

学位論文及び審査結果の要旨

横浜国立大学

氏名 永並 健吾
学位の種類 博士(理学)
学位記番号 環情博甲第2216号
学位授与年月日 令和3年3月25日
学位授与の根拠 学位規則(昭和28年4月1日文部省令第9号)第4条第1項及び
横浜国立大学学位規則第5条第1項 (論博の場合は第2項)
学府・専攻名 環境情報学府 情報環境専攻
学位論文題目 Re-embedding structures of graphs on surfaces
and related topics for graph colorings
(閉曲面上のグラフの再埋蔵構造およびグラフ彩色との関連)
論文審査委員 主査 横浜国立大学 教授 根上 生也
横浜国立大学 教授 中本 敦浩
横浜国立大学 准教授 小関 健太
横浜国立大学 准教授 白崎 実
横浜国立大学 講師 白川 真一

論文及び審査結果の要旨

閉曲面上のグラフの再埋蔵構造の研究は、位相幾何学的グラフ理論における中心的なテーマの1つである。一般的に閉曲面を固定してもグラフの再埋蔵構造を分類することは難しいが、本論文では平面的グラフを球面以外の閉曲面に埋め込んだ場合の再埋蔵構造と再埋蔵による彩色可能性の変化に着目して3つの研究を行っている。

1つめの研究として、3-連結3-正則平面的グラフに対する再埋蔵がそのグラフが含むある特定の構造を持つ小さな部分グラフと対応して存在するという理論を構築し、閉曲面が射影平面、トーラス、クラインの壺の場合に、3-連結3-正則平面的グラフの再埋蔵構造を完全決定した。その結果に基づいて、再埋蔵を順次多項式時間で生成するアルゴリズムや非同値な再埋蔵の個数を決定する多項式時間アルゴリズムを示した。対象が平面的グラフに限定されてはいるものの、再埋蔵構造の完全決定と高速な再埋蔵の生成アルゴリズムを構築した点は高く評価できる。

2つめの研究では、辺に向きの定められた有向グラフの埋め込みについて探求している。有向グラフに対しては、各領域の境界に沿って一方向の向きを定めるように有向辺が配置された埋め込みを考えることが多い。それが可能となるのは、各頂点の出次数と入次数の一致するオイラーグラフに限られる。本論文では、1つめの研究を模して、強2-辺連結2-正則有向平面的有向グラフに関する理論を展開した。この研究においても、有向グラフの再埋蔵構造の分類に大きく貢献する成果が得られている点が評価できる。

3つめの研究として、閉曲面に埋め込まれたグラフを再埋蔵した場合に生じるグラフの彩色可能性に関する議論を行っている。その中で、KündgenとRamamurthiが提唱した「弱染色数の差が任意に大きくなる再埋蔵を持つグラフが存在する」という予想を肯定的に解決した。また、facial 3-achromatic number という彩色に関する不変量の再埋蔵による差には閉曲面の種数に関する線形の上界があることを示した。未解決予想の解決もさることながら、組合せ的な議論を用いて探求されることの多い彩色問題に対して、再埋蔵理論の発想を投入して議論が展開されていることは極めて有意義である。

これらの研究成果は4編の論文(投稿中2編を含む)として公表されており、学位論文を構成する上で十分なものとなっている。上述したように本論文は位相幾何学的グラフ理論において中心的な研究分野である再埋蔵理論に大きく貢献しており、質、量ともに本専攻の博士論文として十分な内容になっていると判定した。