

博士論文

ボクセル型構造解析による接触解析手法の開発

Development of Contact Procedure in Voxel-based Structural Analysis

国立大学法人 横浜国立大学大学院
環境情報学府

月 野 誠
Makoto TSUKINO

2020年9月

要 旨

ボクセル型構造解析による接触解析手法の開発

月野 誠

メッシュ生成の容易性を特長とするボクセル解析法は、機械部品や複合材料の微視構造など幅広い分野での解析に用いられている。しかし解析対象をボクセルモデルで表現すると、元々滑らかな物体表面が階段状の形状で表されるため、物体間の接触を含んだ解析が困難である。そこで本研究ではボクセル型構造解析の枠組みで実用的に接触問題が取り扱える解析手法の構築を目指し、有限被覆法による線形弾性体の微小変形範囲における摩擦なし接触解析手法の開発を行った。有限被覆法の高い形状表現能力を用いることにより、ボクセル型構造解析のメッシュ生成の優位性を維持しつつも、接触問題を適切に取り扱うことが可能となる。

接触拘束条件の定式化として通常の有限要素法ではペナルティ法が広く用いられているが、精度を確保するためにはペナルティ係数を大きくする必要がある。これは、有限被覆法のように自由度の離散化と形状表現が独立し積分点配置の制御が困難な手法において、過拘束を引き起こす要因となる。また数値的に不安定となり、反復法による連立一次方程式の求解に悪影響を及ぼすなどの問題が生じる。これに対して本研究では有限被覆法における接触解析に Nitsche の方法を用いる手法を提案し、ペナルティ法における問題の改善を図った。

構築したアルゴリズムを 2 次元および 3 次元の基本的な接触問題に適用し、有効性を確認するとともに、精度および計算効率の面で Nitsche の方法を用いた手法がペナルティ法に比べて優位であることを示した。また Nitsche の方法における接触応力に関する重み係数の調整方法、および有限被覆法への ghost penalty の適用を提案し、安定化に対する高い有効性を示した。さらにメッシュ生成の容易性を生かした高速化のアルゴリズムを提案し、実用的な問題の数値解析を通して提案手法の実用性を示した。

Abstract

Development of Contact Procedure in Voxel-based Structural Analysis

Makoto Tsukino

The voxel-based analysis is used in many fields such as mechanical parts or microstructure of materials thanks to its facility of mesh generation. In the voxel modeling, surfaces of objects are represented as stepwise shape even if the original surfaces are smooth and hence it is difficult to analyze models that contain contact conditions. In this study, a frictionless contact analysis procedure of infinitesimal deformation of linear elastic materials in the finite cover method (FCM) is developed to construct a practical contact analysis method based on the voxel-based structural analysis.

In the general finite element analyses, the penalty method is widely used in formulation of contact condition in which a significant large penalty parameter needs to be employed to assure accuracy. However, in the FCM formulation, nodal points for unknowns are located independently from geometry representation and hence it is difficult to manage positions of integration points for contact constraint, which may cause the over-constraint. Moreover, a large penalty parameter causes numerical instability and convergence deterioration in iterative linear solvers. In this study, application of the Nitsche's method to contact constraint in the FCM is proposed to circumvent such difficulties.

The developed procedure is applied to 2D and 3D basic contact problems and its effectiveness is validated. Also, it is shown that the Nitsche's approach is superior to the penalty method in accuracy and calculation efficiency. Moreover, control technique of weighting factor of contact stress in the Nitsche's method and application of the ghost penalty in the FCM are proposed and validated. Besides, acceleration technique of analyses utilizing facility of mesh generation is suggested and its effectiveness is shown through a practical contact problem.

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、たくさんの皆様からご指導、ご支援を賜りました。

学部生時代からお世話になった横浜国立大学 山田貴博教授には、本研究の機会を与えて頂くとともに、本研究全般について多くのご指導、ご助言を頂きました。また研究が思うように進まない中、大変辛抱強く相談に乗って頂きました。ここに深甚の感謝の意を表します。

横浜国立大学 松井和己准教授には、研究が行き詰まる度に新しい視点から貴重なアドバイスを頂くとともに、社会人学生の立場を良くご理解下さり、研究活動を支援して頂きました。また本論文をご審査頂いた横浜国立大学 上野誠也教授、中野健教授、白石俊彦准教授には、幅広い知見から貴重なご指摘を頂き、研究をより深めることができました。皆様に深く感謝申し上げます。

株式会社くいんと 代表取締役会長 石井恵三氏には、博士後期課程での研究を快く認めて頂くとともに、様々なバックアップを頂きました。また本研究では、くいんとの皆様が研究開発された多くの技術やソフトウェアを活用させて頂きました。くいんとの皆様に心より感謝申し上げます。

日本工業大学 瀧澤英男准教授には、叱咤激励とともに、客観的な視点で貴重なアドバイスを頂きました。岐阜大学 永井学志准教授には、データをご提供頂くとともに、本研究の数値計算に多くの重要な示唆を頂きました。東北大学 山本剛大特任准教授、山梨大学 杉山裕文助教には、山田・松井研究室とともに博士後期課程に学び、研究生活において様々なサポートを頂きました。その他にも、本研究を進めるにあたり、多くの皆様に大変お世話になりました。誠にありがとうございました。

最後になりましたが、研究活動をいつも側で支えてくれた妻と、遠くから応援してくれた母に、心より感謝致します。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	本研究の背景	1
1.2	既往の研究	3
1.2.1	メッシュフリー法と有限被覆法	3
1.2.2	接触のモデル化	5
1.2.3	接触拘束条件の定式化	6
1.3	本研究の目的	8
1.3.1	本研究の目的	8
1.3.2	目標とする解析精度の指針	9
1.4	本論文の構成	12
第 2 章	有限被覆法による接触問題の定式化	21
2.1	はじめに	21
2.2	有限被覆法 (FCM)	22
2.3	接触拘束条件の定式化	27
2.3.1	ペナルティ法	27
2.3.2	Nitsche の方法	29
2.4	接触反復のアルゴリズム	35
2.5	ディリクレ条件の定式化	36
2.6	おわりに	38
第 3 章	2次元問題への適用と性能評価	43

3.1	はじめに	43
3.2	物体の形状表現と数値積分アルゴリズム	44
3.3	数値解析例	44
3.3.1	弾性体ブロックの接触	45
3.3.2	弾性体の土台上の弾性体ブロック	46
3.3.3	ヘルツの接触問題	47
3.3.4	ヘルツの接触問題 (傾斜した場合)	48
3.3.5	軸と部品との接触問題	51
3.4	おわりに	51
第 4 章	3 次元問題への適用と性能評価	69
4.1	はじめに	69
4.2	物体の形状表現と境界積分アルゴリズム	70
4.3	EBE-PCG 法による連立一次方程式の求解	71
4.4	Ghost penalty の適用	73
4.5	数値解析例	76
4.5.1	弾性体ブロックの接触	76
4.5.2	曲げが作用する板の接触	77
4.5.3	球体と剛体平板との接触	81
4.5.4	球体同士の接触	83
4.6	おわりに	87
第 5 章	高速化をはじめとする実用的な問題解決のための検証	135
5.1	はじめに	135
5.2	段階的な要素サイズを用いた計算時間の短縮	136
5.2.1	手法の概要	136
5.2.2	手法の有効性の検証	138
5.3	実用化への留意点	139

5.3.1	解析の準備	139
5.3.2	ポスト処理	139
5.4	実用的な問題への適用	140
5.4.1	ナックルジョイントの接触解析	140
5.4.2	並列性能とメモリ使用量	142
5.5	おわりに	142
第 6 章	結論と展望	157
6.1	結論	157
6.2	展望	159
	参考文献	161

表目次

3.1	Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks)	53
3.2	Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks, $\nu = 0.3$)	53
3.3	Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks - inclined)	53
3.4	g_{ave} (Block-foundation)	54
3.5	Vertical displacement and g_{ave} (Hertz - rigid foundation)	54
3.6	g_{ave} (Hertz - elastic foundation)	54
3.7	g_{ave} (Hertz - inclined)	55
3.8	g_{ave} and number of steps (Shafts-component)	55
4.1	Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks)	89
4.2	Average displacement of lower surface (Elastic blocks)	89
4.3	g_{ave} and calculation cost (Bending of plates)	90
4.4	Calculation cost (Bending of plates - slightly inclined)	90
4.5	g_{ave} and calculation cost (Bending of plates - inclined)	90
4.6	Calculation cost (Sphere on rigid foundation)	91
4.7	Calculation cost (Contact of spheres)	92
4.8	Calculation cost (Contact of spheres - inclined)	93
4.9	Center displacement and g_{ave} (Contact of spheres - different materials)	94
4.10	Calculation cost (Contact of spheres - different materials)	95
5.1	Calculation cost (Contact of spheres, $h = 0.1$)	144
5.2	Calculation cost (Contact of spheres, $h = 0.05$)	144

5.3 Calculation cost (Knuckle joint, $h = 1.0\text{mm}$) 144

5.4 Calculation cost (Knuckle joint, 2 phases analysis) 145

目次

1.1	Voxel analysis	14
1.2	Voxel model	14
1.3	Contact surface of voxel model	15
1.4	Stress disorder due to stepwise shaped elements	15
1.5	Node-to-Node model	16
1.6	Node-to-Surface model	16
1.7	Surface-to-Surface model	17
1.8	Surface-to-Surface type model in FCM	17
1.9	Beam fixed at both ends	18
1.10	Error of deflection (against penalty parameter)	18
1.11	Error of deflection (against element size)	19
2.1	Finite cover method	39
2.2	Cover and element	39
2.3	Duplicated elements	40
2.4	Contact bodies	40
2.5	Flowchart of contact analysis	41
2.6	Schema of contact analysis	42
3.1	Geometry representation in 2D	56
3.2	Divided segments	56
3.3	Integration point at contact interface	57

3.4	Contact of elastic blocks	57
3.5	Contact of inclined elastic blocks	58
3.6	Elastic block on elastic foundation	58
3.7	g_N (Block-foundation)	59
3.8	Contact problem of Hertz	59
3.9	Mesh of Hertz contact	60
3.10	Vertical stress - Penalty (Hertz - rigid foundation)	60
3.11	Vertical stress - Nitsche (Hertz - rigid foundation)	61
3.12	Contact stress (Hertz - rigid foundation)	61
3.13	g_N (Hertz - rigid foundation)	62
3.14	Vertical stress - Nitsche (Hertz - elastic foundation)	62
3.15	Mesh of Hertz contact (inclined)	63
3.16	Contact stress (Hertz - inclined)	63
3.17	Element with minuscule area	64
3.18	Test of element with minuscule area	64
3.19	Normal stress	65
3.20	Vertical stress - Nitsche (Hertz - inclined)	65
3.21	Contact stress (Hertz - inclined)	66
3.22	g_N (Hertz - inclined)	66
3.23	Contact of shafts and component	67
3.24	Deformation($\times 30$) and displacement - Nitsche (shafts-component)	67
3.25	Contact stress - Penalty(25.0) (shafts-component)	68
3.26	Contact stress - Nitsche(5.0) (shafts-component)	68
4.1	Original and divided triangular patches	96
4.2	Element faces imposed ghost penalty	96
4.3	Elastic blocks	97
4.4	Elastic blocks (section)	97

4.5	Bending of plates	98
4.6	Deformation($\times 30$) (Bending of plates, Dirichlet - Penalty)	99
4.7	Deformation($\times 30$) (Bending of plates, Dirichlet - Nitsche)	100
4.8	Contact on/off (Bending of plates, Dirichlet - Penalty)	101
4.9	Contact on/off (Bending of plates, Dirichlet - Nitsche)	102
4.10	g_N (Bending of plates)	103
4.11	Element with small filling factor	103
4.12	Stress(normal component) (Bending of plates)	104
4.13	Stress(normal component) (Bending of plates - slightly inclined, with ghost penalty)	105
4.14	Bending of plates - inclined	106
4.15	Stress(normal component) (Bending of plates - inclined)	106
4.16	Stress(normal component, enlarged view) (Bending of plates - inclined)	107
4.17	Deformation($\times 30$) (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Penalty) .	108
4.18	Deformation($\times 30$) (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Nitsche) .	109
4.19	Contact on/off (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Penalty) . . .	110
4.20	Contact on/off (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Nitsche) . . .	111
4.21	g_N (Bending of plates - inclined)	112
4.22	Sphere on rigid foundation	112
4.23	Vertical displacement (Sphere on rigid foundation)	113
4.24	Contact stress (Sphere on rigid foundation)	114
4.25	Contact on/off (Sphere on rigid foundation)	115
4.26	Contact stress (Sphere on rigid foundation, along the sampling line) .	116
4.27	g_{ave} (Sphere on rigid foundation)	116
4.28	Displacement error of sphere center (Sphere on rigid foundation) . .	117
4.29	Computing time (Sphere on rigid foundation)	117
4.30	Contact of spheres	118

4.31	Contact stress (Contact of spheres)	119
4.32	Contact on/off (Contact of spheres)	120
4.33	Contact stress (Contact of spheres, along the sampling line)	121
4.34	g_{ave} (Contact of spheres)	121
4.35	Displacement error of sphere center (Contact of spheres)	122
4.36	Computing time (Contact of spheres)	122
4.37	Contact of spheres - inclined	123
4.38	Vertical displacement (Contact of spheres - inclined)	124
4.39	Contact stress (Contact of spheres - inclined)	125
4.40	Contact on/off (Contact of spheres - inclined)	126
4.41	Contact stress (Contact of spheres - inclined, along the sampling line)	127
4.42	g_{ave} (Contact of spheres - inclined)	127
4.43	Displacement error of sphere center (Contact of spheres - inclined) .	128
4.44	Computing time (Contact of spheres - inclined)	128
4.45	Contact on/off (Contact of spheres - inclined, $h = 0.05$)	129
4.46	Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 2E_1$)	130
4.47	Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 5E_1$)	131
4.48	Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 10E_1$)	132
4.49	Contact stress (Contact of spheres - different materials, along the sampling line)	133
5.1	Algorithm of 2 phases analysis	146
5.2	Taking over contact status	146
5.3	Contact on/off (Contact of spheres, 2 phases analysis)	147
5.4	Knuckle joint	148
5.5	Parts of knuckle joint	148
5.6	Configuration (Knuckle joint)	149
5.7	Displacement($\times 30$) (Knuckle joint)	150

5.8	Contact stress (Knuckle joint)	151
5.9	Contact on/off (Knuckle joint)	152
5.10	Sampling line (Knuckle joint)	153
5.11	g_N (Knuckle joint)	153
5.12	Contact on/off (Knuckle joint, 2 phases analysis)	154
5.13	Parallel performance and memory usage (Knuckle joint)	155

第1章 序論

1.1 本研究の背景

有限要素法による3次元応力解析は、3次元CADソフトウェアとともに広く普及した汎用構造解析ソフトウェア上に実用化され、今や自動車、産業機械をはじめとするあらゆる製造業において、製品設計や製造プロセスの効率化に欠かすことのできない技術として利用されている。

有限要素法による構造解析の一手法であり、広義のメッシュフリー法として位置付けられるボクセル解析法¹⁾は、そのメッシュ生成の容易性やロバスト性から、特に複雑な形状に対して有効な数値解析手法として、地盤や複合材料の微視構造、あるいはバイオエンジニアリング分野における骨、生体組織など、通常の有限要素法では取り扱いにくい対象にも広く適用されている (**Fig. 1.1**)。

ボクセル解析法には、主に以下のような利点がある。

- メッシュ生成が容易かつロバストであり、現物のCT撮像データからのモデリングなど、通常の有限要素法では要素分割が困難な対象にも適用できる。
- 解析対象の形状と要素サイズが決まれば一意な有限要素モデルが得られるため、要素分割における属人的なノウハウに依存せず、解析精度の管理が容易である。
- 直交格子であるため、様々なマッピング処理が容易である。
- 並列計算との相性が良く、高いスケーラビリティを発揮する。

特に近年の計算機環境における並列性能の目覚ましい向上を考えると、並列計算において高いスケーラビリティを発揮する点は極めて魅力的な特長である。実際にボクセ

ル解析法に、手近な計算機でも安価に超並列計算が可能な GPGPU (General Purpose Graphical Processing Unit) を用いることにより、高いパフォーマンスを得られることが確認されている²⁾。

以上のような特長から、設計の初期段階においてメッシュ生成の手間をかけずに多数の設計案を比較検討できるため、複雑な形状を有する自動車部品など、一般の機械部品を対象とした CAE システムの中核としてボクセル解析法が実用化されている例も見られる。

有限要素法による構造解析の設計現場への普及が進み、適用対象が広範になるにつれ、基本的な線形弾性体の応力解析や固有振動解析から、材料非線形問題、大変形問題、熱問題など、汎用構造解析ソフトウェアに求められる解析機能も年々高度化してきた。中でも接触解析は、本質的には非線形問題であり比較的難易度の高い解析であるにも関わらず、近年では解析専任者でなくとも手軽に利用できるエントリーレベルの構造解析ソフトウェアにも搭載されるようになってきた。その背景には、多数の部品からなるアセンブリモデル全体を CAD ソフトウェア内で設計し、これを用いてそのままシミュレーションまで実施する環境が整ってきたことにより、部品間の接触の考慮が不可欠になってきたという要因があるものと考えられる。

以上のような接触解析へのニーズを考えると、ボクセル解析法を一般の機械部品の解析により汎用的に利用できるようにするためには、適切に接触問題を取り扱えることが極めて重要である。しかし解析対象を多数のボクセル、すなわち同一形状、同一サイズの立方体、あるいは直方体で表現するボクセル解析法では、元の物体表面が曲面を有する場合や、あるいは平面であっても要素分割方向に対して傾いている場合などに、**Fig. 1.2** のように表面が階段状の形状で表されるため、接触面の滑りが適切に考慮できず、接触の取り扱いが困難であることが問題となっている (**Fig. 1.3**)。

接触の取り扱い以外にも、ボクセル解析法におけるこのような階段状の表面形状は、本来は発生しないような応力分布の乱れを引き起こすことが問題として知られている (**Fig. 1.4**)。応力のスムージングなど、ポスト処理である程度緩和することも可能であるが、スムージングの範囲や強度を形状に応じて経験的に決める必要があり、汎用的に有効な手段とは言えない。また異種材料の接合部の応力分布を評価したい場合にも、接合面が階段状

にモデル化されていると、同様に偽の応力の乱れが生じ、適切に評価することができない。

接触の取り扱いにおいても同様に、表面が階段状の形状で表現されることに起因する接触応力の乱れが問題となる。またそもそも接触面の法線方向が適切に評価できず、どの向きの変位が拘束されるのかが正しく決められないことも本質的に問題である。

これらの問題を克服し、ボクセル解析法を持つメッシュ生成の容易性・ロバスト性を損なうことなく、実用的なレベルで接触問題を適切に取り扱えるようになれば、一般の機械設計の初期段階におけるアセンブリ解析におけるボクセル型構造解析の活用が拡がり、利用者がメッシュ生成に煩わされることなく、設計検討においてより CAE を有効に活用できる環境の構築に寄与するものと期待される。

1.2 既往の研究

1.2.1 メッシュフリー法と有限被覆法

ボクセル解析法では、解析対象を細かな立方体あるいは直方体（ボクセル）に分割し、これを通常の有限要素法における「要素」として取り扱う。ボクセル解析法は広義のメッシュフリー法の一つとして位置付けられるが、これは解析対象の物体形状をボクセルに分割する処理が容易かつ確実であり、解析者が要素分割の労を要しない、場合によってはメッシュそのものを解析者から隠蔽することが可能である、という特性を有するためである。

メッシュフリー法³⁾⁴⁾は、通常の有限要素法で用いられる「要素」を使わずに解析を行う一連の手法の総称である。特に Belytschko *et al.*⁵⁾ がエレメントフリーガラキン法を提唱したのを皮切りに、要素に縛られないタイプの様々な解析手法が提案されている。

メッシュフリー法は大別して2つの手法に分類される。まず1つ目の手法は、点で未知変数を定義した上で、点と点間のコネクティビティを動的に作成しながら解析する手法である。代表的なものとしては、エレメントフリーガラキン法 (EFGM)、Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)⁶⁾、あるいは SPH 法⁷⁾、MPS 法⁸⁾ といった粒子法などがこのタイプに分類される。これらの手法は、自由度間のコネクティビティが動的であることから、通常の有限要素法では扱いにくい破壊や離散が生じるような問題において

有効である反面、通常の有限要素法では容易に満たされる条件を満たすことが困難であったり、あるいは計算コストが高くなるといった難点がある。一方2つ目の手法として、コネクティビティは不変であるが、節点における自由度を増すことにより要素分割の自由度を高めるタイプの手法がある。マニフォールド法⁹⁾、PU-FEM¹⁰⁾、Generalized FEM (G-FEM)¹¹⁾¹²⁾、eXtended FEM (X-FEM)¹³⁾¹⁴⁾などがこのタイプに分類される。これらの手法では「要素」が陽に存在し、通常の有限要素法を一般化した概念と見做されることから、一般化有限要素法とも総称され、要素分割や近似関数の定義に自由度を有しつつ、これまで有限要素法で培われた多くの知見が適用できるという利点がある。

ボクセル解析法は後者のタイプのメッシュフリー法と捉えることができる。その基本的な解析手法は通常の有限要素法そのものであり、当然ながら有限要素法において蓄積された多くの理論的・技術的な知見をそのまま援用することができるため、手法としての信頼性も高い。しかし前節で述べたように、ボクセル解析法には、形状が階段状に表現されることによって生ずる応力分布の乱れが問題点として存在する。さらにボクセル解析法では、形状を精度よく近似するために非常に細かな要素分割を行う必要があり、結果的に自由度が膨大になるという難点もある。これらの問題点を克服する手法として、有限被覆法 (Finite Cover Method: FCM) が提唱されている¹⁵⁾¹⁶⁾。FCMは、ボクセル解析法にマニフォールド法⁹⁾の近似概念を導入することにより、ボクセル解析法の持つメリットを保持しつつ、より正確な形状表現を用いて解析することを可能にした手法であり、一般的な機械部品¹⁾をはじめ、不連続性を含む問題¹⁷⁾や非均質体¹⁸⁾などの解析に適用されている。FCMの高い形状表現能力を用いれば、ボクセル型の直交格子系フレームワークの中で接触問題を適切に取り扱えるようになることが期待できる。

一方、複雑な形状や時間的に変化する形状に対して効率的にロバストな解析を行う目的で、物体領域の境界が要素を横切ることを許容する cut element を用いるタイプの仮想領域法的アプローチ (Fictitious domain approach) の研究も盛んに行われている^{19)~22)}。また物体形状とは独立な四辺形要素を背景格子として用いた Finite Cell Method²³⁾²⁴⁾も提案されている。これらの手法はそれぞれに開発背景は異なるものの、FCMと同じく「要素の中に物体領域の境界が存在する」という特徴を持ち、要素分割や要素積分、境界条件

処理などにおいて、共通の問題点や解決方法を有している。

これまでにボクセル型構造解析において接触問題を取り扱った既往研究はごくわずかである。その1つとして、ボクセル解析法において、接触時に限り接触面の法線方向にのみ剛性を持つようなボクセル要素を用いる手法が提案されている²⁵⁾が、解析精度の要素サイズへの依存性が高い可能性があり、あくまでも簡易的な手法と考えられる。またFCMにおいてペナルティ法を用いて接触解析を行った研究²⁶⁾も報告されているが、粗いモデルでの基礎的な検討に留まっており、ペナルティ係数と精度の関係など詳細な検討は行われていない。

1.2.2 接触のモデル化

通常の有限要素法において、有限要素モデル上にどのように接触をモデル化するかについて、従来多くの研究が行われてきた²⁷⁾²⁸⁾。これらは以下のように大別することができる。

Node-to-Node モデル

接触する両側の物体の節点間に接触拘束条件を課す手法 (**Fig. 1.5**) であり、単純で計算も高速に行うことができる。しかし接触面において両側の物体の節点位置を一致させる必要があるため、単純な形状でない限り適切に要素分割を行うことは難しい。また接触面の接線方向への相対変位は許容されないため、微小変形問題においてのみ適用可能な手法である。

Node-to-Surface モデル

接触する物体の一方の側の節点に対して、相手側の要素表面上の最近傍点を対応させ、その間に接触拘束条件を課す手法 (**Fig. 1.6**) であり、接触のモデル化として最も一般的に使われている手法である。対応する最近傍点を探索する必要があるが、両側の物体はそれぞれ独立して要素分割することができるので、比較的容易に接触拘束条件を扱うことができる。2次元問題の場合は Node-to-Segment モデルとも呼ばれる。

Surface-to-Surface モデル

接触する両側の物体の面と面同士に接触拘束条件を課す手法²⁹⁾ (**Fig. 1.7**) であり, 2次元問題の場合は Segment-to-Segment モデルとも呼ばれる. 接触拘束条件の積分は一方の側の要素表面にて行うが, 各積分点に対応する相手側の要素が異なることを考慮する必要があるため, 計算は煩雑になる. Surface-to-Surface モデルの発展形として, 精度と安定性に優れたモルタル法³⁰⁾ も提案されている.

1.2.3 接触拘束条件の定式化

FCM をはじめ, 要素分割が物体形状に依存せず, 要素の内部に物体領域の境界が存在するような手法においては, 境界条件をどのように与えるかが問題となる. ノイマン条件については, 実際の物体表面に沿って積分することにより自然に与えることが可能であるが, ディリクレ条件については, 通常有限要素法の場合のように直接的に自由度を制御する方法を用いることができない. 接触拘束条件についてもディリクレ条件と同様, 自由度を直接制御するタイプのモデル化, すなわち Node-to-Node モデルや Node-to-Surface モデルに分類されるものは用いることはできない. 従って, Surface-to-Surface タイプのモデル化に基づき, 境界積分にて接触拘束条件を間接的に節点の自由度に課すことが必要となる (**Fig. 1.8**). この際, 課される接触拘束条件の定式化としては, 通常有限要素法における Surface-to-Surface タイプのモデル化でも広く用いられている手法として, ラグランジュ未定乗数法に基づく手法とペナルティ法が候補として挙げられる.

ラグランジュ未定乗数法は精度の高い手法として, ディリクレ条件の定式化などに適用されているが, inf-sup 条件を満たすように変位と未定乗数を離散化する必要があるという困難な問題を有している³¹⁾³²⁾. これに対して Bernardi *et al.*³³⁾ は領域分割法における 2 領域の連続条件を満たす方法として, モルタル要素を用いて inf-sup 条件を満足する手法を提案している. あるいは Barbosa and Hughes³⁴⁾ および Baiocchi *et al.*³⁵⁾ は, それぞれディリクレ問題および領域分割法において, 安定化項を加えることにより, ラグランジュ未定乗数法の近似関数の選択における制約を緩和している. しかしいずれの手法に

においても、変位に加えて未定乗数の離散化による未知数が現れるため、解くべき未知数が増加するという欠点がある。

これに対してペナルティ法は、変位に関する未知数についてのみ解けば良く、導入も容易である。しかし課している拘束条件をわずかに満たさないことを本質的に許容する手法であり、元の支配方程式に対する整合性が失われるという欠点がある。また拘束条件に対する精度を高めるためにペナルティ係数を大きくすると、得られる剛性マトリクスの条件数が大きくなって性質が悪化するという問題を有しており、精度と安定性のバランスを取りながら適切にペナルティ係数の大きさを定めるのは困難である³⁶⁾。さらに FCM では接触拘束条件を課す積分点の配置の制御が困難であり、積分点が集中した場合などに過拘束によって接触応力分布の乱れを引き起こす恐れがある³¹⁾³⁷⁾。

また、ラグランジュ未定乗数法におけるラグランジュ汎関数にペナルティ項を加えることにより定式化される拡張ラグランジュ法³⁸⁾³⁹⁾も広く用いられる手法である。拡張ラグランジュ法では、未定乗数とペナルティ係数を反復的に求める Uzawa アルゴリズムに基づく解法が一般的に用いられるが、適切なペナルティ係数が自明ではないため、反復計算におけるペナルティ係数の調整が難しい。

本研究では、これらの問題点に対処する目的で、FCM における接触拘束条件の定式化として Nitsche の方法を用いる手法を提案・検討する。Nitsche⁴⁰⁾によってディリクレ条件を弱表現により満足する手法として提案されたこの方法は、ラグランジュ未定乗数法のように未定乗数を独立変数として扱う必要がないため、inf-sup 条件を満足する必要がないという利点がある。またペナルティ法におけるペナルティ項と同形の安定化項の係数として安定化パラメータを要するが、ペナルティ法とは異なり、係数の大きさに関わらず元の支配方程式に対する整合性が保証されているため、安定化のための最低限の大きさの値を与えれば良い。すなわち Nitsche の方法は、ラグランジュ未定乗数法とペナルティ法の利点を併せ持つ、中間的な手法と位置付けることができる。Stenberg³²⁾は Nitsche の方法と Barbosa and Hughes³⁴⁾によるラグランジュ未定乗数法の安定化手法との密接な関係を確認している。

これらの特性から、Nitsche の方法は様々な境界問題に適用されている。Becker *et*

*al.*⁴¹⁾ は領域分割法において、要素分割が非適合な 2 領域を接続する問題に Nitsche の方法を適用し、手法の整合性、安定性および収束性について論じている。Hansbo and Hansbo⁴²⁾ は要素内に 2 領域の境界が存在するような問題に対し、その接合に Nitsche の方法を適用している。また Burman and Hansbo²¹⁾ や Buruman *et al.*²²⁾ は、CutFEM において、要素内に存在するディリクレ条件や領域境界に対して Nitsche の方法を適用し、有効性を確認している。山田ら⁴³⁾ および綿貫ら⁴⁴⁾ は直交格子を用いた重合メッシュ法における領域間の接続に、Nitsche タイプの安定化を図ったラグランジュ未定乗数を用いている。さらに車谷・寺田^{45)~47)} は通常の有限要素法や FCM において、領域分割の境界や異種材料界面の接合に Nitsche の方法を用い、ペナルティ法やラグランジュ未定乗数法に対する優位性を確認している。

通常の有限要素法における接触問題に Nitsche の方法を適用した研究もいくつか報告されている。Wriggers and Zavarise⁴⁸⁾ は基本的な接触問題に Nitsche の方法を適用し、ペナルティ法に対する優位性を確認している。また Heintz and Hansbo⁴⁹⁾ は Nitsche タイプの安定化を図ったラグランジュ未定乗数法を接触問題に適用している。さらに Chouly and Hild⁵⁰⁾ は Nitsche の方法を用いた接触問題の定式化を行い、収束性を証明している。また近年では Fictitious domain method における接触問題に Nitsche の方法を適用した研究も報告されている⁵¹⁾。

1.3 本研究の目的

1.3.1 本研究の目的

本研究では、アセンブリモデルの構造解析におけるボクセル解析法による接触解析のニーズを踏まえて、ボクセル解析法の発展的手法として位置付けられる有限被覆法を用いることにより、ボクセル型構造解析のメリットを生かしつつ接触問題が取り扱える実用的な解析手法の構築を行う。

研究対象は線形弾性体における微小変形範囲の摩擦なし接触問題とした。本研究では主に、設計の上流工程における初期検討段階での解析を、メッシュ生成に煩わされることなく効率よく実施できる手法の構築を目指している。例えば、シャフトとの接触を考慮する

必要のあるトランスミッションケースや、合わせ面における接触を考慮する必要のあるシリンダヘッドカバーやコンプレッサーなどの初期検討解析が、想定される適用対象である。このような用途においては、静的な解析であれば本研究の適用範囲で多くの実用上の問題をカバーし得るものと考えられる。一方、ボクセル型構造解析が不向きな薄板構造や、フィレットがついていない物体の角部（点や辺）が接触するような問題は、本研究では取り扱わない。

以上の本研究の目的を達成する上で、接触拘束条件の定式化として、高精度かつ FCM に適した手法として、Nitsche の方法による定式化を導入し、FCM に適用するためのアルゴリズムの構築を行う。

また構築したアルゴリズムを 2 次元および 3 次元の基本的な接触問題に適用し、提案手法の有効性を確認するとともに、接触拘束条件の定式化としてペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合の精度面での比較・検討を行う。また数値的不安定の要因となる、要素内で物体の占める割合の微小な要素への対処法についても検討する。

特に 3 次元問題では、実用性の観点から連立一次方程式の解法に EBE-PCG 法を用い、ペナルティ法におけるペナルティ係数の増大による剛性マトリクスの性質の悪化が、Nitsche の方法では緩和され、計算コスト面で有利に働くことを検証する。

さらに本研究の提案手法が、実用的に利用可能な手法であるかどうかの検討を行うとともに、特に実用上重要となる計算時間を短縮するための工夫と、実用的な問題への適用例を示す。

またアルゴリズムの構築においては、汎用ソフトウェアに機能として搭載し得る実用性を兼ね備えることを念頭に置いた。特に並列計算との親和性を重視し、今後ますます進化が期待されるメニーコアタイプのプロセッサや分散メモリ型の並列環境においても、高いスケーラビリティを発揮し得るよう留意した。

