テクノロジーを用いた数学的モデリング等の授業の考察

池田　敏和・橋本　吉彦

A Study on Classroom Teaching Related Mathematical Modelling Using Technology

IKEDA Toshikazu and HASHIMOTO Yoshihiko

1．はじめに

2000年（平成12年）11月7，8日の２日間にわたって、米国のノースカロライナ州にあるケアリーアカデミー中等学校とノースカロライナ理数高校を訪問し、数学の授業を参観する機会を得た。ノースカロライナ州は、フロリダ半島の北東に位置している。ノースカロライナ州では、チャペルヒル，ローリー，ダーラムの３つの都市に、それぞれノースカロライナ大学チャペルヒル校、ノースカロライナ州立大学、デューク大学の３つの著名な大学があり、“リサーチ・トライアングル”と呼ばれている。また、ノースカロライナ州には、統計ソフトＳＡＳ（Statistical Analysis Software）をつくっている統計ソフト専門の企業があり、ＳＡＳ通りといった具合に、通りの名前までになっている。最初に、ケアリーアカデミー中等学校での参観、次にノースカロライナ理数高校における参観を通して授業等を考察する。

2．ケアリーアカデミー中等学校

ケアリーアカデミー中等学校は、ケアリー市にあり、1997年の8月19日に設立された私立の学校である。前述のＳＡＳの補助によって、設立されたものである。３年間のミドルスクール（６，７，８学年）と４年間のアッパースクール（9，10，11，12学年）で構成されている。１クラスの人数は、８人から18人と非常に少人数で構成されており、テクノロジーの利用を積極的に奨励している学校である。全校生徒612人に対し、コンピュータは768台設置されており、ホームページには、両親を対象とした情報を掲載したページが１ヶ月おきに更新されている。

(1)　カリキュラム

６学年から12学年までの数学のカリキュラムは、次のように組まれている（図１参照)。

①　６学年では、「数学６」と「移行期の数学（小学校の算数から中学校への数学への移行を促進するための数学)」のどちらかを学習することになる。

②　７学年になると、「数学６」を終わらせた生徒は、「移行期の数学」か「数学７」を選択することになる。「移行期の数学」を終わらせた生徒は「代数１」をとることになる。

③　「数学７」を終えた生徒は、「移行期の数学」に進むことになる。

④　「代数」を終えたあとは、「幾何」か「進んだ子のための幾何」のどちらかを選択する。

⑤　生徒は、自分のレベルに応じて「代数２」を続けて学習する。何人かの優秀な生徒は「進んだ子のための代数２」へと移ることできる。

⑥　「代数２」にいる生徒は「三角比と関数」へと進む。
⑦　「三角比と関数」の後、生徒は「統計」か「前（pre）微積分」のどちらかに進む。
⑧　「微積分」を終えた生徒は、「統計」かその他の選択科目を学習する。

