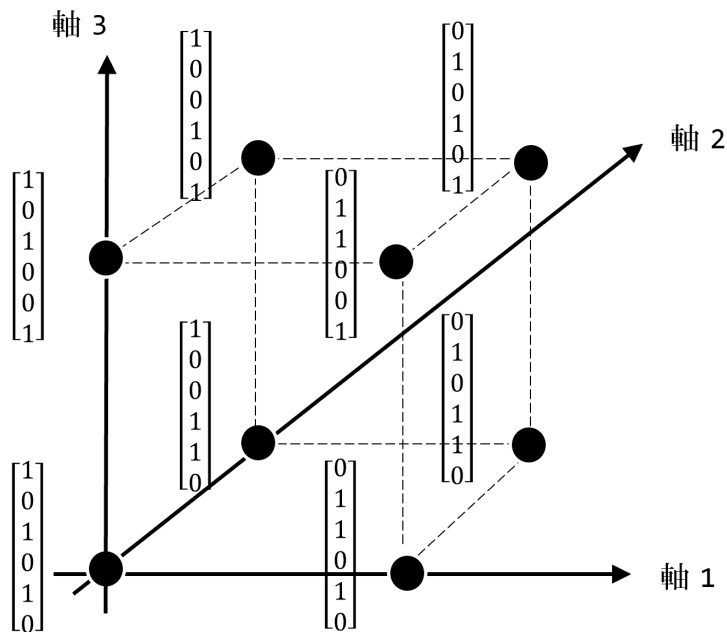


Fig. 37: moving 型の 3 次元グローバークの最小サポートの具体的な構成例 ($\lambda = 1$ の場合)

ここで, 各点における測度は上記 3 次元以外の場合も, すべて同じ値であり, 有限な一様測度を構成している. また, この有限なサポートは定常測度となっていることから, これらを組み合わせることにより, 様々な分布の定常測度を構成できることが分かる (36 頁参照).

また, $\lambda = -1$ の場合を参考まで以下で紹介する.

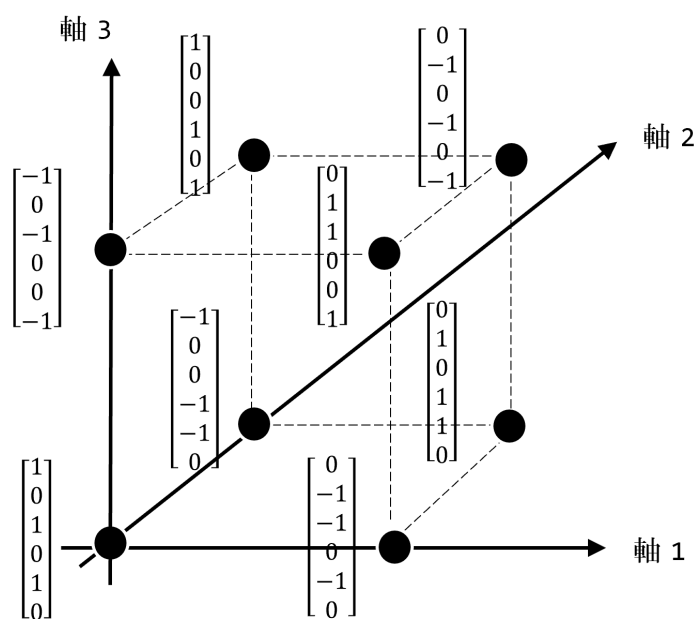


Fig. 38: moving 型の 3 次元グローバウォークの最小サポートの具体的な構成例 ($\lambda = -1$ の場合)

このサポートは, 定常測度を構成しているが, 偶数時刻と奇数時刻で符号が反転するサポートであり, 定常振幅とはならないタイプのサポートとなる.

2.4 \mathbb{Z}^d 上の flip-flop 型グローバーウォークのサポート

本節では, flip-flop 型の d 次元格子上のグローバーウォークについて, 考える. はじめに, 固有値問題 $U_G \Psi = \lambda \Psi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$) は, 以下と同値である.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Psi^1(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \frac{1-d}{d} \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1), \\ \lambda \Psi^2(\mathbf{x}) = \frac{1-d}{d} \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1), \\ \vdots \\ \lambda \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d), \\ \lambda \Psi^{2d}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \cdots + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d). \end{array} \right. \quad (2.38)$$

ただし, $\Psi(\mathbf{x}) = {}^T [\Psi^1(\mathbf{x}), \Psi^2(\mathbf{x}), \dots, \Psi^{2d}(\mathbf{x})]$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$) とする. ここで, 以降の議論を簡単にするため, 式 (2.38) を以下のように書き換える.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Psi^1(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1-d}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \lambda \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) = \frac{1-d}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \vdots \\ \lambda \Psi^{2d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_d) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}), \\ \lambda \Psi^{2d}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_d) = \frac{1}{d} \Psi^1(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^2(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1-d}{d} \Psi^{2d-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{d} \Psi^{2d}(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (2.39)$$

また, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, $\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2d} \Psi^j(\mathbf{x})$ と定義して, $\Gamma(\mathbf{x})$ を式 (2.39) に用いると, 任意の $k = 1, 2, \dots, d$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 次のように表すことができる.

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

$$\lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.41)$$

ゆえに, 式 (2.40) と式 (2.41) より, 以下を得る.

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x}) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}). \quad (2.42)$$

つまり, 式 (2.42) を満たす振幅ベクトルを見つけることが, 定常なサポートの解析へ繋がる. また, 式 (2.42) に対応する moving 型の式は, 式 (2.7) となり, この若干の違いが, 以降のサポートの構成を考える上では, 大きな違いとなる. 参考のため, 式 (2.7) を再掲する.

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x}).$$

以降, 前節の moving 型での議論と同様の考え方で進める.

補題 3 $\lambda = \pm 1$ に対して $\Psi \in W(\lambda)$, $\#(S(\Psi)) < \infty$ を仮定する. ここで,

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ が存在する場合, 以下が成立する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

証明 最初に, ある $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 次式が成立すると仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

さらに, 背理法により議論を進めるため, 以下の 2 つの式を仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

補題 1 と同様の計算を行うことにより, 任意の $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して, 式 (2.19) に対応する以下の式を得ることができる.

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - (j+1)\mathbf{e}_k) = -\lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} - j\mathbf{e}_k) + \lambda^{j+1}\eta. \quad (2.43)$$

ただし, $\eta = \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) = \Psi^{2k}(\mathbf{x})$ とする. また, 前提である $\#(S(\Psi)) < \infty$ を考慮すると, 任意の $j' \geq J$ に対して, 以下を満たす J が存在することが分かる.

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} - j'\mathbf{e}_k) = \Psi^{2k}(\mathbf{x} - j'\mathbf{e}_k) = 0. \quad (2.44)$$

式 (2.43) と式 (2.44) より $\lambda \neq 0$ を考慮すると $\eta = 0$ を得る. これより矛盾が生じるため, 補題 3 の証明は完了する.

補題 3 の意味することは, moving 型の Fig. 23 と同じであり, $\Psi \in W(\lambda)$ において, 点 \mathbf{x} に量子ウォーカーが存在する可能性 (確率) がある場合には, そのいずれかの隣接点にも量子ウォーカーが存在する可能性 (確率) がある, 正確には, 点 \mathbf{x} の軸 k 成分がゼロベクトルでない場合には, 軸 k 上の隣接点 $\mathbf{x} + \mathbf{e}_k$, $\mathbf{x} - \mathbf{e}_k$ いずれかに量子ウォーカーが存在する可能性 (確率) があることを示している.

補題 4 $\lambda = \pm 1$ に対して, $\Psi \in W(\lambda)$, $\#(S(\Psi)) < \infty$ を仮定する. さらに, $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ において, 以下を満たすとする.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

このとき, $m^{(-)} < m^{(+)}$, また $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha\beta \neq 0$) として, 次式を満たす $m^{(-)}(\leq 0)$ と $m^{(+)}(\geq 0)$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m < m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \alpha, 0 \end{bmatrix} & (m = m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, \beta \end{bmatrix} & (m = m^{(+)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m > m^{(+)}). \end{cases} \quad (2.45)$$

さらに, 以下の 2 つの式も成立する.

$$\Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = 0, \quad (2.46)$$

$$\Gamma(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) = 0.$$

証明 補題 3 より, $\#(S(\Psi)) \geq 2$ であることが分かるので, 以下を満たす $m^{(-)}(\leq 0)$ と $m^{(+)}(\geq 0)$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \\ \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m\mathbf{e}_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m < m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \alpha, \gamma \end{bmatrix} & (m = m^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \delta, \beta \end{bmatrix} & (m = m^{(+)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m > m^{(+)}). \end{cases} \quad (2.47)$$

ただし, $m^{(-)} < m^{(+)}$ また, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ として, $|\alpha| + |\gamma| > 0$ かつ $|\beta| + |\delta| > 0$ である. ここで, 点 $\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k$ における式 (2.42) より,

$$\begin{aligned} \lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) \\ = \lambda \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k). \end{aligned} \quad (2.48)$$

また, $\lambda \neq 0$ に注意して, 式 (2.47) と式 (2.48) を用いると,

$$\Psi^{2k}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \gamma = 0 \quad (2.49)$$

を得る. 同様にして, 点 $\mathbf{x} + (m^{(+)} + 1)\mathbf{e}_k$ における式 (2.42) より, 以下を得る.

$$\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) = \delta = 0. \quad (2.50)$$

ここで, 式 (2.47), (2.49), (2.50) より, 式 (2.45) を導くことができる.