1.3.2 目標とする解析精度の指針

汎用の有限要素法による構造解析ソフトウェアでは、接触拘束条件の定式化として、ペナルティ法や拡張ラグランジュ法が用いられることが多い。しかし前節で示した通り、拡

張ラグランジュ法は、反復計算におけるペナルティ係数を適切に調整することが難しく、アルゴリズムもやや煩雑である。一方ペナルティ法は、アルゴリズムが簡単である反面、精度を確保するために大きなペナルティ係数を必要とする。これらに対して Nitsche の方法は、アルゴリズムの簡易性と精度面における優位性の両立が期待できる。本研究では、Nitsche の方法と、導入の容易性において優れたペナルティ法とを、精度および計算効率の面で詳しく比較検討する。

本研究で目標とする解析精度の目安を示すために、**Fig. 1.9** に示す両端固定梁の簡易例題を取り上げ、ディリクレ条件の定式化としてペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合の精度比較を行った（定式化の詳細は次章に示す）。解析は平面ひずみ問題として実施し、梁の上面に単位長さあたり 1,000 の等分布荷重を作用させた。ヤング率は 1.0×10^8 、ポアソン比は 0.3 である。要素は四辺形双 1 次要素（要素サイズ 1.0）とした。**Fig. 1.10** に、ディリクレ条件の定式化としてペナルティ法を用いた場合と Nitsche の方法を用いた場合の解析精度の比較を示す。横軸はペナルティ係数、縦軸は固定端上の自由度を直接拘束して解析した結果を基準とする中立軸上の最大たわみ量の誤差を示している。ペナルティ法では、ペナルティ係数が小さくなるほど大きな誤差を生じており、誤差を 1% 未満に抑えるためには、ペナルティ係数を 3.0×10^9 程度以上にすることが必要である。一方 Nitsche の方法では、小さなペナルティ係数でも誤差がある程度小さく抑えられている。

例えば全体サイズが 400~500mm のトランスミッションケースをボクセル解析法で解析する場合に、現実的な解析規模として全体の要素数を 600~700 万要素程度に抑えようとすると、要素サイズは約 1mm となる。薄い部分で肉厚が 3mm 程度であると考えると、本簡易例題のように肉厚に対して 3 要素程度の要素分割が想定される。

さらに、本簡易例題における離散化誤差を評価するために、一定のペナルティの下で要素サイズを変化させて解析を行った。次章で述べる通り、要素サイズを小さくしたとき、同等のペナルティを課すには、要素サイズに反比例するようにペナルティ係数を大きくする必要がある。すなわち、ペナルティ係数と要素サイズの積を相対的なペナルティ係数とし、これを一定にすることで、同等のペナルティを課することができる。ここでは相対的なペナルティ係数を 5.0×10^8 と 1.0×10^9 に固定して解析を行った。ディリクレ条件の定

式化は、ペナルティ法、Nitscheの方法、および固定端上の自由度の直接拘束（以下これを自由度拘束と呼ぶ）の3種類である。Fig. 1.11に、要素サイズに対する中立軸上の最大たわみ量の誤差 e_d を示す。ここで e_d は以下のように定義した。

$$e_d = \frac{\delta_{ref} - \delta}{\delta_{ref}} \quad (1.1)$$

ただし δ は解析結果の最大たわみ量、 δ_{ref} はその参照解である。参照解には、非常に細かい要素分割（要素サイズ 0.02）で、自由度拘束により解析した結果の最大たわみ量を用いた。Fig. 1.11より、Nitscheの方法では、要素サイズを変化させても自由度拘束による解析結果とほぼ誤差が一致しており、誤差のほとんどは離散化誤差によるものであることがわかる。一方ペナルティ法は、全体に誤差が小さく一見精度が高いように見えるが、実際はここで使用したペナルティ係数では小さ過ぎて拘束が十分に効いておらず、そのために変位が大きくなって結果的に参照解に近くなっているに過ぎない。要素分割を細かくして行くと、参照解を通り越して e_d が負になっているところも見られる。つまりこの程度のペナルティ係数では、離散化誤差に加えてペナルティ法による拘束の精度も解に大きな影響を与え得ると言える。従って精度管理の観点から考えると、ペナルティ法でより大きなペナルティ係数を用いるか、あるいはNitscheの方法を用いて、できるだけ要素サイズによる離散化誤差のみで解を評価できることが望ましい。

接触拘束条件は結果的に接触条件を満足した状態での接触面における法線方向の変位拘束として表されるので、本簡易例題で示したように、ディリクレ条件に対してどの程度の精度が得られるかが、それぞれの手法を接触拘束条件に適用した場合の精度に直結している。一般的な汎用構造解析ソフトウェアで、接触拘束条件にペナルティ法が用いられる場合、数値的安定性の観点からペナルティ係数としてはヤング率の10倍程度の値がデフォルト値として用いられることが多い。しかしこれは本簡易例題の結果からもわかる通り、本研究が対象としているような状況下では精度的に必ずしも望ましいレベルとは言い難く、特に多数の部品からなるアセンブリモデルでは、複数の接触の誤差が蓄積して、部分的に大きな誤差を生ずる恐れもある。本研究では、ここで示した簡易例題に代表されるよ

うな状況において、離散化誤差を除いた変位の誤差が 1% 未満に収まるレベルのペナルティ係数を用いて、ペナルティ法と Nitsche の方法を比較検討する。

1.4 本論文の構成

本論文は全 6 章で構成されている。以下に、本章に続く各章の概要を示す。

第 2 章では、本研究で提案する FCM における接触問題の定式化を示す。まず FCM による基本的な離散化手法を示し、続いてペナルティ法および Nitsche の方法を用いた接触拘束条件の定式化について示す。また本研究で構築した接触反復アルゴリズムを示す。またディリクレ条件についても、ペナルティ法および Nitsche の方法を用いた定式化を示す。

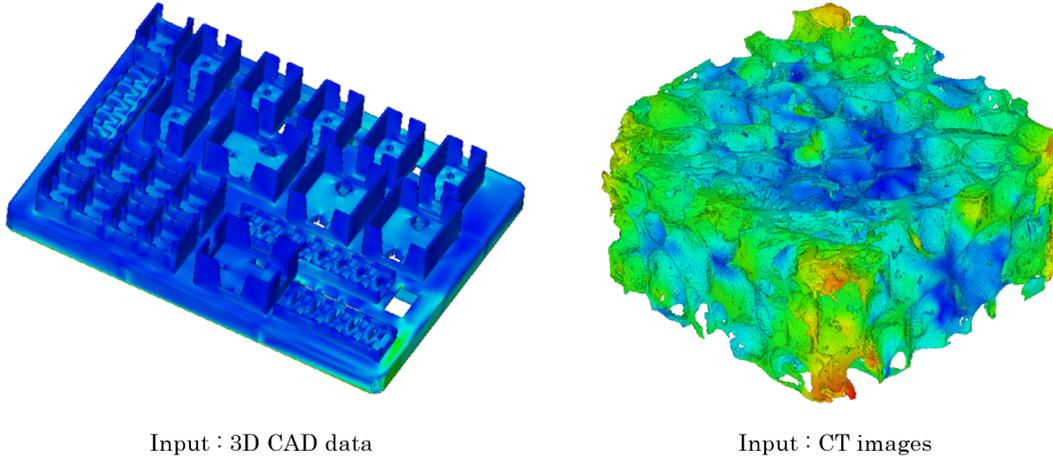
第 3 章では、第 2 章で示した FCM における接触問題の定式化に基づく具体的な 2 次元問題の接触解析アルゴリズムを示す。また構築したアルゴリズムの有効性の確認、およびペナルティ法と Nitsche の方法との性能比較を目的として、基本的な 2 次元接触問題について数値解析を行った結果を示す。特に Nitsche の方法においては、接触応力の評価精度が接触判定において重要である。これについて、要素内の物体の充填率を用いた精度改善手法を提案し、その有効性について示す。

第 4 章では、2 次元問題で有効性を確認した接触解析アルゴリズムを 3 次元問題に拡張する。3 次元問題では自由度が大きくなるため、実用上の観点から連立一次方程式の解法として EBE-PCG 法を用いた。これについて、FCM に EBE-PCG 法を効率よく適用するための積分手法の工夫について述べる。また要素内の物体の充填率が微小な要素による数値不安定性への対策として、第 3 章で提案した手法に加えて、ghost penalty の適用を提案し、その定式化を示す。続いて基本的な 3 次元接触問題について数値解析を行い、提案するアルゴリズムの有効性を示すとともに、ペナルティ法と Nitsche の方法の精度および計算コストの比較を示す。

第 5 章では、提案手法を実用化するにあたり、実用上重要な計算時間の短縮のために、2 段階の要素サイズを用いた高速化アルゴリズムを提案し、数値解析によりその効果を示す。また実用的な接触問題の数値解析を行い、本研究で構築したアルゴリズムの実用上の

有効性を示す。

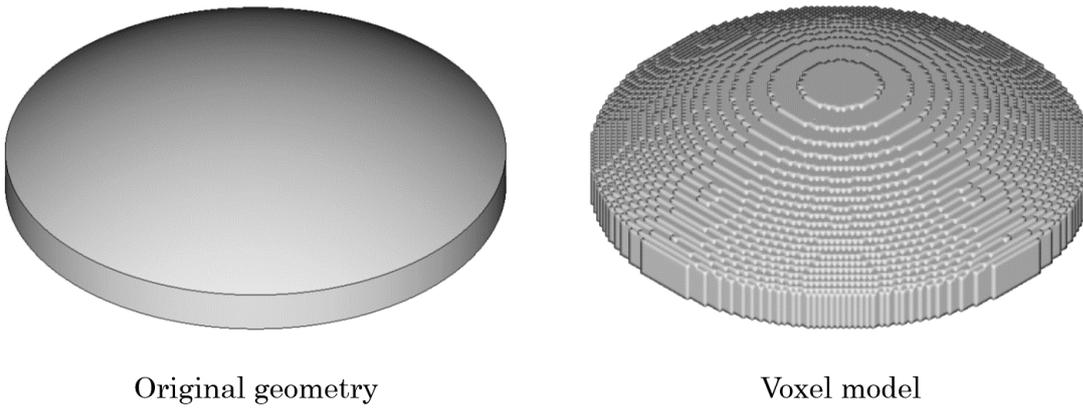
第6章では、本研究の結論をまとめて示すとともに、今後の展望や課題について述べる。



Input : 3D CAD data

Input : CT images

Fig. 1.1 Voxel analysis



Original geometry

Voxel model

Fig. 1.2 Voxel model

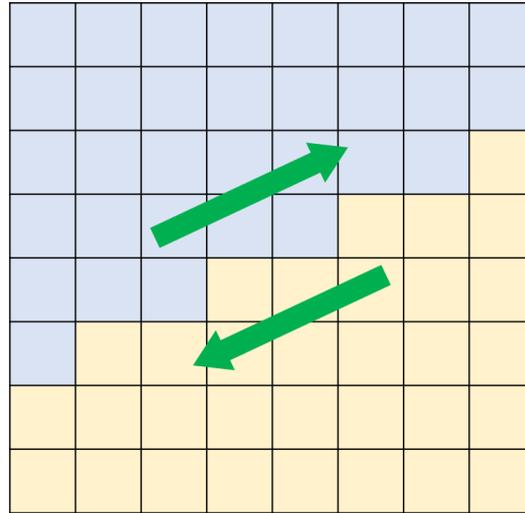


Fig. 1.3 Contact surface of voxel model

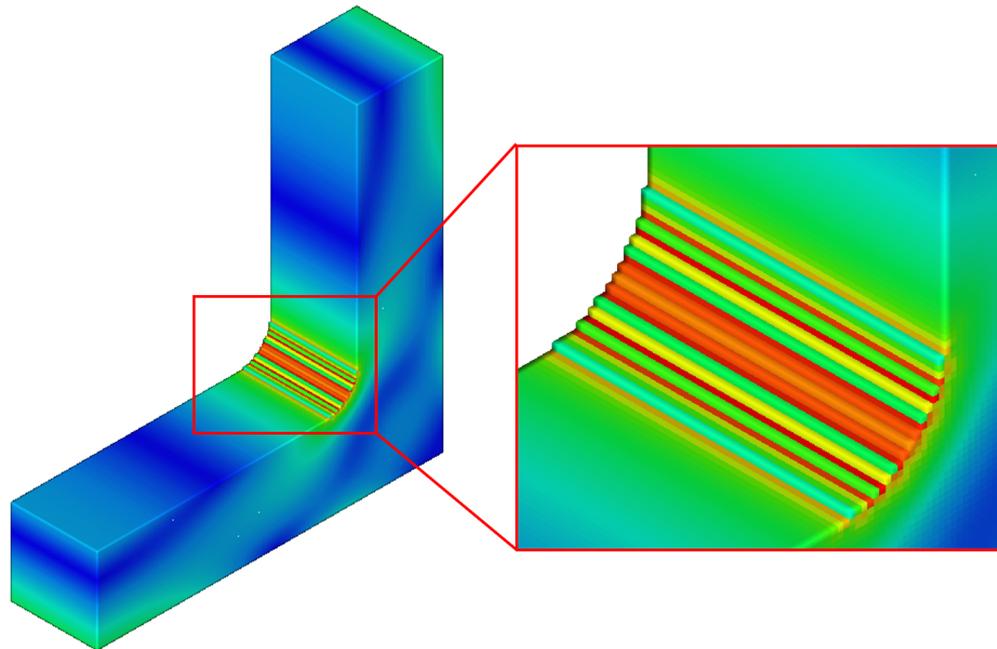


Fig. 1.4 Stress disorder due to stepwise shaped elements

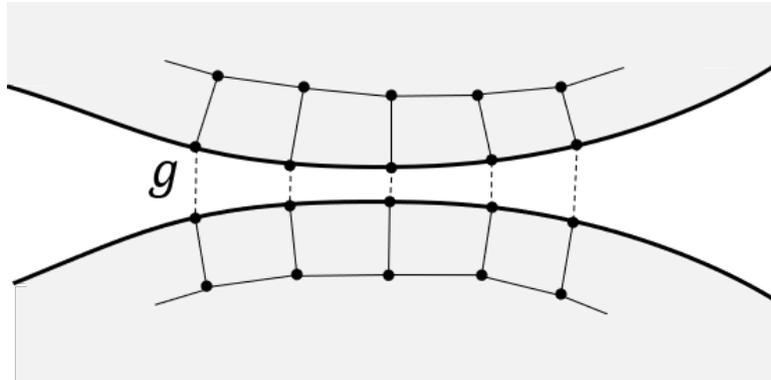


Fig. 1.5 Node-to-Node model

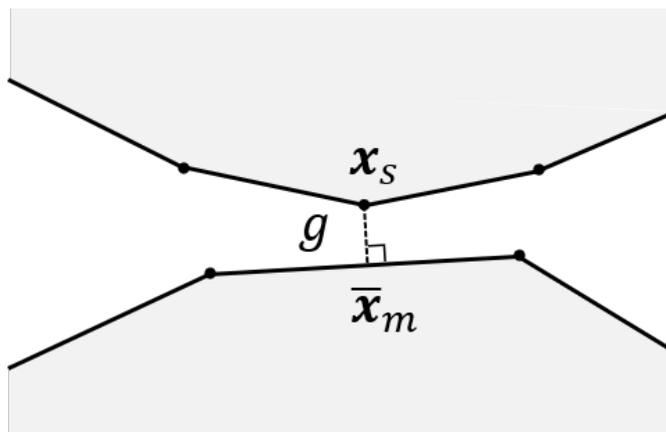


Fig. 1.6 Node-to-Surface model

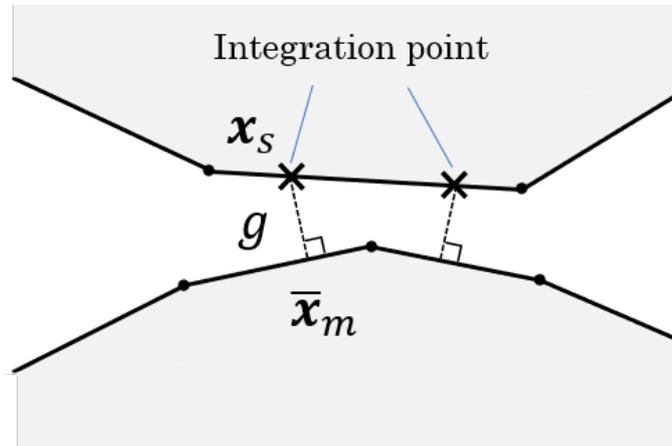


Fig. 1.7 Surface-to-Surface model

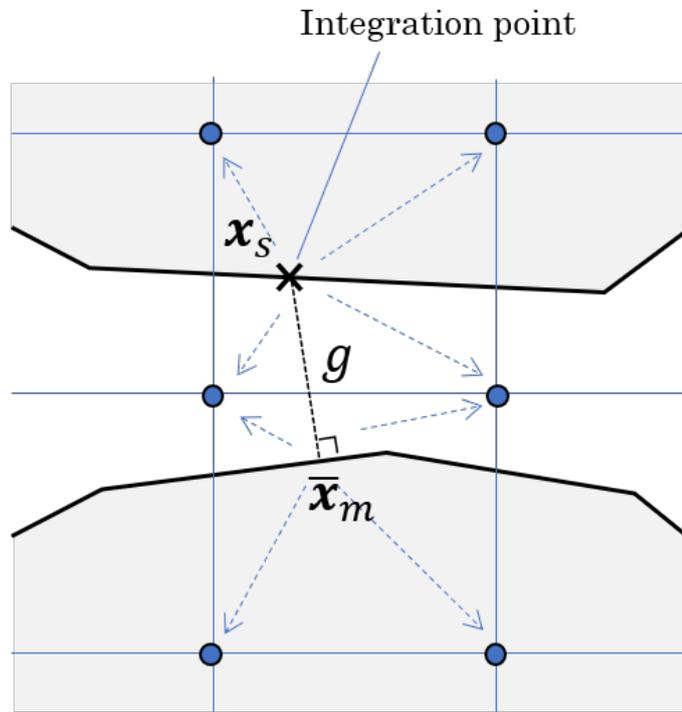


Fig. 1.8 Surface-to-Surface type model in FCM

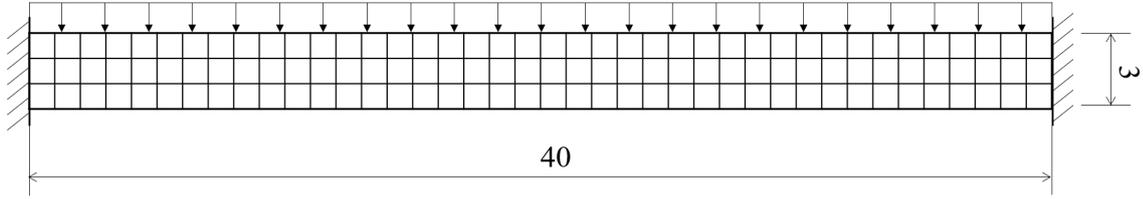


Fig. 1.9 Beam fixed at both ends

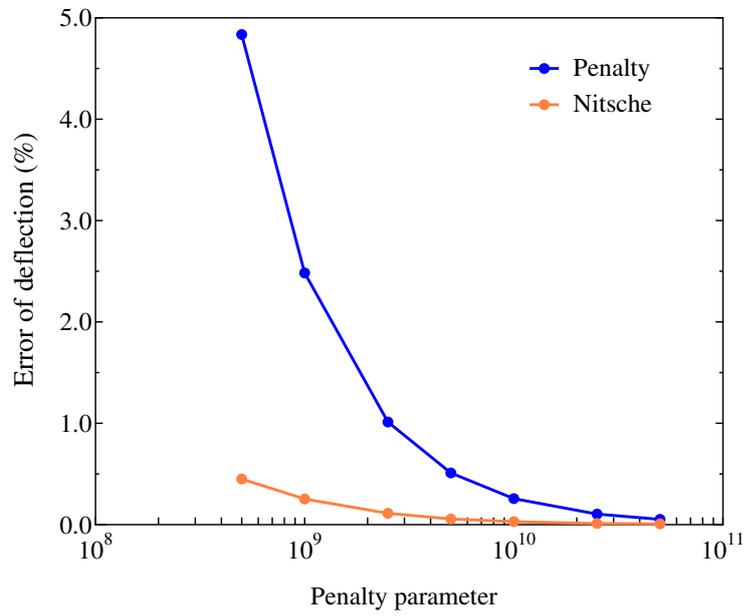
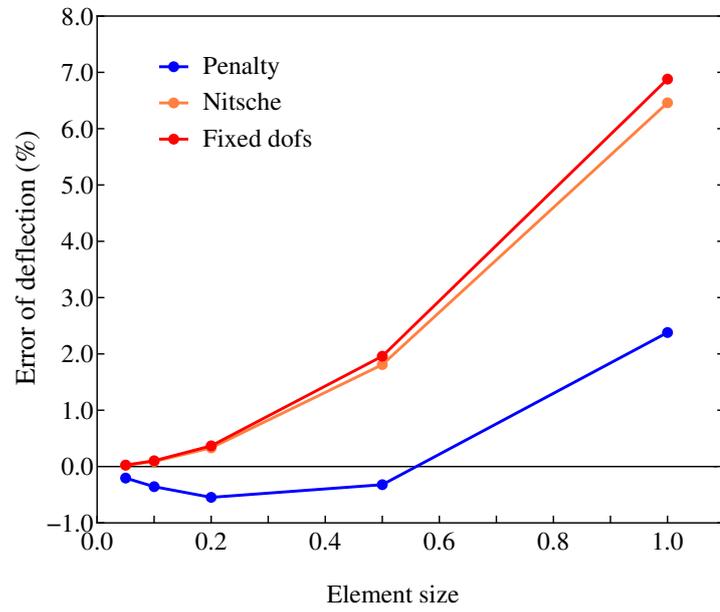
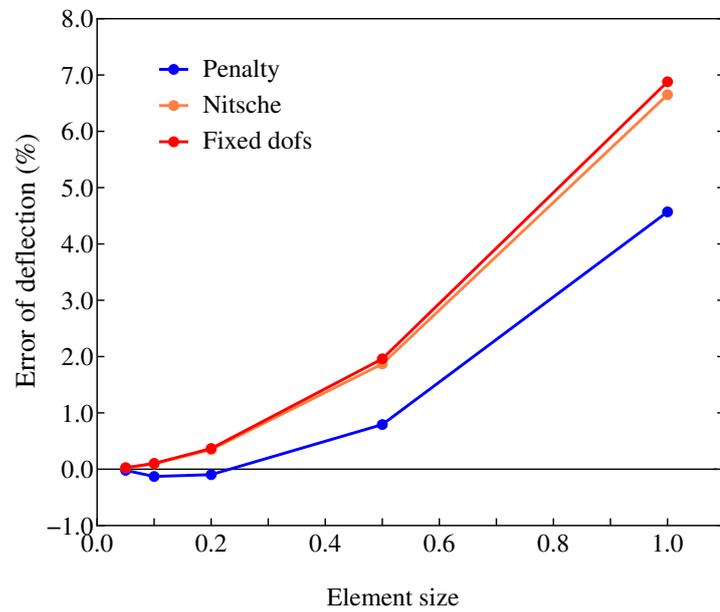


Fig. 1.10 Error of deflection (against penalty parameter)

(a) Relative penalty parameter : 5.0×10^8 (b) Relative penalty parameter : 1.0×10^9 **Fig. 1.11** Error of deflection (against element size)

第2章 有限被覆法による接触問題の定式化

2.1 はじめに

本研究では、ボクセル型構造解析の枠組みにおいて実用的な接触解析の手法を構築するために、ボクセル解析法の利点を生かしつつ形状の表現能力を向上させることができる有限被覆法 (Finite Cover Method: FCM)¹⁵⁾¹⁶⁾を採用する。FCMは、ボクセル解析法にマニフォールド法⁹⁾の近似概念を導入することにより、メッシュ生成の容易性やロバスト性というボクセル解析法のメリットを保持しつつ、より正確な形状表現を用いて解析することを可能にした手法である。FCMでは、通常の有限要素法で用いられる形状関数をはじめ、一定の条件を満たす様々な近似関数を用いることができる。その意味でFCMは一般化有限要素法の一つとして位置付けられ、「被覆」と呼ばれる部分領域ごとに近似関数の次数を変えて精度をコントロールするFCM-PU¹⁵⁾¹⁶⁾や、被覆ごとの最小二乗近似により、異なる大きさの被覆を配置することができるようにしたFCM-CLSA⁵²⁾などが提案されている。このFCMの形状表現能力を生かすことにより、ボクセル型構造解析における接触問題の取り扱いが可能となる。

一方、接触解析において接触拘束条件の定式化手法として何を用いるかの選択は、精度、安定性および計算効率の観点で重要である。FCMでは、自由度を持つ節点^が、接触条件が課される物体表面から独立して配置されているため、節点値を直接制御するタイプの定式化を用いることはできない。導入の容易性から通常の有限要素法においても幅広く用いられているペナルティ法は、FCMにおける接触拘束条件の定式化手法としても有効である。しかしペナルティ法は精度面で問題があることが知られており、また精度を確保するためにペナルティ係数を大きくすると、剛性マトリクスの性質が悪化して数値的に不安定になる。さらにFCMでは接触拘束条件を課す積分点の配置の制御が困難であり、積

分点が集中した場合などに過拘束によって接触応力分布の乱れを引き起こす恐れがある³¹⁾³⁷⁾。

そこで本研究では、FCMにおける接触拘束条件の定式化として Nitsche の方法の適用を提案する。Nitsche の方法は、ディリクレ条件⁴⁰⁾³²⁾ や領域分割法における2領域の連続性条件⁴¹⁾などを、支配方程式との整合性を保持しつつ、弱表現で満足する手法であり、様々な境界条件や領域接合条件の定式化に発展的に応用されている⁵³⁾。Nitsche の方法においても、安定化のためにペナルティ法におけるペナルティ項と同形式の安定化項を付加するが、ペナルティ法のような大きなペナルティ係数を必要としないため、剛性マトリクスの性質の悪化や過拘束の問題が回避できる。既に Wriggers and Zavarise⁴⁸⁾ は通常の有限要素法において Nitsche の方法を接触問題に適用し、ペナルティ法に対する優位性を確認している。また FCM においては、領域境界や異種材料の界面の連続性に Nitsche の方法が適用され、その有効性が確認されている⁴⁵⁾⁴⁶⁾。

本章ではまず、本研究で必要とする範囲で FCM の基本的な定式化について述べる。続いてペナルティ法および Nitsche の方法を用いた接触拘束条件とその離散化について定式化を行う。また定式化に基づいて構築した、未知の接触範囲を反復的に求めるための接触反復アルゴリズムについて述べる。FCM では接触境界だけでなく、ディリクレ境界についても要素内を横切る形で存在することとなるため、通常の有限要素法のように節点の自由度を直接拘束することはできない。そこでディリクレ条件についても、ペナルティ法および Nitsche の方法を用いた定式化を示す。

2.2 有限被覆法 (FCM)

有限被覆法 (Finite Cover Method: FCM) は、ボクセル解析法にマニフォールド法の考え方を取り入れることにより、解析対象の部分領域への分割の容易性を保持しつつ、形状表現の精度を向上させることを可能とした解析手法であり、ボクセル型構造解析の発展的手法として位置づけられる。

ボクセル解析法では、解析対象を「ボクセル」と呼ばれる細かな立方体あるいは直方体で要素分割するが、物体形状を精度良く表現するためには、非常に細かなボクセルを用い

る必要があるという問題点を有する。一方、マニフォールド法は「近似関数が定義される数学的な部分領域」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域」を分離して解析を行う手法である。この考え方をボクセル解析法に導入し、ボクセルを数学的な部分領域として捉えて形状表現から切り離し、物理的な部分領域である物体形状は別途独立して与えることができるようにした解析手法が FCM である。

FCM では、まず物体領域全体を正方形あるいは長方形（3次元の場合は立方体あるいは直方体）の「数学被覆」で覆う。この時、各数学被覆の中心は、隣接する数学被覆の隅点と一致するように配置する。これはすなわち、物体領域を覆うような直交格子を考えて、格子の各交点を被覆中心とし、被覆中心周りの格子の集合で表される領域を1つの数学被覆とすることに相当する（**Fig. 2.1**）。またこの数学被覆と物体領域との共通領域を「物理被覆」と呼ぶ。なお、数学被覆の形状や配置には本質的にはもっと任意性があるが、ボクセル解析法の発展的手法としての位置付けと、後述する重み関数の定義の容易性を考慮すると、直交格子に基づいて数学被覆を配置するのが最も自然で簡単である。本研究でもこの方針で数学被覆を配置する。

FCM において、変位は、数学被覆ごとに定義される被覆関数と重み関数の積として以下のように近似される。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_M} \varphi_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

ここで φ_i および w_i はそれぞれ数学被覆 M_i における被覆関数および重み関数、 N_M は数学被覆の総数である。

被覆関数 φ_i は、 M_i における物理量（ここでは変位）を近似する関数として基本的に任意に設定できる。例えば2次元問題において1次多項式を用いた場合、被覆関数は

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \varphi_{ix}(x, y) \\ \varphi_{iy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{ix0} + \varphi_{ix1}(x - x_i) + \varphi_{ix2}(y - y_i) \\ \varphi_{iy0} + \varphi_{iy1}(x - x_i) + \varphi_{iy2}(y - y_i) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

のように表される。ただし (x_i, y_i) は被覆中心の座標である。 $\varphi_{ix0}, \varphi_{ix1} \dots$ が未知数

となるため、この場合は1被覆あたり6つの自由度を持つこととなる。

一方、重み関数は次式を満足する関数として定義される。

$$\begin{cases} w_i(\mathbf{x}) \geq 0 & (\mathbf{x} \in U_i) \\ w_i(\mathbf{x}) = 0 & (\mathbf{x} \notin U_i) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \in U_i} w_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.4)$$

ここで U_i は物理被覆を表す。式 (2.4) は PU (Partition of Unity) 条件と呼ばれ、物体被覆内の各点において、重み関数 w_i の和が1であることを要求するものである。PU条件を満たす重み関数を用いることにより、近似関数が被覆関数を厳密に再現することが可能となる。

なお上記のように被覆関数と重み関数の設定には任意性があるものの、被覆ごとに被覆関数 φ_i と重み関数 w_i の積がお互いに一次独立性を保つように定義されなければならないことに留意する必要がある。

本研究では計算効率の観点から最も単純かつ平易な近似関数が得られるように、被覆関数として0次の関数（すなわち定数）を、重み関数として被覆中心で1、被覆外縁で0となるような双1次（3次元の場合は3重1次）関数をそれぞれ採用した。具体的な定義を以下に示す。

(2次元の場合)

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
w_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & w_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
w_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & w_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\xi = \frac{1}{h_x}(x - x_i), \quad \eta = \frac{1}{h_y}(y - y_i) \tag{2.7}$$

(3次元の場合)

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{iz} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
w_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), & w_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
w_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), & w_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
w_5(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), & w_6(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
w_7(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), & w_8(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\xi = \frac{1}{h_x}(x - x_i), \quad \eta = \frac{1}{h_y}(y - y_i), \quad \zeta = \frac{1}{h_z}(z - z_i) \tag{2.10}$$

ただし φ_{ix} , φ_{iy} および φ_{iz} は未知数である定数, h_x , h_y および h_z は, それぞれ x 方向, y 方向および z 方向の被覆中心から被覆外縁までの長さ, (ξ, η) または (ξ, η, ζ) は被覆内局所座標である. なお本研究では各被覆は各軸方向に同じ長さ (すなわち $h = h_x = h_y = h_z$) としている. また物理被覆の外では $w_i = 0$ である.

数学被覆の定義に用いた直交格子において, 各格子には4つ (3次元の場合は8つ) の数学被覆が重なり合う. 各格子は通常の有限要素法における要素と同じように振る舞うので, 以後この格子を要素と呼ぶ. また重なり合っている被覆の中心をそれぞれ, その要素

の節点と呼ぶ (**Fig. 2.2**). 結果的に, 内部に物体境界を含まない要素は, 通常 of 有限要素法における一般的な四辺形双 1 次要素 (3 次元の場合は六面体 3 重 1 次要素) と同一となり, 式 (2.1) の変位は,

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (2.11)$$

(2 次元の場合)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & \cdots & w_{N_M} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{N_M y} \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

(3 次元の場合)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 & \cdots & w_{N_M} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{N_M z} \end{bmatrix}^T \quad (2.15)$$

と表される. ここで \mathbf{N} は形状関数, \mathbf{d} は未知数ベクトルである. 上記のように離散化された変位を弱定式化された支配方程式に代入し, 以降は通常 of 有限要素法と同じ手順で解を得る.

物体境界を含む要素についても同様に離散化されるが, 要素剛性マトリクスの計算時に物体境界の内側のみを積分することとなる. 具体的な数値積分についての詳細は, 第 3 章および第 4 章で述べる.