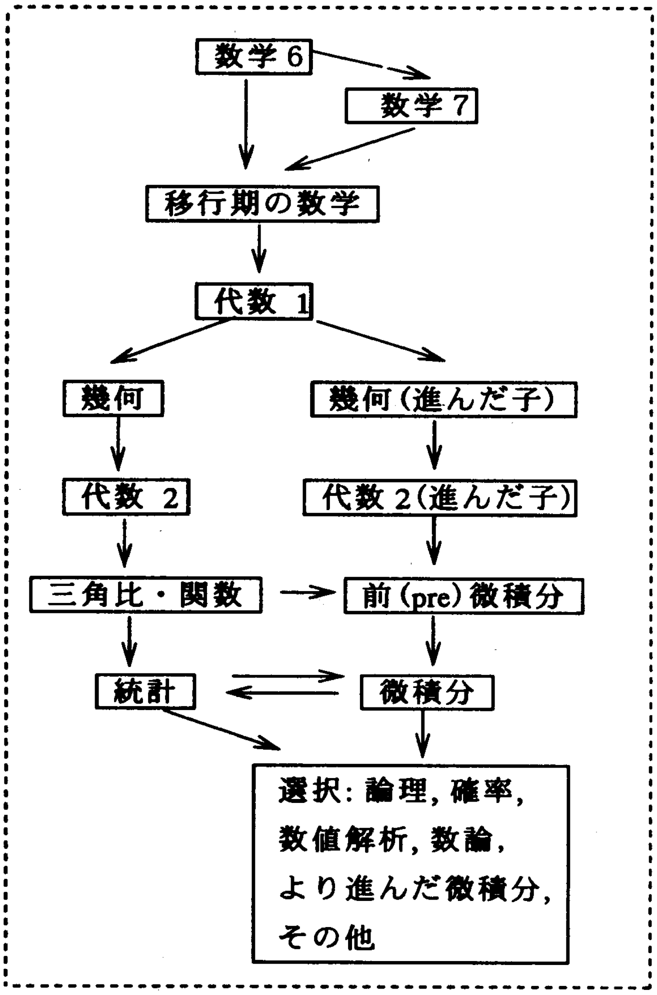

図１

(2)　８学年の授業参観

我々は、ミドルスクールの８学年担当のPat Martin先生（女性）のクラスを見せて頂いた。８学年の数学では、次の点が生徒の目標として掲げられていた。

① 数学を楽しむこと。
② 関連づけること。
③ 適宜テクノロジーを使用すること。
④ 数学でコミュニケーションすること。
⑤ 理解を深めること。
⑥ クラスの一員として参加すること。

また、１日のタイムスケジュールは、８時から３時10分までで、下記のようにぎっしりと組まれていた。授業が分刻みで組まれており、休み時間は２時間目のあとの12分間だけで、授業と授業の間の２，３分は、教室移動のための時間となっている。授業時間を延長することは次の授業に支障を来すことになるので考えられないことである。このスケジュールでは、とても大変ではないかと訪ねると、夕方の時間が自由に使えるからよいと笑って答えていたのが印象的であった。

１限目　８：００～８：５０，　２限目　８：５２～９：３７
休み時間　９：３８～９：５０
３限目　９：５２～１０：３７，　４限目　１０：４０～１１：２５

昼食　１１：２７～１１：５２
５限目　１１：５５～１２：４０，　６限目　１２：４５～１：３０
７限目　１：３５～２：２０
８限目　２：２５～３：１０（エンリッチメント（スポーツ・芸術））

また教室の中は、両側にコンピュータが１人１台確保できるように設置されており、ホワイトボートが教室の隅から隅までとても大きく取り付けられていた。教室の環境に十分な配慮がなされていることに関心した。Martin先生が１週間に指導する数学の時間は、「４コマ×５＝20（コマ)」ということであった。

参観させて頂いた最初の授業は幾何で、生徒の人数は12人のクラスであった。宿題の答え合わせの後、Martin先生が各自にワークシートを配り、各自それぞれコンピュータに向かって、友達と相談しながら、スケッチパッドを使って問題を解決していくという展開であった。取り扱った問題は、三角形を作図して、３つの辺と３つの角の大きさを測り、各頂点を動かすことによって、辺と角との間にはどのような関係があるのかを見つけるというオープンエンドの問題であった。生徒の解答としては、「最も小さい角の対辺は最も短い」,「２辺の和は他の１辺より大きい」,「ある角を小さくすると、その角をつくる２辺は長くなる」,「直角三角形の場合、対辺の中点Mをとると、３つの頂点から中点Mまでの距離は全て等しい」といった様々な解答があった。この他にも似たような問題が２つ出されていたが、これらの解答の検討については、次の時間に行うということであった。

参観させて頂いた２番目の授業は代数で、生徒の人数は18人であった。グラフ電卓（ＴＩ－83）を生徒各自が購入しており、それを用いてデータに適する直線を求め、それを利用して問題を解決するといった授業展開であった。この授業でも、最初にワークシートが配られ、相談しながら各自のペースで授業が展開されていった。取り扱われた問題は３つあり、最初の問題は、緯度と気温が表示された表から、点をグラフ電卓でプロットしていき、１次関数で近似させるという内容であった。２番目の問題は、同じ解決過程で解ける問題で、データとしては北緯と１月の平均最低気温を取り扱っていた。３番目の問題は、スカイダイビングの問題で、実際の空気上での落下速度、真空の場合を仮定した場合の落下速度、空気の摩擦力を表示した表から、各々２つの関係を探る問題である。教科書は、McDougal Littel社のものを使用していたが、授業参観で取り扱われた内容は、数学の先生が集まって題材を選択し、ワークシートを作成しているとのことであった。