また, 点 $\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k$ における式 (2.40) より,

$$\lambda \Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + (m^{(-)} - 1)\mathbf{e}_k) + \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = \frac{1}{d} \Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) \quad (2.51)$$

を得ることができ, 式 (2.45) を考慮すると, 次式を得る.

$$\frac{1}{d}\Gamma(\mathbf{x} + m^{(-)}\mathbf{e}_k) = 0.$$

同様にして, 点 $\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k$ における式 (2.41) と式 (2.45) より,

$$\frac{1}{d}\Gamma(\mathbf{x} + m^{(+)}\mathbf{e}_k) = 0$$

が成立することが分かるので, 補題 4 の証明は終了する.

ここで, 補題 4 の意味することに関して, 以下の図を用いて, 簡単に補足する.

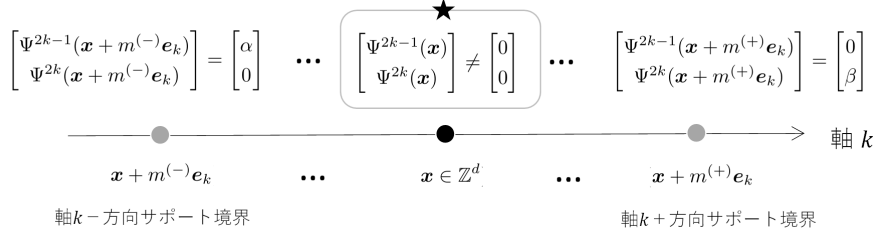


Fig. 39: 図において, \star を仮定した場合, 軸 k でのサポート境界において, マイナス方向境界では第 $(2k-1)$ 成分 $\neq 0$ と第 $(2k)$ 成分 $= 0$, プラス方向境界では第 $(2k-1)$ 成分 $= 0$ と第 $(2k)$ 成分 $\neq 0$ であることが分かる.

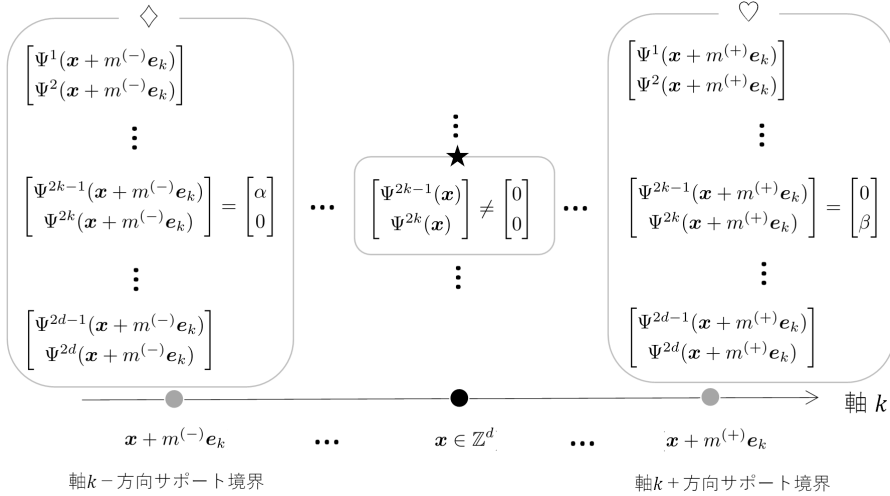


Fig. 40: 図のとおり, 軸 k のサポート境界では, すべての成分の合計 (\diamond または, \heartsuit) がゼロである.

補題 3 と補題 4 より, サポートを構成する点の個数「 $\#(S(\Psi))$ 」を最小とするサポートは, 次の定理として成立する.

定理 2 \mathbb{Z}^d 上の flip-flop 型グローバークウォークにおいて, 任意の $\Psi \in W(\lambda)$, $\lambda = \pm 1$ に対して, 以下が成立する.

$$\begin{cases} \#(S(\Psi)) = 0 & (d = 1), \\ \#(S(\Psi)) \geq 4 & (d \geq 2). \end{cases}$$

また特に,

$$\#(S(\Psi_\star^{(\lambda)})) = 4 \quad (d \geq 2)$$

を満たす $\Psi_\star^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ が, 以下のとおり存在する.

$$\Psi_\star^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda^{x_1+x_2} \times {}^T \left[(-1)^{x_1+x_2} |x_1\rangle, (-1)^{x_1+x_2+1} |x_2\rangle, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \right] \quad (\mathbf{x} \in S(\Psi_\star^{(\lambda)})).$$

ただし,

$$S(\Psi_\star^{(\lambda)}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1, x_2 \in \{0, 1\}, x_3 = x_4 = \dots = x_d = 0\}.$$

また, $|0\rangle = {}^T[1, 0]$, $|1\rangle = {}^T[0, 1]$, $\mathbf{0} = {}^T[0, 0]$ とする.

証明 はじめに, $d = 1$ の場合を考える. $\Psi \in W(\lambda)$, $\lambda = \pm 1$ に対して,

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(x) \\ \Psi^2(x) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす $x \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定する. 補題 4 より, 次の 2 つの式を満たす $m_1^{(-)} (\leq 0)$ と $m_1^{(+)} (\geq 0)$ が存在することがわかる.

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(x + m_1) \\ \Psi^2(x + m_1) \end{bmatrix} = \begin{cases} {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m_1 < m_1^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} \alpha, 0 \end{bmatrix} & (m_1 = m_1^{(-)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, \beta \end{bmatrix} & (m_1 = m_1^{(+)}), \\ {}^T \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} & (m_1 > m_1^{(+)}). \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} \Gamma(x + m_1^{(-)}) = 0, \\ \Gamma(x + m_1^{(+)}) = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

ただし, $m_1^{(-)} < m_1^{(+)}$ また, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$ であることに注意する. ここで, Γ の定義と式 (2.52) より, 次式が成立する.

$$\begin{cases} \Gamma(x + m_1^{(-)}) = \alpha, \\ \Gamma(x + m_1^{(+)}) = \beta. \end{cases} \quad (2.54)$$

また, 式 (2.53), (2.54) より, $\alpha = \beta = 0$ を得る. 以上の議論より, $d=1$ における有限なサポートは存在しないことが分かる.

次に, $d = 2$ を考える. $\Psi \in W(\lambda)$, $\lambda = \pm 1$ に対して, 次式を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ が存在する, と仮定する.

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x}) \\ \Psi^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

また, 補題 4 の式 (2.45) において, $\#(S(\Psi))$ が最小となるように, 以下を与える.

$$\begin{cases} m^{(-)} = 0, \\ m^{(+)} = 1. \end{cases} \quad (2.56)$$

式 (2.45), (2.56) より,

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x}) \\ \Psi^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

を得る. さらに, Γ の定義と式 (2.46), (2.56), (2.57) を用いると, $\alpha \neq 0$ に注意して,

$$\begin{bmatrix} \Psi^3(\mathbf{x}) \\ \Psi^4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

であることが分かる.

同様にして, 補題 3 と式 (2.55) より, 以下を仮定できることがわかる.

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \\ \Psi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

これより, $\beta \neq 0$ に注意すると,

$$\begin{bmatrix} \Psi^3(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \\ \Psi^4(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

を得る. また, 補題 3 と式 (2.58), (2.59) より, “ $\mathbf{x} - \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ または $\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ ”, “ $\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ または $\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in S(\Psi)$ ” がそれぞれわかり, $\#(S(\Psi)) \geq 4$ を得る. 実際, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ として, $\lambda = \pm 1$ に対して, $\#(S(\Psi_\star^{(\lambda)})) = 4$ を満たす $\Psi_\star^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ が以下のとおり存在する.

$$\Psi(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = \begin{cases} {}^T [1, 0, -1, 0] & (m_1, m_2) = (0, 0), \\ {}^T [0, -\lambda, \lambda, 0] & (m_1, m_2) = (1, 0), \\ {}^T [-\lambda, 0, 0, \lambda] & (m_1, m_2) = (0, 1), \\ {}^T [0, 1, 0, -1] & (m_1, m_2) = (1, 1), \\ {}^T [0, 0, 0, 0] & (\text{上記以外}). \end{cases} \quad (2.60)$$

最後に, $d = 2$ での議論を考慮しながら, $d \geq 3$ の場合を考える. 式 (2.60) を $d \geq 3$ に拡張するため, 式 (2.60) における任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ に対して, $\Gamma(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = 0$ ということに着目する. ここで, 任意の $k \in \{3, 4, \dots, d\}$ に対して, $\Psi^{2k-1}(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = \Psi^{2k}(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = 0$ を仮定すると, $\lambda = \pm 1$ に対して, $\#(S(\Psi_\star^{(\lambda)})) = 4$ を満たす $\Psi_\star^{(\lambda)} \in W(\lambda)$ を, 以下のとおり構築することができる.

$$\Psi(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2) = \begin{cases} {}^T [1, 0, -1, 0, 0, \dots, 0] & (m_1, m_2) = (0, 0), \\ {}^T [0, -\lambda, \lambda, 0, 0, \dots, 0] & (m_1, m_2) = (1, 0), \\ {}^T [-\lambda, 0, 0, \lambda, 0, \dots, 0] & (m_1, m_2) = (0, 1), \\ {}^T [0, 1, 0, -1, 0, \dots, 0] & (m_1, m_2) = (1, 1), \\ {}^T [0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0] & (\text{上記以外}). \end{cases}$$

以上で, 定理の証明は完了する. また, 定理 2 は, Corollary 2 (Higuchi et al. [4]) において, スペクトル写像定理を用いた結果として紹介されていることに触れておく.