なお本研究では複数の物体間の接触問題を取り扱うので, 1 つの格子内に複数の物体が存在する場合は考えられる. このような場合は, 物体ごとにそれぞれ上記の定式化に従って被覆を定義する. 結果的に要素もそれぞれの物体に対して与えられる. すなわち同じ位

置にそれぞれの物体に対する要素（およびその節点）が重なって配置されることとなる（Fig. 2.3）.

2.3 接触拘束条件の定式化

接触面上に自由度を持つ節点が存在しない FCM においては、節点に直接接触条件を適用することができない。本研究では、このような状況でも接触条件が適切に適用可能な手法として、Surface-to-Surface タイプのモデル化を用いるとともに、接触拘束条件の定式化としてペナルティ法と Nitsche の方法を用いる。以下、それぞれの手法を用いた接触拘束条件の定式化を示す。

2.3.1 ペナルティ法

ペナルティ法による 2 物体 $\mathcal{B}^{[1]}$, $\mathcal{B}^{[2]}$ （以下、上付き添え字 $[j]$ は物体 $\mathcal{B}^{[j]}$ に関する量であることを表す）の摩擦なし接触問題は、以下の汎関数の最小化問題として定式化される²⁸⁾。

$$\Pi_c = \sum_{j=1}^2 \Pi^{[j]} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma_P \overline{g_N}^2 d\Gamma \quad (2.16)$$

ここで $\Pi^{[j]}$ は $\mathcal{B}^{[j]}$ のひずみエネルギーと外力によるポテンシャルエネルギーの和、 Γ_C は 2 物体が接触する可能性のある境界、 γ_P はペナルティ係数、 $\overline{g_N}$ は貫入量の負値を表す。本研究では微小変形を仮定しているので、2 物体のどの点とどの点が接触するかは、変形前形状において決定される。これらの変形前形状における位置ベクトルを $\mathbf{X}^{[j]}$ とすると、 $\overline{g_N}$ は、その変形前形状における初期値 $g_X = (\mathbf{X}^{[2]} - \mathbf{X}^{[1]}) \cdot \mathbf{n}^{[1]}$ と相対変位の和として次式のように表される。

$$\overline{g_N} = \begin{cases} g_N & (g_N \leq 0) \\ 0 & (g_N > 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

ただし

$$g_N = g_X + [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \quad (2.18)$$

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = (\mathbf{u}^{[2]} - \mathbf{u}^{[1]}) \cdot \mathbf{n}^{[1]} \quad (2.19)$$

であり、 $\mathbf{u}^{[j]}$ は点 $\mathbf{X}^{[j]}$ の変位、 $\mathbf{n}^{[j]}$ は $\mathcal{B}^{[j]}$ の外向き法線ベクトルである。すなわち、 $g_N \leq 0$ の場合は 2 物体が接触している状態を、それ以外の場合は非接触の状態を表している。

式 (2.16) の右辺第 2 項はペナルティ項と呼ばれ、 γ_P に十分大きな値をとれば、 Γ_C において $\overline{g_N}$ の絶対値が十分小さくなるように（すなわち貫入量が十分小さくなって、接触条件 $g_N \geq 0$ を近似的に満足するように）作用する。

式 (2.16) の変分を取ると、

$$\delta\Pi_c = \sum_{j=1}^2 \delta\Pi^{[j]} + \int_{\Gamma_C} \gamma_P \overline{g_N} \delta\overline{g_N} d\Gamma \quad (2.20)$$

となる。これに式 (2.11) を代入すると、 $g_N \leq 0$ の場合に対する式 (2.20) の右辺第 2 項の離散化式は以下のようになる。

$$\int_{\Gamma_C} \gamma_P \overline{g_N} \delta\overline{g_N} d\Gamma = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{d}^{[1]} & \delta\mathbf{d}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^P & -\mathbf{K}_{12}^P \\ -\mathbf{K}_{21}^P & \mathbf{K}_{22}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{[1]} \\ \mathbf{d}^{[2]} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{d}^{[1]} & \delta\mathbf{d}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_1^P \\ \mathbf{f}_2^P \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

ただし

$$\mathbf{K}_{ij}^P = \int_{\Gamma_C} \gamma_P \mathbf{N}^{[i]T} \mathbf{n}^{[1]} \mathbf{n}^{[1]T} \mathbf{N}^{[j]} d\Gamma \quad (2.22)$$

$$\mathbf{f}_j^P = \int_{\Gamma_C} \gamma_P \mathbf{N}^{[j]T} \mathbf{n}^{[1]} g_X d\Gamma \quad (2.23)$$

である。

$\overline{g_N}$ の非線形性により，離散化された支配方程式を解くには反復計算が必要となる．具体的には反復ステップ k における離散化方程式

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}_{(k)})\mathbf{d}_{(k+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{d}_{(k)}) \quad (2.24)$$

を解いて得られる $\mathbf{d}_{(k+1)}$ を用いて積分点ごとに式 (2.17) の評価を行い，次のステップの $\mathbf{K}(\mathbf{d}_{(k+1)})$ および $\mathbf{f}(\mathbf{d}_{(k+1)})$ を計算する．これを収束するまで反復する．

また次元解析により，ペナルティ係数 γ_P は，ヤング率 E ，要素サイズ h (**Fig. 2.2** 参照) および無次元化ペナルティ係数 β_P を用いて

$$\gamma_P = \beta_P \frac{E}{h} \quad (2.25)$$

と表される． β_P が同程度であれば，ヤング率や要素サイズが異なる問題でも同程度のペナルティが作用していることになる．

2.3.2 Nitsche の方法

Fig. 2.4 に示す 2 つの線形弾性体 $\mathcal{B}^{[1]}$ ， $\mathcal{B}^{[2]}$ の支配方程式は，以下のように表される．

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[j]}) &= \mathbf{b}^{[j]} & \text{in } \Omega^{[j]} \\ \mathbf{u}^{[j]} &= \mathbf{u}_D^{[j]} & \text{on } \Gamma_D^{[j]} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[j]})\mathbf{n}^{[j]} &= \mathbf{t}^{[j]} & \text{on } \Gamma_N^{[j]} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで $\Omega^{[j]}$ は物体 $\mathcal{B}^{[j]}$ の占める領域， $\Gamma_D^{[j]}$ は物体 $\mathcal{B}^{[j]}$ 上で変位が規定される境界， $\Gamma_N^{[j]}$ は物体 $\mathcal{B}^{[j]}$ 上で表面力が作用する境界をそれぞれ表す．また $\mathbf{b}^{[j]}$ および $\mathbf{t}^{[j]}$ はそれぞれ作用する物体力および表面力， $\mathbf{u}_D^{[j]}$ は規定された変位である．また $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり，微小変形を仮定すると以下のように表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[j]}) &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{[j]}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{[j]}) &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^{[j]} + \nabla\mathbf{u}^{[j]T})\end{aligned}\quad (2.27)$$

ただし \mathbf{A} は弾性テンソル, $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソルである.

これら 2 物体の摩擦なし接触条件は, 2 物体が接触する可能性のある境界 Γ_C 上で次式が成り立つものとして定式化される.

$$g_N \geq 0, \quad \sigma_N(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_N(\mathbf{u})g_N = 0 \quad \text{on } \Gamma_C \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}^{[j]}) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_C \quad (2.29)$$

ただし

$$\sigma_N(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[1]})\mathbf{n}^{[1]} \cdot \mathbf{n}^{[1]} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[2]})\mathbf{n}^{[2]} \cdot \mathbf{n}^{[2]} \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}^{[j]}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[j]})\mathbf{n}^{[j]} - \sigma_N\mathbf{n}^{[j]} \quad (2.31)$$

である.

Nitsche の方法による接触拘束条件の定式化では, 支配方程式 (2.26) の弱形式に対し, まずそれぞれの物体に作用する接触力の項を以下のように加える.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^{[j]}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{[j]}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{[j]}) d\Omega = \\ \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^{[j]}} \mathbf{b}^{[j]}\mathbf{v}^{[j]} d\Omega + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_N^{[j]}} \mathbf{t}^{[j]}\mathbf{v}^{[j]} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \sigma_N(\mathbf{u})[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma\end{aligned}\quad (2.32)$$

ここで \mathbf{v} は仮想変位であり, 以下を満たす任意の関数である.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{[j]} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_D^{[j]} \\ g_X + \llbracket \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket &\geq 0 \quad \text{on } \Gamma_C \end{aligned} \quad (2.33)$$

一方, $[a]_+ = \max(a, 0)$ と定義すると, 接触条件 (2.28) は以下の式と等価である⁵⁰⁾⁵¹⁾.

$$\sigma_N(\boldsymbol{u}) = -\gamma_N \left[-g_N - \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{u}) \right]_+ \quad (2.34)$$

ただし γ_N は $\gamma_N > 0$ を満たす任意の定数である. すなわち, $-g_N - \sigma_N(\boldsymbol{u})/\gamma_N > 0$ の場合は $\sigma_N(\boldsymbol{u}) < 0$ となり接触状態を, そうでない場合は非接触状態を表している.

さらに得られる方程式が対称になるように

$$\llbracket \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket - \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{v}) \quad (2.35)$$

と変形し, 式 (2.34) および式 (2.35) を式 (2.32) の右辺第 3 項に代入して整理すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} \sigma_N(\boldsymbol{u}) \llbracket \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket d\Gamma &= \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{u}) \sigma_N(\boldsymbol{v}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} \gamma_N \left[-g_N - \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{u}) \right]_+ (\llbracket \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket + \frac{1}{\gamma_N} \sigma_N(\boldsymbol{v})) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

なお式 (2.32) の右辺第 3 項における $\sigma_N(\boldsymbol{u})$ は, 式 (2.30) の通り, 本来接触する 2 物体のどちら側で評価しても等しくなるべきであるため, 次式のように 2 物体の接触応力の重み付き平均として評価することができる.

$$\sigma_N(\boldsymbol{u}) = \alpha \sigma_N(\boldsymbol{u}^{[1]}) + (1 - \alpha) \sigma_N(\boldsymbol{u}^{[2]}), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.37)$$

ここで α は接触応力重み係数であり, 一般的に $\sigma_N(\boldsymbol{u})$ が 2 物体の接触応力の平均になる

よう $\alpha = 0.5$ が用いられることが多い。

以上が接触拘束条件に Nitsche の方法を用いた定式化である。式 (2.36) までの式展開からも明らかなように、ペナルティ法と異なり Nitsche の方法では元の支配方程式との整合性が保持されている。この点は両手法の間の重要な相違点である。

式 (2.32) に式 (2.36) および式 (2.27) を代入することにより、最終的に変位 $\mathbf{u}^{[j]}$ のみを未知数とする方程式が得られる。得られた方程式は、式 (2.11) により離散化して、一般化ニュートン法で解くことができる⁵⁴⁾³⁶⁾。一般化ニュートン法による反復計算は次のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{(k)}\Delta\mathbf{d}_{(k+1)} &= -\mathbf{K}_{(k)}\mathbf{d}_{(k)} + \mathbf{f}_{(k)} \\ \mathbf{d}_{(k+1)} &= \mathbf{d}_{(k)} + \Delta\mathbf{d}_{(k+1)}\end{aligned}\tag{2.38}$$

ここで $\mathbf{d}_{(k)}$ は反復ステップ k における未知数ベクトルであり、 $\mathbf{K}_{(k)} = \mathbf{K}(\mathbf{d}_{(k)})$ 、 $\mathbf{f}_{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{d}_{(k)})$ である。 $\mathbf{K}_{(k)}$ に対する式 (2.32) の左辺の寄与分を \mathbf{K}^E 、同じく $\mathbf{f}_{(k)}$ に対する右辺第 1 項および第 2 項 (すなわち外力) の寄与分を \mathbf{f}^{ext} 、さらに右辺第 3 項、すなわち接触拘束条件の $\mathbf{K}_{(k)}$ および $\mathbf{f}_{(k)}$ への寄与分をそれぞれ $\mathbf{K}_{(k)}^C$ および $\mathbf{f}_{(k)}^C$ とすると、

$$\mathbf{K}_{(k)} = \mathbf{K}^E + \mathbf{K}_{(k)}^C\tag{2.39}$$

$$\mathbf{f}_{(k)} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{(k)}^C\tag{2.40}$$

と表される。なお \mathbf{K}^E および \mathbf{f}^{ext} は反復ステップに伴って変化しない。さらに式 (2.36) より、 $\mathbf{K}_{(k)}^C$ および $\mathbf{f}_{(k)}^C$ は、それぞれ以下のように表される。

$$\mathbf{K}_{(k)}^C = \mathbf{K}_{(k)}^N + \mathbf{K}_{(k)}^S\tag{2.41}$$

$$\mathbf{f}_{(k)}^C = \mathbf{f}_{(k)}^N + \mathbf{f}_{(k)}^S\tag{2.42}$$

$$\mathbf{K}_{(k)}^N = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{11(k)}^N - (\mathbf{K}_{11(k)}^N)^T & \mathbf{K}_{12(k)}^N - (\mathbf{K}_{21(k)}^N)^T \\ -\mathbf{K}_{21(k)}^N + (\mathbf{K}_{12(k)}^N)^T & \mathbf{K}_{22(k)}^N + (\mathbf{K}_{22(k)}^N)^T \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{f}_{(k)}^N = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{1(k)}^N \\ \mathbf{f}_{2(k)}^N \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K}_{(k)}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11(k)}^S & -\mathbf{K}_{12(k)}^S \\ -\mathbf{K}_{21(k)}^S & \mathbf{K}_{22(k)}^S \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{f}_{(k)}^S = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_{1(k)}^S \\ \mathbf{f}_{2(k)}^S \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

ただし

$$\mathbf{K}_{ij(k)}^N = \int_{\Gamma_C} \phi_{(k)} \alpha^{[i]} \mathbf{B}^{[i]T} \mathbf{D}^{[i]} \mathbf{M}^{[i]} \mathbf{n}^{[i]} \mathbf{n}^{[1]T} \mathbf{N}^{[j]} d\Gamma \quad (2.47)$$

$$\mathbf{f}_{j(k)}^N = \int_{\Gamma_C} \phi_{(k)} \alpha^{[j]} \mathbf{B}^{[j]T} \mathbf{D}^{[j]} \mathbf{M}^{[j]} \mathbf{n}^{[j]} g_X d\Gamma \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_{ij(k)}^S = \int_{\Gamma_C} \phi_{(k)} \gamma_N \mathbf{N}^{[i]T} \mathbf{n}^{[1]} \mathbf{n}^{[1]T} \mathbf{N}^{[j]} d\Gamma \quad (2.49)$$

$$\mathbf{f}_{j(k)}^S = \int_{\Gamma_C} \phi_{(k)} \gamma_N \mathbf{N}^{[j]T} \mathbf{n}^{[1]} g_X d\Gamma \quad (2.50)$$

ここで $\mathbf{B}^{[j]}$ および $\mathbf{D}^{[j]}$ は、それぞれ変位-ひずみ変換マトリクスおよびひずみ-応力変換マトリクス、 $\alpha^{[1]} = \alpha$ 、 $\alpha^{[2]} = 1 - \alpha$ である。また $\mathbf{M}^{[j]}$ は法線ベクトルの成分を用いて以下のように表されるマトリクスである。

(2次元の場合)

$$\mathbf{M}^{[j]} = \begin{bmatrix} n_x^{[j]} & 0 \\ 0 & n_y^{[j]} \\ n_y^{[j]} & n_x^{[j]} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

(3次元の場合)

$$\mathbf{M}^{[j]} = \begin{bmatrix} n_x^{[j]} & 0 & 0 \\ 0 & n_y^{[j]} & 0 \\ 0 & 0 & n_z^{[j]} \\ 0 & n_z^{[j]} & n_y^{[j]} \\ n_z^{[j]} & 0 & n_x^{[j]} \\ n_y^{[j]} & n_x^{[j]} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

また $\phi_{(k)}$ は接触状態のときは1, 非接触状態のときは0となる. 実際の数値計算において, 式(2.47)~(2.50)は数値積分により評価するが, その際 $\phi_{(k)}$ は, 式(2.34)に基づき, 積分点ごとに以下の式で評価する.

$$\phi_{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{if } -\gamma_N g_{Ng} \geq \sigma_{Ng} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.53)$$

ただし

$$g_{Ng} = g_X + \mathbf{n}^{[1]T} (\mathbf{N}^{[2]} \mathbf{d}_{(k)}^{[2]} - \mathbf{N}^{[1]} \mathbf{d}_{(k)}^{[1]}) \quad (2.54)$$

$$\sigma_{Ng} = \alpha \mathbf{n}^{[1]T} \mathbf{M}^{[1]T} \mathbf{D}^{[1]} \mathbf{B}^{[1]} \mathbf{d}_{(k)}^{[1]} + (1 - \alpha) \mathbf{n}^{[2]T} \mathbf{M}^{[2]T} \mathbf{D}^{[2]} \mathbf{B}^{[2]} \mathbf{d}_{(k)}^{[2]} \quad (2.55)$$

である. なお, 式(2.36)を展開して得られた式には, 非接触状態において接触応力の積の項が現れるが, 非接触状態において接触応力は0であるため, 本研究では計算効率の面から0とした.

式(2.49)および式(2.50)は, ペナルティ法におけるペナルティ項, すなわち式(2.22)および式(2.23)と同形である. Nitscheの方法においてこの項は安定化の役割を持ち, 係数 γ_N が小さ過ぎると剛性マトリクスの正定値性が失われるため, 一定以上の大きさにす

る必要があるが⁴¹⁾⁴⁸⁾, ペナルティ法では, ペナルティ係数 γ_P を大きくすることによって必要な精度を確保するのに対し, Nitsche の方法では安定性確保のための必要最低限の大きさを与えれば良く, 得られる解の精度と直接関連しない. またペナルティ法の場合と同様に, ペナルティ係数 γ_N はヤング率 E や要素サイズ h に依存しない無次元化ペナルティ係数 β_N を用いて次式のように表される.

$$\gamma_N = \beta_N \frac{E}{h} \quad (2.56)$$

なお式 (2.56) は最適な収束レートを得る条件⁴²⁾とも整合している.

以後表記を簡略化するため, 場合によって, 式 (2.25) および式 (2.56) におけるペナルティ係数 γ_P および γ_N をまとめて γ , 同じく無次元化ペナルティ係数 β_P および β_N をまとめて β と表記する.

2.4 接触反復のアルゴリズム

接触解析は本質的に未知の接触範囲を求める非線形問題であり, 支配方程式と接触条件を同時に満足する解を反復的に求める必要がある.

反復計算にあたっては, 初期の接触状態を与える必要がある. 本研究では, 反復 1 回目の計算が不安定にならないよう, 初期状態として Γ_C 上のすべての積分点を接触状態として解析を行う. また式 (2.38) を変形し, 次式を用いて接触反復計算を行う.

$$\mathbf{K}_{(k)} \mathbf{d}_{(k+1)} = \mathbf{f}_{(k)} \quad (2.57)$$

これにより最初に $\mathbf{d}_{(0)}$ を仮定する必要がなく, アルゴリズムが簡素化される.

本研究で構築した Nitsche の方法を用いた場合の接触反復アルゴリズムを **Fig. 2.5** に示す. まず図中 (1) に示す通り, 初期状態としてすべての積分点を接触状態とする. 接触反復計算に入り, (2) にてステップ k の接触状態に基づいて計算される $\mathbf{K}_{(k)}$ および $\mathbf{f}_{(k)}$ からなる連立一次方程式を解いて $\mathbf{d}_{(k+1)}$ を求める. 続いて (3) にて後述する接触反復の収束判定を行う. 未収束と判定された場合は, (4) にて $\mathbf{d}_{(k+1)}$ に基づき式 (2.53) を用い

て各積分点の接触状態を更新し、次のステップへ進む。ペナルティ法の場合も、(4)の接触判定条件が式(2.17)に置きかわるだけで、全く同様である。

本アルゴリズムを模式的に表した図を **Fig. 2.6** に示す。図中の $\mathbf{f}_{(k)}^{int}$ は内力であり、次式のように表される。

$$\mathbf{f}_{(k)}^{int} = \mathbf{K}_{(k)}\mathbf{d}_{(k)} - \mathbf{f}_{(k)}^C \quad (2.58)$$

Fig. 2.5(4) の接触判定において、連続したステップですべての積分点の判定結果が変化しなければ、収束と見做すことができる。しかし特に3次元問題のように多数の積分点で接触判定を行う場合に、ごく一部の積分点が接触状態と非接触状態を交互に繰り返して収束しない現象が発生する。このため、**Fig. 2.5(3)** のように何らかのしきい値を設けて収束判定を行う必要がある。

残差 $\mathbf{K}_{(k)}\mathbf{d}_{(k)} - \mathbf{f}_{(k)}$ を用いた収束判定条件も考えられるが、 $\mathbf{K}_{(k)}$ や $\mathbf{f}_{(k)}$ には接触拘束条件の項に含まれるペナルティ係数 γ が含まれているため、異なるペナルティ係数に対する計算性能を比較したい場合には不都合である。そこで本研究では、ペナルティ係数に依存しない形として、次式で定義される外力仕事変化率 δ_e が既定のしきい値 $\bar{\epsilon}_e$ 未満となることを収束判定条件として採用した。

$$\delta_e = \frac{|\mathbf{f}^{ext} \cdot \mathbf{d}_{(k+1)} - \mathbf{f}^{ext} \cdot \mathbf{d}_{(k)}|}{\mathbf{f}^{ext} \cdot \mathbf{d}_{(k+1)}} < \bar{\epsilon}_e \quad (2.59)$$

2.5 ディリクレ条件の定式化

FCM では、接触境界のみならず、ディリクレ条件が課される境界、すなわち変位拘束、強制変位あるいは対称条件などが課される境界についても、境界上に自由度が配置されていないために、自由度を直接制御するタイプの定式化を用いることができない。そこで本研究では、ディリクレ条件に対してもペナルティ法および Nitsche の方法を適用した。

詳細な定式化は省略し結果のみ示すと、ペナルティ法による変位拘束および強制変位は、式(2.20)あるいは式(2.32)に次の項を加えることにより課す。

$$\int_{\Gamma_D} \gamma_D (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (2.60)$$

ここで γ_D はペナルティ係数であり，次元解析により，無次元化ペナルティ係数 β_D を用いて次式のように表される．

$$\gamma_D = \beta_D \frac{E}{h} \quad (2.61)$$

Γ_D に対して垂直な変位成分の拘束（あるいは対称条件）は，同じく式 (2.20) あるいは式 (2.32) に

$$\int_{\Gamma_D} \gamma_D (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (2.62)$$

を加えることによって課した．

一方，Nitsche の方法による変位拘束および強制変位は，同じく式 (2.20) あるいは式 (2.32) に次の項を加えることにより課した．

$$- \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \gamma_D (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (2.63)$$

同様に， Γ_D に対して垂直な変位成分の拘束は，

$$- \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \gamma_D (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (2.64)$$

を加えることにより課した．

2.6 おわりに

本章では，本研究で提案する FCM による線形弾性体の微小変形範囲における摩擦なし接触問題の定式化とアルゴリズムについて示した．

具体的には，まずはじめに本研究で必要な範囲で FCM の定式化を示した．結果的に本研究で用いる要素は，通常の有限要素法における一般的な四辺形双 1 次要素（あるいは六面体 3 重 1 次要素）と同じ定式化であることを示した．

また接触拘束条件の定式化として，ペナルティ法による定式化と Nitsche の方法による定式化を示し，それぞれの離散化式を示した．特に，ペナルティ法におけるペナルティ項と，Nitsche の方法における安定化項とは，役割は異なるものの同形であり，その係数は要素サイズとヤング率により無次元化されることを示した．また Nitsche の方法による定式化では，接触応力を 2 物体の重み付き平均で表すことができることを示した．これらのペナルティ係数と重み係数については，次章以下で詳しく検討する．

続いて，本研究で構築した接触反復アルゴリズムを示し，その収束判定をペナルティ係数に依存しない形で行うために，外力仕事の変化率を基準とした収束判定条件を提示した．

最後に，FCM におけるディリクレ条件の定式化として，接触拘束条件と同じくペナルティ法および Nitsche の方法を用いた定式化を示した．

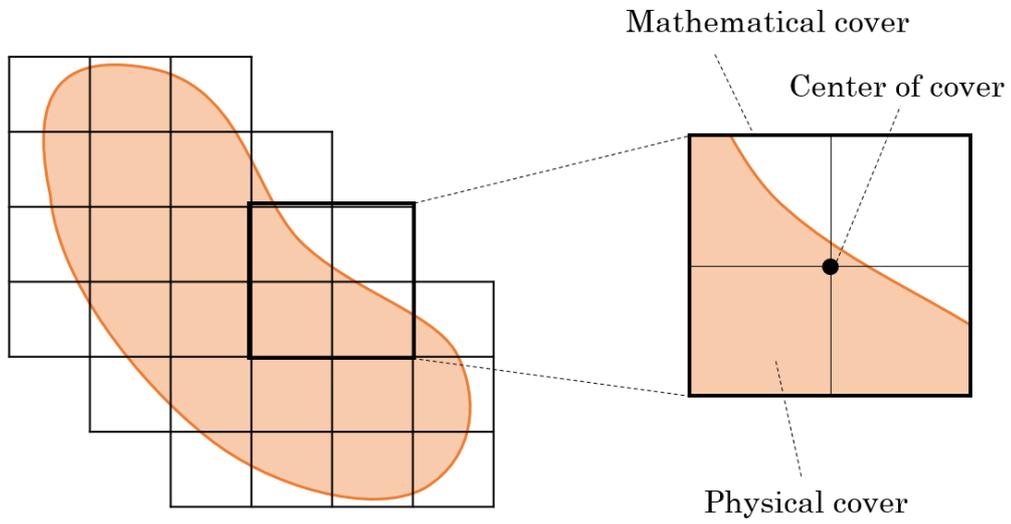


Fig. 2.1 Finite cover method

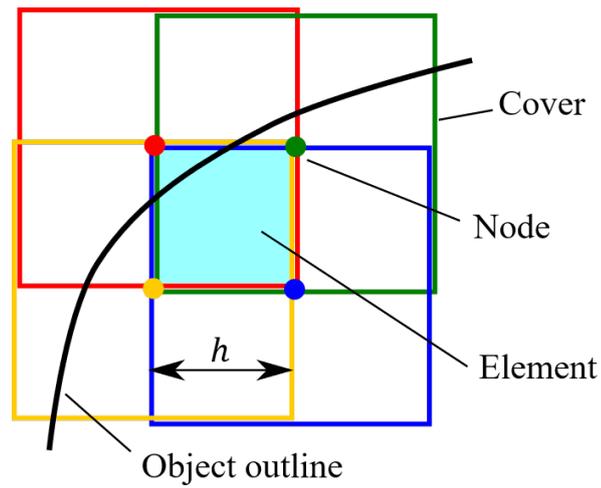


Fig. 2.2 Cover and element

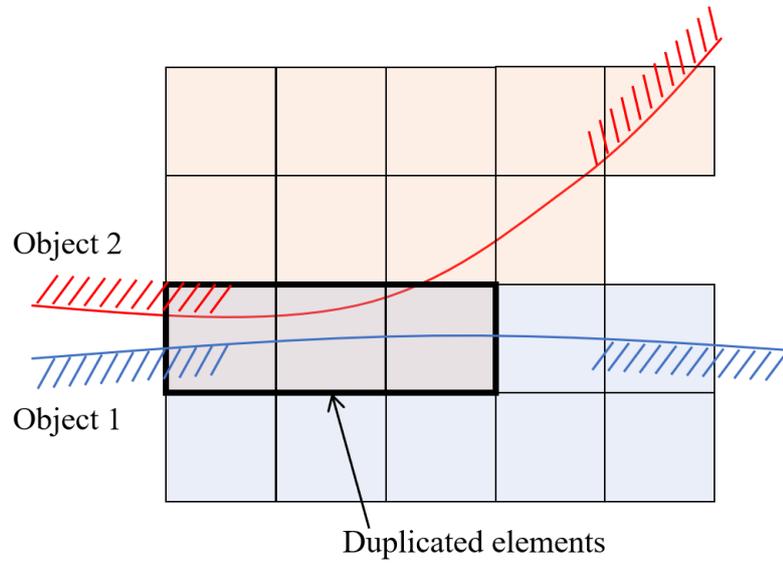


Fig. 2.3 Duplicated elements

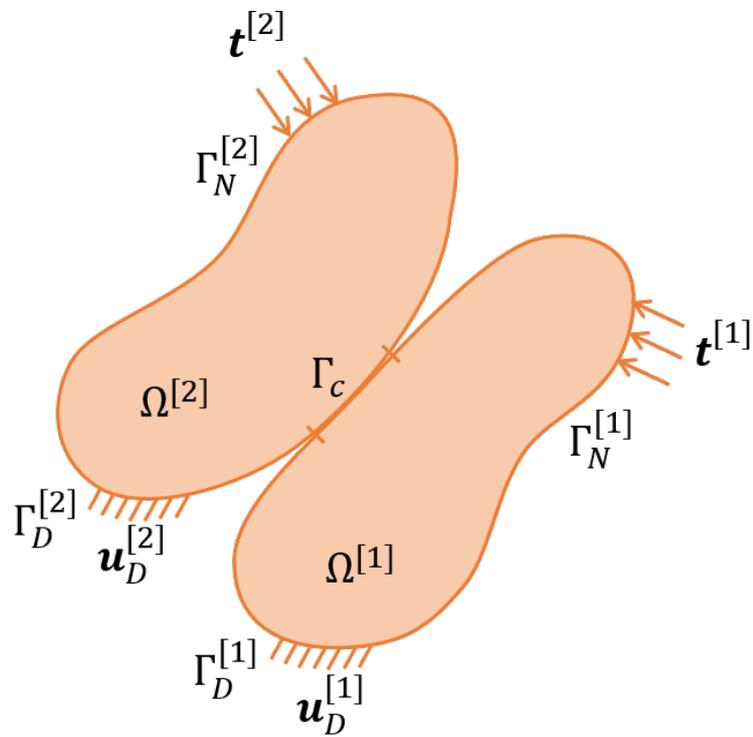


Fig. 2.4 Contact bodies

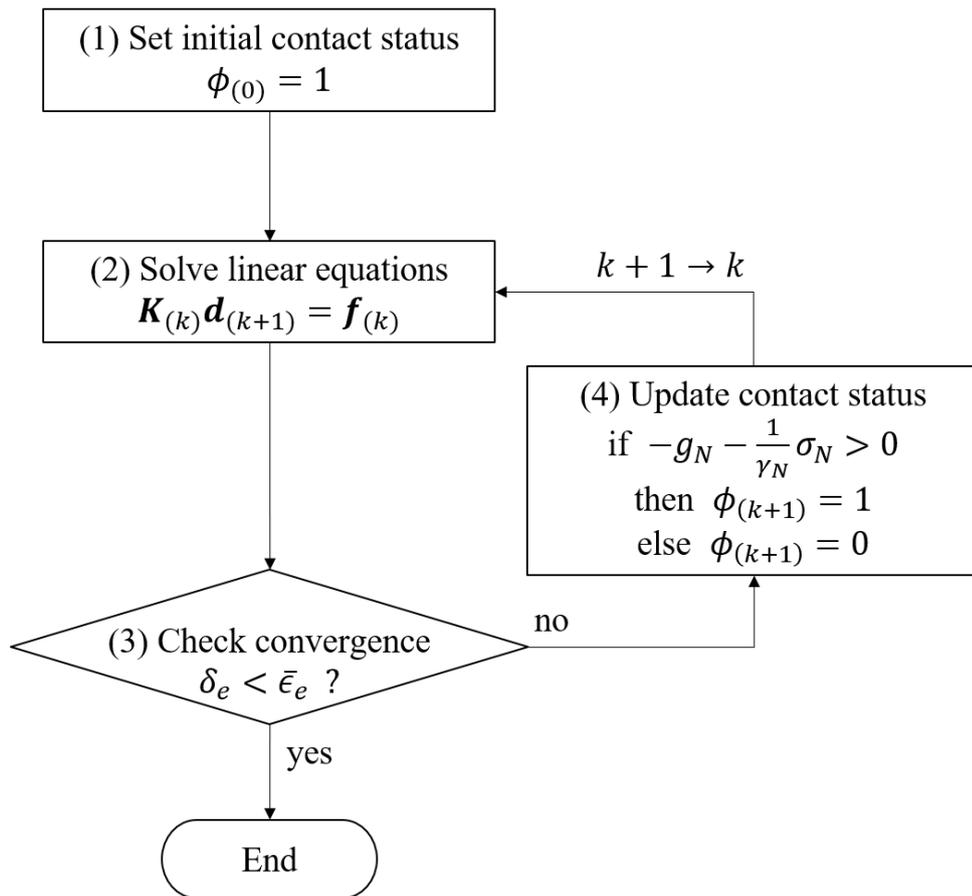


Fig. 2.5 Flowchart of contact analysis

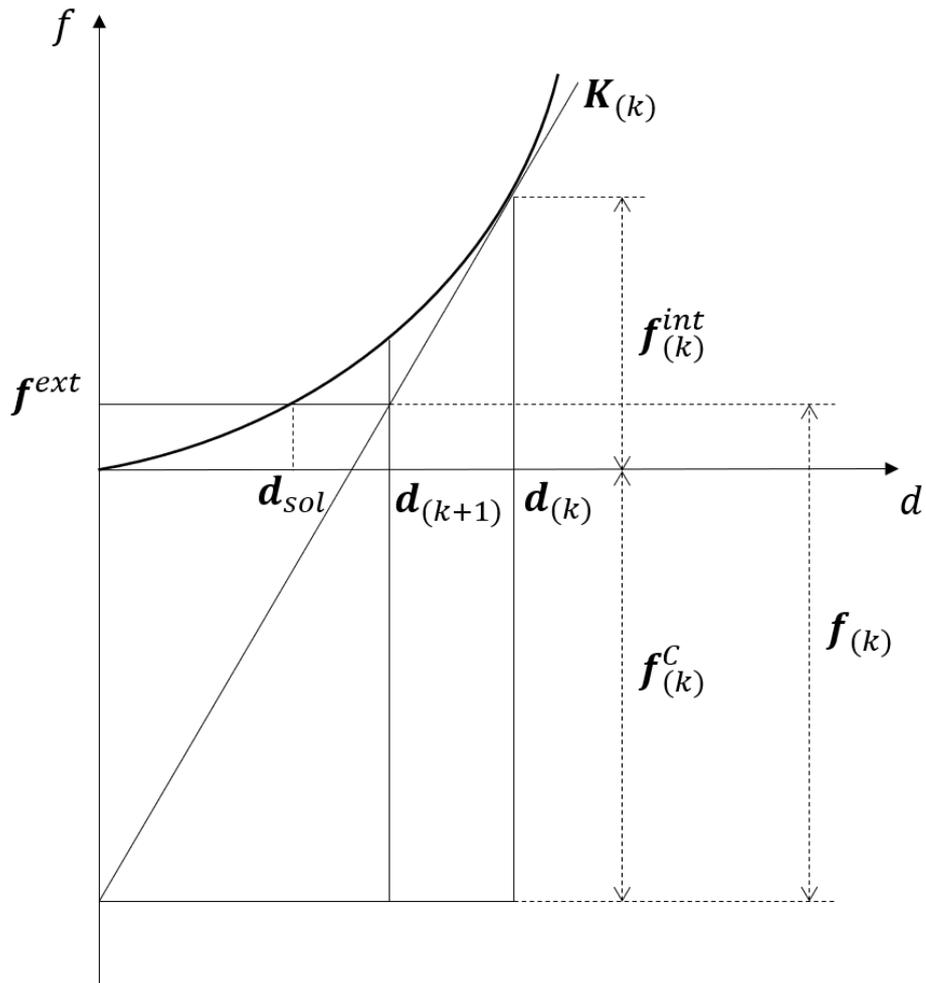


Fig. 2.6 Schema of contact analysis

第3章 2次元問題への適用と性能評価

3.1 はじめに

本章では、前章で示した FCM における接触問題の定式化の基本的な有効性を確認するために、最終的な研究目的である 3次元問題への適用に先立ち、2次元問題への適用を行った。