３．ノースカロライナ理数高校（ＮＣＳＳＭ）

ノースカロライナ理数高校は、ダーラム市にあり、11学年と12学年の２年間だけで構成されいる公立高校である。1908年に創立された病院を改築して1980年９月に開設された学校で、将来が有望視される進んだ生徒を対象に、数学・理科の教育に力を入れている。このような将来を有望視した生徒を対象に２年間だけ数学・理科を中心に指導している学校は、ノースカロライナ理数高校が米国で始めての試みである。現在では、このタイプの学校は米国で１０校以上に及んでいる。

とても壮大な木が校舎のまわりに立ち並び、紅葉がとてもきれいだと聞いている。また、かつて小児科だった部屋がコンピュータ室になったこともあって、小さな窓から教室の中を覗けるようになっていた。

(1)　カリキュラム・入試等

1クラスの人数は、特に決められていないが、30人弱が一般的である。教室は、大きい黒板3個と小黒板4個が壁に配置されており、生徒が同時に黒板に書けると同時に、教師が使用する黒板が併用できるようになっており、教室の環境づくりに関して日本でも参考にしていきたい点である。

数学の授業は、週に4回あり、45分授業が1回、50分授業が2回、90分授業が1回となっている。1人の先生が担当する1週間の時間数は、「4（コマ）×4（クラス）＝16（コマ）」である。全ての生徒に、グラフ電卓を購入することが義務づけられており、少なくとも1学年に1単位、2年間で2単位を履修することが義務づけられている。数学を2単位より多く学習しない生徒は、必ず「より高度な関数とモデリング（Advanced Functional Modeling)」(1単位）を選択することが義務づけられている。この教科に関しては、Teague先生 が著者の1人となっている『前（pre）微積分』を取り扱っている。生徒が学習する科目の系列は、生徒の希望・能力に応じて多岐にわたっているが一般的には、図2のような流れになっている。