ここで, 定理 2 に関して, 以下の図を用いて, 簡単に補足する. 3 次元でのグローバークウォークにおいて, $\lambda = 1$ の場合を考える. ここで, サポートを最小とするため, 軸上のサポート境界は隣接する, つまり, 補題 4 において $m^{(-)} + 1 = m^{(+)}$ を仮定すると, 式 (2.42) より, 式 (2.52) における α, β は, $\alpha = -\beta$ が成立することに注意する.

はじめに, $[\Psi^1(0, 0, 0), \Psi^2(0, 0, 0)] \neq [0, 0]$ を前提として, 補題 3 と補題 4 を満たす, 有限なサポートの構成を, 以下の手順に従い説明する.

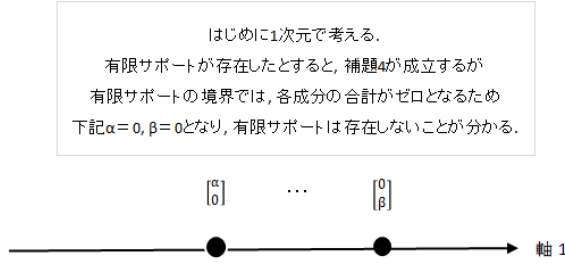


Fig. 41: 1 次元の場合

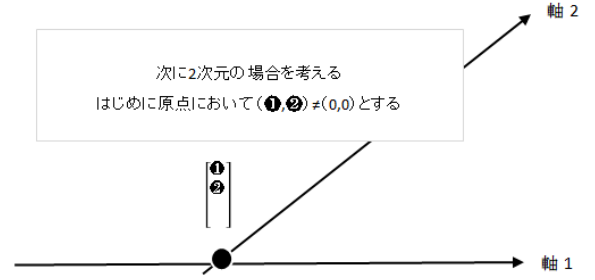


Fig. 42: 2 次元において最初の前提を置く

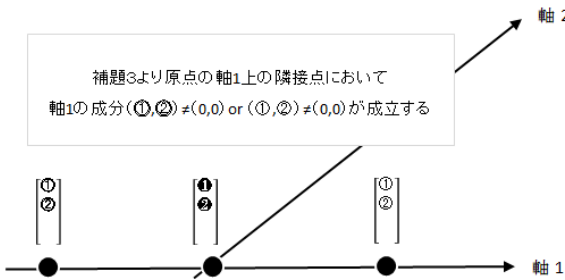


Fig. 43: 補題 3 を利用する

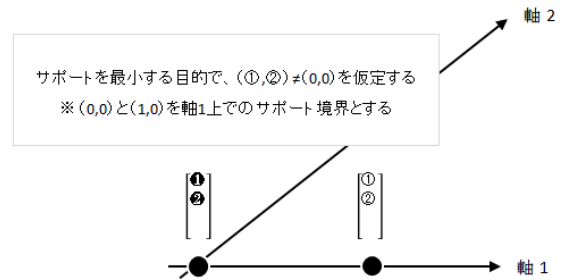


Fig. 44: サポート境界とする

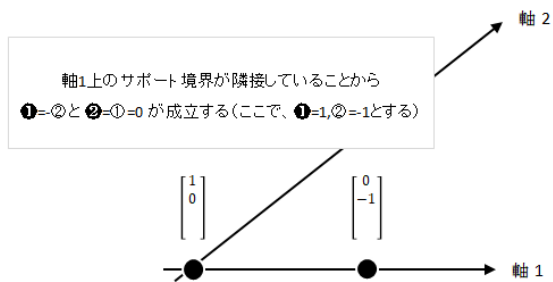


Fig. 45: 具体的な成分の値を置く

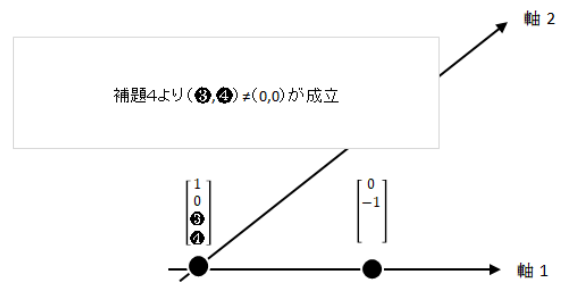


Fig. 46: 補題を利用する

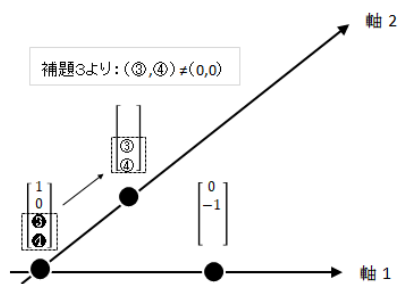


Fig. 47: 補題3を利用する

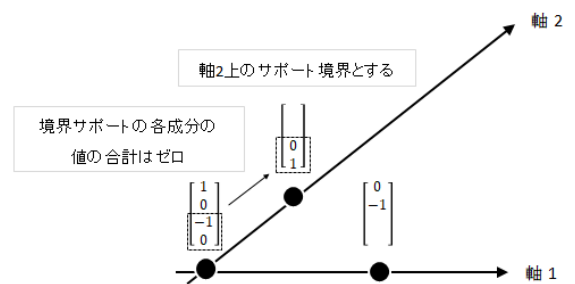


Fig. 48: サポート境界とする

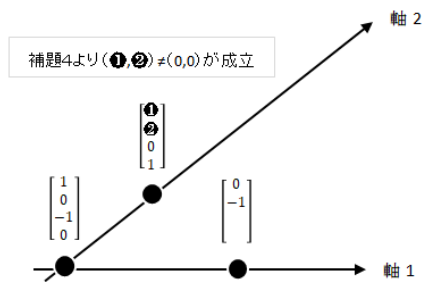


Fig. 49: 補題 4 を利用する

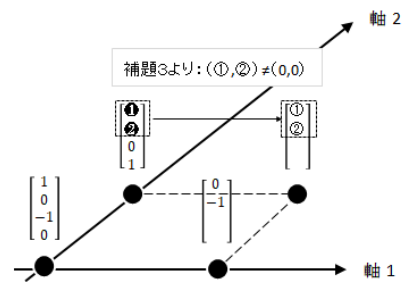


Fig. 50: 補題 3 を利用する

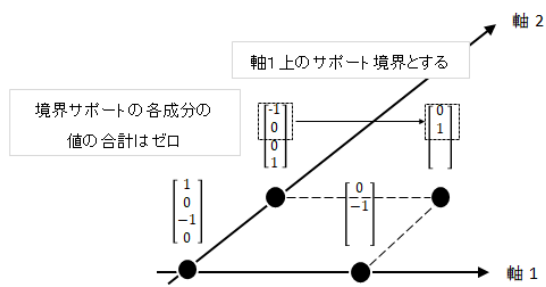


Fig. 51: サポート境界とする

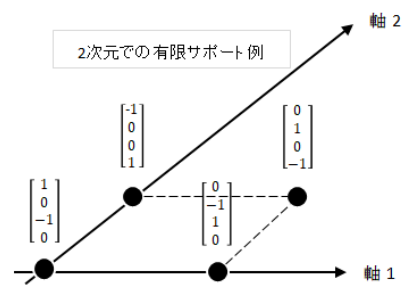


Fig. 52: 2次元での有限サポート (例)

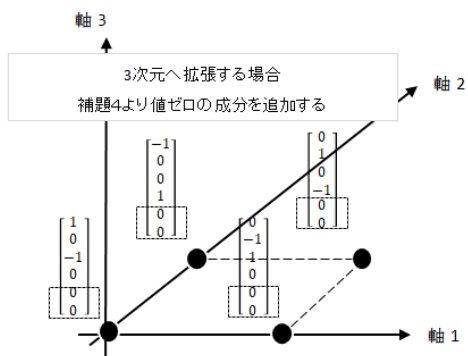


Fig. 53: 3次元への拡張

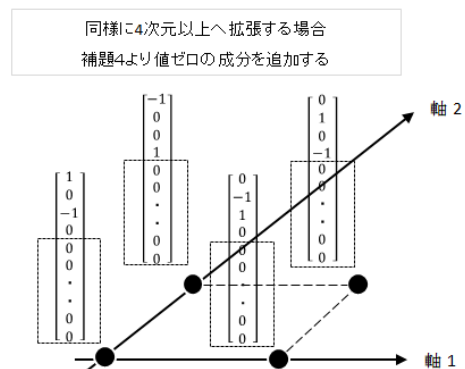


Fig. 54: 4次元以上への拡張

結果として、補題4より構築した4点サポートは、そのまま高次元へ拡張することができる。

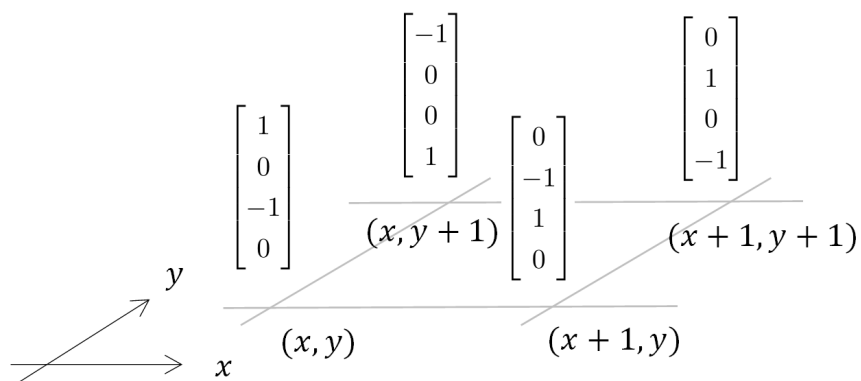


Fig. 55: 2次元格子状グローバルウォークの有限サポートの例 (flip-flop型)