FCM では、通常の有限要素法のように要素の集合で物体形状を直接与えるのではなく、近似関数が定義される要素とは別に物体形状を与える必要がある。しかし最終的な積分範囲が決められさえすれば、形状表現の形式は比較的自由であり、レベルセット関数をはじめ、多様な入力データを扱えるという利点がある。特に、複数の異なる形式の形状表現が与えられたとしても、通常の有限要素法と比べると圧倒的に容易に一体の解析モデルを構築することが可能である。

本研究では、最終的に 3次元問題において三角形パッチ群を形状表現として用いることを想定し、その断面として得られる閉じた線分群を、2次元の物体の形状表現として採用した。本章ではまずこの物体の形状表現と、それに応じた数値積分のアルゴリズムについて示す。続いて、構築したアルゴリズムを用いて、基本的な 2次元問題（平面ひずみ問題）の数値解析を行い、提案手法の有効性を確認するとともに、接触拘束条件としてペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合の精度面での比較を行った。また Nitsche の方法については、接触応力の精度向上を目的とする接触応力重み係数の調整方法を提案し、その有効性の検討を行った。

3.2 物体の形状表現と数値積分アルゴリズム

本研究では、解析対象となる 2 次元の物体形状を、**Fig. 3.1** に示すように閉じた線分群で表し、解析対象の物体全体を覆うように直交格子を配置する。前章で示した通り、それぞれの格子を「要素」と呼ぶ。続いて、元の物体形状を表す線分群を要素境界で分割する。これを分割線分群と呼ぶ。なお本研究では、それらをさらに **Fig. 3.2** のように要素を縦横にそれぞれ 2 分する分割線で分割し、後述する境界積分の積分点数を確保した。以上により得られた分割線分群と要素境界により、要素剛性マトリクスを計算する際の要素ごとの積分範囲が規定される。本研究ではこれを三角形に細分化して数値積分を行った。

式 (2.22), (2.23) および式 (2.47)~(2.50) の接触拘束条件に関する数値積分は、物体 $\mathcal{B}^{[2]}$ 側の分割線分ごとに、積分点数 3 点のガウス積分により行う。一般に各分割線分の長さは一様ではなく、局所的な形状や要素分割の状況によって異なる。接触判定はこの積分点ごとに行った。

接触拘束条件の境界積分にあたり、 $\mathcal{B}^{[2]}$ 上の各積分点に対応する $\mathcal{B}^{[1]}$ 側の点を求める必要がある。これについては変形前形状において、**Fig. 3.3** のように、 $\mathcal{B}^{[1]}$ の形状を表す線分群上の点のうち $\mathcal{B}^{[2]}$ 側の当該積分点から最も近い点を求めて対応させた。なお微小変形を仮定しているので、ここで求めた最近傍点は、変形後形状においても変化しない。また式 (2.22), (2.23) および式 (2.47)~(2.50) の境界積分における法線ベクトルには、該当の積分点、あるいはその相手側の最近傍点が属する分割線分の法線ベクトルを用いた。

またディリクレ条件に関する数値積分についても、接触拘束条件の数値積分と同様に、分割線分ごとに積分点数 3 点のガウス積分を用いた。

3.3 数値解析例

前節で示した 2 次元問題のアルゴリズムの有効性を確認するために数値解析を行った。各数値解析例においては、接触拘束条件の定式化としてペナルティ法を使用した場合と Nitsche の方法を使用した場合との精度比較を行った。また解析結果の精度比較の指標と

して, g_N の平均値 g_{ave} を次のように定義した.

$$g_{ave} = \left(\frac{\int_{\Gamma_{Ca}} g_N^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_{Ca}} d\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

ただし Γ_{Ca} は Γ_C のうち接触状態と判定された領域である.

いずれの問題でも下側の物体を $\mathcal{B}^{[1]}$, 上側の物体を $\mathcal{B}^{[2]}$ とした. また特に断りが無い限り, 弾性体のポアソン比は 0 とし, 平面ひずみ問題として解析した. 同じく特に断りが無い限り, Nitsche の方法における式 (2.37) の接触応力重み係数 α は 0.5 とし, さらに数値実験の結果から, 式 (2.56) における無次元化ペナルティ係数 β_N は 5.0 とした. 比較のために, ペナルティ法の無次元化ペナルティ係数 β_P についても, 同じく 5.0 として解析を行った.

ディリクレ条件については, すべて十分に大きな γ_D を用いてペナルティ法により課した. また連立一次方程式の解法には直接法を用い, 式 (2.59) で示した接触反復計算の収束判定におけるしきい値 $\bar{\epsilon}_e$ は 1.0×10^{-8} とした.

3.3.1 弾性体ブロックの接触

(1) モデルが傾斜していない場合

ごく単純な問題におけるペナルティ法と Nitsche の方法の基本的な精度比較を目的として, **Fig. 3.4** に示すように, 上下に配置された 2 つの弾性体のブロックが接触する問題の解析を行った. ヤング率はともに 1.0×10^8 であり, 下側の物体の下面の鉛直方向変位を拘束し, 上側の物体の上面に下向きに大きさ 0.02 の強制変位を課した. 要素分割は **Fig. 3.4** の点線で示されている通り (要素サイズ 0.1) で, 接触面に沿って上下それぞれのブロックに対する要素が重なって配置されている. なお本問題では接触反復計算が不要であることが自明であるため, 1 回で収束とした.

接触応力と g_{ave} を **Table 3.1** に示す. 接触応力は両手法ともに一様な分布となったが, ペナルティ法では 2% 程度の誤差が認められるのに対し, Nitsche の方法ではほぼ理論解を得た. また Nitsche の方法はペナルティ法に比べてかなり g_{ave} が小さく, 貫入量

が小さく高精度な解析結果が得られることが確認できた。ペナルティ法において貫入量をより小さくするために β を 100 倍の 500.0 にした結果も併せて示したが、それでもなお Nitsche の方法の方が高精度であることが確認できる。

ポアソン比が 0 の場合、 $\mathbf{u}^{[j]}$ と $\mathbf{n}^{[1]}$ の向きが一致する特殊な状況となる。そこでより一般的にポアソン効果による影響を考慮するために、本問題のポアソン比のみ 0.3 に変更して解析を行った。得られた結果を **Table 3.2** に示す。各手法の結果を比較すると、ポアソン比が 0 の場合と全く同様の傾向が見られた。なお本章の以降の問題においても別途ポアソン比 0.3 の場合についても解析を行い、ポアソン比 0 の場合と同様の傾向が見られることを確認している。

(2) モデルが傾斜している場合

(1) では要素分割方向に対して弾性体ブロックが平行に配置されていたが、より実用的な状況を想定し、弾性体ブロックが 30° 傾いた場合について検証を行った。ここでは 1/2 モデルを用い、対称面には式 (2.62) により対称条件を課した (**Fig. 3.5**)。また (1) と同じく接触反復計算が不要であることが自明であるため、1 回で収束とした。

接触応力と g_{ave} を **Table 3.3** に示す。本問題でも接触応力は両手法ともに一様な分布となったが、モデルが傾斜していない場合と同様、接触応力、 g_{ave} ともに Nitsche の方法の方が精度の高い結果が得られた。

なお (1) で示したモデルが傾斜していない場合の Nitsche の方法における g_{ave} は、本問題に比べて 500 倍ほど精度が高かった。これは、(1) の要素分割では一様な応力分布を厳密に表現できるため、応力の連続性が課される Nitsche の方法において非常に高精度な解が得られたことによるものと考えられる。以降の複雑な応力場となる問題では、Nitsche の方法における g_{ave} の精度は、本項の問題と比べるとより低下している。

3.3.2 弾性体の土台上の弾性体ブロック

続いて前項よりやや複雑な問題として、幅の広い弾性体の土台と、その上部に載る弾性体ブロックとの接触問題を取り上げた。ブロックと土台のヤング率はそれぞれ 1.0×10^8

および 1.0×10^9 であり，土台の下面の鉛直方向変位を拘束し，ブロックの上面に下向きに大きさ 0.02 の強制変位を課した．要素分割とモデルの関係は **Fig. 3.6** の通り（要素サイズ 0.05）である．なお Nitsche の方法による数値実験の結果から，本問題では両手法ともにブロックのヤング率を基準として無次元化ペナルティ係数 β を 10.0 とした．すなわち $\gamma = 2.0 \times 10^{10}$ である．また，前節と同じく接触反復計算が不要であることが自明であるため，1 回で収束とした．

接触範囲の各分割線分中央における g_N の分布を **Fig. 3.7** に示す．なお横軸の目盛線は要素境界を表している．また g_{ave} を **Table 3.4** に示す．これらの結果から，ペナルティ法に比べて Nitsche の方法は g_N の絶対値が小さく高精度であることが確認できた．なお **Fig. 3.7** より，いずれの手法においても接触範囲の両端でやや貫入量が大きくなっていることが確認できる．これは，接触範囲端部で土台上面にかかる接触力が有限値から 0 に不連続的に変化することに対して，要素の変形性能が対応しきれないためと考えられる．

3.3.3 ヘルツの接触問題

代表的な接触問題として，ヘルツの接触問題を取り上げた．**Fig. 3.8** に示すように，土台の上にヤング率 1.0×10^8 の弾性体の円盤が接触し，円盤の上部中央に下向きに 1.0×10^6 の集中荷重が作用しているものとして解析を行った．

(1) 土台が剛体の場合

まず土台が固定された剛体である場合について解析を行った．接触領域付近の要素分割の様子は **Fig. 3.9** の通り（要素サイズ 0.08）である．なお土台が剛体であるため，接触応力重み係数 α は 0 とした．

ペナルティ法および Nitsche の方法による応力の鉛直方向成分の分布図をそれぞれ **Fig. 3.10** および **Fig. 3.11** に示す．両手法の間に大きな違いは見られず，いずれも妥当な結果が得られた．また接触範囲は，ペナルティ法では円盤下端から 0.361 の範囲に，Nitsche の方法では同じく 0.353 の範囲に収束した．理論解⁵⁶⁾ は 0.35683 であり，要素

サイズから考えて十分な精度であると考えられる。

各分割線分中央における接触応力と g_N の分布を、それぞれ **Fig. 3.12** および **Fig. 3.13** に示す。なお横軸の目盛線は要素境界を表している。また×印でプロットされている点は非接触と判定されている点である。接触領域と非接触領域の境界付近で接触応力の理論解との誤差が目立つものの、要素サイズから考えて止むを得ない程度のものであると考えられる。 g_N について確認すると、Nitsche の方法が平均的に 0 を中心に分布しているのに対し、ペナルティ法では円盤下端付近で貫入量が大きくなった。これは、前章で述べた通り、ペナルティ法が貫入によって接触反力を生ずるように定式化されているのに対し、Nitsche の方法は貫入量と関係なく支配方程式における接触条件を弱表現によりそのまま満足しているためであると考えられる。また **Table 3.5** に円盤中心の鉛直方向変位量と g_{ave} の比較を示す。Nitsche の方法の方が貫入が小さく高精度である分、円盤中心の鉛直方向変位量が小さくなっており、要素サイズをさらに細かくすれば、より変位量が大きくなって理論解に近づくものと予想される。

(2) 土台が弾性体の場合

続いて土台が弾性体の場合について解析を行った。土台のヤング率は円盤と同じく 1.0×10^8 とし、土台の下面は完全固定とした。また要素サイズは 0.04 とした。なお本問題では α を円盤および土台が要素内で占める面積の比から要素ごとに決定した。これについては次項で詳しく述べる。

Nitsche の方法による応力の鉛直方向成分の分布図を **Fig. 3.14** に示す。ペナルティ法でも同様の結果を得ており、いずれの手法においても妥当な結果が得られることが確認できた。また **Table 3.6** に示すように、Nitsche の方法の方が g_{ave} が小さく、土台が剛体の場合と同様に Nitsche の方法の方が高精度であることがわかった。

3.3.4 ヘルツの接触問題（傾斜した場合）

より一般的な要素分割の状況を想定し、前項 (2) のモデルを 30° 傾けた場合の検証を行った。本問題では右半分だけの 1/2 モデルで解析を行い、土台下面は面に対して垂直な

方向の変位を拘束した。円盤と土台が接触する付近の要素分割（要素サイズ 0.04）の様子を **Fig. 3.15** に示す。円盤と土台のヤング率はともに 1.0×10^8 とした。

(1) 接触応力重み係数 α の検討

まず Nitsche の方法における式 (2.37) の接触応力重み係数 α を、一般的に用いられる 0.5 として解析を行った。 **Fig. 3.16(a)** に示す各分割線分中央における土台側の接触応力分布を確認すると、横軸に示す円盤下端からの接触面に沿った位置 0.2 付近に、周囲に比べて不自然な接触応力の乱れが見られる。要素分割の状況を調べると、この位置では土台側の要素内で物体が占める割合が 1% 未満と微小であるため (**Fig. 3.17**)、周辺の要素に比べて要素剛性が極端に小さくなり、解析結果の精度に悪影響を及ぼしている可能性が考えられる。

このような状況における解析精度を以下に示す単純な問題で検証した。 **Fig. 3.18** に示すような形状の弾性体を考え、辺 (a) を完全固定し、辺 (b) に下向きに単位長さあたり 1.0×10^5 の等分布荷重を作用させた。要素サイズは 1.0、ヤング率は 1.0×10^8 とした。右下の要素において、要素内で物体が占める割合は約 0.5% と非常に小さくなっている（図中の緑色の領域）。なお本解析に限りペナルティ法による変位拘束を用いずに、自由度を直接拘束し、着目する要因以外の解析精度への影響がなるべく排除されるよう配慮した。 **Fig. 3.19** に、辺 (c) 上の点における、辺に対して垂直な方向の応力成分を示す。プロットされている点は、仮に各分割線分上で接触に関する境界積分を行うとした場合の積分点の位置に該当する。問題の要素における応力値（赤い点線の範囲）は、周辺の要素に比べて大きく外れた値となっている。これは、要素剛性が相対的に小さいためにひずみが過大に評価されたためと考えられる。

このような応力分布の乱れは接触応力の評価や接触判定に悪影響を及ぼすことが懸念される。そこで、このように要素内で物体が占める割合が小さく解析結果に乱れを生じやすい要素の影響をなるべく小さくする対策として、接触応力重み係数 α を要素ごとに次のように定めることとした。

$$\alpha = \frac{A^{[1]}}{A^{[1]} + A^{[2]}} \quad (3.2)$$

ここで $A^{[j]}$ は当該要素内で $B^{[j]}$ が実際に占める面積である．式 (2.37) の $\sigma_N(\mathbf{u}^{[1]})$ と $\sigma_N(\mathbf{u}^{[2]})$ は本来等しくなるべきであるため， α は 0~1 の任意の値を用いることができる．従って，このように要素内の物体の充填率を基準にした重み付けを行っても定式化上問題は無い．式 (3.2) に従って α を調整した場合の結果を **Fig. 3.16(b)** に示す．接触応力の乱れがかなり緩和されていることが確認できる．また土台上面に対して垂直な方向の応力成分の分布図 (**Fig. 3.20**) でも，妥当な結果が得られていることが確認できる．

(2) ペナルティ法と Nitsche の方法との比較

ペナルティ法と Nitsche の方法による各分割線分中央における土台側の接触応力分布を **Fig. 3.21** に， g_N の分布を **Fig. 3.22** に示す．×印でプロットされている点は非接触と判定されている点である．また接触応力重み係数 α は式 (3.2) に従って決定した．なおペナルティ法についてはより精度を上げるために β を 10 倍の 50.0 にした結果を併記している．またそれぞれの g_{ave} を **Table 3.7** に示す．

Fig. 3.21 を確認すると，いずれの解析結果においても，接触領域と非接触領域との境界付近の接触応力の精度には，3.3.2 項で述べたように，要素サイズに起因する近似能力の限界が見られるものの，接触領域から離れるにつれてほぼ 0 に収束しており，全体として概ね妥当な接触応力が得られている．

ペナルティ係数を大きくした場合のペナルティ法の結果を確認すると，ペナルティ係数が小さい場合に比べて貫入量は減少する反面，接触応力分布の乱れが大きくなっている．これは，本問題のように形状を表す分割線分と要素境界との関係が複雑になると，接触に関する積分点が局所的に集中して過拘束となることによる影響と考えられ，本来は接触領域内であるはずの範囲に，局所的に接触解除されてしまう領域が発生した．また，この傾向はペナルティ係数を大きくするとより顕著になることが実際の計算で確認された．一方，Nitsche の方法ではペナルティ係数を大きくしなくても精度の良い結果が得られており，局所的に接触が解除されるような領域も発生しなかった．

3.3.5 軸と部品との接触問題

より実用的な設定に近い接触問題として、2本の軸と部品との接触問題を取り上げた (**Fig. 3.23**)。軸の中心は固定し、部品の上面に鉛直下向きに単位長さあたり 1.0×10^5 の等分布荷重を作用させた。軸、部品ともにヤング率は 1.0×10^8 、要素サイズは 0.5 とした。なお本問題では軸側を $\mathcal{B}^{[1]}$ 、部品側を $\mathcal{B}^{[2]}$ として扱った。また接触応力重み係数 α は前項と同様に式 (3.2) に従って決定した。

Nitsche の方法による変形図および変位分布図を **Fig. 3.24** に示す。なおペナルティ法でも同等の結果が得られた。ペナルティ法については Nitsche の方法と同程度の貫入量になるように β を 5 倍の 25.0 にした場合についても併せて解析を行った。それぞれの g_{ave} と接触反復計算の反復回数を **Table 3.8** に示す。同じペナルティ係数であれば、ペナルティ法と Nitsche の方法の接触反復回数は同程度であり、計算コスト面での優劣は見られなかった。なお本問題以外の問題においても両手法の間で接触反復回数に大きな違いは見られないことを確認している。

ペナルティ係数を大きくした場合のペナルティ法と Nitsche の方法について、左側の軸と部品との接触面上半分の軸側の接触応力分布をそれぞれ **Fig. 3.25** および **Fig. 3.26** に示す。なお横軸は、接触面上の位置を角度 θ (**Fig. 3.23** 参照) で示している。同程度の g_{ave} に対して、Nitsche の方法はペナルティ法より接触応力分布の乱れが少なく、過拘束による精度悪化がある程度回避できることが確認できた。

3.4 おわりに

本章では、前章で示したペナルティ法および Nitsche の方法による FCM における線形弾性体の微小変形摩擦なし接触問題の定式化に基づいて、2次元問題に対する数値計算アルゴリズムを構築した。また構築したアルゴリズムを用いて、基本的な 2次元接触問題の数値解析を行い、ペナルティ法と Nitsche の方法との精度面での比較を行った。

数値解析の結果として、ペナルティ法と Nitsche の方法のいずれを用いても、基本的に FCM における接触解析が問題なく行えることを確認した。またペナルティ法では、接触

領域において貫入量を減らし精度の良い解析を行うためにある程度大きなペナルティ係数を用いる必要があるのに対して、Nitscheの方法では比較的小さなペナルティ係数で十分な精度の解析ができることを確認した。

また Nitsche の方法においては、接触応力の重み付き平均を計算する際の重み係数の任意性を生かして、要素内で物体が占める面積の比率を用いた重み係数の調整手法を提案した。これにより、接触応力の評価精度が大幅に改善されることを実際の数値解析により示した。

さらに、FCM では、自由度の離散化が形状表現から独立しているため、接触に関する境界積分における積分点の配置を制御することが難しく、ペナルティ法において精度を上げるためにペナルティ係数を大きくすると、過拘束に起因する接触応力分布の乱れを生ずるが、Nitsche の方法ではそのような問題が回避できることを示した。

Table 3.1 Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks)

	Contact stress	g_{ave}
Penalty(5.0)	-1.9608×10^6	3.9216×10^{-4}
Penalty(500.0)	-1.9996×10^6	3.9992×10^{-6}
Nitsche(5.0)	-2.0000×10^6	4.8459×10^{-14}
Theory	-2.0000×10^6	0.0

Table 3.2 Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks, $\nu = 0.3$)

	Contact stress	g_{ave}
Penalty(5.0)	-2.1505×10^6	4.3011×10^{-4}
Penalty(500.0)	-2.1973×10^6	4.3946×10^{-6}
Nitsche(5.0)	-2.1978×10^6	5.8873×10^{-14}
Theory	-2.1978×10^6	0.0

Table 3.3 Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks - inclined)

	Contact stress	g_{ave}
Penalty	-1.9608×10^6	3.9216×10^{-4}
Nitsche	-2.0000×10^6	2.3649×10^{-11}

Table 3.4 g_{ave} (Block-foundation)

	g_{ave}
Penalty	1.2836×10^{-4}
Nitsche	7.2441×10^{-6}

Table 3.5 Vertical displacement and g_{ave} (Hertz - rigid foundation)

	Vertical disp.	g_{ave}
Penalty	0.026995	2.3192×10^{-4}
Nitsche	0.026817	2.3799×10^{-5}
Theory	0.026861	0.0

Table 3.6 g_{ave} (Hertz - elastic foundation)

	g_{ave}
Penalty	8.2959×10^{-5}
Nitsche	5.9010×10^{-6}

Table 3.7 g_{ave} (Hertz - inclined)

	g_{ave}
Penalty(5.0)	8.3530×10^{-5}
Penalty(50.0)	9.0505×10^{-6}
Nitsche(5.0)	5.0124×10^{-6}

Table 3.8 g_{ave} and number of steps (Shafts-component)

	g_{ave}	Number of steps
Penalty(5.0)	1.0514×10^{-4}	13
Penalty(25.0)	2.7885×10^{-5}	20
Nitsche(5.0)	2.1819×10^{-5}	13

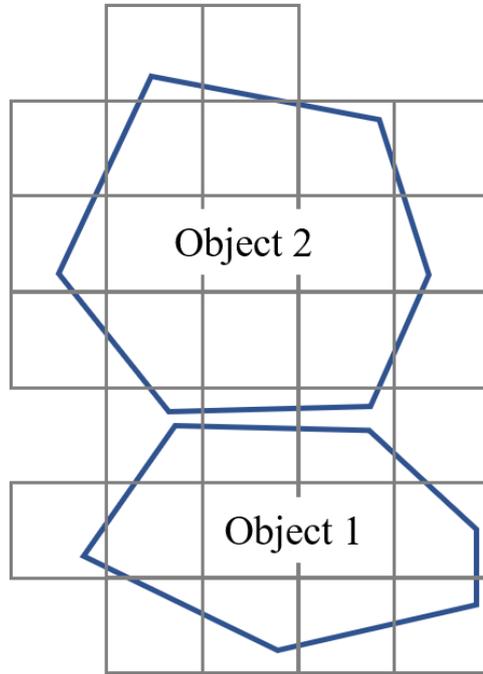


Fig. 3.1 Geometry representation in 2D

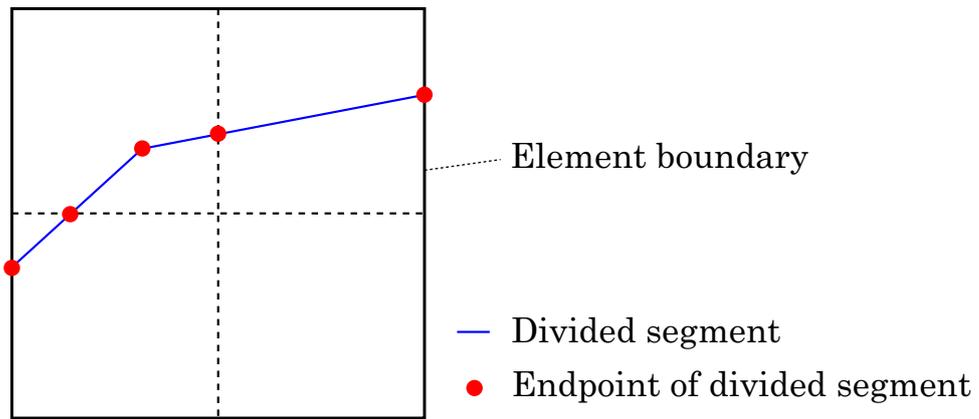


Fig. 3.2 Divided segments

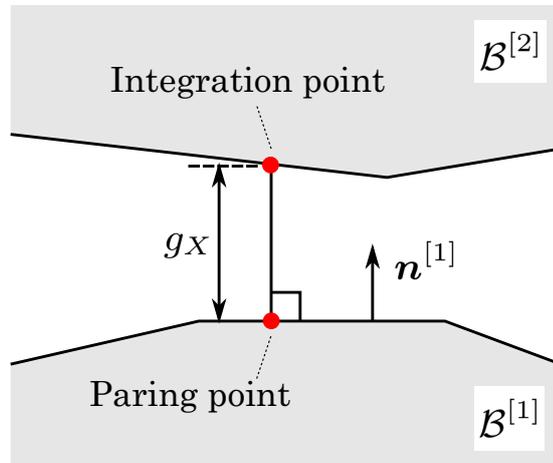


Fig. 3.3 Integration point at contact interface

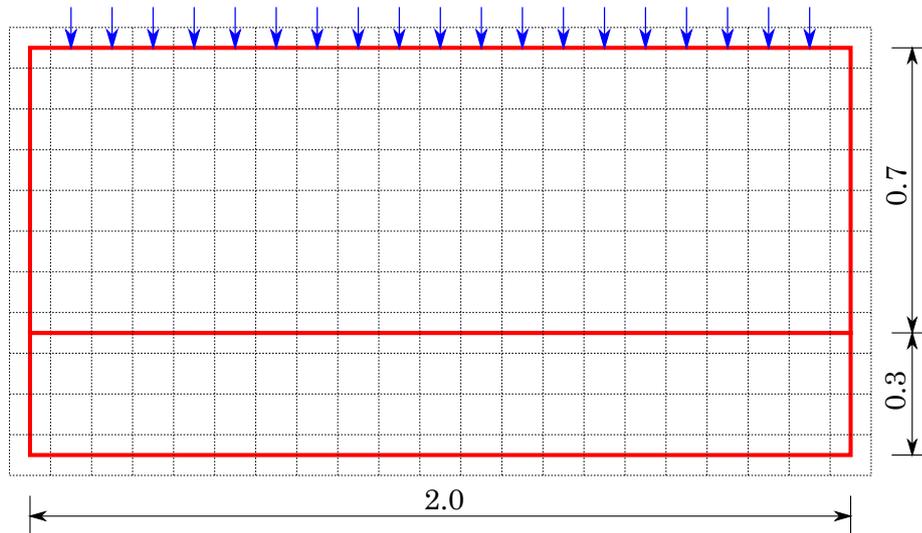


Fig. 3.4 Contact of elastic blocks

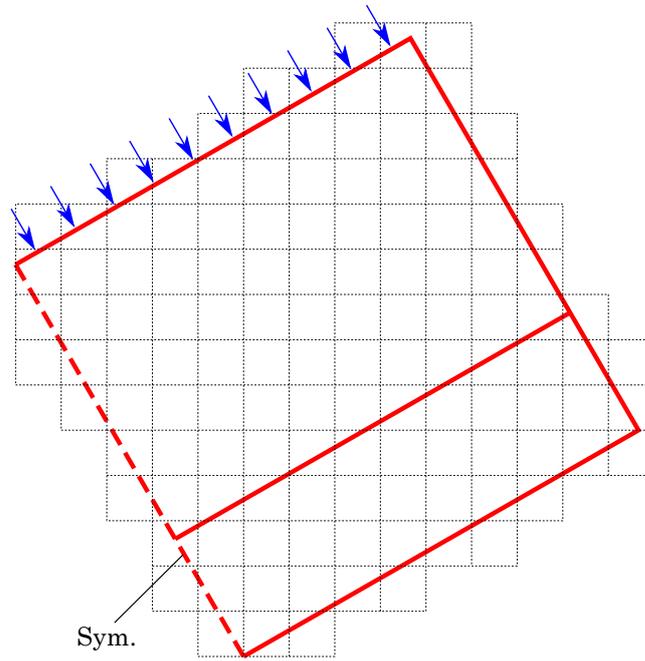


Fig. 3.5 Contact of inclined elastic blocks

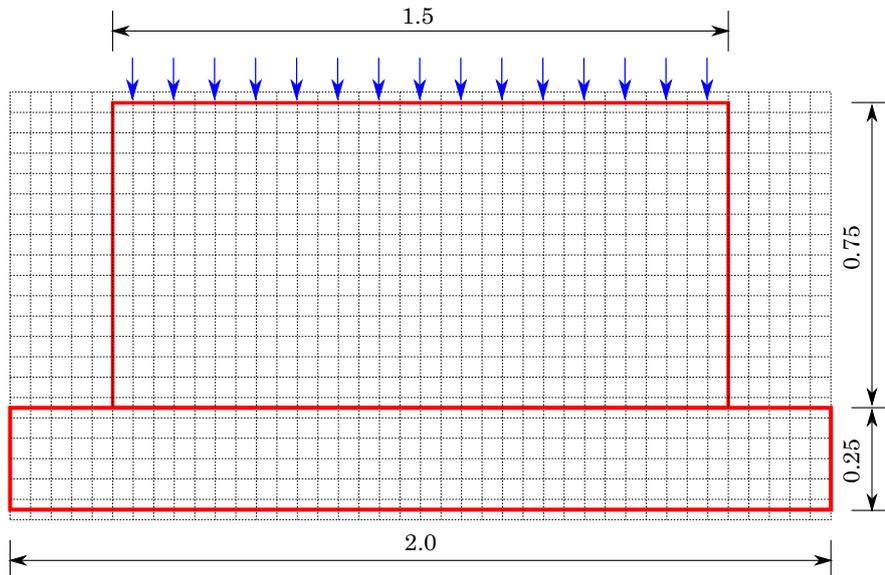


Fig. 3.6 Elastic block on elastic foundation

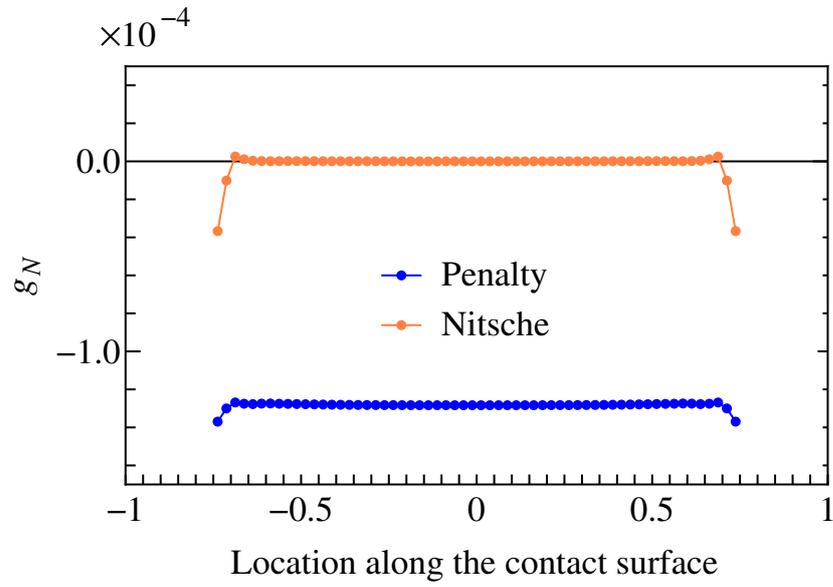


Fig. 3.7 g_N (Block-foundation)