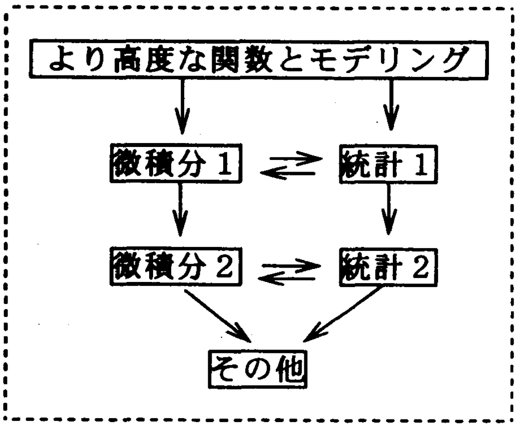

図2

開設されている教科は、大変多くて26科目あり、日本の高校にはないものとして、次のような科目がある。

- 「より高度な関数とモデリング」

  期間・単位：1年間，1単位，履修条件：代数2あるいは「高等学校代数における探求」
- 「数論」

  期間・単位：1学期，1/2単位，履修条件：数学科主任の許可
- 「離散数学におけるトピック」

  期間・単位：1学期，1/2単位，履修条件：数学科主任の許可
- 「数学的モデリング」

  期間・単位：1学期，1/2単位，履修条件：数学科主任の許可
- 「フラクタルとカオス」

  期間・単位：1学期，1/2単位，履修条件：MA318「1変数の微積分学2」と数学科主任の許可の両方

入学試験に関しては、4年制公立高校の最初の2年間を終えた生徒を対象に、通常は12学年で受けるテストSAT（当初は、Scholastic Aptitude Testと呼ばれていたが、Scholastic Achievement Testに名前が変わり、現在は、単にテストの名前としてSATが用いられている）を10学年で受け、それを基に選抜される。今年度に関していうと、約600人の受験者の中から280人程度が合格するといった具合いの難関校である。現在の在籍生徒550名は全てドミトリーで生活している。また、大学入試は、大学によって若干異なるが、共通テスト、高校での成績、内申書の3つによってなされているのが一般的である。共通テストに関しては、ＳＡＴをもう一度受けるか、その他にＳＡＴ2、ＡＰ（Advanced Placement）といった共通テストがある。ＳＡＴが一般的なテスト（英語と数学だけ）であるのに対し、SAT2は、少し高度で教科によってわかれており、ＡＰはさらに高度な

内容で、数学に関しては、微分積分学、統計の内容を対象にしている。

(2) 授業参観

4つの授業を参観させて頂いた。Daniel Teague先生（男性）の「かまきりの問題」を中心に、4つの授業の概要について述べていく。全ての授業で、テクノロジーが重要な役割を果たしていることがわかる。なお、使用されているグラフ電卓の機種は全てTI-83であった。入学条件の中に、グラフ電卓購入が義務づけられている。

① モデリングプロジェクトの発表

参観させて頂いた最初の授業（微積2）は、11学年の生徒6名を対象としたDavid Chan先生（男性）の授業で、4日間かけて生徒1人1人がつくったモデリングの課題（ただし、微分方程式を取り扱うことが義務づけられている）を発表するものであった。このように4日間かけて取り組むプロジェクトは1年に2回（学期に1回)、また、2日間かけて取り組むプロジェクトは1年に4回取り扱われているそうだ。生徒は、ポスター発表用のダンボールを購入して、ポスターセッション形式で発表する。この授業では、6人中3人が発表した。一つ目の発表は、タイトルが「トラファルガーの戦い（スペイン南西岬の沖合で、1805年英国のNelson提督がスペイン・フランス連合艦隊を破った戦い)」で、船の数がどのように減っていくかを微分方程式で表し、それを解決してグラフで表現する内容であった。目的、問題、歴史的背景、結論が色彩豊かにポスターにまとめられていた。2つ目の発表は、「(船艦を）わけて征服する」というタイトルで、前述の課題と同じ文脈において、大きい船艦の方が小さい船艦に勝つことから、どのように船をわけて戦えば勝つかを微分方程式で表したものである。3つ目の発表は、五大湖の問題で、ヒューロン湖からエリー湖へ、エリー湖からオンタリオ湖へと流れる汚染物質の量を微分方程式で表して解決するものであった。印象的であったことは、11学年で微分方程式を学習していること、ポスターを用いて生徒が上手に発表していたことである。

② カマキリの問題

見学させて頂いた2つ目の授業（より高度な関数とモデリング）は、11学年の生徒18名を対象としたTeague先生のクラスで、カマキリの問題を取り扱っていた。問題は、次の通りである。

「カマキリは、ゴキブリによく似た、小さくてのろのろ進む虫である。カマキリは怠け者で、生物学の研究の中でしばしば使用される。カマキリの足跡をたどるのはとても簡単である。カマキリは、餌を探して動く。研究者たちは、彼らが餌を求めて動く距離と、彼らの腹の中にある餌の量との関係について研究してきた。距離はミリメートルで測定され、餌の量はセンチグラム（1グラムの百分の1）で測定される。カマキリが餌を求めて動く距離は、最大の反応距離（R）によってラベル化される。彼らの腹の中にある餌の量が測定され、この量を満足度（S）と呼ぶことにする。15匹のカマキリに対する測定結果は、下記の通りである。

反応距離 (R)	11	18	23	31	35	40	46	53	59	66	70	72	75	86	90
満足度 (S)	65	52	44	42	34	23	23	8	4	0	0	0	0	0	0

表1

カマキリが餌を求めて動く距離（R）と、彼らの腹の中にある餌の量（S）との関係を1次式で決定しなさい。あなたがつくったモデルにおいて誤差の限界（error bounds）を求めなさい。」