2.5 有限サポートと定常分布

ここでは, 1 次元 moving 型グローバウォークの有限サポート (定常振幅) から構成される定常分布に関して, 簡単に紹介する. 1 次元 moving 型グローバウォークの量子コインは, 式 (1.4) で表され, その有限サポートは, Fig. 14 で示した 2 点で例えば構成できる. 以下に量子コインと定常振幅を再掲する.

$$\text{量子コイン: } U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{定常振幅: } \Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(x)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(x+1)}.$$

ここで, 2 点から構成される定常振幅の各点の測度は等しく, 一様分布となっていることは, 重要な特徴の 1 つと言える. また, 上記の定常振幅の「貼り合わせ」により構成される定常振幅は, 任意の関数 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, 以下のように表すことができる.

$$\Psi(x) = g(x-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + g(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

上記定常振幅より与えられる量子ウォークの測度は, 定常測度となる. 例として, 有限サポートの貼り合わせから構築できる定常分布をいくつか紹介する. ただし, ここでも正規化を省略しているため, 確率となっていないことに注意する.

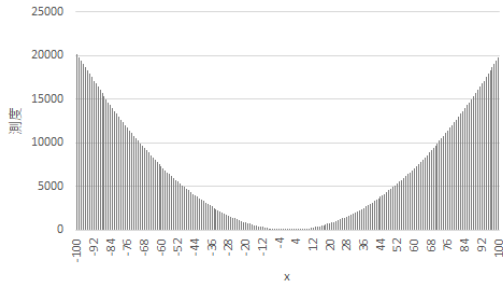


Fig. 56: $g(x) = x$.

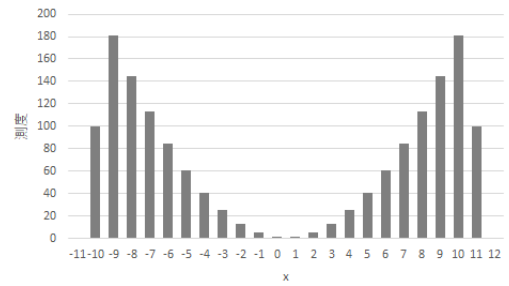


Fig. 57: $g(x) = \begin{cases} x & (-10 \leq x \leq 10), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$

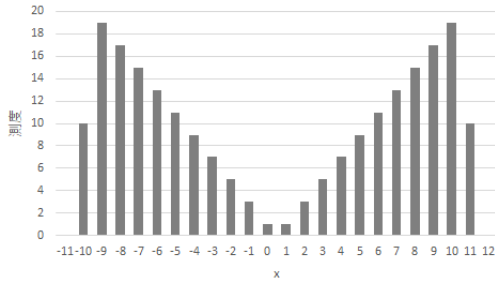


Fig. 58: $g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & (-10 \leq x \leq 10), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$

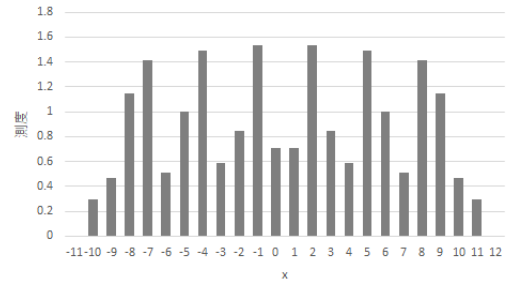


Fig. 59: $g(x) = \begin{cases} \sin x & (-10 \leq x \leq 10), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$

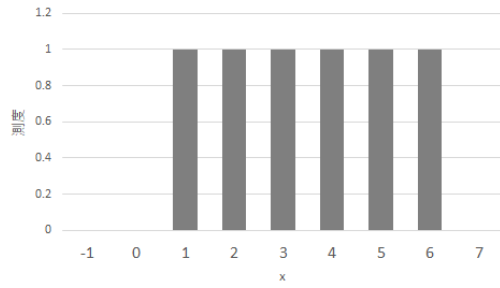


Fig. 60: $g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & (0 \leq x \leq 6), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$

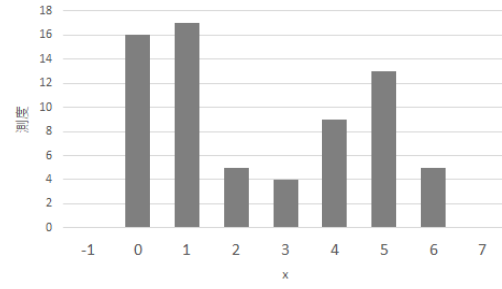


Fig. 61: $g(x) = \begin{cases} 4 & (x=0), \\ 1 & (x=1), \\ 2 & (x=2), \\ 0 & (x=3), \\ 3 & (x=4), \\ 2 & (x=5), \\ 1 & (x=6), \\ 0 & (\text{上記以外}). \end{cases}$

このように、量子ウォークの有限サポートを貼り合わせるにより、様々な定常分布を構築することができ、最小の有限サポートを求めることは、定常分布の解析をする上でも非常に重要なテーマであることが分かる。次章では、有限サポートの貼り合わせにより、量子ウォークの極限振幅が構成できる例を示す。

3 量子ウォークの定常振幅と極限振幅

本章では, 先に議論したサポートを組み合わせる構成できる定常振幅と, 長時間経過後の極限振幅の関係性に関して, 紹介する.

3.1 シミュレーションから想定される極限振幅

2次元格子上的グローバークウォークにおいて, 例えば, 初期状態として, 原点のみに量子ウォーカーが確率振幅ベクトル $\Psi_0(0,0) = {}^T \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ で存在した場合のシミュレーション結果を以下に示す. 先に見たとおり, 原点のみからはじまるグローバークウォークの多くは, 原点にて局在化を示すことが確認できる.

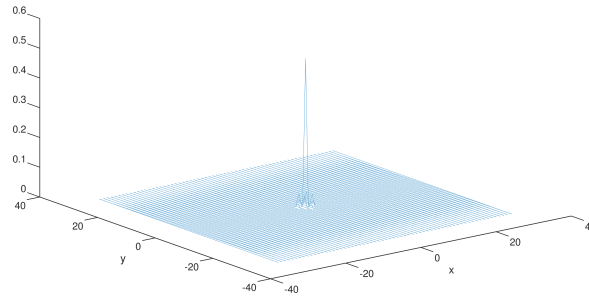


Fig. 62: 2次元格子上の moving 型グローバークウォークの時刻 30 の確率分布

また, シミュレーション結果より, 時刻 30 の原点周辺での確率振幅ベクトルは, 以下の値で分布している.

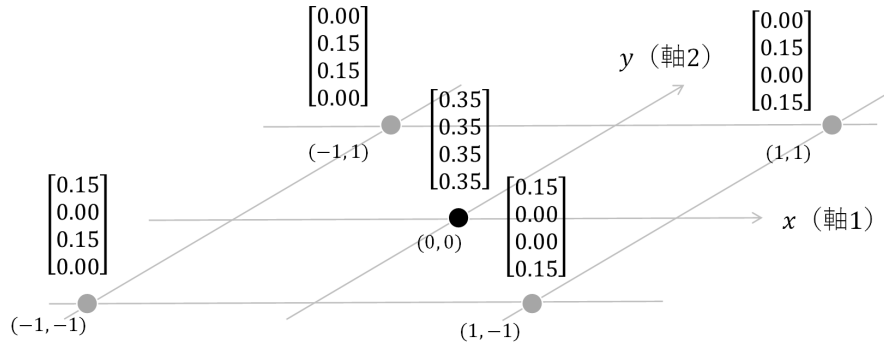


Fig. 63: 時刻 30 の原点周辺の確率振幅ベクトルの値 (小数第三位を四捨五入)

この時刻 30 の確率振幅ベクトルの構成は, Fig. 16, Fig. 17 で見たサポートの構成と非常に似ているため, 長時間経過後の極限振幅と, サポートには, 何らかの関係性があることが想定される. すなわち, 原点から出発した 2次元格子上的 moving 型グローバークウォークの振幅ベクトルの極限は, サポートの貼り合わせで記述できる可能性があることを示唆していると考えられる. また, サポートの貼り合わせであることは, 定常振幅, 定常測度であることを意味するため, 量子ウォークの極限振幅とサポートの関係を解析することは, 非常に重要である. ここで, 現時点では 2次元格子上的グローバークウォークの極限振幅は求められていないため, まずは Machida [17] による研究結果として極限振幅が求められている, 1次元 3 状態の量子ウォークを対象として解析を進める.

3.2 1次元3状態の量子ウォーク

3.2.1 1次元3状態のモデルの定義

ここでは, 以下の量子コインで定義される1次元3状態の量子ウォークを考える.

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{1+\cos\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (\theta \in [0, 2\pi)). \quad (3.1)$$

また, $U = P + Q + R$ として, それぞれ以下で定める.