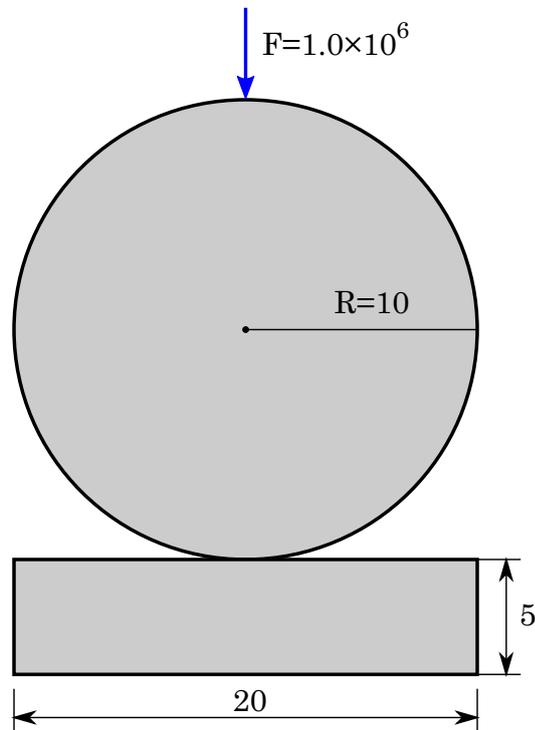


Fig. 3.8 Contact problem of Hertz

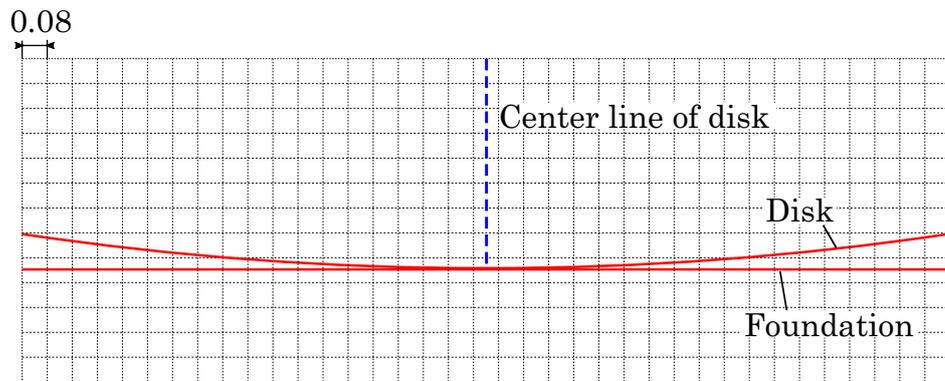


Fig. 3.9 Mesh of Hertz contact

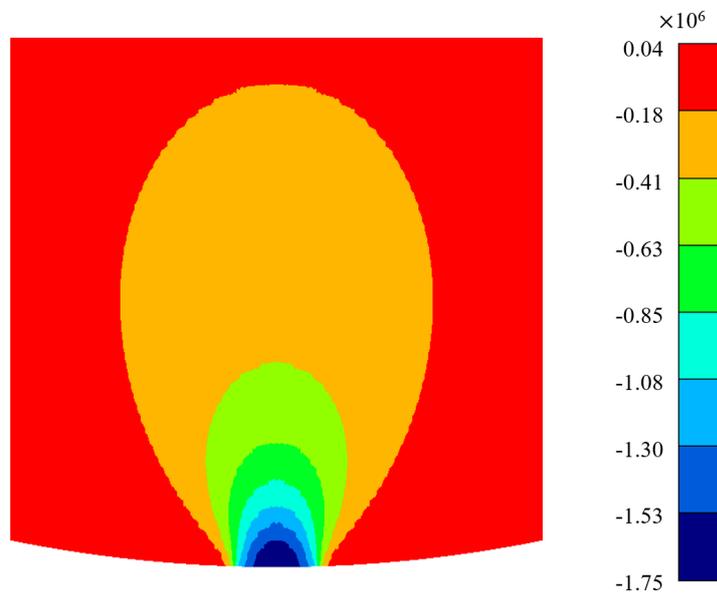


Fig. 3.10 Vertical stress - Penalty (Hertz - rigid foundation)

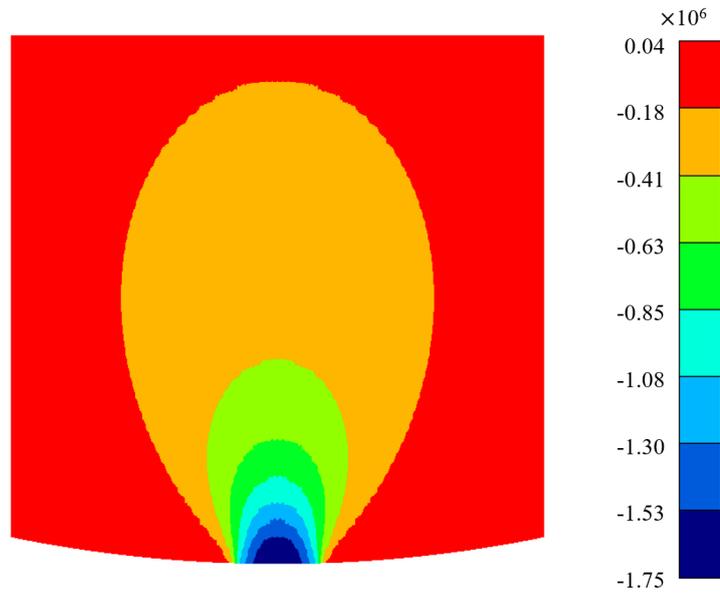


Fig. 3.11 Vertical stress - Nitsche (Hertz - rigid foundation)

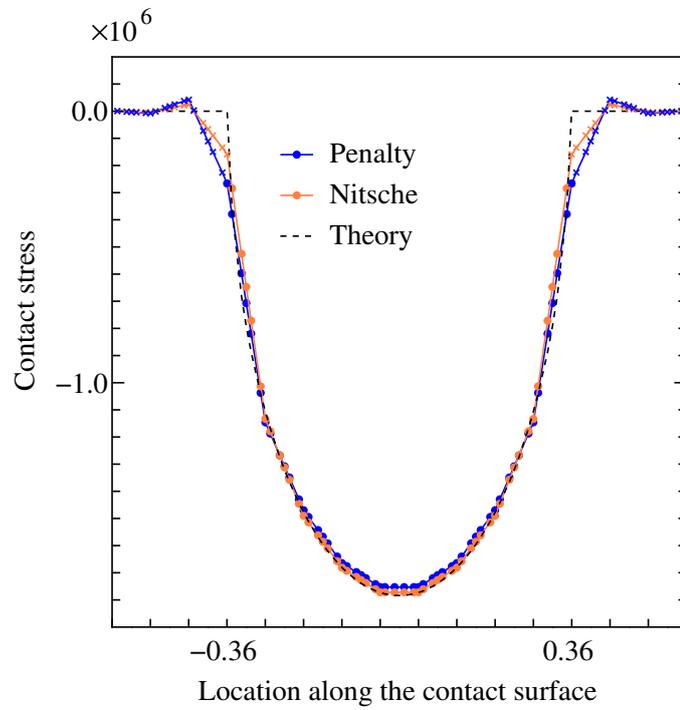


Fig. 3.12 Contact stress (Hertz - rigid foundation)

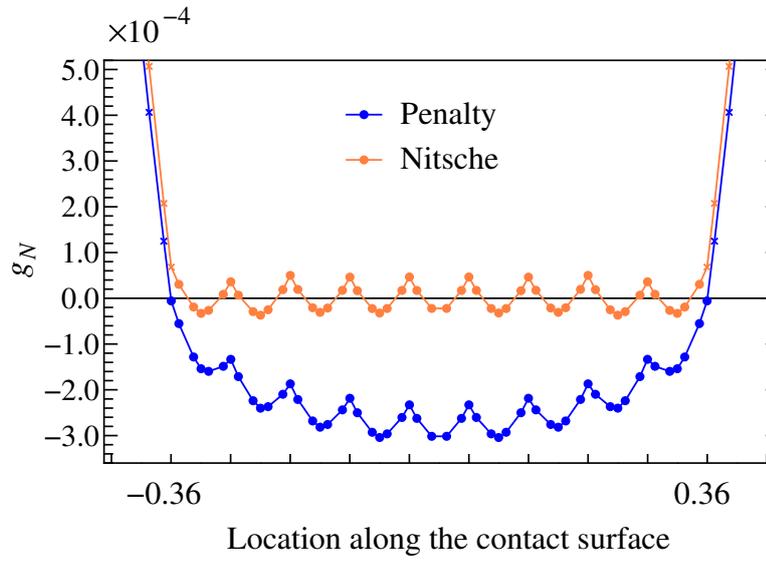


Fig. 3.13 g_N (Hertz - rigid foundation)

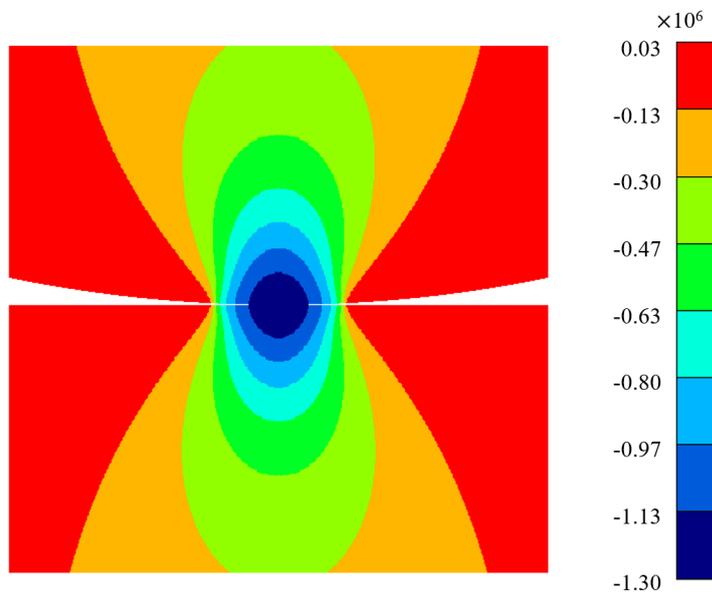


Fig. 3.14 Vertical stress - Nitsche (Hertz - elastic foundation)

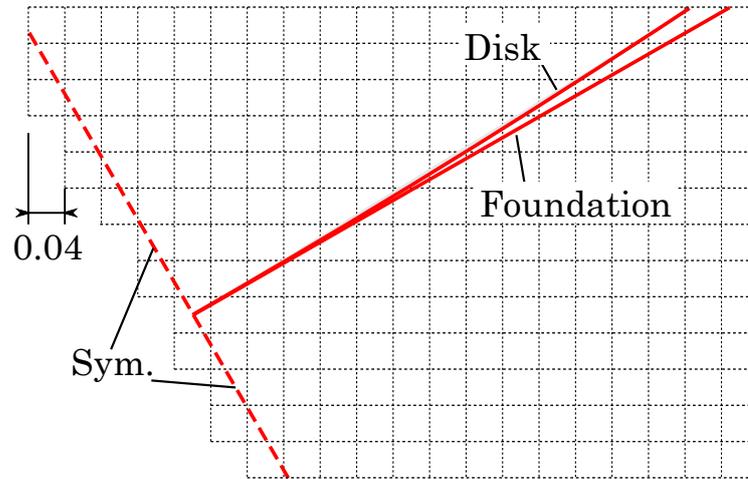


Fig. 3.15 Mesh of Hertz contact (inclined)

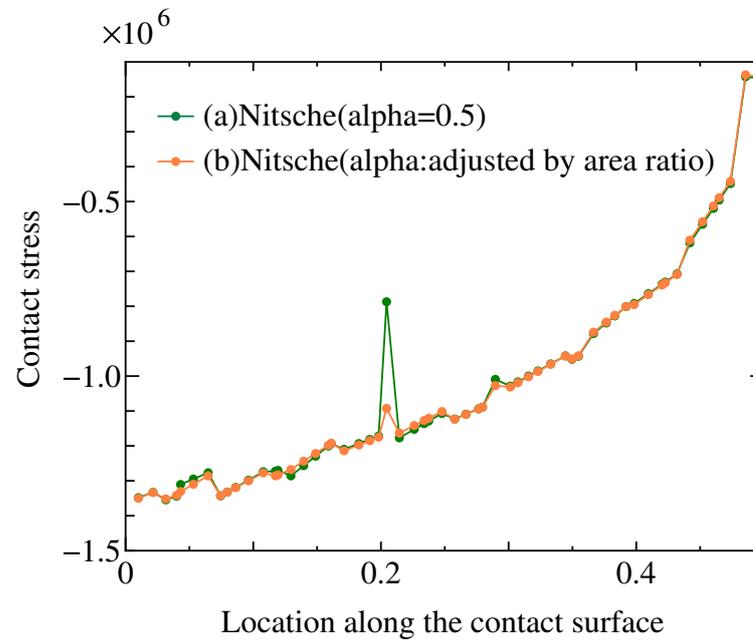


Fig. 3.16 Contact stress (Hertz - inclined)

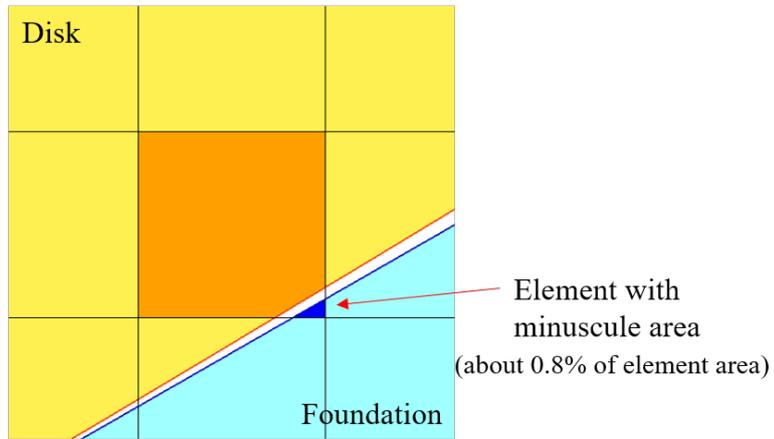


Fig. 3.17 Element with minuscule area

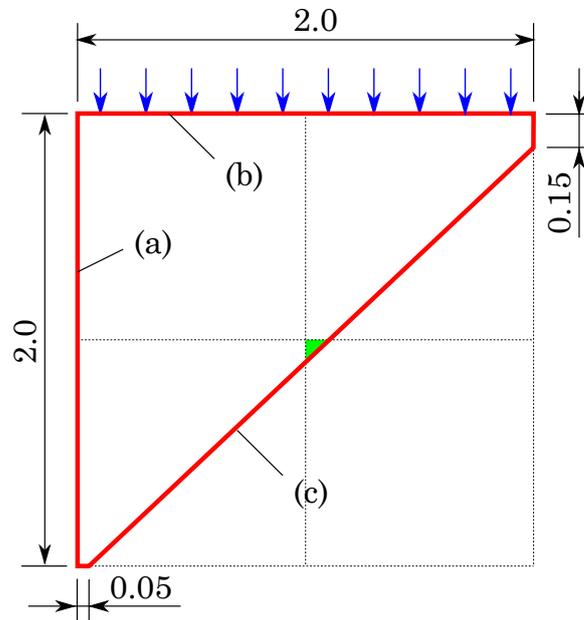


Fig. 3.18 Test of element with minuscule area

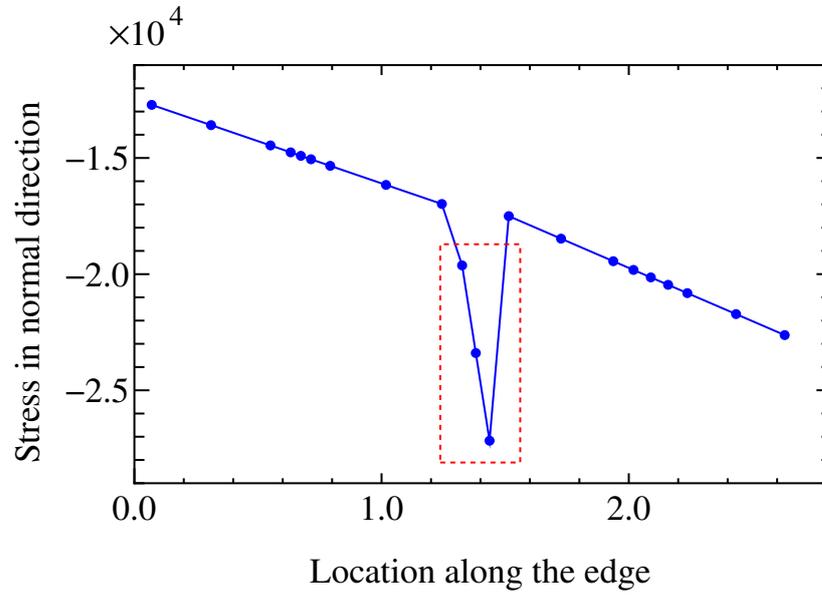


Fig. 3.19 Normal stress

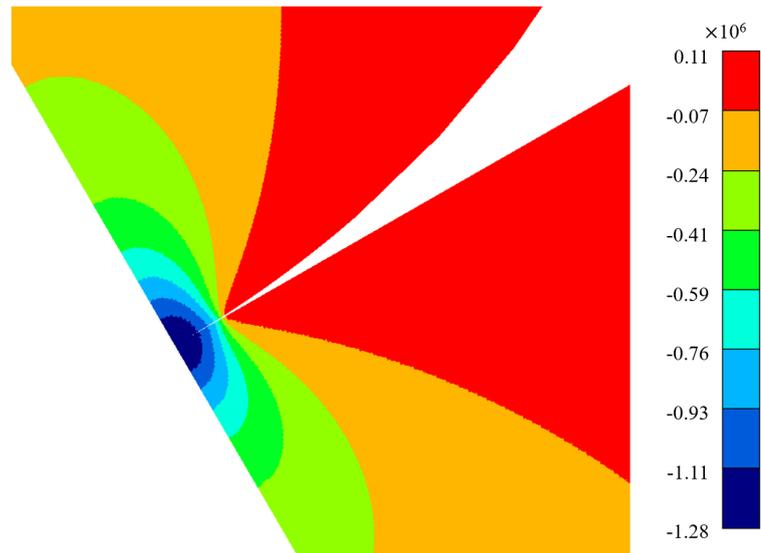


Fig. 3.20 Vertical stress - Nitsche (Hertz - inclined)

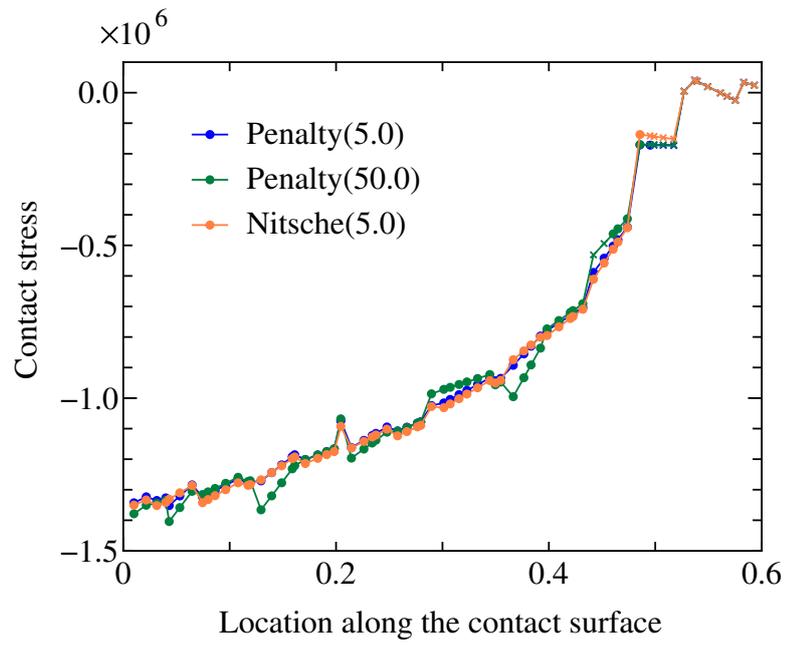


Fig. 3.21 Contact stress (Hertz - inclined)

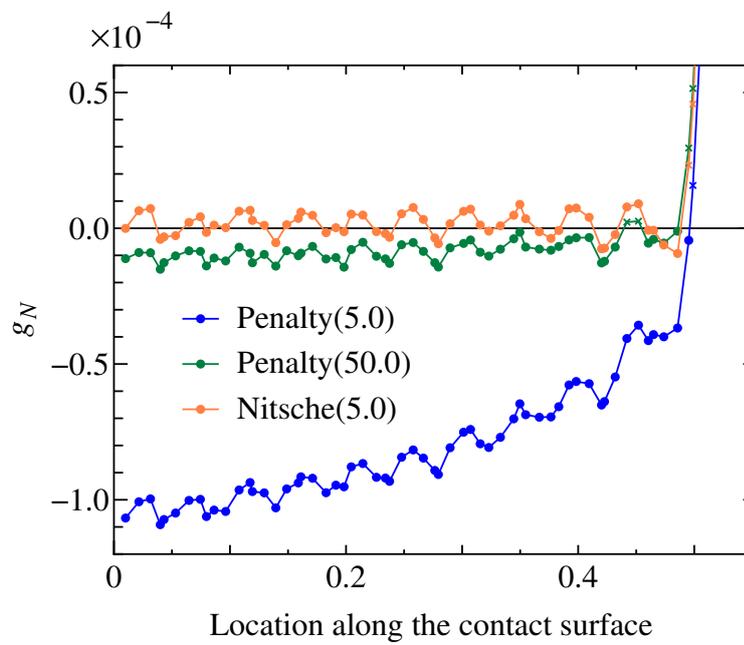


Fig. 3.22 g_N (Hertz - inclined)

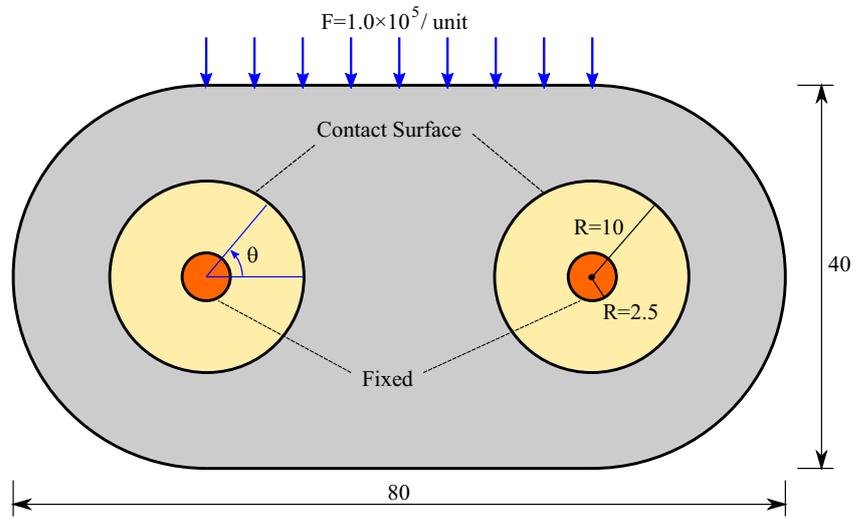


Fig. 3.23 Contact of shafts and component

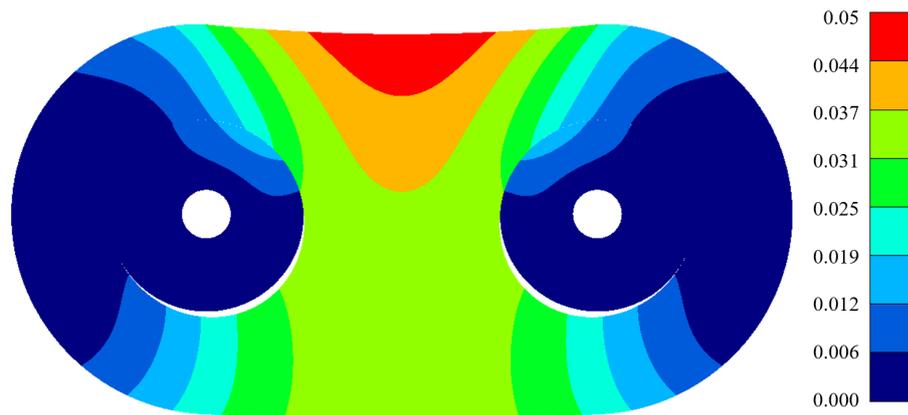


Fig. 3.24 Deformation($\times 30$) and displacement - Nitsche (shafts-component)

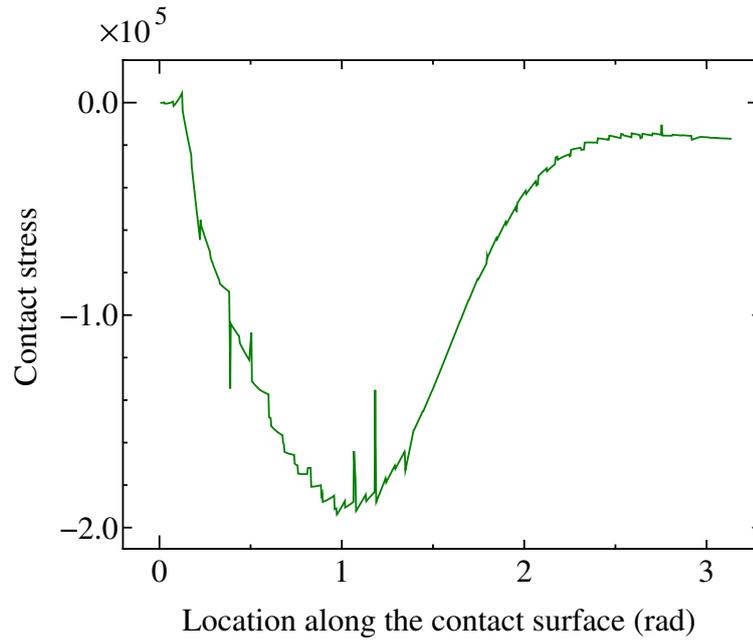


Fig. 3.25 Contact stress - Penalty(25.0) (shafts-component)

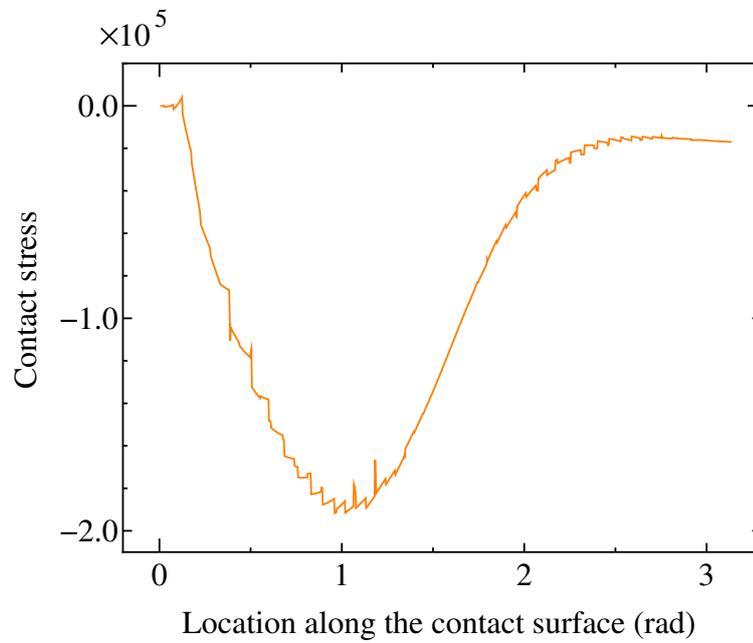


Fig. 3.26 Contact stress - Nitsche(5.0) (shafts-component)

第4章 3次元問題への適用と性能評価

4.1 はじめに

前章では、提案手法の2次元問題における基本的な妥当性を確認した。また接触拘束条件の定式化として、Nitscheの方法にて提案した接触応力重み係数の調整手法を用いれば、小さなペナルティ係数でも高精度の結果が得られるため、ペナルティ法において生ずる過拘束現象を回避できることを確認した。これらの結果を踏まえて本章では、本来の研究目的である3次元問題へ提案手法を展開する。

3次元問題では、解析対象の物体の形状表現として、多くの汎用3次元CADソフトウェアから出力可能なSTL形式を採用した。また一般的にボクセル解析法による3次元問題の解析では、自由度数が膨大となるため、連立一次方程式の解法として直接法を用いることが困難である。そこで本研究では連立一次方程式の解法として、ボクセル解析法と相性の良いEBE-PCG法を採用した。その際、要素内を物体の境界が横切るような要素に関する要素積分が、計算効率上問題となる。本章ではこの数値積分の効率化についても検討する。

また要素内で物体の占める体積が微小な要素は、前章で示したように応力分布に悪影響を及ぼすのみならず、周りの要素に比べて相対的に要素剛性が著しく低下するため、全体剛性マトリクスの性質の悪化を引き起こす。これは反復法による連立一次方程式の求解において、収束性に悪影響を及ぼす。これに対して、Fictitious domain methodなどで提案されているghost penaltyをFCMに適用し、安定化を図ることを提案する。

本章では、まずSTL形式の入力データを用いたFCMによる3次元接触解析のアルゴリズムについて述べる。また連立一次方程式の解法としてEBE-PCG法を用いる際の、サブボクセル分割とNewton-Cotes積分を用いた境界要素の数値積分の高速化手法につ

いて述べる．さらに ghost penalty の導入による境界要素の安定化手法を示す．最後に基本的な 3 次元接触問題の数値解析により提案手法の妥当性を検証するとともに，接触拘束条件の定式化としてペナルティ法を用いた場合と Nitsche の方法を用いた場合との精度および計算コストについて比較する．また接触する 2 物体のヤング率が異なる場合の，Nitsche の方法における接触応力重み係数やペナルティ係数の与え方についても検討する．

4.2 物体の形状表現と境界積分アルゴリズム

本研究では 3 次元の物体形状を閉じた三角形パッチ群で表す．三角形パッチ群は多くの場合 STL (Stereolithography または Standard Triangle Language) 形式と呼ばれるデータ形式で表現される．汎用の 3 次元 CAD ソフトウェアでモデリングしたソリッドモデルの出力形式や，CT 画像から生成した等値面の表現方法としても一般的であり，汎用性の高い形状表現形式である．荷重，拘束，接触などの境界条件も，各三角形パッチに与えておく．

2 次元問題の場合と同様に，3 次元問題においても，三角形パッチ群として与えられた物体形状を包含するように直交格子を配置し，この各格子を要素とする．続いて各三角形パッチを要素境界面で切断し，これによって得られた多角形をさらに三角形に分割する．こうして生成された三角形群を，分割パッチ群と呼ぶ (**Fig. 4.1**)．すなわち，各分割パッチは，空間的にいずれか 1 つの要素内に収まる．分割後のパッチ形状に求められる性質は，三角形内の面積分計算が可能であることだけであるので，有限要素分割の場合のように三角形の大きさやアスペクト比に注意したり，コネクティビティを意識したりする必要はなく，単純なアルゴリズムでロバストに分割することができる．また元の三角形パッチごとに独立して分割して良いので，並列処理も容易である．

荷重条件，ディリクレ条件および接触拘束条件に関する境界積分は，得られた分割パッチごとに行う．接触拘束条件については $B^{[2]}$ 側の分割パッチにて積分する．その際， $B^{[2]}$ 側の各積分点に対応する $B^{[1]}$ 側の点を求める必要がある．これについては， $B^{[1]}$ 側の分割パッチ上で，変形前形状において $B^{[2]}$ 側の各積分点に最も近い点を探索して対応させた．

なお本研究では微小変形を仮定しているため、ここで求めた最近傍点は変形後形状においても変化しない。また式 (2.22), (2.23) および式 (2.47)~(2.50) の境界積分における法線ベクトル $\mathbf{n}^{[j]}$ には、当該積分点、あるいはその相手側の最近傍点が所属する分割パッチの外向き法線ベクトルを用いた。

また得られた分割パッチ群は、サブボクセル分割時の内外判定にも用いる。これについては次節で詳しく述べる。

4.3 EBE-PCG 法による連立一次方程式の求解

ボクセル解析法では大規模な問題に対応するために、連立一次方程式の解法として Element-by-Element Preconditioned Conjugate Gradient (EBE-PCG) 法⁵⁷⁾ が用いられることが多い。すべての要素の大きさと形状が同一である通常のボクセル解析法に EBE-PCG 法を適用すると、事前に材料別に要素剛性マトリクスを作成しておくことにより、CG 法の反復計算中のメモリ使用量と計算量を圧倒的に節約することが可能である。しかし FCM においては、要素内に物体境界を含む要素については、要素ごとに異なる要素剛性マトリクスとなるため、そのまま EBE-PCG 法を適用するのは効率が悪い。

そこで本研究では、物体境界を含む要素については、山田・長嶋⁵⁸⁾ が提案した Newton-Cotes 積分による境界要素積分手法を採用した。具体的には、要素剛性マトリクス \mathbf{K}_e を次のように計算する。

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{N_g} m_i (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_i \quad (4.1)$$

$$m_i = \int_{\Omega_e} L_i d\Omega \quad (4.2)$$

N_g は Newton-Cotes 積分の積分点数である。本研究では十分な数値積分の精度を確保するため、被積分関数の次数を考慮して、要素の各軸方向に 3 点の積分点を設け、要素全体で N_g を 27 とした。 m_i は積分点の重みであり、式 (4.2) に示すように、ラグランジュ補

間関数 L_i を要素内で物体が占める領域 Ω_e で積分することにより得られる。要素ごとに異なるのは m_i のみで、 $(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_i$ は共通であることを利用すると、CG法の反復計算前に以下の準備を行うことにより効率的に計算することが可能である。

- i) 物体境界を含む要素をサブボクセルに分割する。
- ii) サブボクセルごとに物体の内部か外部か判定する。
- iii) 内部と判定されたサブボクセルを式 (4.2) の積分範囲として、重み m_i を算出する。

なお本研究では要素の各辺を 16 等分してサブボクセル分割を行った。

結果的に CG法の反復計算における要素剛性マトリクスと CG法の第 k 回反復における探索方向ベクトル $\mathbf{p}^{(k)}$ の積演算は、次式の通りとなる。

$$\mathbf{K}_e \mathbf{p}^{(k)} = \sum_{i=1}^{N_g} m_i (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_i \mathbf{p}^{(k)} \quad (4.3)$$

事前に m_i および $(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_i$ は計算されているので、式 (4.3) は、物体境界を含まない要素における積演算と同様の積演算を N_g 回繰り返すだけで良いことを表している。通常、物体境界を含む要素の占める割合は小さいことが多いので、本アルゴリズムにより、FCMに EBE-PCG法を採用しても実用上十分な計算性能が期待できる。

一方、接触拘束条件およびディリクレ条件に関する境界積分は、分割パッチごとにガウス積分（積分点数 3 点）により行った。なおこれらも Element-by-Element の手法に則り、分割パッチごとに、境界積分項のマトリクスを計算し、探索方向ベクトル $\mathbf{p}^{(k)}$ との積演算を行う。前節で述べた通り、各分割パッチが属する要素は一意に定まっているので、自由度の対応付けは容易である。また接触拘束条件については、この積分点ごとに接触判定を行った。

一般的に、CG法の収束判定には残差ノルムが用いられることが多いが、本研究の手法では剛性マトリクスや荷重ベクトルがペナルティ係数に依存するため、異なるペナルティ係数に対する計算効率の比較を行うには必ずしも適していない。そこで本研究では EBE-PCG法の収束判定条件を、CG法における前の反復ステップからの未知数ベクトル

の変化率を指標として次のように設定した.

$$\frac{\|\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{q}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{q}^{(k)}\|} < \bar{\varepsilon}_c \quad (4.4)$$

ただし, $\mathbf{q}^{(k)}$ は CG 法の第 k 回反復における未知数ベクトルであり, $\|\cdot\|$ は L^2 ノルムを表す. $\bar{\varepsilon}_c$ は 1.0×10^{-8} とした. なお未知数ベクトルの変化が十分小さくなくても, 残差ノルムが大きい場合は収束と見做すことは不適切であるため, 補助的に残差ノルムが 1.0×10^{-4} を下回るまでは反復を繰り返すこととした.