この問いに対して、生徒たちは、グラフ電卓を用いて、メジアンーメジアン線、最小2乗法を用いて、次のように直線の式を求めていた。

最小2乗法：y＝ax＋b，a＝-0.8576143, b=63.9767424, r=-0.9471191

メジアンーメジアン線：y＝ax＋b, a＝-0.8461538, b=59.9230769

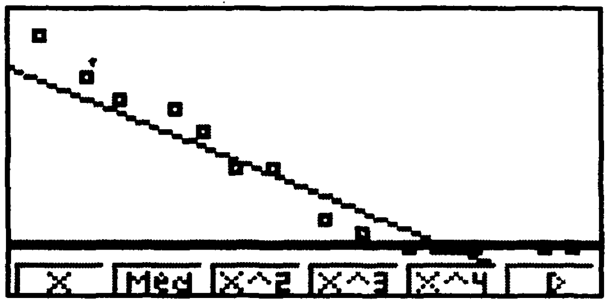

図3

しかし、これでは、図3にあるように、直線がデータにフィットしていないことから、何が原因であるかをTeague先生は、生徒たちに考えさせていた。

0の個数が多いことが影響していることに気付かせ、生徒たちに、領域を2つにわけた関数モデルで考えることを指導していた。ただ単に、一次関数で近似させるだけではなく、モデルの妥当性，限界に焦点を当てて指導していた。そのあとで、誤差の限界を求めるために、直線と各点との垂直方向の距離をグラフ電卓を用いて求め、標準偏差の2倍が95%程度になることを利用して信頼区間を求めていた。すなわち、1変数の統計機能を用いて標準偏差を求め、2倍の標準偏差（3.1×2）を先ほどの式に加減して、次のような式でまとめていた。

$$R(S) = -1.24S + 76.3 \pm 6.2 \quad (S \leqq 61.5)$$
$$R(S) = 0 \quad (S > 61.5)$$
（R：最大の反応距離，S：満足度）

続いて、生徒たちは、次の問題に挑戦し始めた。問題は、次の通りである。

「研究者は、満足度の課題について次のような研究をした。すなわち、カマキリの消化機能は、どのくらいのペースで作用するのか。カマキリが満腹になったとき、カマキリが餌を求め始めるまでにどのくらいの時間を要するのか、といった課題である。カマキリが満腹になってから経過した時間（T）と満足度（S）に関するデータが集められた。数多くのカマキリの測定結果を集めることにより、生物学者は、どのくらいのペースでカマキリの消化機能が作用しているのかについてかなり正確な結果を得ている。下記のデータは、カマキリが餌を消化するのにかかる時間（T）と、その時間における腹の中にある餌の量（S）とを比較している。

生物学者は、カマキリは1時間につき一定の割合ずつ腹の中の餌を消化すると仮定している。これは、指数関数的に減少すること、すなわち、S（t）＝a・e^{-bt}という関数でモデル化されることを意味している。」

T	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	16	19	20	24	28	36	48	72
S	94	90	85	82	88	83	70	66	68	50	46	51	41	32	29	14	17	8

表2

係数aは、T＝0のときの値として94に定め、bの値を変化させることによって、妥当なbの値を求めることが要求される。ここでは、グラフ電卓の回帰曲線を求める機能は使用せずに、グラフ

電卓にｂの値を設定してグラフを描き、妥当なｂの値を試行錯誤で探っていくことが指示された。結果的には、係数ｂの値によって、グラフは垂直方向に伸縮し、ｙ切片が61.5ぐらいでうまく指数関数によって近似できることがわかる。そして最後に、カマキリが餌を消化するのに費やした時間（Ｔ）から、彼らが餌を求めて動く最大の反応距離（Ｒ）を与える関数 Ｒ＝ｆ（Ｔ）に焦点を当てていった。このような合成関数は、数学の世界では頻繁に用いられること、また、カマキリが満腹であることを仮定したとき、時間がわかれば、カマキリの居場所が予測できることがモデルをつくるよさとして力説された。モデルをつくることによって、何が新たに見えてくるのかを教師が理解しておくことが、肝要なことである。