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{1+\cos\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

この量子ウォークのダイナミクスと時間発展を, 以下の図で示す.

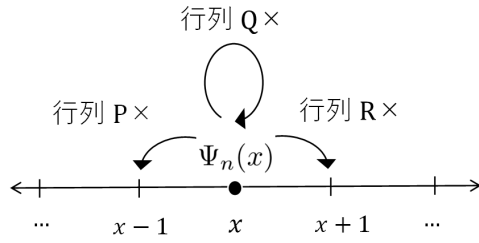


Fig. 64: 1次元3状態量子ウォークのダイナミクス

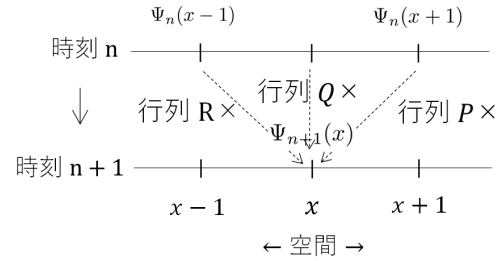


Fig. 65: 1次元3状態量子ウォークの時間発展

上記で与えた量子コインによる量子ウォークは, 量子ウォーカーが原点のみから出発した場合, 初期状態により原点にて局在化を示すことが知られている. 例として量子コインを, $\cos\theta = -1/3$, $\sin\theta = -2\sqrt{2}/3$, 初期状態を原点のみに $\Psi_0(0) = {}^T [0, 1, 0]$ と設定した場合の確率分布を示す.

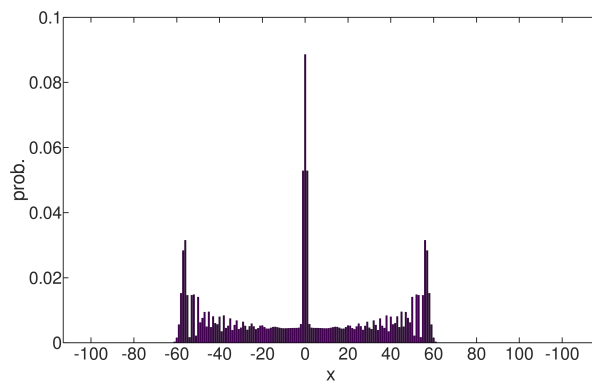


Fig. 66: 1次元3状態量子ウォークの確率分布 (時刻100)

ここで, 1次元3状態の量子ウォークで知られている主な結果に関して, 簡単に紹介する. グローバーウォーク (式 (3.1) において, $\cos\theta = -1/3$, $\sin\theta = 2\sqrt{2}/3$ とした場合) に関しては, Inui et al. [6] により定常測度

が求められている。グローバークォークを含む式 (3.1) で定義される量子コインの結果としては、定常振幅・定常測度を Machida [17] が求めている。また、グローバークォークにおいて、定常測度と極限測度が一致する特別な条件が, Endo et al. [2] により, 紹介されている。

3.2.2 1次元3状態の極限振幅

ここでは, Machida [17] によって得られた, 1次元3状態での極限振幅の結果を以下に紹介する。ここで紹介する極限振幅とは, 初期状態として, 原点のみに量子ウォーカーが確率振幅ベクトル $\Psi_0(0) = {}^T [\alpha, \beta, \gamma]$ で存在した場合から出発し, 長時間経過後の場所 x での確率振幅とする。また, $\sin \theta, \cos \theta$ に関して, それぞれ, $\sin \theta = s, \cos \theta = c$ と略して以下記載する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = \frac{1+c}{8s^2\sqrt{2(1-c)}} \begin{bmatrix} 2(1-c)(A\nu^{|x|} + B\nu^{|x+1|}) \\ \sqrt{2}s\{A\nu^{|x-1|} + (A+B)\nu^{|x|} + B\nu^{|x+1|}\} \\ 2(1-c)(A\nu^{|x-1|} + B\nu^{|x|}) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

ただし,

$$\nu = \frac{-(3-c) + 2\sqrt{2(1-c)}}{1+c}, \quad A = 2(1-c)\alpha + \sqrt{2}s\beta, \quad B = \sqrt{2}s\beta + 2(1-c)\gamma$$

とする。この極限振幅と定常振幅の関係を解析するため, 次に本モデルでの定常振幅を調べる。

3.2.3 1次元3状態の量子ウォークの定常振幅

ここでも, 前章と同様に固有値問題 $U\Psi = \lambda\Psi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| = 1$) を考える。固有値問題は以下と同値であり, 今回は定常測度ではなく, 定常振幅のみを解析するため, $\lambda = 1$ のみを対象とする。

$$\begin{cases} \lambda\Psi^1(x) = -\frac{1+\cos\theta}{2}\Psi^1(x+1) + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Psi^2(x+1) + \frac{1-\cos\theta}{2}\Psi^3(x+1), \\ \lambda\Psi^2(x) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Psi^1(x) + \cos\theta\Psi^2(x) + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Psi^3(x), \\ \lambda\Psi^3(x) = \frac{1-\cos\theta}{2}\Psi^1(x-1) + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Psi^2(x-1) - \frac{1+\cos\theta}{2}\Psi^3(x-1). \end{cases} \quad (3.3)$$

ただし, $\Psi(x) = {}^T [\Psi^1(x), \Psi^2(x), \Psi^3(x)]$ ($x \in \mathbb{Z}$) とする。ここでは詳細は割愛するが, 式 (3.3) より, 前章の高次元グローバークォークの場合と同じ手順により, 本モデルにおける2点から構成されるサポートを, 以下の補題として導くことができる。

補題 5 式 (3.1) の量子コインで定義される 1次元3状態の量子ウォークの定常振幅は以下の2点で構成することができる。

$$\begin{bmatrix} \Psi^1(x) \\ \Psi^2(x) \\ \Psi^3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Psi^1(x+1) \\ \Psi^2(x+1) \\ \Psi^3(x+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

ただし, $x \in \mathbb{Z}$ とする。

上記サポートのそれぞれの点における測度は等しく、一様測度となっていることも注目すべき点である。また、補題 5 を考慮すると、式 (3.2) は、以下のように書き換えることができる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = \frac{1+c}{8s\sqrt{1-c}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} g(x-1) + \begin{bmatrix} \sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} g(x) \right\}. \quad (3.5)$$

ここで、

$$g(x) = A\nu^{|x|} + B\nu^{|x+1|}$$

である。式 (3.5) より、式 (3.1) で定義された量子コインを用いた 1 次元 3 状態量子ウォークの極限振幅は、2 点から構成される定常振幅の貼り合わせで表現できることが分かる。またこれは、極限振幅が定常振幅であること、すなわち極限測度が定常測度であることを意味する。特に、原点周辺の局在化に関しても、式 (3.4) のサポートの貼り合わせで構成されることから、局在化の表現としては recurrent というよりは、trapping が現象の実態をより適切に表現していると考えられる。

3.3 2次元格子上の moving 型グローバーウォークの極限振幅

ここでは、2次元格子上の moving 型グローバーウォーク (9 頁参照) の定常振幅 (Fig. 16 参照) と、その極限振幅の関係を解析する。極限を議論するときには、フーリエ解析 (付録参照) による手法がよく用いられるが、その逆フーリエ変換の計算過程において、積分が複雑になることもあり、現時点では本モデルの極限振幅は求められていない。そこで、極限振幅そのものと定常振幅を比較することは困難であるが、積分の形を残したまま、極限振幅を定常振幅で表すことを試みる。また、以降の記載では、簡単のため、ブラケット記法 (付録参照) を用いていることに注意する。

3.3.1 フーリエ変換

はじめに、2次元でのフーリエ変換、逆フーリエ変換は、それぞれ以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{フーリエ変換: } |\hat{\Psi}_n(k_1, k_2)\rangle &= \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} |\Psi_n(x_1, x_2)\rangle, \quad (k_1, k_2 \in [-\pi, \pi]). \\ \text{逆フーリエ変換: } |\Psi_n(x_1, x_2)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} |\hat{\Psi}_n(k_1, k_2)\rangle dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

波数空間での時間発展の式は、初期状態 $|\hat{\Psi}_0(k_1, k_2)\rangle$ をとして、以下で表すことができる。

$$|\hat{\Psi}_n(k_1, k_2)\rangle = U(k_1, k_2)^n |\hat{\Psi}_0(k_1, k_2)\rangle \quad (k_1, k_2 \in [-\pi, \pi]).$$

ここで、

$$U(k_1, k_2) = R(k)G = \begin{bmatrix} e^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-k_2} \end{bmatrix}$$

であり、この $U(k_1, k_2)$ の4つの固有値をそれぞれ $\lambda_j(k_1, k_2)$ 、固有ベクトルを $|v_j(k_1, k_2)\rangle$ ($j = 1, 2, 3, 4$) とすると、 $U(k_1, k_2)$ は、以下のようにスペクトル分解される。

$$U(k_1, k_2) = \sum_{j=1}^4 \lambda_j(k_1, k_2) |v_j(k_1, k_2)\rangle \langle v_j(k_1, k_2)|. \quad (3.6)$$

ユニタリ行列のそれぞれの固有ベクトルは直交するので、式 (3.6) の n 乗は、以下で表すことができる。

$$U(k_1, k_2)^n = \sum_{j=1}^4 \lambda_j^n(k_1, k_2) |v_j(k_1, k_2)\rangle \langle v_j(k_1, k_2)|.$$