CG 法の前処理には対角スケーリングを用いた. また各接触反復における未知数ベクトルの初期値として, 前の接触反復の解を用いた. これにより, 各接触反復における CG 法の反復回数が大幅に低減されることを実際の数値実験において確認している.

4.4 Ghost penalty の適用

2次元問題においても問題になったように, FCM による解析では, 物体表面付近に物体が占める割合の小さな要素が発生し, 解析精度に悪影響を及ぼす.

2次元問題では, 接触境界における応力精度の向上を目的として式 (3.2) を用いて接触応力重み係数 α を調整することにより, 充填率の小さな要素の影響を低減させて安定化を図ることができた. しかし3次元問題において, 連立一次方程式の解法に反復法を用いた場合, 接触境界のみならずモデル全体において, 充填率の小さな要素が全体剛性マトリクスの性質の悪化を引き起こし, 収束性に悪影響を及ぼす.

このような充填率の小さな要素による不安定性を回避する方策として, 単にそのような要素は解析から除外してしまうという手段も考えられるが, 当該要素に属する三角形パッチにディリクレ条件や接触拘束条件が付与されている場合, 結果的にそれらが無視されることになり解析精度の観点から好ましくない.

そこで本研究では, Fictitious domain method や CutFEM において提案されている ghost penalty 項の付加⁵⁹⁾²¹⁾²²⁾により, 上記の問題への対応を図った. 以下に ghost penalty の適用について概略を示す.

すべての要素境界面のうち、境界面を挟む要素の少なくともどちらか一方が物体境界を含むような境界面 F の集合を F_G とする (**Fig. 4.2**). ここで F_G には一方の側に要素が存在しないような面 (すなわち表面に露出している要素の表面) は含まないことに注意する. この F_G に含まれる要素境界面 F において、応力の連続性が満たされるようにペナルティを課すことにより安定化を図るのが, ghost penalty の基本的な考え方である. FCM の定式化に基づいて離散化された線形弾性体の支配方程式において ghost penalty を考慮すると, 次式のようになる.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) d\Omega + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (4.5)$$

$$j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{F \in F_G} \int_F \gamma_G [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}_F}(\mathbf{u}^h)] \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}_F}(\mathbf{v}^h)] dF \quad (4.6)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}_F}] = \boldsymbol{\sigma}|_{K_1} \mathbf{n}_F - \boldsymbol{\sigma}|_{K_2} \mathbf{n}_F \quad (4.7)$$

ここで $j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h)$ が ghost penalty 項である. なお表記の簡略化のために物体力および接触拘束条件は省略した. K_1 および K_2 は要素境界面 F を挟んだ両側の要素であり, 少なくともどちらか一方は物体境界を含んでいる. また \mathbf{n}_F は要素境界面の法線ベクトル (正負の向きは任意) である. γ_G はペナルティ係数であり, 次元解析によりヤング率 E , 要素サイズ h および無次元化ペナルティ係数 β_G を用いて

$$\gamma_G = \beta_G \frac{h}{E} \quad (4.8)$$

と表される. 式 (4.6) の積分に式 (2.11) を代入して整理すると, 次式となる.

$$\int_F \gamma_G [\boldsymbol{\sigma}_{n_F}(\mathbf{u}^h)] \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{n_F}(\mathbf{v}^h)] dF = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}|_{K_1} & \delta \mathbf{d}|_{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{GP} & -\mathbf{K}_{12}^{GP} \\ -\mathbf{K}_{21}^{GP} & \mathbf{K}_{22}^{GP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}|_{K_1} \\ \mathbf{d}|_{K_2} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

ただし

$$\mathbf{K}_{ij}^{GP} = \int_F \gamma_G \mathbf{B}|_{K_i}^T \mathbf{D} \mathbf{M}_F \mathbf{M}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}|_{K_j} dF \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}_F = \begin{bmatrix} n_{Fx} & 0 & 0 \\ 0 & n_{Fy} & 0 \\ 0 & 0 & n_{Fz} \\ 0 & n_{Fz} & n_{Fy} \\ n_{Fz} & 0 & n_{Fx} \\ n_{Fy} & n_{Fx} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

である。

ghost penalty 項も EBE-PCG 法の反復計算の中で要素ごとに計算するが、本研究における手法では、すべての要素が同一形状のボクセルであるため、式 (4.10) はボクセルの各軸に垂直な面ごとに事前に 3 種類計算しておけば、毎回の反復計算において要素ごとに計算し直す必要はない。すなわちボクセル解析法に EBE-PCG 法を適用する場合の利点を損なわないので、本研究のアルゴリズムとの相性が良い。

なお、この ghost penalty 項を加える目的は安定化であり、要素充填率が比較的大きな要素に対して加味する必要はない。そこで本研究では数値実験の結果から、ディリクレ条件または接触拘束条件が設定されているパッチを含む要素、およびサブボクセルで計算した充填率が 5% 未満の要素に関する要素境界面のみを F_G に含むものとして、計算コストの低減を図った。

4.5 数値解析例

前節までで示した FCM による 3 次元接触解析アルゴリズムの有効性の確認, および接触拘束条件にペナルティ法を用いた場合と Nitsche の方法を用いた場合との解析精度や計算コストを比較するために, 基本的な 3 次元接触問題について数値解析を行った.

いずれの問題でも, 下側の物体を $\mathcal{B}^{[1]}$, 上側の物体を $\mathcal{B}^{[2]}$ とし, 座標系の向きに平行に要素分割を行った. また, 式 (2.59) で示した接触反復計算の収束判定条件におけるしきい値 $\bar{\epsilon}_e$ は 1.0×10^{-8} とした.

解析には Intel[®] Core i7-7800X(3.5GHz, 6 cores), 物理メモリ 128GB を搭載した計算機を用い, 6 並列の SMP にて計算を実行した.

4.5.1 弾性体ブロックの接触

ごく単純な問題における Nitsche の方法とペナルティ法の基本的な解析精度の違いを確認する目的で, **Fig. 4.3** に示すように, 上下に配置された 2 つの弾性体ブロックの接触問題の解析を行った. ともにヤング率は 1.0×10^8 , ポアソン比は 0 である. 下側のブロックの下面の鉛直方向変位を拘束し, 上側のブロックの上面に下向きに大きさ 0.02 の強制変位を課した. 解析は 1/4 モデルで行った. その断面図を **Fig. 4.4** に示す. 黒い点線は要素境界を示しており, 要素サイズは 0.1 である. 接触境界を含む格子には上下それぞれのブロックに対する要素が重なって配置されている.

本問題では接触拘束条件およびディリクレ条件それぞれについて, ペナルティ法および Nitsche の方法を適用して検証を行った. Nitsche の方法による接触拘束条件に関する無次元化ペナルティ係数 β_N は, 数値実験の結果から 5.0 とし, ペナルティ法についても比較のために同じく β_P を 5.0 とした. また Nitsche の方法によるディリクレ条件に関する無次元化ペナルティ係数 β_D は同じく数値実験の結果から 10.0 とし, ペナルティ法についても同様とした. また Nitsche の方法における式 (2.37) の接触応力重み係数 α は 0.5 とした. なお本問題に限り, 連立一次方程式の解法として直接法を用いた. また接触反復計算が不要であることが自明であるため, 1 回で収束とした.

接触面での接触応力の平均値および g_{ave} を **Table 4.1** に示す．なお接触応力はいずれの手法でもほぼ一様な分布となった．接触拘束条件として Nitsche の方法を適用した場合の接触応力は，ペナルティ法を適用した場合に比べて，ディリクレ条件の手法に依らずより理論解に近い値となった． g_{ave} についても Nitsche の方法はペナルティ法に比べて大幅に小さく，精度が高いことが確認できる．またペナルティ法において精度を高めるために β を 10 倍の 50.0 にした結果も併せて示したが，それでもなお Nitsche の方法の方が高精度であることが確認できる．

また **Table 4.2** に，ディリクレ条件が課されている下側の物体下面の鉛直方向変位の平均値 u_{ave} の比較を示す． u_{ave} の定義は次式の通りである．

$$u_{ave} = \left(\frac{\int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_D} d\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Nitsche の方法を用いた場合の鉛直方向変位の平均値は，ペナルティ法を用いた場合に比べて大幅に小さくなっており，ディリクレ条件についても，Nitsche の方法の方が高い精度で満足していることがわかる．

4.5.2 曲げが作用する板の接触

連立一次方程式の解法に EBE-PCG 法を用いた場合のアルゴリズムの妥当性と計算コストを検証するために，曲げが作用する 2 枚の板 (**Fig. 4.5**) の接触解析を行った．図に示す通り，上側の板の上面の先端部に単位面積あたり 100.0 の等分布荷重が作用している．板のヤング率は上下ともに 1.0×10^8 ，ポアソン比は 0.3 である．要素サイズは 0.2 とした．

(1) モデルが傾斜していない場合

まず，板の形状に対して平行に要素分割した場合の解析を行った．接触拘束条件およびディリクレ条件それぞれにペナルティ法および Nitsche の方法を用い， β および β_D は，それぞれ前項と同じく 5.0 および 10.0 とした．また接触拘束条件にペナルティ法を

用いた場合については、Nitsche の方法を用いた場合と同程度の g_{ave} が得られるまで β を大きくして、30.0 とした場合の解析結果も併記した。なお Nitsche の方法における接触応力重み係数 α は 0.5 とした。自由度数は 83,268 である。

Fig. 4.6 および **Fig. 4.7** に変形図を、**Fig. 4.8** および **Fig. 4.9** に上側の板の接触／非接触の状態を示す。**Fig. 4.8** および **Fig. 4.9** の図中の赤い点は接触と判定された積分点、青い点は非接触と判定された積分点である。いずれの解析においても妥当な変形形状と接触状態が得られていることがわかる。

また、 g_{ave} 、接触反復回数、総 CG 法反復回数（各接触反復における CG 法の反復回数の合計）および接触反復の計算時間を **Table 4.3** に示す。接触拘束条件にペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合を比較すると、同じペナルティ係数 ($\beta = 5.0$) であれば、計算コストについては大差ないにも関わらず、 g_{ave} は Nitsche の方法を用いた場合の方が小さくなっており、精度良く解析できていることがわかる。精度向上のために $\beta = 30.0$ としたペナルティ法の結果を見ると、 g_{ave} が小さくなり精度が向上している反面、CG 法の反復回数や接触反復の回数が増加して、結果的に 2 倍以上の計算時間を要している。これはペナルティ係数を大きくしたことにより、剛性マトリクスの性質が悪化し、CG 法の収束性に悪影響を与えたためであると考えられる。つまり連立一次方程式の解法に反復法を用いた場合、同程度の精度を得るためには、ペナルティ法より Nitsche の方法を用いた方が計算コストを抑えることが可能であると言える。

また、ディリクレ条件にペナルティ法を用いた場合について、**Fig. 4.8(a)** の図中に点線で示した線分上における g_N を **Fig. 4.10** に示す。グラフの実線部は周辺の積分点が概ね接触状態と判定されていることを、同じく点線部は非接触状態と判定されていることを表している。このグラフからも、Nitsche の方法を用いた方が、貫入量が少なく精度の良い結果が得られることがわかる。

(2) モデルがわずかに傾斜している場合

続いて、要素内で物体が占める領域が微小な要素による影響を検証するために、要素分割の格子に対して 2 枚の板をわずかに傾けて解析を行った。傾けた角度は、要素分割方向

として用いている座標系の X 軸回りに 0.5° である。自由度数は 83,046 である。

わずかに傾けることにより、要素内で物体が占める領域が微小となり、**Fig. 4.11** のように、物体内部と判定されるサブボクセルがごく少数になったり、あるいは全く存在しないような要素が生ずる。このような要素は全体剛性マトリクスの性質を悪化させ、数値的な不安定を引き起こす要因となる。

そこでまず簡易的な対策として、外部と判定されたサブボクセルに微小な剛性を与えることにより、全体剛性マトリクスの性質の悪化の緩和を試みた。具体的には、外部と判定されたサブボクセルに、ヤング率の 1.0×10^{-6} 倍の剛性を与えて解析を行った。

加えて Nitsche の方法においては、2次元問題の場合と同様に、接触境界における充填率の小さな要素の影響を低減するために、式 (3.2) の考え方を 3次元にそのまま拡張して、接触応力重み係数 α を次式により定めた。

$$\alpha = \frac{V^{[1]}}{V^{[1]} + V^{[2]}} \quad (4.13)$$

ここで $V^{[j]}$ は当該要素内で $B^{[j]}$ が占める体積である。本研究では計算コストへの配慮から、 $V^{[j]}$ の近似値として当該要素内で物体内部と判定されたサブボクセルの体積の合計を用いた。

まず、接触拘束条件およびディリクレ条件ともに Nitsche の方法 ($\beta = 5.0$, $\beta_D = 10.0$) を用いて解析を行った。上側の板の応力の法線方向成分について、(1) のモデルが傾斜していない場合との比較を **Fig. 4.12** に示す。モデルがわずかに傾斜している場合の応力分布 (b) には応力分布の乱れが見られ、モデルが傾斜していない場合 (a) に比べて、大きいところでは絶対値で 500 倍を超える異常値を示している。これは、上記の対策だけでは、充填率の小さな要素による悪影響に対して十分対応し切れなかったためと考えられる。外部と判定されたサブボクセルに与える剛性を大きくすることで悪影響を緩和することは可能であるが、解析精度の低下は免れず、接触応力の評価にも悪影響を及ぼす。

そこで、上記の対策に加えて、4.4 節で示した ghost penalty による安定化を適用した。ghost penalty に関する無次元化ペナルティ係数 β_G は、数値実験の結果から 0.1 とした。

接触拘束条件にペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合の解析結果を **Fig. 4.13** に示す。ghost penalty により、**Fig. 4.12(b)** に見られるような異常な応力分布が無くなり、充填率の小さな要素による悪影響が大幅に改善されていることがわかる。また **Table 4.4** に、ghost penalty の適用の有無による計算コストの比較を示す。ghost penalty の適用により、特に CG 法の反復回数が大幅に改善していることがわかる。これは、ghost penalty の安定化効果によって、充填率の小さな要素による全体剛性マトリクスの性質の悪化が大幅に緩和されたためと考えられる。

(3) モデルが大きく傾斜している場合

より一般的な要素分割の状況における ghost penalty の効果を検証するために、要素分割の方向に対して **Fig. 4.14** のように 2 枚の板を大きく傾けて解析を行った。ディリクレ条件および接触拘束条件にはペナルティ法を用いた。なお (2) と同様に、外部と判定されたサブボクセルに対して微小剛性を与えるとともに、Nitsche の方法における α の決定には式 (4.13) を用いた。

まず、ghost penalty を適用していない場合の応力の法線方向成分の分布を **Fig. 4.15** に示す。また図中の赤枠部分の拡大図を **Fig. 4.16(a)** に示す。拡大図赤丸部に、応力が大きく乱れる箇所が見られる。一方、ghost penalty を適用した場合の同箇所の解析結果を同図 (b) に示す。応力の乱れが無くなり、安定した結果が得られていることが確認できる。以上の結果に (2) の考察も踏まえると、ghost penalty は、FCM による 3 次元接触解析の安定化に極めて有効であると言える。

続いて、ghost penalty を適用した上で、ディリクレ条件と接触拘束条件の定式化にペナルティ法と Nitsche の方法を用いた場合の比較を行った。 β および β_D は、それぞれ (1), (2) と同様に 5.0 および 10.0 としている。またペナルティ法については、Nitsche の方法と同程度の g_{ave} が得られるように、 β を 15.0 まで大きくした場合についても解析も行った。自由度数は 100,083 である。

Fig. 4.17 および **Fig. 4.18** に変形図を、**Fig. 4.19** および **Fig. 4.20** に上側の板の接触／非接触の状態を示す。いずれの解析結果も妥当な変形形状と接触状態が得られてお

り、モデルが要素分割の格子に対して大きく傾いていても問題なく解析できることが確認できた。なおペナルティ法において β を大きくした場合、全体の解析精度に影響を与えるようなレベルではないものの、接触範囲の一部に非接触と判定される箇所が見られた。

g_{ave} および計算コストを **Table 4.5** に示す。接触拘束条件に同じ無次元化ペナルティ係数 5.0 を用いた場合、(1) と同様に、Nitsche の方法の方が g_{ave} が小さく、高精度であることがわかる。またペナルティ法において β を大きくした場合、 g_{ave} は小さく抑えられる一方、CG 法の収束性が悪化して計算時間が増加している。

また、ディリクレ条件にペナルティ法を用いた場合について、**Fig. 4.19(a)** の図中に点線で示した線分上における g_N を **Fig. 4.21** に示す。グラフの実線と点線の区別は **Fig. 4.10** と同様である。モデルが傾斜していない場合と比較すると、いずれの結果も g_N の乱れは大きくなっているが、やはり同程度のペナルティ係数を用いた場合、Nitsche の方法はペナルティ法に比べて貫入量が小さく抑えられることが確認できる。

4.5.3 球体と剛体平板との接触

代表的な接触問題であるヘルツの接触問題の解析を行った。**Fig. 4.22** のように固定された剛体の平板の上にヤング率 1.0×10^8 、ポアソン比 0.3、半径 10 の弾性体の球体が接触している。球体上部中央に下向きに 1.0×10^7 の集中荷重を作用させた。解析は 1/4 モデルで行い、剛体平板については接触に関わる必要最小限の部分のみモデル化した。ディリクレ条件はすべて Nitsche の方法 ($\beta_D = 10.0$) で課した。一方接触拘束条件についてはペナルティ法と Nitsche の方法を用い比較を行った。なお無次元化ペナルティ係数 β は Nitsche の方法による数値実験の結果から 10.0 とし、比較のためにペナルティ法についても同様とした。ただしペナルティ法については、精度を向上するために β を 30.0 に増加した解析も併せて実施した。また $\mathcal{B}^{[1]}$ にあたる下側の物体が剛体であるため、Nitsche の方法における接触応力重み係数 α は 0 とした。

本問題では、要素サイズの違いによる精度および計算コストを比較するために、0.2, 0.15, 0.1, 0.075, 0.05 の 5 種類の要素サイズを用いて解析を行った。また、連立一次方程式の解法として EBE-PCG 法による反復法を用い、安定化のために、前項と同様に外

部と判定されたサブボクセルにヤング率の 1.0×10^{-6} 倍の剛性を与えるとともに, ghost penalty を課した.

要素サイズ 0.1 の場合の各手法による球体下端付近 (平板と接触している付近) の鉛直方向変位分布を **Fig. 4.23** に, 接触応力分布を **Fig. 4.24** に示す. 手法の違いによる顕著な差異は見られず, いずれも妥当な解析結果が得られている. また各積分点における接触 / 非接触の状態を **Fig. 4.25** に示す. 緑色の円弧は接触半径の理論解 (0.88044)⁵⁶⁾ を示しており, 解析結果と理論解がよく一致していることがわかる. ただし $\beta = 30.0$ のペナルティ法では, 理論解の接触半径内に一部非接触と判定されている点が見られる. また **Fig. 4.26** に, **Fig. 4.25(a)** の図中に点線で示した線分上の接触応力を示す. グラフの実線と点線の区別は **Fig. 4.10** と同様である. 手法の違いによる接触応力の顕著な差異は見られないが, 接触下端付近において, いずれの手法でも理論解との多少の誤差が見られる. モデルを確認すると, この付近では物体表面が要素境界の近傍に位置しており, 本研究で用いている 3 重 1 次要素の要素内において, 相対的に応力の精度が低い領域で応力評価しているのがその要因であると考えられる.

続いて, 要素サイズと g_{ave} の関係を **Fig. 4.27** に示す. いずれの手法でも要素サイズが小さくなるにつれて g_{ave} も小さくなっており, 精度が向上することが確認できる. またいずれの要素サイズでも, Nitsche の方法は, 同じペナルティ係数を用いた場合のペナルティ法に比べて g_{ave} が小さく, 精度が高いことがわかる. 差異をよりわかりやすくするため, $\beta = 10.0$ の場合のペナルティ法と Nitsche の方法の g_{ave} の比を同図に示す. 要素サイズが小さくなるほど g_{ave} の比が大きくなっていることがわかる. これは, 要素サイズが小さくなるほど, Nitsche の方法と同程度の g_{ave} 得るには, ペナルティ法においてペナルティ係数をより大きくしなければならないことを示唆していると考えられる.

また, 要素サイズと球体中心の鉛直方向変位の理論解 (0.077518) との誤差の関係を **Fig. 4.28** に示す. $\beta = 10.0$ の場合のペナルティ法と Nitsche の方法を比較すると, ペナルティ法は要素サイズを小さくしても単調に誤差が減少していないのに対し, Nitsche の方法は単調に誤差が減少しており, 良い収束性を示している. なお, ペナルティ法の方が全体に誤差が小さく一見精度が高いように見えるのは, 要素が粗く固い解が得られている

状況でも、貫入量が大きいことによりそれを相殺しているに過ぎないと考えられる。これは、1.3.2項で述べた、ペナルティ法をディリクレ条件に適用した場合の傾向とも一致している。ただし β を大きくすれば、ペナルティ法でも収束性が改善することが確認できる。

要素サイズと計算コスト（自由度数、接触反復回数および総 CG 法反復回数）の関係を **Table 4.6** に、要素サイズと接触反復の計算時間の比較を **Fig. 4.29** に示す。同じペナルティ係数の場合、ペナルティ法と Nitsche の方法とで計算コストに大きな違いは見られないが、ペナルティ法で β を大きくすると、総 CG 法反復回数の増加に伴い計算時間が増加し、計算効率が悪化している。**Fig. 4.27** から、要素サイズ 0.05 の場合、Nitsche の方法と同程度の精度を得るには、ペナルティ法では β を 100 程度にする必要があると考えられるので、計算コスト面でさらに不利になるものと考えられる。

4.5.4 球体同士の接触

続いて弾性体同士の接触問題における精度を検証するために、球体同士の接触問題の解析を行った。**Fig. 4.30** に示すように、ヤング率 1.0×10^8 、ポアソン比 0.3、半径 10 の 3 つの球体が接触し、両端から 1.0×10^7 の集中荷重を作用させた。解析は 1/8 モデルで実施した。ディリクレ条件はすべて前項同様に Nitsche の方法 ($\beta_D = 10.0$) で課し、接触拘束条件についてはペナルティ法と Nitsche の方法を用いて比較を行った。Nitsche の方法における接触応力重み係数 α は、式 (4.13) にて要素内の物体の充填率に応じて定めた。

また前項と同じく 5 種類の要素サイズで解析を行った。連立一次方程式の解法には EBE-PCG 法を用い、前項同様に微小剛性および ghost penalty による安定化を適用した。

(1) モデルが傾斜していない場合

まずモデルの各対称面の向きに平行に要素分割し解析を行った。接触拘束条件に関する無次元化ペナルティ係数 β は、Nitsche の方法による数値実験の結果から 5.0 とし、比較のためにペナルティ法についても同様とした。またペナルティ法については精度向上のために β を 25.0 に増加した場合の解析も併せて実施した。

要素サイズ 0.1 の場合の上側の球体下端付近の接触応力分布を **Fig. 4.31** に示す。また各積分点における接触／非接触の状態を **Fig. 4.32** に示す。緑色の円弧は接触半径の理論解 (0.88044) を示している。前節の球体と剛体平板との接触の場合と同様に、解析結果の接触範囲と理論解はよく一致しているが、 $\beta = 25.0$ のペナルティ法については、理論解の接触半径内に一部非接触と判定される点が見られた。また **Fig. 4.33** に、**Fig. 4.32(a)** の図中に点線で示した線分上の接触応力を示す。いずれの手法についても、概ね理論解に近い結果が得られていることが確認できる。

要素サイズと g_{ave} の関係を **Fig. 4.34** に示す。同じペナルティ係数を用いた場合のペナルティ法と Nitsche の方法との g_{ave} と要素サイズの関係も含めて、前項の球体と剛体平板との接触問題で見られた傾向と全く同じ傾向が見られる。また要素サイズと球体中心同士の相対変位の理論解 (0.15504) との誤差の関係を **Fig. 4.35** に示す。要素サイズに対する誤差の収束性は、やはり前項で見られた傾向と合致している。

要素サイズと計算コストの関係を **Table 4.7** に、要素サイズと接触反復の計算時間の比較を **Fig. 4.36** に示す。ペナルティ法で β を大きくした場合、総 CG 法反復回数および計算時間ともに Nitsche の方法よりも大幅に悪化している。また悪化の度合いは前項の球体と剛体平板との接触問題よりさらに顕著になっている。これは、前項における β の比が 3 倍であったのに対し、本問題では 5 倍と大きくなっているためであると考えられる。

(2) モデルが傾斜している場合

続いてより一般的な要素分割の状況における精度と計算効率を検証するために、(1) と同じ問題を、要素分割の方向に対して **Fig. 4.37** のように傾けて解析を行った。その他の解析条件はすべて (1) と同様である。

要素サイズ 0.1 の場合の接触領域付近の変位分布を **Fig. 4.38** に、上側の球体下端付近の接触応力分布を **Fig. 4.39** に示す。また各積分点における接触／非接触の状態を **Fig. 4.40** に示す。さらに **Fig. 4.41** に、**Fig. 4.40(a)** の図中に点線で示した線分上の接触応力を示す。いずれの結果からも、(1) のモデルが傾斜していない場合と同様に解析の妥当性が確認できる。

要素サイズと g_{ave} の関係を **Fig. 4.42** に示す. (1) の場合と全く同様の傾向が確認できる. 特に $\beta = 5.0$ の場合のペナルティ法と Nitsche の方法の g_{ave} の比を確認すると, 要素サイズが小さい場合に, (1) のモデルが傾斜していない場合に比べてさらに g_{ave} の比が大きくなっており, Nitsche の方法の優位性がより顕著に現れている. 要素サイズと球体中心同士の相対変位の理論解との誤差の関係 (**Fig. 4.43**) についても, (1) の場合と同様の傾向が見られる.

要素サイズと計算コストの関係を **Table 4.8** に, 要素サイズと接触反復の計算時間の比較を **Fig. 4.44** に示す. $\beta = 25.0$ のペナルティ法と Nitsche の方法とを比較すると, (1) よりさらに計算コストの差異は大きくなっており, Nitsche の方法の計算コスト面での優位性がより顕著になっている.

さらに, 要素サイズ 0.05 の場合について, ペナルティ法において Nitsche の方法と g_{ave} が同程度になるように β を 75.0 に設定して解析を行った. Nitsche の方法 ($\beta = 5.0$) の結果と併せて, 接触/非接触の状態を **Fig. 4.45** に示す. ペナルティ法では, 緑色の円弧で示した接触半径の理論解の内側に, 非接触と判定されている点が多く見られる. これは過大なペナルティ係数により過拘束が生じているためと考えられる.

(3) 異種材料の場合

Nitsche の方法では安定化項のペナルティ係数を小さく抑えることが可能であり, 接触する 2 物体が同じ材料であれば, その物性値に依存せず式 (2.25) における無次元化ペナルティ係数 β_N を定数として解析できることがここまでの 3 次元問題で数値的に確認された.