テクノロジーの利用に関しては、テクノロジーによる解法と代数的解法を併用していたが、Teague先生によると、両方の解法をバランスよく位置づけていくことが重要であるとのことで、このバランスに関しては、今後とも重要な課題であるとのことであった。

③　遠隔教育（Distance Learning）

参観させて頂いた３番目の授業（AP微積分）は、Maria Hernandez先生（女性）の授業で、５大湖の汚染物質の問題を、遠隔地にある別の学校の生徒（15名）に指導するものであった。内容は、微分方程式の解法を、グラフ電卓を使用して数値解析的に求めていくものである。具体的には、ヒューロン湖からエリー湖へ（１年につき11%）、エリー湖からオンタリオ湖へ（１年につき36%）、オンタリオ湖から海へ（１年につき12%）流される汚染物質の量に関して、３つの湖の汚染物質の量がどのように変化するかを微分方程式に表し、それを差分方程式に変換して解決していくものである。ただし、ヒューロン湖へは、毎年25トンの汚染物質が流され、現在の汚染物質の量は、ヒューロン湖3500トン、エリー湖1800トン、オンタリオ湖2400トンである。微分方程式は、次の通りである。

$$dA/dt = -0.11A + 25 \quad \text{（ヒューロン湖）}$$
$$dB/dt = 0.11A - 0.36B \quad \text{（エリー湖）}$$
$$dC/dt = 0.36B - 0.12C \quad \text{（オンタリオ湖）}$$

この微分方程式を下記のような差分方程式に直し、グラフ電卓を用いて表やグラフに表し、各湖の汚染物質の量がどのように変化していくのかを見いだす活動であった。グラフ電卓で解決する際、Δtを１とみなして解決する点が重要である。

$$A(n)= A(n-1)+\{-0.11A(n-1)+25\}\times\Delta t \quad \text{[ただし、}A(nMin)=3500\text{]}$$
$$B(n)= B(n-1)+\{0.11A(n-1)-0.36B(n-1)\}\times\Delta t \quad \text{[ただし、}B(nMin)=1800\text{]}$$
$$C(n)= C(n-1)+\{0.36B(n-1)-0.12C(n-1)\}\times\Delta t \quad \text{[ただし、}C(nMin)=2400\text{]}$$

さらに、各々の湖の汚染物質の量が８%になるのに、何年かかるかを問題として取り上げた。トレース機能を使いながら、オンタリオ湖に関しては、何年たっても８%にまでいきつかないことを押さえたあとで、どのくらいの値に収束していくのかを問題にしていった。収束値を考えていく必然性に留意された展開であった。そして、ｎを大きくしたとき、各々の値（傾き）が０に収束していくことから、各湖の汚染物質の量が何ｇに収束するかを方程式を立てて導いていった。

遠隔教育については、新任の教師を指導する際に最も効果的に働くとのことであった。しかし、いくつかの地域に分かれた生徒を指導する際は、画面を４コマに分割するため、各生徒がどの程度理解しているかがわからないことが問題として指摘されていた。まだまだ改善の余地が残されているということであった。

この点に関して、我々は、新任教師の指導をかねて、遠隔地域の新任先生とティームティーチングを行い、新任教師に生徒の出来具合いを見てもらえば、さらに効果が上がるのではないかと考える。

④ 統計

参観させて頂いた4番目の授業（統計1）は、12学年の生徒18名を対象としたFloyd Bullard先生（男性）の授業で、統計的に調べた結果をパワーポイントを用いて発表する授業であった。18人のクラスにおいて、グループは3，4人で構成されており、この授業では3つの発表があった。一つ目は、ＮＢＡ選手（バスケットボールの選手）の身長と体重に関する回帰直線の傾きを推定する内容であった。ランダムに5人のサンプルをとり、回帰直線の傾きを求め、これを500回繰り返すプログラムをグラフ電卓を用いて作成していた。傾きの分布が正規分布に近いことを確かめた上で、母集団の回帰直線の傾きを5人のサンプルから推定する有効性と限界について考えるものであった。2つ目の発表は、上述と同じ内容で、母集団の標準偏差を推定することに焦点を当てていた。3つ目の発表は、水の中に含まれる汚染物質の量を調べるもので、平均を調べるより最大値を調べる方が現実的に考えて意味があることに焦点を当てた発表であった。パワーポイントを用いて、表現豊かに、上手に発表していた。発表する機会を多く持たすことは、とても時間がかかることだが、大学にいってから自信をもって発表することができてよかったという報告をよく聞くので、今後とも継続的に力を入れていきたいとのことであった。統計に関しては、Teague先生が、急速に成長している科目と言っていたのが印象に残っている。