これより、逆フーリエ変換の式は、

$$|\Psi_n(x_1, x_2)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \sum_{j=1}^4 \lambda_j^n(k_1, k_2) |v_j(k_1, k_2)\rangle \langle v_j(k_1, k_2)| \hat{\Psi}_0(k_1, k_2)\rangle dk_1 dk_2 \quad (3.7)$$

となる。

3.3.2 極限振幅の計算

はじめに、グローバークォークにおいて、Watabe et al. [20] により求められている $U(k_1, k_2)$ の固有値を紹介する.

$$\lambda_1(k_1, k_2) = 1, \quad \lambda_2(k_1, k_2) = -1, \quad \lambda_3(k_1, k_2) = e^{i\omega(k_1, k_2)}, \quad \lambda_4(k_1, k_2) = e^{-i\omega(k_1, k_2)}.$$

ただし, $\cos \omega(k_1, k_2) = -\frac{1}{2}(\cos k_1 + \cos k_2)$ とする. 以上より, 式 (3.7) は, 以下となる.

$$\begin{aligned} |\Psi_n(x_1, x_2)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \{ |v_1(k_1, k_2)\rangle \langle v_1(k_1, k_2)| \\ &\quad + (-1)^n |v_2(k_1, k_2)\rangle \langle v_2(k_1, k_2)| \\ &\quad + e^{i\omega(k_1, k_2)n} |v_3(k_1, k_2)\rangle \langle v_3(k_1, k_2)| \\ &\quad + e^{-i\omega(k_1, k_2)n} |v_4(k_1, k_2)\rangle \langle v_4(k_1, k_2)| \} |\hat{\Psi}_0(k_1, k_2)\rangle dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

ここでは極限振幅 ($n \rightarrow \infty$) を考えるので, 上記式の第 3 項と第 4 項は, リーマン・ルベグの補題より, 0 となるため, 固有値が 1 と -1 の場合のみ考える.

また, Stefanak et al. [19] により求められた, 固有値が 1 と -1 の場合の固有ベクトルを以下で紹介する.

$$|v_1(k_1, k_2)\rangle = \frac{1}{Z_1(k_1, k_2)} \begin{bmatrix} 1 + e^{-ik_2} \\ e^{-ik_1}(1 + e^{-ik_2}) \\ 1 + e^{-ik_1} \\ e^{-ik_2}(1 + e^{-ik_1}) \end{bmatrix}, \quad |v_2(k_1, k_2)\rangle = \frac{1}{Z_2(k_1, k_2)} \begin{bmatrix} 1 - e^{-ik_2} \\ -e^{-ik_1}(1 - e^{-ik_2}) \\ 1 - e^{-ik_1} \\ e^{-ik_2}(1 + e^{-ik_1}) \end{bmatrix}.$$

ただし, $Z_1(k_1, k_2) = 2\sqrt{2 + \cos k_1 + \cos k_2}$, $Z_2(k_1, k_2) = 2\sqrt{2 - \cos k_1 - \cos k_2}$ とする.

以上より, 初期状態を $|\Psi_0(0, 0)\rangle = {}^T[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ とすると, 極限振幅は, 以下の計算式で求めることができる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\Psi_n(x_1, x_2)\rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{A}{Z_1^2(k_1, k_2)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-ik_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-ik_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-i(k_1 + k_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{B}{Z_2^2(k_1, k_2)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{-ik_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{-ik_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-i(k_1 + k_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\} dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし, A, B は, 以下で与える.

$$\begin{aligned} A &= (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma)e^{ik_1} + (\alpha + \delta)e^{ik_2} + (\beta + \delta)e^{i(k_1 + k_2)}, \\ B &= (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)e^{ik_1} - (\alpha + \delta)e^{ik_2} + (\beta + \delta)e^{i(k_1 + k_2)}. \end{aligned}$$

ここで, 式 (3.8) の第 2 項は振動するので, 以降は, 時間平均極限振幅 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} |\Psi_n(x_1, x_2)\rangle$ を考えることとする. すなわち, 第 1 項のみを考える.

式 (3.8) の第 1 項は, 以下のように整理できる.

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{Z_1^2(k_1, k_2)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-ik_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-ik_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-i(k_1+k_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{Z_1^2(k_1, k_2)} \left\{ \left((\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\beta + \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha + \delta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (\beta + \delta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \left((\beta + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\beta + \delta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{ik_1} \right. \\
&+ \left((\alpha + \delta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\beta + \delta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{ik_2} + \left((\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha + \delta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-ik_1} + \left((\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (\beta + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-ik_2} \\
&\left. + (\beta + \delta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(k_1+k_2)} + (\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i(k_1+k_2)} + (\beta + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(k_1-k_2)} + (\alpha + \delta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(-k_1+k_2)} \right\}
\end{aligned}$$

これより, 2次元格子上的のグローバウォークの時間平均極限振幅は, Fig. 16 の 4 点サポートを貼り合わせて構成される以下の 9 点サポートから構成されることが分かる.

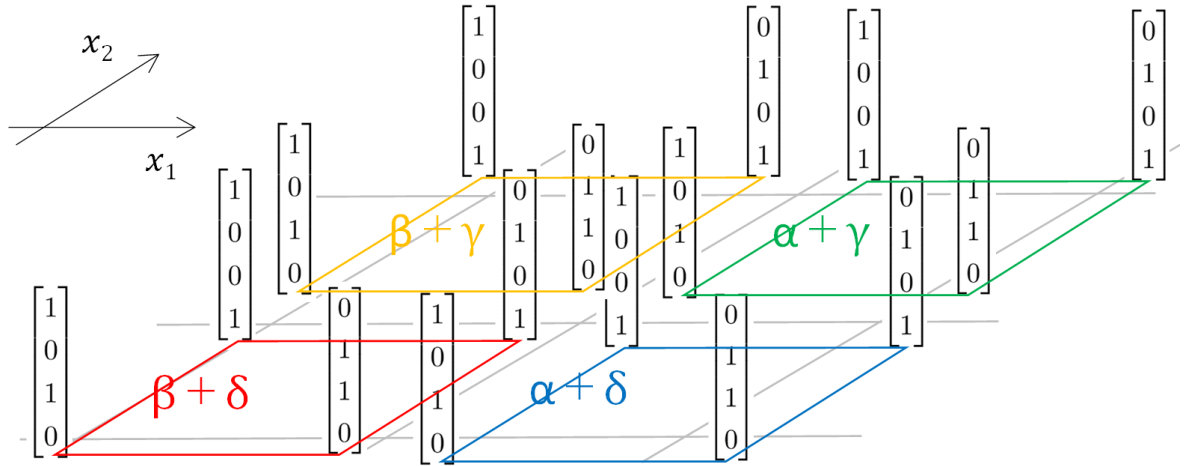


Fig. 67: 時間平均極限に見える 9 点サポートの構成

9点サポートの貼り合わせのイメージは、以下となる。

①～⑨までの9点サポートを図のように配置した時に $\textcircled{5}$ は、9つの●の貼り合わせで構成される。

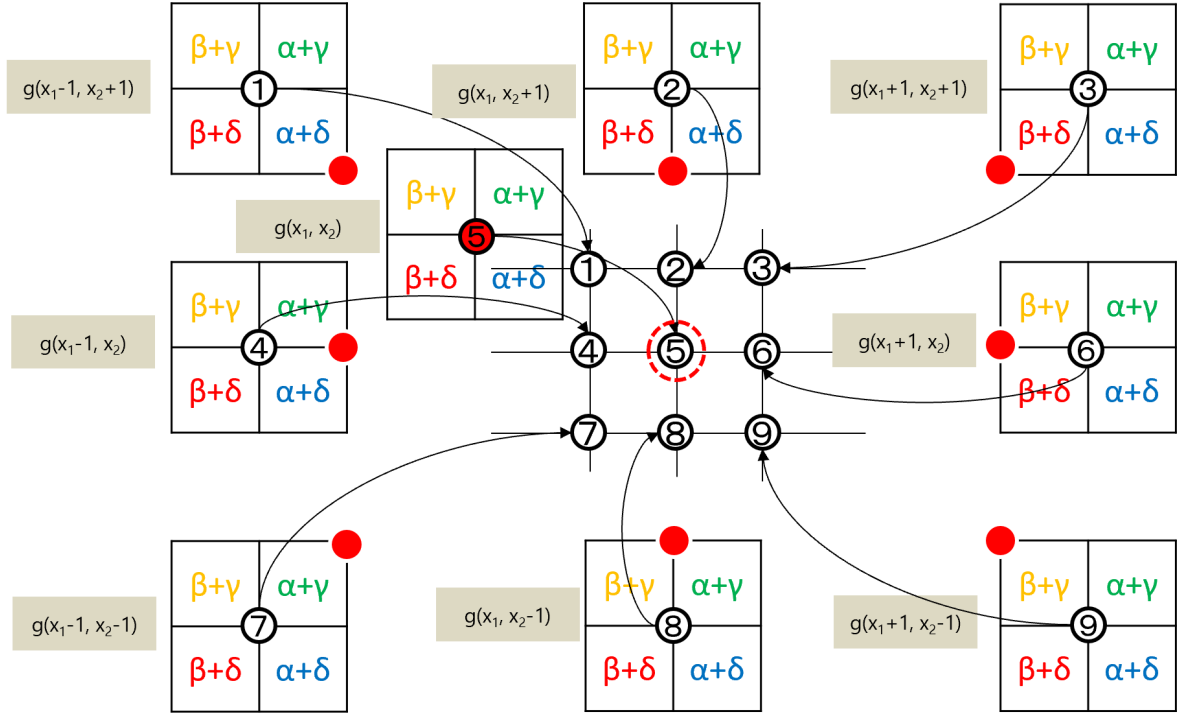


Fig. 68: 時間平均極限に見える9点サポートの貼り合わせイメージ

ただし、

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}}{Z_1^2(k_1, k_2)} dk_1 dk_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}}{4(2 + \cos k_1 + \cos k_2)} dk_1 dk_2$$