一方, 接触する両側の物体で物性値が異なる場合, 式 (2.25) におけるヤング率 E をどのように設定するかが問題となる. ここまでの問題で示した通り, 同じヤング率の弾性体同士の接触については $\beta_N = 5.0$, 弾性体と剛体との接触においては $\beta_N = 10.0$ (4.5.3 項を参照) が妥当な設定であることを数値実験により確認した. ここで剛体を無限大のヤング率を持つ弾性体であると見做せば, 接触する 2 物体の物性値の違いに応じて 5.0~10.0 の範囲で β_N を調整するのが妥当であると考えられる. 本研究では数値実験の結果, 実験

式的に得られた次式で β_N および γ_N を与えることにより，妥当な結果が得られることを確認した．

$$\beta_N = \min \left(\frac{5 E_2}{9 E_1} + \frac{40}{9}, 10 \right) \quad (4.14)$$

$$\gamma_N = \beta_N \frac{E_1}{h} \quad (4.15)$$

ただし， E_1, E_2 は接触する 2 物体のヤング率 ($E_1 < E_2$) である．式 (4.14) によれば，同材料の場合は $\beta_N = 5.0$ ，2 物体のヤング率の比が 10 倍以上の場合は，小さい方のヤング率を基準として $\beta_N = 10.0$ となる．一方が剛体の場合も $E_2 = \infty$ と考えれば $\beta_N = 10.0$ となり，これまでの 3 次元問題で用いた β_N と整合する．

Annalarapu *et al.*⁶⁰⁾ はポアソン問題において，Nitsche の方法を用いて異種材料界面の連続性を課す際の安定性を解析的に評価し，界面でのフラックスの評価における重み係数に，物性に相当する係数を加味することを提案している．これに倣って，異種材料の場合は，接触応力重み係数 α を次式により評価することとした．

$$\alpha = \frac{V^{[1]}/E^{[1]}}{V^{[1]}/E^{[1]} + V^{[2]}/E^{[2]}} \quad (4.16)$$

なお $E^{[1]} = E^{[2]}$ の場合，式 (4.16) は式 (4.13) と一致する．

式 (4.14) および式 (4.16) の妥当性の検証のために，(2) で取り上げた球体同士の接触問題（モデルが傾斜している場合）の解析を行った．上側の球体のヤング率 E_1 は 1.0×10^8 固定とし，下側の球体のヤング率 E_2 として 2.0×10^8 ， 5.0×10^8 ， 1.0×10^9 の 3 種類を用いた．ポアソン比はすべて 0.3，要素サイズは 0.1 であり，明示した条件以外の解析条件はすべて (2) と同じである．ペナルティ法および Nitsche の方法ともに式 (4.14) で得られる β を使い，比較のためにペナルティ法については Nitsche の方法と g_{ave} が同程度になるように無次元化ペナルティ係数を適宜大きくした場合の解析も併せて実施した．

各積分点における接触／非接触の状態を **Fig. 4.46**～**Fig. 4.48** に示す．各図中の緑色の円弧は接触半径の理論解を表しており，いずれも解析結果の接触範囲とよく一致してい

るが、ペナルティ法でペナルティ係数が大きい場合については、理論解の接触半径の内側で、非接触として判定される点が目立っている。また **Fig. 4.40(a)** の図中に点線で示した線分上の接触応力を **Fig. 4.49** に示す。いずれの解析結果も概ね理論解に近い結果が得られている。

また、それぞれの球体中心同士の相対変位および g_{ave} を **Table 4.9** に示す。いずれの解析結果でも、中心間の接近距離は理論解と数パーセントの誤差があるが、概ね問題ない結果が得られている。また同じペナルティ係数を用いた解析同士を比較すると、Nitscheの方法の方が g_{ave} がかなり小さく抑えられており、精度が良いことがわかる。

計算コストの比較を **Table 4.10** に示す。自由度数は 5,201,997 である。これまでの問題と同様に、同程度の g_{ave} を得るには、ペナルティ法に比べて Nitsche の方法の方が大幅に計算時間を短縮できることがわかる。

4.6 おわりに

本章では、前章までで構築した FCM による線形弾性体の微小変形範囲における摩擦なし接触解析アルゴリズムを拡張し、3次元問題における効率的なアルゴリズムを構築した。

3次元問題における自由度数の増大に対応するため、本研究では連立一次方程式の解法として EBE-PCG 法を適用した。その際、境界要素の数値積分にサブボクセル分割と Newton-Cotes 積分を用いることにより、FCM における EBE-PCG 法による反復計算を効率的に行えることを示した。また FCM では、境界要素の一部に、物体の充填率が微小な要素が生成され、数値的に不安定になることが避けられない。本研究ではこれに対して、FCM に ghost penalty を導入することを提案し、これによって不安定性に起因する異常な応力分布や反復法における収束性が改善され、数値計算の安定性が大幅に向上することを示した。

さらに数値解析により、2次元問題の場合と同様に、同程度のペナルティ係数に対し、接触拘束条件の定式化に Nitsche の方法を用いた方がペナルティ法よりも高精度の解析が行えることを確認した。加えて、ペナルティ法において Nitsche の方法と同程度の精度を得るためにペナルティ係数を大きくすると、全体剛性マトリクスの条件数が大きくなり、

反復法の収束性が大幅に悪化することを確認した。さらに Nitsche の方法では、一定の小さな無次元化ペナルティ係数の下で、要素サイズに対して誤差が良好な収束性を保つことを示し、精度管理の観点からもペナルティ法に比べて優位であることを確認した。

また接触する 2 物体の物性値が異なる場合について、無次元化ペナルティ係数および接触応力重み係数の調整方法の指針を示し、数値計算によりその妥当性を確認した。

Table 4.1 Contact stress and g_{ave} (Elastic blocks)

Contact	Dirichlet	Contact stress	g_{ave}
Penalty(5.0)	Penalty	-1.9231×10^6	3.8462×10^{-4}
	Nitsche	-1.9608×10^6	3.9216×10^{-4}
Penalty(50.0)	Penalty	-1.9570×10^6	3.9139×10^{-5}
	Nitsche	-1.9960×10^6	3.9920×10^{-5}
Nitsche(5.0)	Penalty	-1.9608×10^6	1.2444×10^{-15}
	Nitsche	-2.0000×10^6	1.3508×10^{-15}
Theory		-2.0000×10^6	0.0

Table 4.2 Average displacement of lower surface (Elastic blocks)

Contact	Dirichlet	u_{ave}
Penalty(5.0)	Penalty	1.9231×10^{-4}
	Nitsche	6.7229×10^{-16}
Penalty(50.0)	Penalty	1.9569×10^{-4}
	Nitsche	6.8419×10^{-16}
Nitsche(5.0)	Penalty	1.9608×10^{-4}
	Nitsche	6.8608×10^{-16}
Theory		0.0

Table 4.3 g_{ave} and calculation cost (Bending of plates)

Contact	Dirichlet	g_{ave}	Steps	Total CG iter.	Comp. time(sec)
Penalty(5.0)	Penalty	3.6901×10^{-8}	10	8834	142
	Nitsche	3.6899×10^{-8}	10	8820	147
Penalty(30.0)	Penalty	6.3153×10^{-9}	16	21747	319
	Nitsche	6.3152×10^{-9}	16	21712	332
Nitsche(5.0)	Penalty	5.5031×10^{-9}	10	8363	145
	Nitsche	5.5035×10^{-9}	10	8350	150

Table 4.4 Calculation cost (Bending of plates - slightly inclined)

β_G	Contact	Steps	Total CG iter.	Comp. time(sec)
0.0	Penalty(5.0)	14	37627	512
	Nitsche(5.0)	9	30225	478
0.1	Penalty(5.0)	10	11530	193
	Nitsche(5.0)	10	11553	220

Table 4.5 g_{ave} and calculation cost (Bending of plates - inclined)

Contact	Dirichlet	g_{ave}	Steps	Total CG iter.	Comp. time(sec)
Penalty(5.0)	Penalty	3.8367×10^{-8}	11	9093	228
	Nitsche	3.8363×10^{-8}	11	9087	234
Penalty(15.0)	Penalty	1.3688×10^{-8}	14	11973	293
	Nitsche	1.3683×10^{-8}	14	11969	309
Nitsche(5.0)	Penalty	1.3529×10^{-8}	11	8791	248
	Nitsche	1.3552×10^{-8}	11	8769	257

Table 4.6 Calculation cost (Sphere on rigid foundation)

h	Number of dofs	Contact	Steps	Total CG iter.
0.2	464442	Penalty(10.0)	13	5846
		Penalty(30.0)	18	8391
		Nitsche(10.0)	13	5847
0.15	1061790	Penalty(10.0)	14	8316
		Penalty(30.0)	19	11743
		Nitsche(10.0)	14	8203
0.1	3449055	Penalty(10.0)	15	12718
		Penalty(30.0)	20	17222
		Nitsche(10.0)	15	12725
0.075	8024400	Penalty(10.0)	15	16811
		Penalty(30.0)	20	23141
		Nitsche(10.0)	16	17313
0.05	26565462	Penalty(10.0)	16	24454
		Penalty(30.0)	21	33134
		Nitsche(10.0)	16	24610

Table 4.7 Calculation cost (Contact of spheres)

h	Number of dofs	Contact	Steps	Total CG iter.
0.2	684333	Penalty(5.0)	13	6527
		Penalty(25.0)	22	11752
		Nitsche(5.0)	13	6584
0.15	1567167	Penalty(5.0)	14	9093
		Penalty(25.0)	25	18070
		Nitsche(5.0)	14	9240
0.1	5084346	Penalty(5.0)	15	13145
		Penalty(25.0)	25	26127
		Nitsche(5.0)	15	13221
0.075	11856855	Penalty(5.0)	15	17508
		Penalty(25.0)	24	33869
		Nitsche(5.0)	15	18248
0.05	38975466	Penalty(5.0)	15	24502
		Penalty(25.0)	24	49240
		Nitsche(5.0)	15	24682

Table 4.8 Calculation cost (Contact of spheres - inclined)

h	Number of dofs	Contact	Steps	Total CG iter.
0.2	714060	Penalty(5.0)	13	7200
		Penalty(25.0)	21	13404
		Nitsche(5.0)	13	7262
0.15	1616136	Penalty(5.0)	14	9753
		Penalty(25.0)	22	18602
		Nitsche(5.0)	14	9931
0.1	5201997	Penalty(5.0)	15	14015
		Penalty(25.0)	23	29686
		Nitsche(5.0)	15	14258
0.075	12034965	Penalty(5.0)	15	18778
		Penalty(25.0)	24	40347
		Nitsche(5.0)	16	19114
0.05	39634605	Penalty(5.0)	15	25742
		Penalty(25.0)	23	57234
		Nitsche(5.0)	16	27099

Table 4.9 Center displacement and g_{ave} (Contact of spheres - different materials)

	Contact	Displacement	g_{ave}
$E_2 = 2E_1$	Penalty(5.556)	1.2476×10^{-1}	9.7028×10^{-4}
	Penalty(40.0)	1.2415×10^{-1}	1.6608×10^{-4}
	Nitsche(5.556)	1.2406×10^{-1}	1.2948×10^{-4}
	Theory	1.2798×10^{-1}	0.0
$E_2 = 5E_1$	Penalty(7.222)	1.0741×10^{-1}	8.7108×10^{-4}
	Penalty(50.0)	1.0689×10^{-1}	1.6072×10^{-4}
	Nitsche(7.222)	1.0679×10^{-1}	1.2685×10^{-4}
	Theory	1.1029×10^{-1}	0.0
$E_2 = 10E_1$	Penalty(10.0)	1.0117×10^{-1}	6.7587×10^{-4}
	Penalty(55.0)	1.0076×10^{-1}	1.5725×10^{-4}
	Nitsche(10.0)	1.0068×10^{-1}	1.1796×10^{-4}
	Theory	1.0407×10^{-1}	0.0

Table 4.10 Calculation cost (Contact of spheres - different materials)

	Contact	Steps	Total CG Iter.	Comp. Time(min)
$E_2 = 2E_1$	Penalty(5.556)	15	13806	192.4
	Penalty(40.0)	26	33805	465.8
	Nitsche(5.556)	15	14710	207.6
$E_2 = 5E_1$	Penalty(7.222)	15	14439	199.6
	Penalty(50.0)	28	34670	480.3
	Nitsche(7.222)	15	14822	215.2
$E_2 = 10E_1$	Penalty(10.0)	17	15812	219.1
	Penalty(55.0)	28	33141	460.1
	Nitsche(10.0)	17	15782	220.9

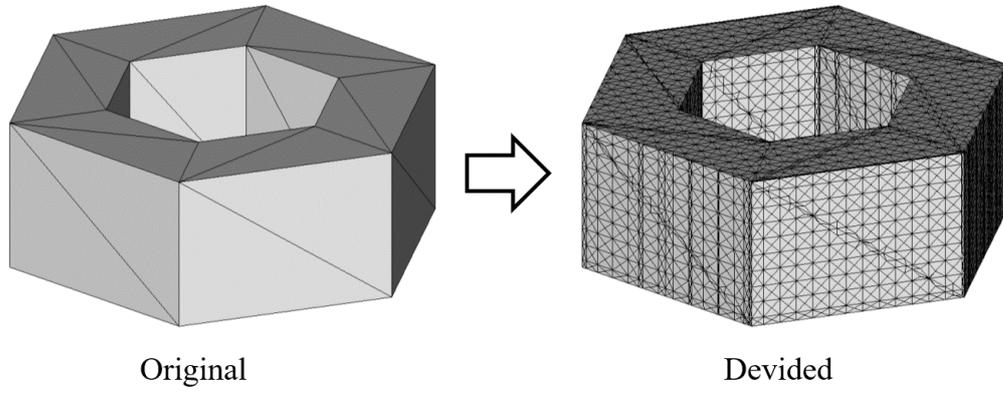


Fig. 4.1 Original and divided triangular patches

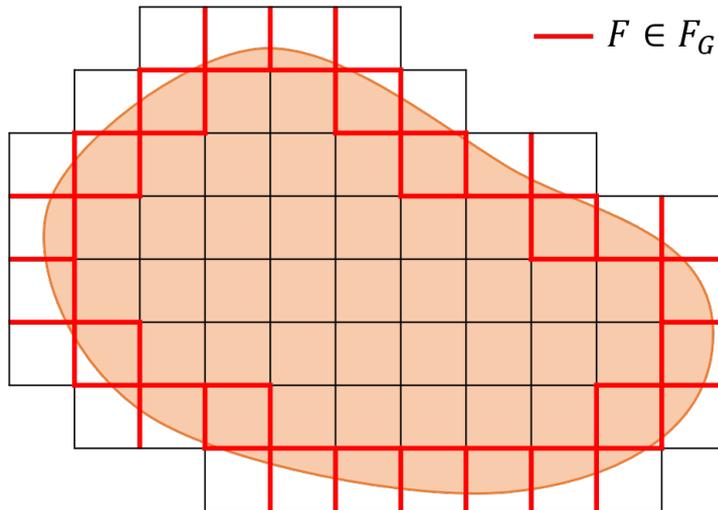


Fig. 4.2 Element faces imposed ghost penalty

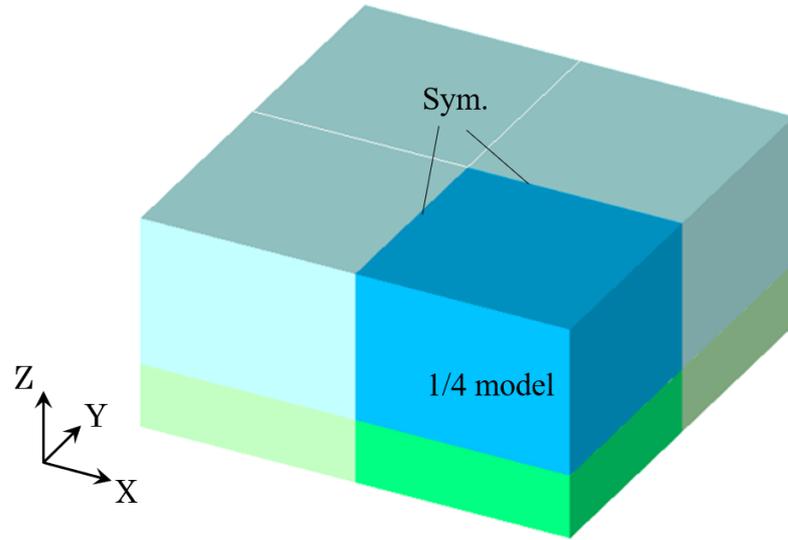


Fig. 4.3 Elastic blocks

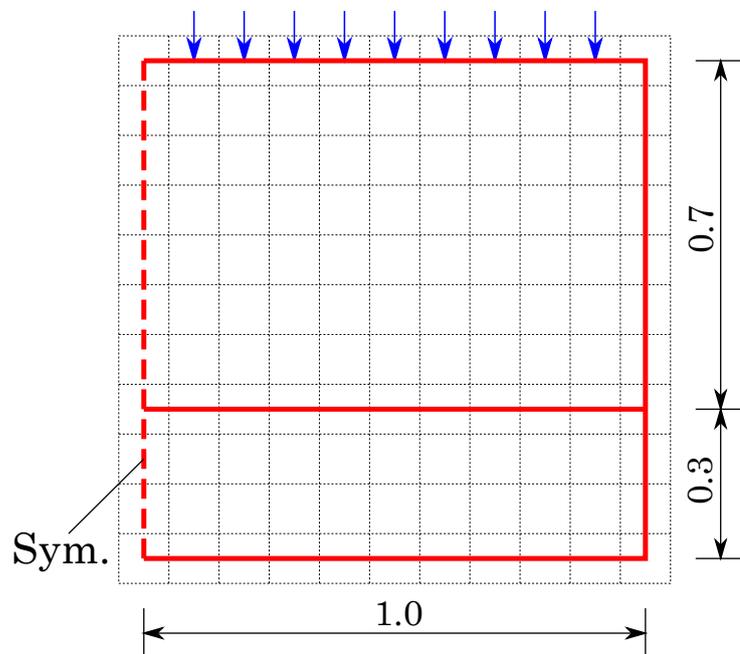


Fig. 4.4 Elastic blocks (section)

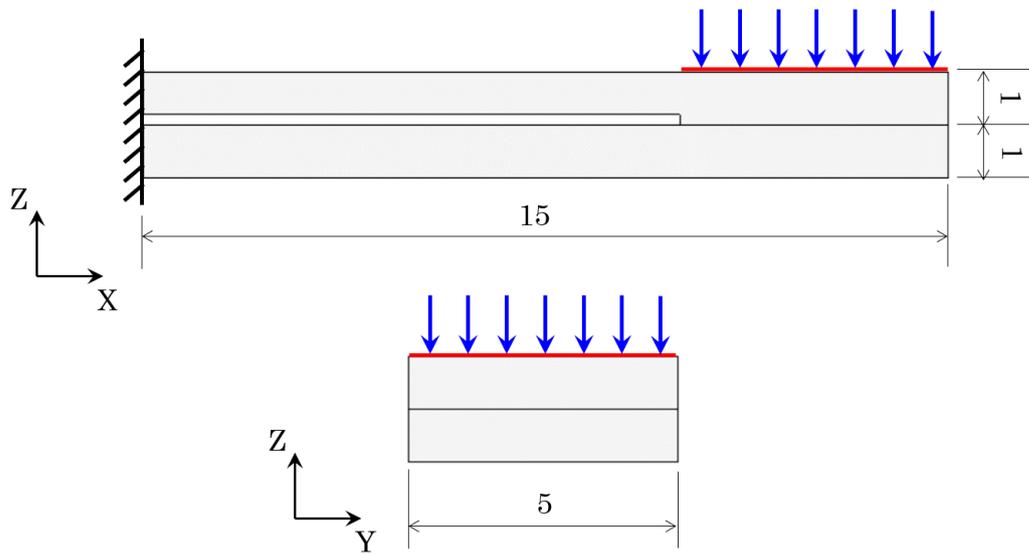
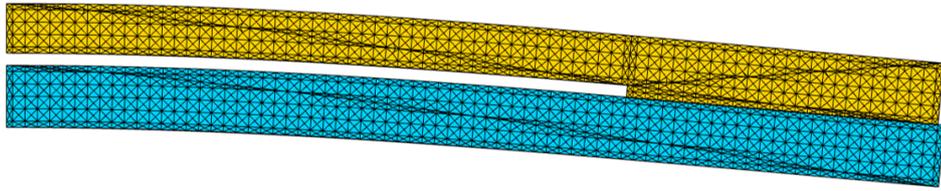
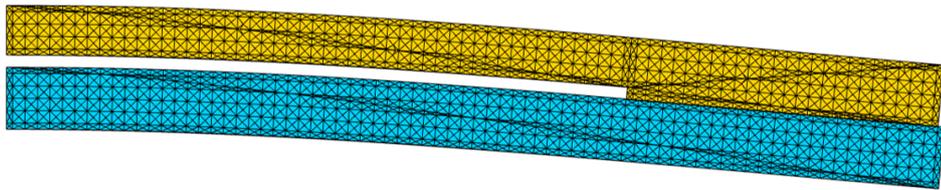


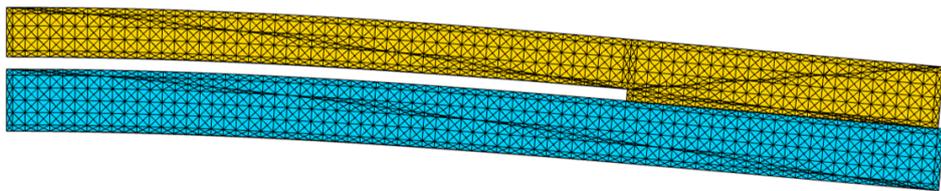
Fig. 4.5 Bending of plates



(a) Contact - Penalty(5.0)

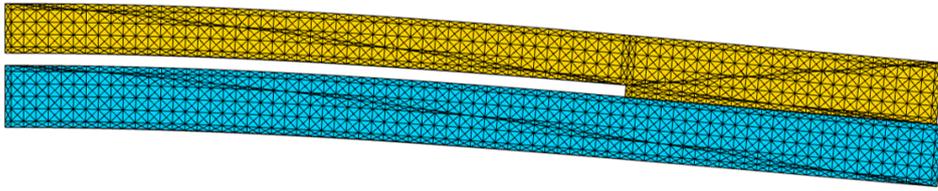


(b) Contact - Penalty(30.0)

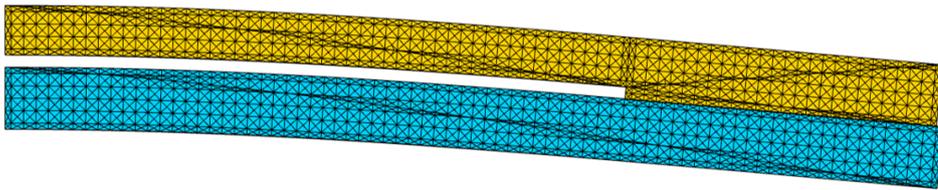


(c) Contact - Nitsche(5.0)

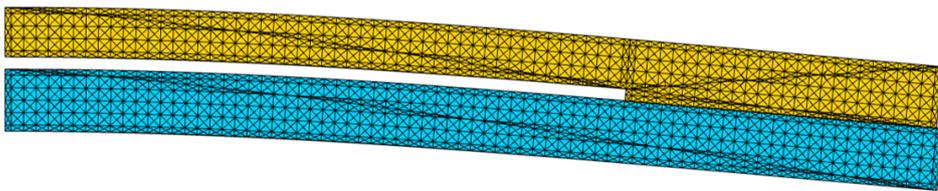
Fig. 4.6 Deformation($\times 30$) (Bending of plates, Dirichlet - Penalty)



(a) Contact - Penalty(5.0)

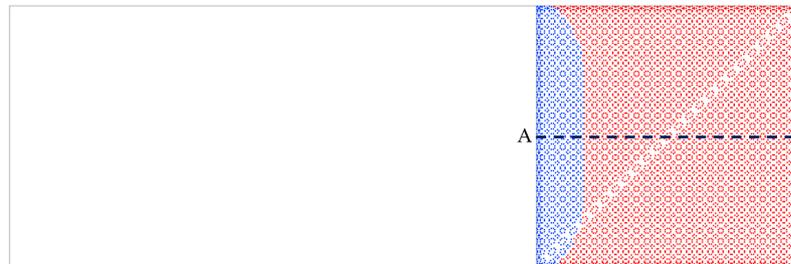


(b) Contact - Penalty(30.0)

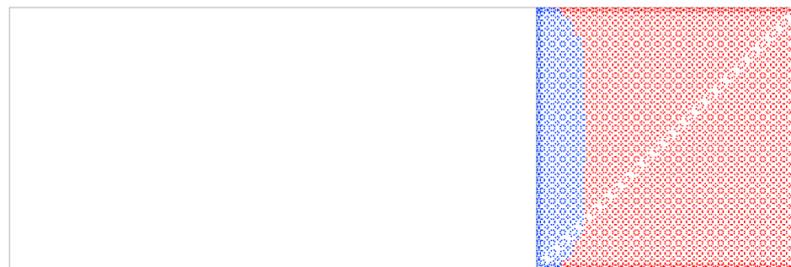


(c) Contact - Nitsche(5.0)

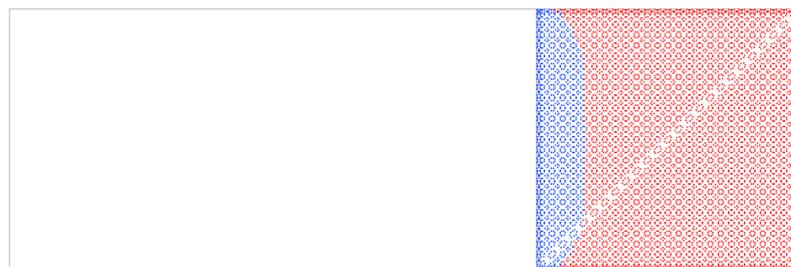
Fig. 4.7 Deformation($\times 30$) (Bending of plates, Dirichlet - Nitsche)



(a) Contact - Penalty(5.0)

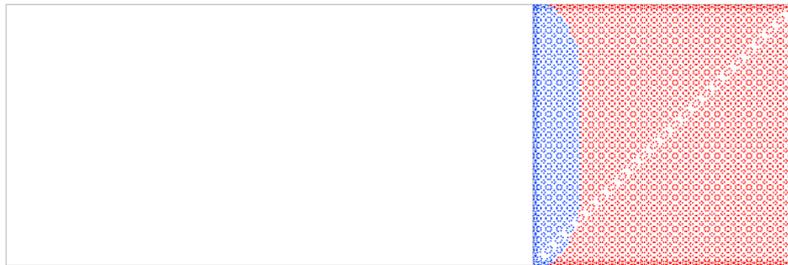


(b) Contact - Penalty(30.0)

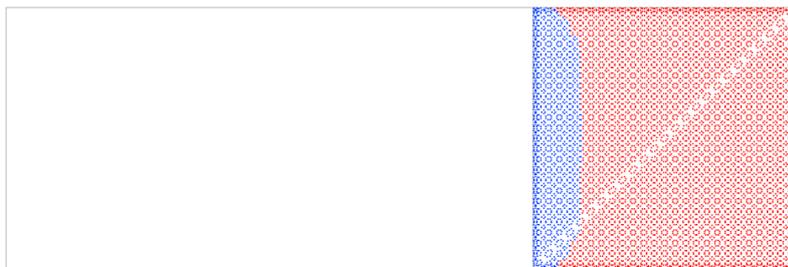


(c) Contact - Nitsche(5.0)

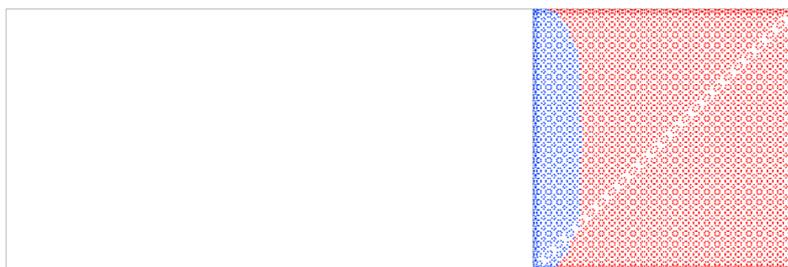
Fig. 4.8 Contact on/off (Bending of plates, Dirichlet - Penalty)



(a) Contact - Penalty(5.0)



(b) Contact - Penalty(30.0)



(c) Contact - Nitsche(5.0)

Fig. 4.9 Contact on/off (Bending of plates, Dirichlet - Nitsche)

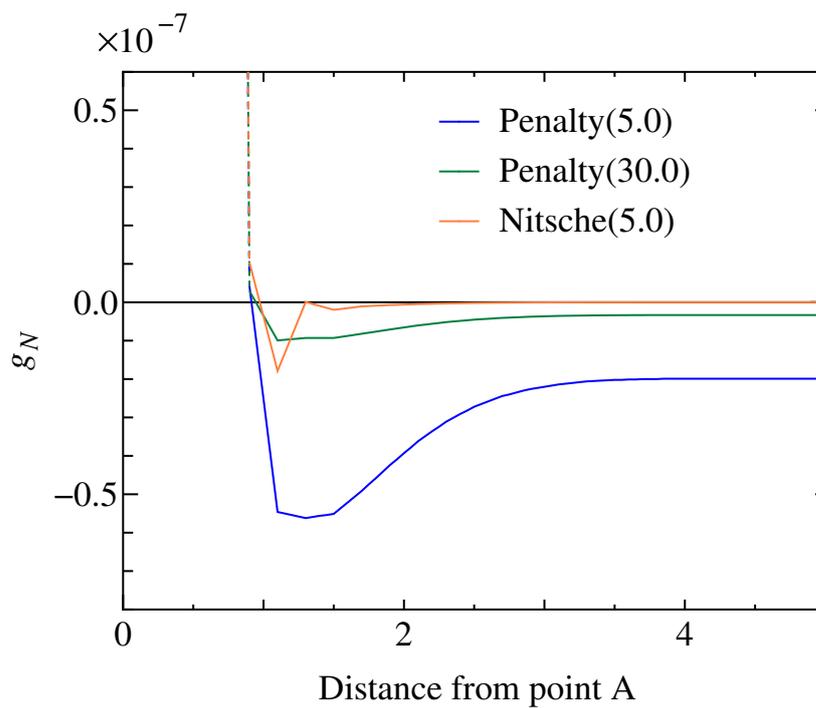


Fig. 4.10 g_N (Bending of plates)

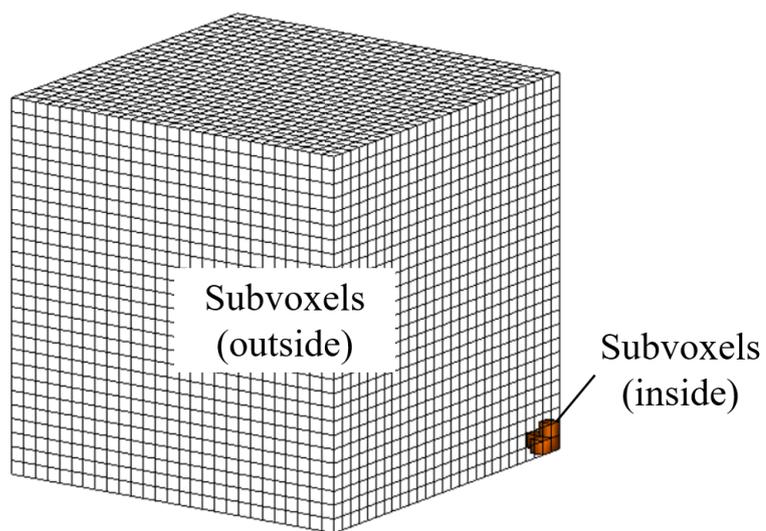
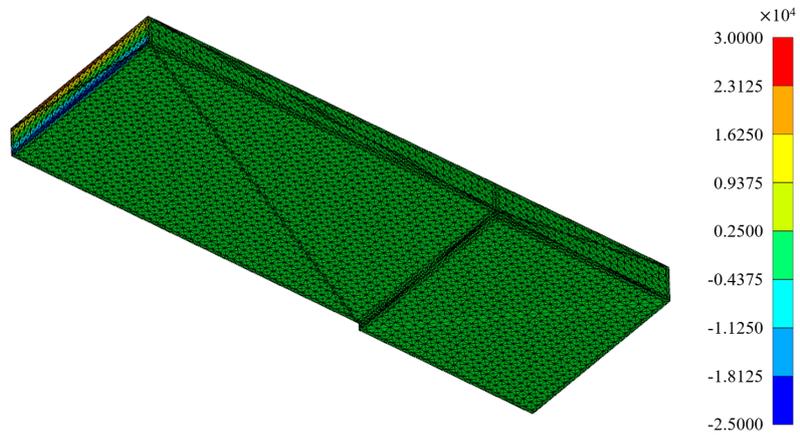
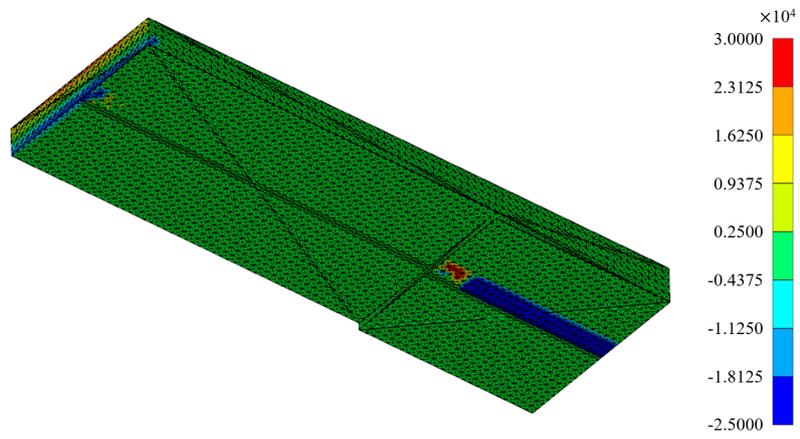