4．まとめ

上述の通り、ケアリーアカデミー中等学校、ノースカロライナ理数高校においてのカリキュラム、授業参観について述べてきた。今後の日本の数学教育を考える上で、次の4点に関して、それぞれ参考になる点を上げてみる。

(1) 教室環境について

米国では、各先生の教室があって、生徒が教室を移動していくのが一般的である。それゆえ、教師は、自分のクラスを生徒の数学的探求が十分になされるように整備しておくことが可能になる。机に向かいながら、必要とあらば各自のコンピュータが両側に用意されている。また、教室は、どちらが前で、どちらが後ろということがなく、黒板が4面に位置付けられており、生徒が同時に黒板が書けると同時に、教師も同時に板書を進めることが可能である。

このような点は、日本の教室づくりにおいても参考になる点である。

(2) カリキュラムに関して

日本の高校においては、微積分へと向かうピラミッド型で数学カリキュラムが構成されている。選択というのは、その中での選択が前提とされている。ケアリーアカデミーにしても、ノースカロライナ理数高校にしても、数学の内容を幅広く捉え、微積分と統計を2本柱に、離散数学、数学的モデリング、数値解析といった具合いに、多様な視点から数学を捉えた選択になっている。高校の数学を学習して、将来的に、数学とどのようにつき合うのかを念頭に置いた上での選択になっているわけである。このような点は、日本の高等学校数学科カリキュラムの構成を考える上で参考になる点である。

(3) モデリングの授業について

ノースカロライナ理数高校においては、全ての教科において、現実世界とのつながりに配慮がなされている。第1に、微分方程式の解法の授業に見られるように、現実世界との関わりを持たせることによって、生徒が、その意味を理解する（Make Sense）ことが強調されている。生徒は、数学の世界だけで理解するのではなく、現実世界との関わりを持たせて理解することにより、数学学習の必要性、数学的意味をより深く理解することが可能になる。次に、カマキリの問題の授業に見られるように、ただ単に数学的モデルによって表現するだけでなく、その適用範囲、限界に力を入れている点である。数学的モデルをつくったあとで、そのモデルはどの範囲まで適用可能なのか、どこに数学的モデルの限界があるのかを考えている点は、数学的モデリングの指導を考える上で、参考になる点である。

(4) テクノロジーの利用に関して

米国では、前回のスタンダード（1989年出版）にあるような、とにかく積極的にテクノロジーを数学学習に導入するというのではなく、代数的解法（アナリティカル）とテクノロジーによる解法（ニューメリカル）をどのような理念の基に数学科カリキュラムに位置づけていけばよいのかが議論になっている。これは、スタンダード2000（Principles and Standards for School Mathematics 2000）からも見受けられることである。これらの議論は、代数的解法が主流の日本の数学教育に、どのようにテクノロジーを導入していくかを考える上で学ぶことができる点である。

ケアリーアカデミーの日程にあったように、分刻みの授業参観で、とても有意義な時を過ごすことができた。また、アメリカの進んだ学校では、進んだ数学の内容を積極的に取り扱っていること、テクノロジーの利用を効果的に取り入れていることを、改めて実感させられた。今後の日本の数学教育を考えたとき、上述のように参考になる点が多々あった。

今回2つの学校訪問に際しては、ノースカロライナ理数高校のTeague博士にお世話になった。また、学校訪問は、科学研究費による補助を受けることで可能になった。謝意を表する次第である。