とする。

4 総括

本研究では、量子ウォークのサポートに注目し、その最小なサポートの構成に関して解析を行った。先行研究結果と、本研究結果の比較を以下の表で示す。

著者	移動の型	1次元	2次元	3次元	...	d 次元
(既知/自明)	moving	2	-	-	...	-
Stefanak et al.	moving	-	4	-	...	-
Komatsu and Konno	moving	-	3^2	3^3	...	3^d
Higuchi et al.	flip-flop	なし	4	4	...	4

Table 2: グローバーウォークのサポートに関する先行研究結果

	移動の型	1次元	2次元	3次元	...	d 次元
本研究結果	moving	2^1	2^2	2^3	...	2^d
本研究結果	flip-flop	なし	4	4	...	4

Table 3: グローバーウォークのサポートに関する本研究結果

本研究では、固有値問題を考えることにより、その最小なサポートの構成の解析を行った結果、先行研究結果をさらに精緻化した結果を得ることができた。また、その求め方に関して、既存の方法とは異なる簡易的な手法により求めることができることを示した。本研究結果に関しては、Kollar et al. (2020) [9] にて、彼らの予想の裏付ける結果の1つである、として参照されている。

さらに、これらのサポートは、各点における測度は等しく、その貼り合わせにより、一様測度を含む様々な測度を構成できることが分かる。実際に、本研究で紹介した2つのモデルでは、原点のみに量子ウォーカーが存在する初期状態から出発した場合に、このサポートの貼り合わせで、その極限振幅、時間平均極限振幅が表せることも示すことができた。これらの結果より、各モデルにおける最小の有限サポートを明らかにすることは、そのモデルの特徴を理解する上でも、非常に重要であると考えられる。

本研究周辺の今後のさらなる研究テーマとして、以下のような課題がある。

- 量子ウォークにおけるサポートの存在意義とその応用
- 極限振幅が定常振幅の貼り合わせで構成される仕組み（過程）の解明
- 本研究で扱わなかったモデルの定常振幅の解析と、極限振幅との関係
- 2次元グローバーウォークの極限測度の解析（複素積分の計算）

最初の課題に関して、量子ウォークにおけるサポートの存在、その役割に関して、理解を深める必要があると考える。また2番目の課題は、時間発展する過程で、何故、そしてどのようにして、定常振幅に収束していくのか、そのプロセスに関しては、未知である。3番目の課題としては、本研究で扱わなかったモデルでの定常振幅と極限振幅の関係にも、興味が持たれる。最後の課題は、原点のみから出発した特別な初期状態での時間平均極限振幅に関して、原点の振幅は、Inui et al. [5] にて算出されているが、その他の点における振幅は、まだ求められていない。フーリエ解析により解析を行う場合には、複素積分の計算が重要な鍵となる。

総括としては、以上となるが、サポートに関する研究はまだ多くはないため、今後、その性質、特徴、そして応用に関してのさらなる研究が期待される。

参考文献

- [1] Aharonov, D., Ambainis, A., Kempe, J., Vazirani, U. V., Quantum walks on graphs, Proceedings of ACM Symposium on Theory of Computation (STOC'01), July 2001, pp.50-59 (2001)
- [2] Endo, T., Kawai, H., Konno, N., Stationary measures for the three-state Grover walk with one defect in one dimension, 数理解析研究所講究録, **2010**, 45-55 (2016)
- [3] Grimmett, G., Janson, S., Scudo, P. F., Weak limits for quantum random walks, Physical Review E, **69**, 026119 (2004)
- [4] Higuchi, Y., Konno, N., Sato, I., Segawa, E., Spectral and asymptotic properties of Grover walks on crystal lattice, Journal of Functional Analysis, **267**, 4197-4235 (2014)
- [5] Inui, N., Konishi, Y., Konno, N., Localization of two-dimensional quantum walks, Physical Review A, **69**, 052323 (2004)
- [6] Inui, N., Konno, N., Segawa, E., One-dimensional three-state quantum walk, Physical Review E, **72**, 056112 (2005)
- [7] Komatsu, T., Konno, N., Stationary amplitudes of quantum walks on the higher-dimensional integer lattice, Quantum Information Processing, **16**, 291 (2017)
- [8] Komatsu, T., Tate, T., Eigenvalues of quantum walks of Grover and Fourier types, Journal of Fourier Analysis and Applications, **25**, 1293-1318 (2019)
- [9] Kollar, B., Gilyen, A., Tkacova, I., Kiss, T., Jex, I., Stefanak, M., Complete classification of trapping coins for quantum walks on the two-dimensional square lattice, Physical Review A, **102**, 012207 (2020)
- [10] Konno, N., Quantum Walks. In: Quantum Potential Theory, Franz, U., Schurmann, M., Eds., Lecture Notes in Mathematics, **1954**, 309-452, Springer-Verlag, Heidelberg (2008)
- [11] Konno, N., The uniform measure for discrete-time quantum walks in one dimension, Quantum Information Processing, **13**, 1103-1125 (2014)
- [12] Konno, N., Takahashi, S., On the support of the Grover walk on higher-dimensional lattices, Yokohama Mathematical Journal, **66**, 79-94 (2020)
- [13] 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版, (2014)
- [14] 今野紀雄, 量子探索 -量子ウォークが拓く最先端アルゴリズム-, 近代科学社, (2021)
- [15] 町田拓也, 図で解る量子ウォーク入門, 森北出版, (2015)
- [16] 町田拓也, 量子ウォーク -基礎と数理-, 裳華房, (2018)
- [17] Machida, T., Limit theorems of a 3-state quantum walk and its application for discrete uniform measures, Quantum Information and Computation, **15**, 406-418 (2015)
- [18] Narimatsu, A., Localization does not occur for the Fourier walk on the multi-dimensional lattice, Quantum Information and Computation, **21**, 387-394 (2021)

- [19] Stefanak, M., Kollar, B., Kiss, T., Jex I., Full revivals in 2D quantum walks, *Physica Scripta*, **2010**, T140 (2010)
- [20] Watabe, K., Kobayashi, N., Katori, M., Konno, N., Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Physical Review A*, **77**, 062331 (2008)

謝辞

思い返せば、最初に今野研究室に配属されたのは、大学4年生となった1997年の春であり、既に25年が経ったことになる。学生が携帯電話を持ち始めた時期であり、パソコンを持っている学生はほとんどいない時代であったと記憶している。それが今は、量子コンピューターが話題となる時代である。当時の今野研究室では、無限粒子系が主な研究テーマであり、私の修士論文も、Domany-Kinzel Modelに関する研究であった。修士課程修了後、コンサルティング会社への就職を経て、金融関連のデータ分析とコンサルティングを主として、現在4社目となる都内の企業で働いている。今日ではだれもが耳にしたことのあるデータマイニングやAI（人工知能）も、20年前には一般的な言葉として浸透しているとは言えず、どのような仕事をしているのか説明するのが、非常に難しい時代であった。今野研究室を巣立ってから20年ほど、何故再び今野研究室に戻り、博士課程後期の学生として量子ウォークの研究をすることになったのか？

5年ほど前に遡るが、今野研究室がコロナ前まで、毎年横浜元町のギャラリーで開催していた「数理芸術」に、当時の弊社社長（現会長）でが顔を出したことが、始まりである。数学科出身で博士の学位を持つ当時の社長と、今野先生が意気投合し、「高橋を博士課程後期に」と話が盛り上がり、その流れで社会人ドクターとして量子ウォークの研究をすることとなった。人工知能の次に注目される技術として、「量子コンピューター」が新聞などでも取り上げられ始めた時期でもあり、会社としても、量子ウォークの理解を深めることにより、時代を先取りして、新しいビジネスへ繋げる準備をしておく意図があった。そのような経緯もあり、週4日働きながら、週1日大学に通うという生活が始まることとなった。

大学に戻ることを決断した当初から薄々感じていたことではあるが、仕事、研究、家庭のバランスを取ることには、所謂「無理ゲー」であった。これは、自分自身が生産工学科（機械・材料）の学生だった、ということもあるが、量子ウォークの根底をなしているとも言える「ユニタリ」という言葉すら初めて聞いた、というほどの知識からスタートしたことも大きな原因の1つであった考える。どうやってこの「無理ゲー」に挑むか、これは社会人としてもよく直面する状況である。ある課題に対して、与えられた時間、自分自身のスキル、成果物として求められる水準を考慮して、どのようにアプローチをして、どのように最終的に落とし込んでいくか、この「ソリューション」を求めて自問自答しながら進めていく毎日であった。平日の夜、土日祝日を含めて、PCや専門書、研究のために購入したデジタルペーパーと睨めっこした数年間であり、家族には非常に迷惑をかけたことをここにお詫びしたいと思う。

この博士課程後期での時間は、ある意味準備期間であり、まだ「ビジネス」という意味では何も成果を残していないのが現状、であることを認識しつつ、研究とビジネスへの応用を常に意識し、今後も量子ウォークに何らかの形で関わっていければと考えている。ここ最近「DX」や「リスクリング」などの言葉を良く目にするようになり、40歳を超えた社会人にとっても、これまで蓄積したスキルだけでは厳しい時代が、今まで以上に近づいてきたと言える。学び続ける、ということの重要性和、新しいことを学び身につけることは非常に時間のかかることである、ということを再認識した期間でもあった。

最後に、今野先生をはじめ、今野研究室・竹居研究室の関係者の皆様には非常にお世話になったことを、ここに感謝いたします。また、仕事上ご協力いただいた同僚の皆様、関係者各位には、御礼申し上げます。ここで学んだことを皆様に還元できるよう邁進する所存です。研究成果としては、当初個人的に目標としていた水準には届かなかった、というのが本音ではあるものの、様々な制約もあり、ここまでの成果を博士論文として取り纏め、今野研究室での二度目の学生生活を終えることとします。

準備、休学期間を含めて5年ほど、皆様にはいろいろとお世話になり、感謝いたします。ありがとうございました。

付録

サポートの種類

本研究では、量子ウォークのサポートを「ゼロベクトルでない振幅ベクトルが存在する場所の集合」として、その中でも、「任意の時刻で、そのサポートが定常（不変）な場合」を主として解析を行った。ここでは、本研究の解析対象外とした、任意の時刻でサポートが変化する例を、1次元のモデルにおいて、いくつか紹介する。

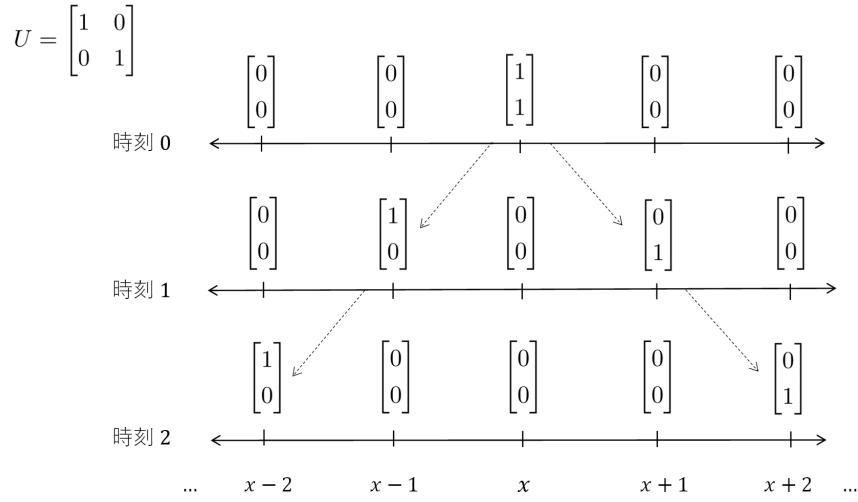


Fig. 69: サポートの個数は常に 2 個であるが、サポート、測度は常に変化する

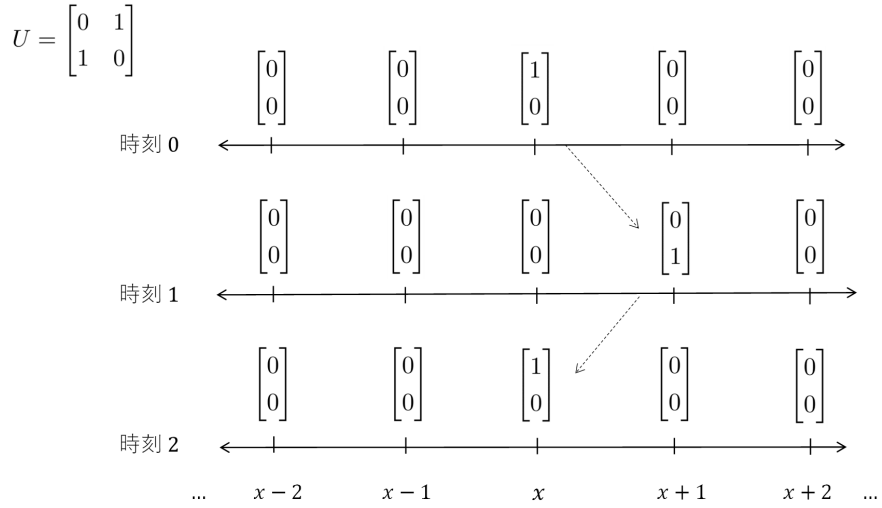


Fig. 70: サポートの個数は常に 1 個であるが、サポート、測度は周期的に変化する（full-revival）

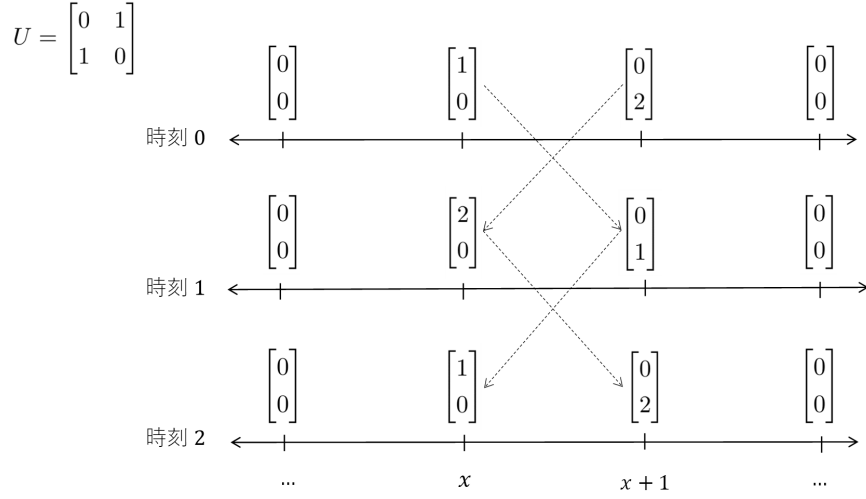


Fig. 71: サポートの個数は常に 2 個であり, サポートは定常であるが, 測度は周期的に変化する

ブラケット記法

たとえば, 1 次元 2 状態量子ウォークの確率振幅ベクトル (縦ベクトル) を, ケットベクトルとして, $|\Psi_n(x)\rangle$ と表す.

$$|\Psi_n(x)\rangle = \Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^1(x) \\ \Psi_n^2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

また, ケットベクトルの転置複素共役をとった横ベクトルを, ブラベクトルとして, $\langle\Psi_n(x)|$ と表す.

$$\langle\Psi_n(x)| = \left[\overline{\Psi_n^1(x)}, \overline{\Psi_n^2(x)} \right].$$

ただし, $\overline{\Psi_n^1(x)}, \overline{\Psi_n^2(x)}$ は, それぞれ, $\Psi_n^1(x), \Psi_n^2(x)$ の複素共役とする. ここで, ブラベクトルとケットベクトルの内積は,

$$\langle\Psi_n(x)|\Psi_n(x)\rangle = \overline{\Psi_n^1(x)}\Psi_n^1(x) + \overline{\Psi_n^2(x)}\Psi_n^2(x)$$

であり, 先に定義した, 量子ウォーカーが時刻 n において, 場所 x に存在する確率 $P_n(x)$ に等しい.

フーリエ解析

量子ウォークを解析する際に, よく用いられる手法の 1 つであるフーリエ解析に関して, 簡単に触れる. 量子ウォークにおいて, フーリエ解析の手法が導入されたのは, Grimmett et al. [3] による極限定理に関する研究であり, 空間一様 (すべての場所で同じ量子コインを利用) なモデルに対して, 非常に有効な手法である. 量子ウォークにおけるフーリエ解析に関する日本語での詳しい説明は, Machida [16] を参照されたい. また, ここでは 1 次元でのフーリエ解析に関して紹介する. 今までと同様に, 場所 x , 時刻 n での確率振幅ベクトルを, 以下で与える.

$$|\Psi_n(x)\rangle = \Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^1(x) \\ \Psi_n^2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

また, 確率振幅のフーリエ変換を, 以下で表す.

$$|\hat{\Psi}_n(k)\rangle = \hat{\Psi}_n(k) = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_n^1(k) \\ \hat{\Psi}_n^2(k) \end{bmatrix}.$$

ここで, 量子ウォークのフーリエ変換 $|\hat{\Psi}_n(k)\rangle$ を,

$$|\hat{\Psi}_n(k)\rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} |\Psi_n(x)\rangle$$

と定義すると, 逆フーリエ変換として,

$$|\Psi_n(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} |\hat{\Psi}_n(k)\rangle dk$$

が成立する.

また, フーリエ変換後の波数空間における量子ウォークの時間発展式は, 量子コイン U のモデルの場合には,

$$|\hat{\Psi}_{n+1}(k)\rangle = U(k) |\hat{\Psi}_n(k)\rangle = R(k) U |\hat{\Psi}_n(k)\rangle$$

で表すことができる. ただし,

$$R(k) = \begin{bmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{bmatrix}$$

である. また, 初期状態を原点のみから確率振幅ベクトル ${}^T[\alpha, \beta]$ で出発した場合のモデルでは, 波数空間での初期状態は,

$$|\hat{\Psi}_0(k)\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

で与えられる. これより, 時刻 n での確率振幅ベクトルは,

$$|\hat{\Psi}_n(k)\rangle = U(k)^n |\hat{\Psi}_0(k)\rangle$$

と表すことができる.

以上