Fig. 4.11 Element with small filling factor

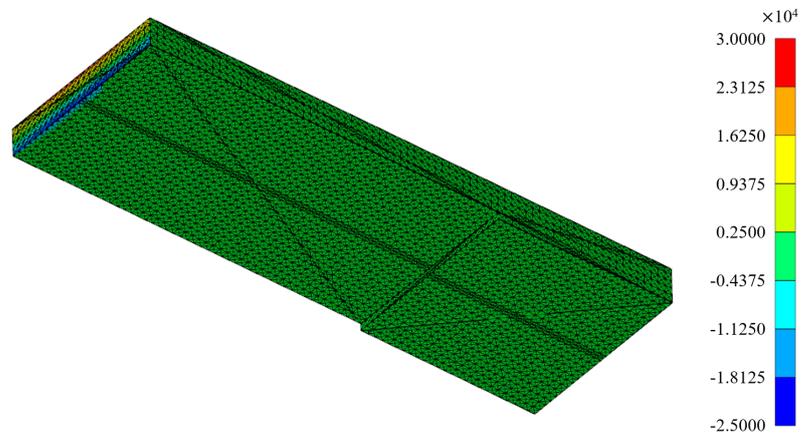


(a) Straight (Dirichlet - Nitsche, Contact - Nitsche)

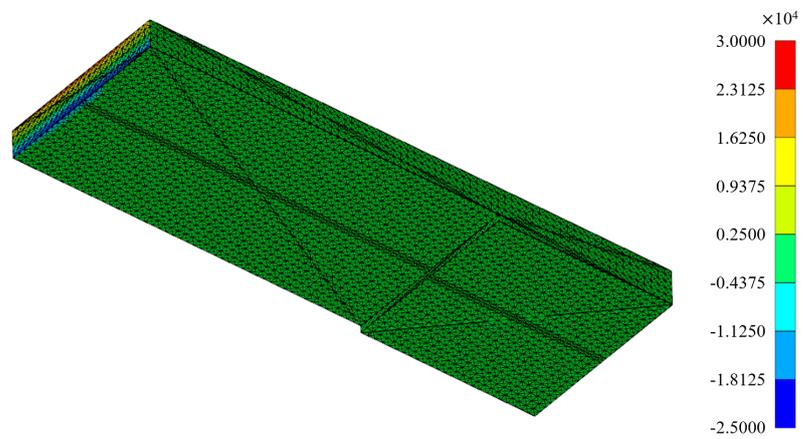


(b) Slightly inclined (Dirichlet - Nitsche, Contact - Nitsche)

Fig. 4.12 Stress(normal component) (Bending of plates)



(a) Dirichlet - Nitsche, Contact - Penalty



(b) Dirichlet - Nitsche, Contact - Nitsche

Fig. 4.13 Stress(normal component) (Bending of plates - slightly inclined, with ghost penalty)

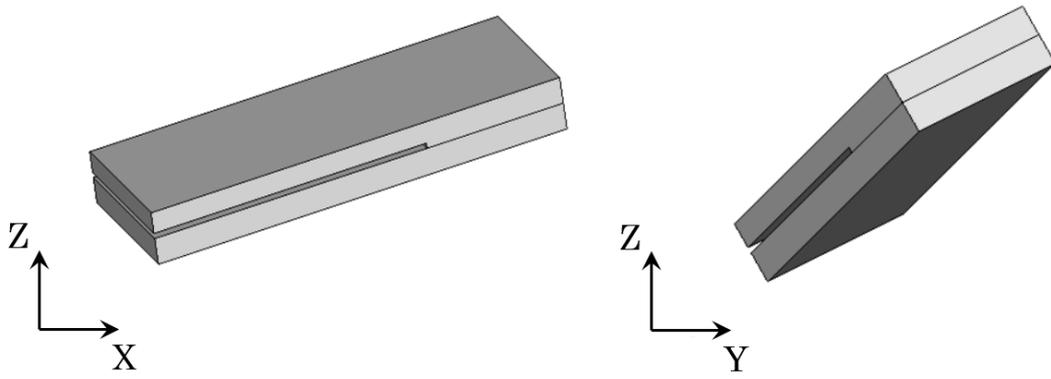


Fig. 4.14 Bending of plates - inclined

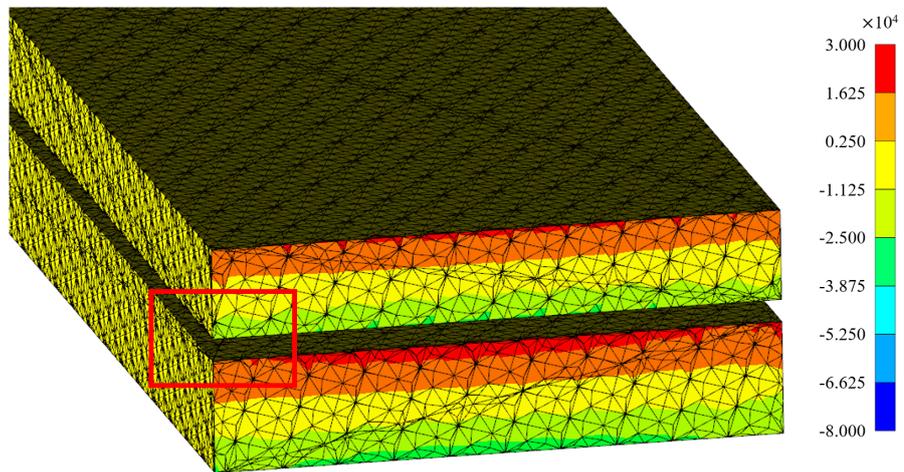
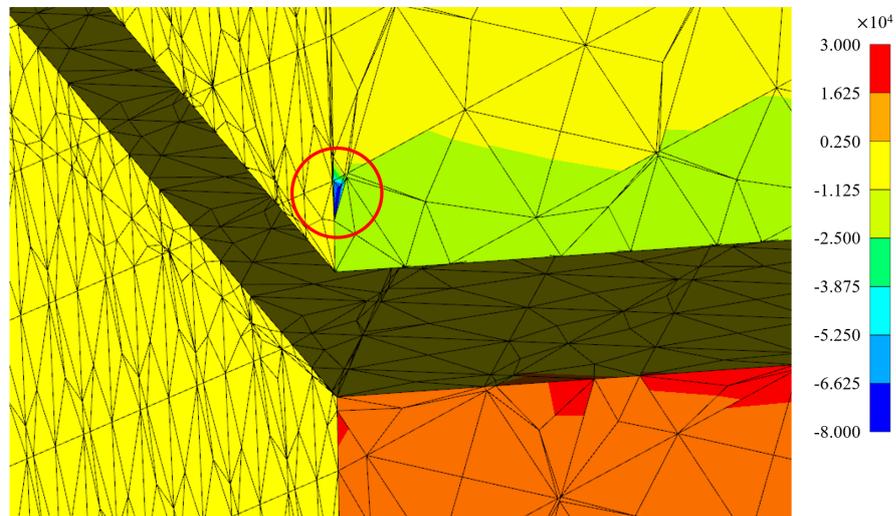
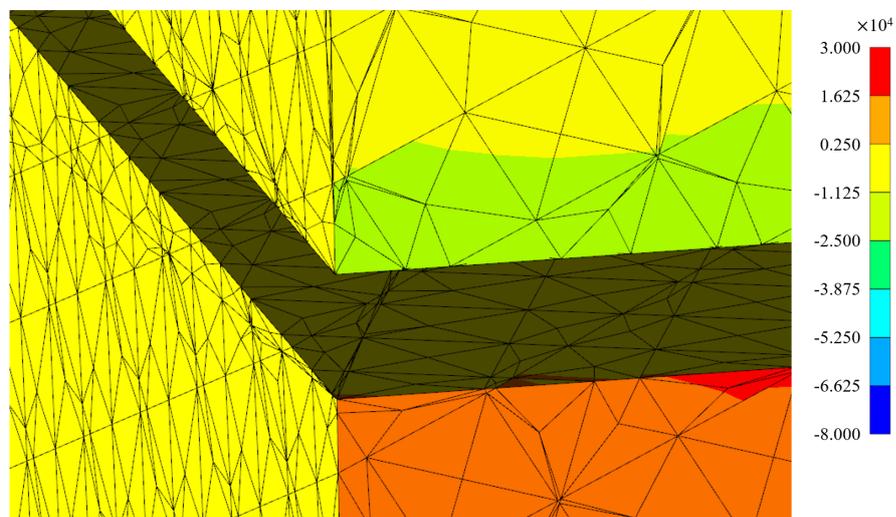


Fig. 4.15 Stress(normal component) (Bending of plates - inclined)

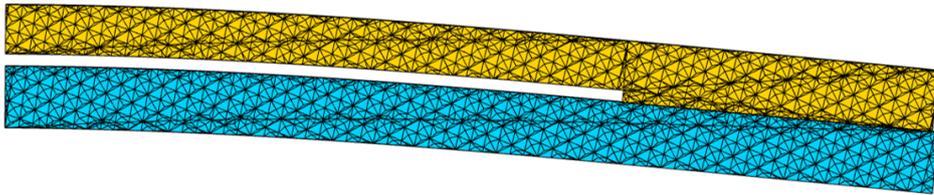


(a) Without ghost penalty

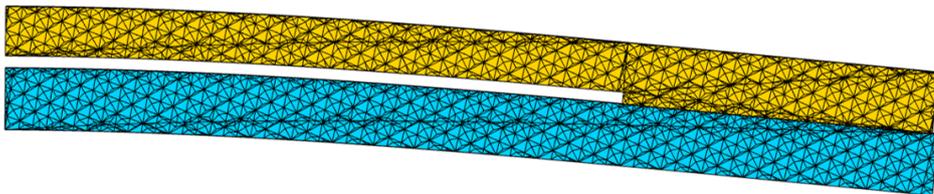


(b) With ghost penalty

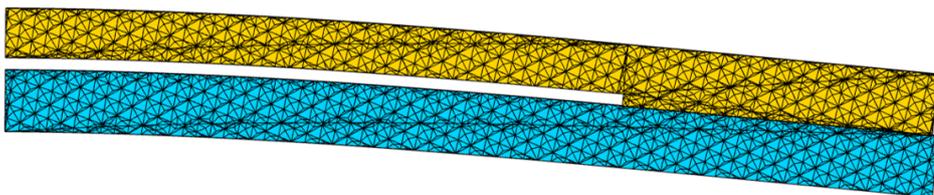
Fig. 4.16 Stress(normal component, enlarged view) (Bending of plates - inclined)



(a) Contact - Penalty(5.0)

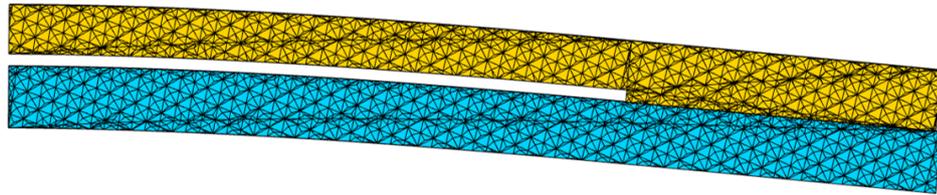


(b) Contact - Penalty(15.0)

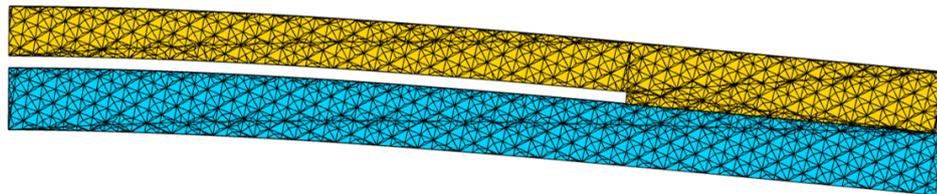


(c) Contact - Nitsche(5.0)

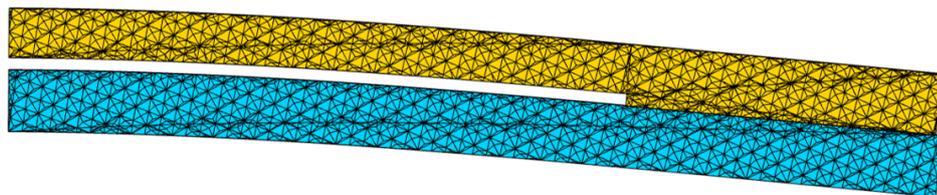
Fig. 4.17 Deformation($\times 30$) (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Penalty)



(a) Contact - Penalty(5.0)



(b) Contact - Penalty(15.0)

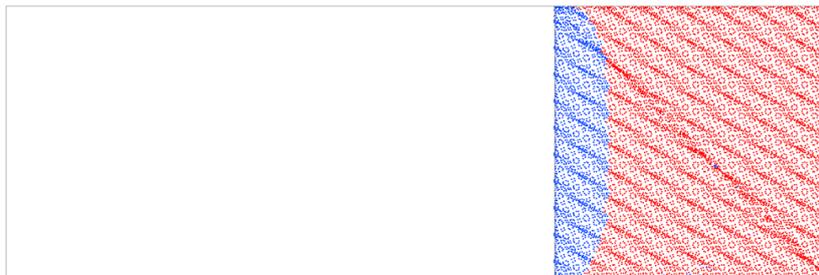


(c) Contact - Nitsche(5.0)

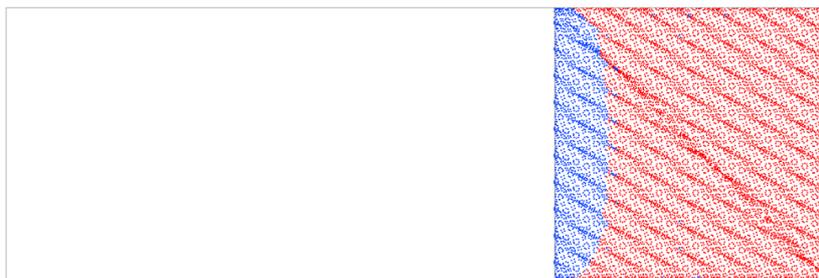
Fig. 4.18 Deformation($\times 30$) (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Nitsche)



(a) Contact - Penalty(5.0)

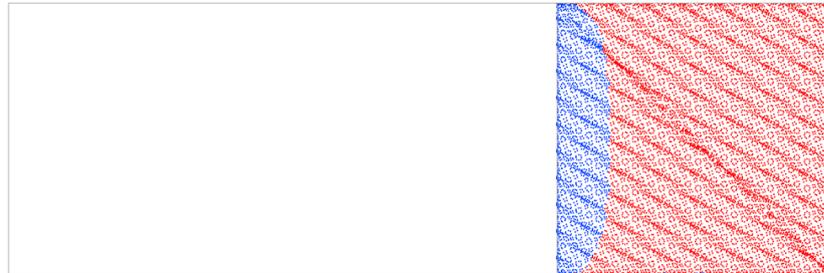


(b) Contact - Penalty(15.0)

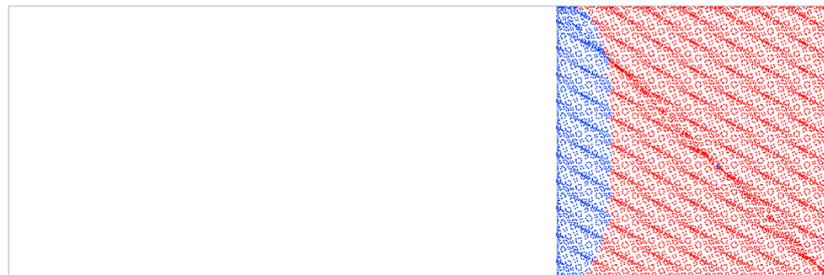


(c) Contact - Nitsche(5.0)

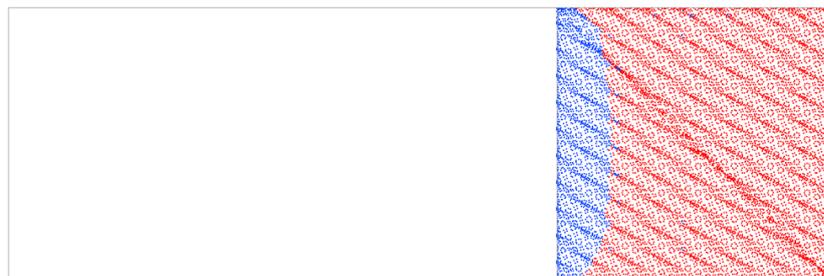
Fig. 4.19 Contact on/off (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Penalty)



(a) Contact - Penalty(5.0)



(b) Contact - Penalty(15.0)



(c) Contact - Nitsche(5.0)

Fig. 4.20 Contact on/off (Bending of plates - inclined, Dirichlet - Nitsche)

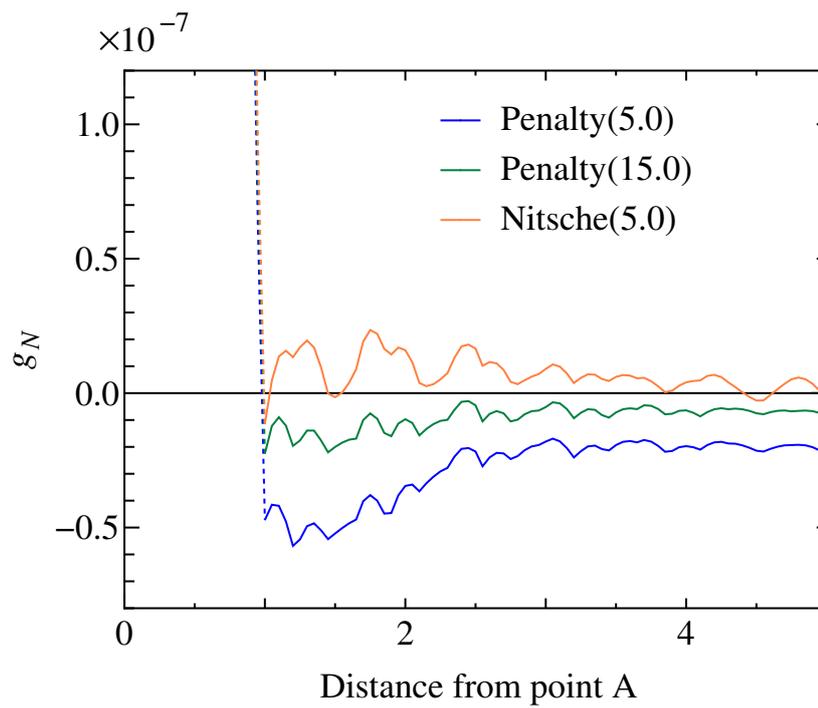


Fig. 4.21 g_N (Bending of plates - inclined)

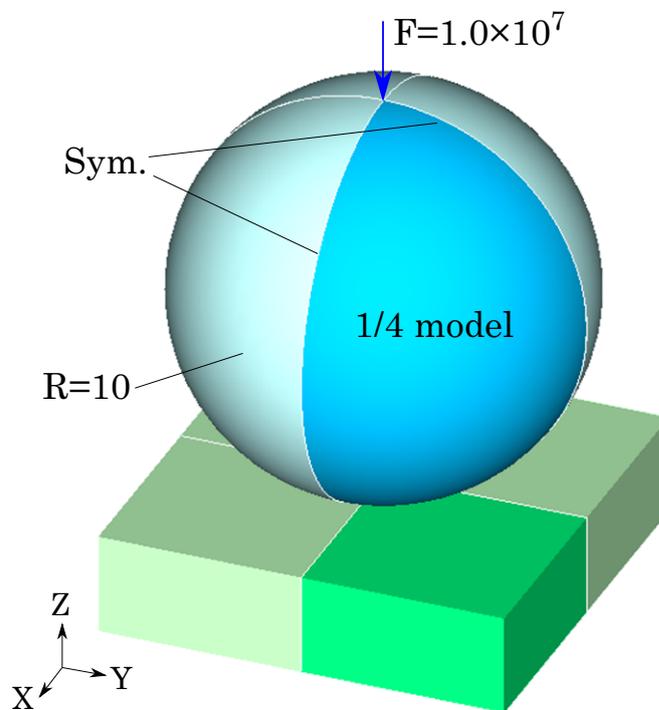
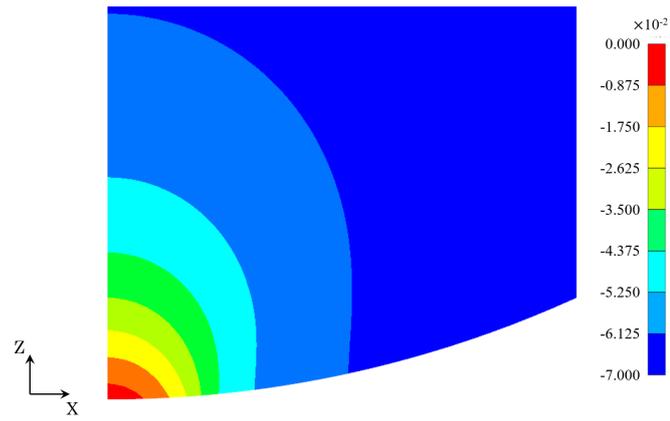
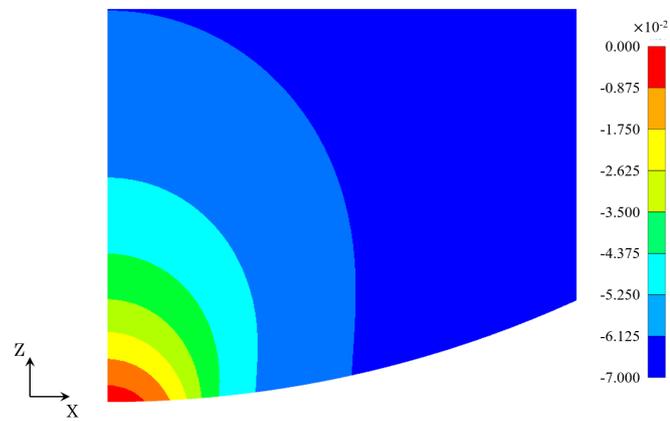


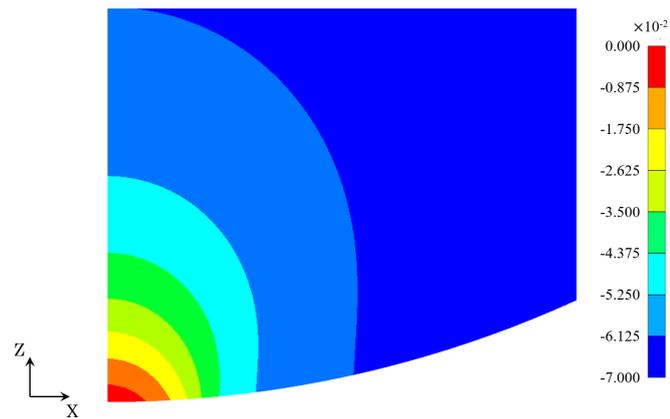
Fig. 4.22 Sphere on rigid foundation



(a) Penalty(10.0)

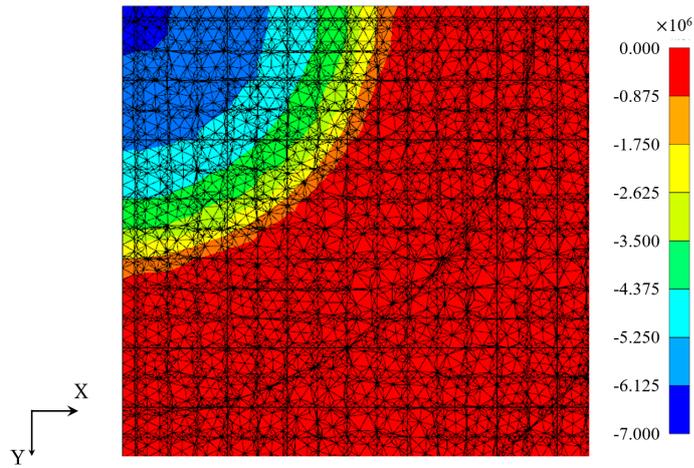


(b) Penalty(30.0)

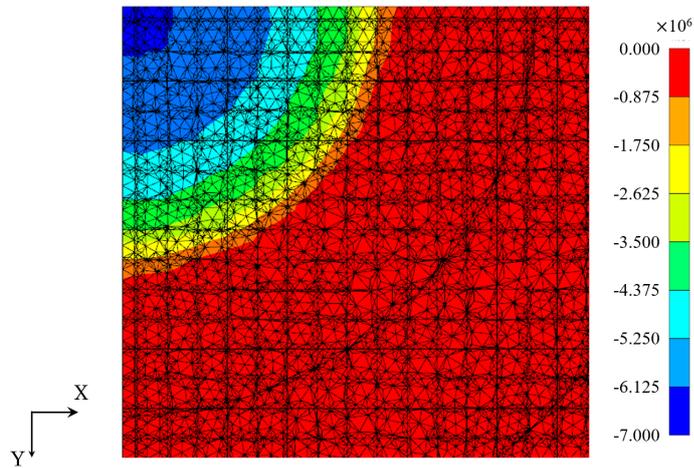


(c) Nitsche(10.0)

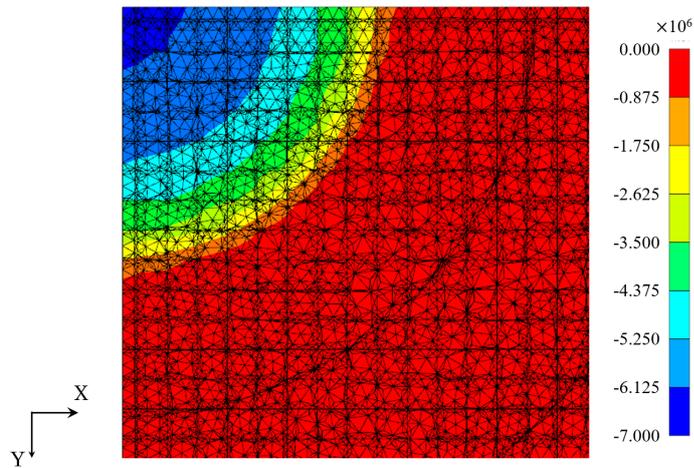
Fig. 4.23 Vertical displacement (Sphere on rigid foundation)



(a) Penalty(10.0)

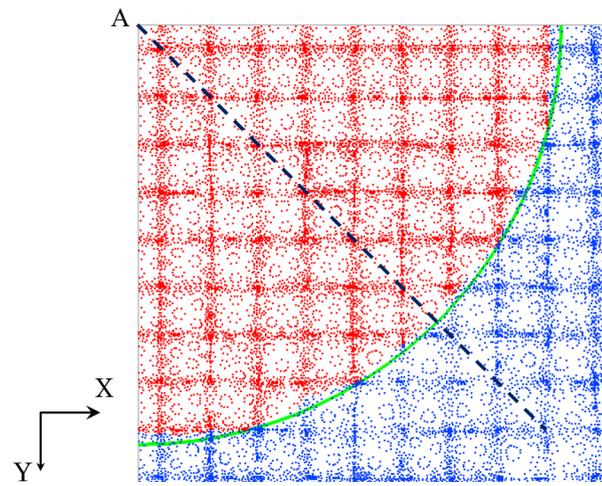


(b) Penalty(30.0)

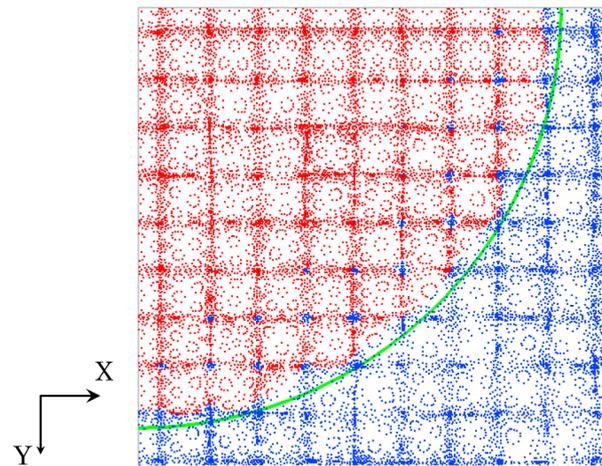


(c) Nitsche(10.0)

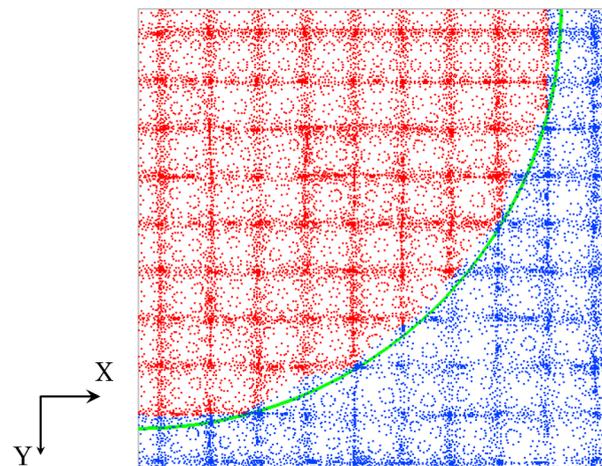
Fig. 4.24 Contact stress (Sphere on rigid foundation)



(a) Penalty(10.0)



(b) Penalty(30.0)



(c) Nitsche(10.0)

Fig. 4.25 Contact on/off (Sphere on rigid foundation)

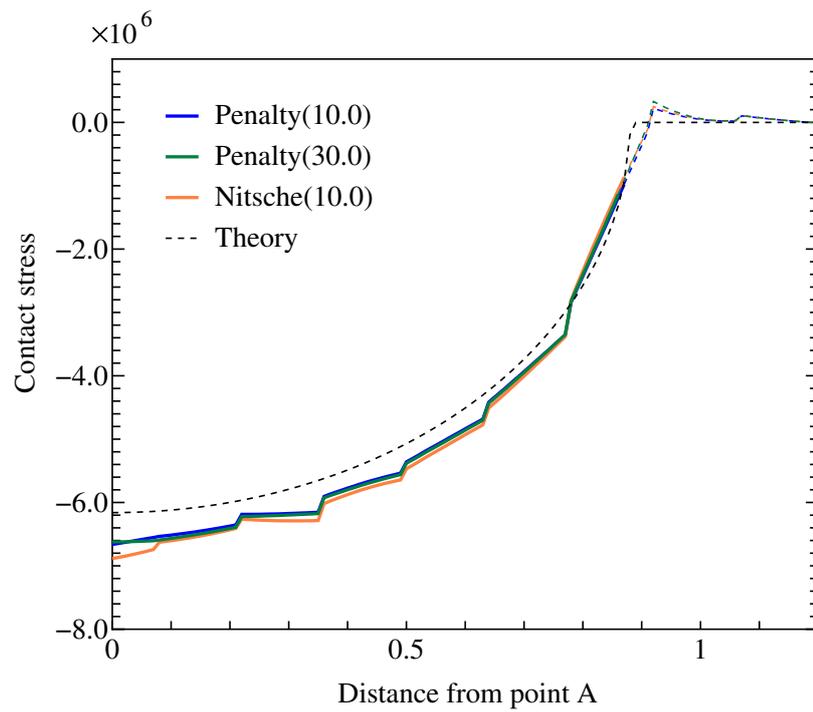


Fig. 4.26 Contact stress (Sphere on rigid foundation, along the sampling line)

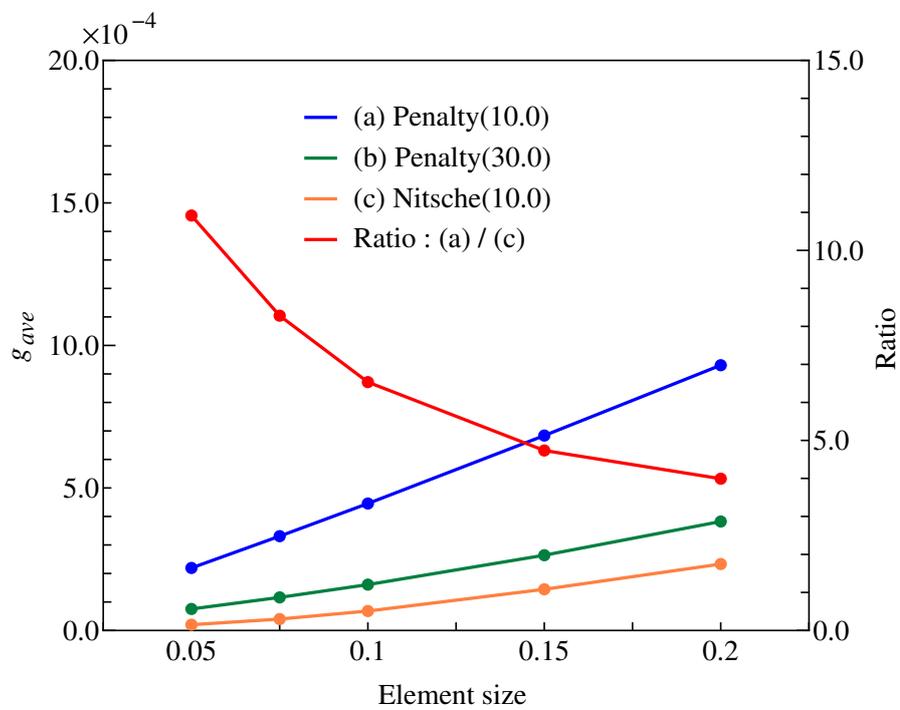


Fig. 4.27 g_{ave} (Sphere on rigid foundation)

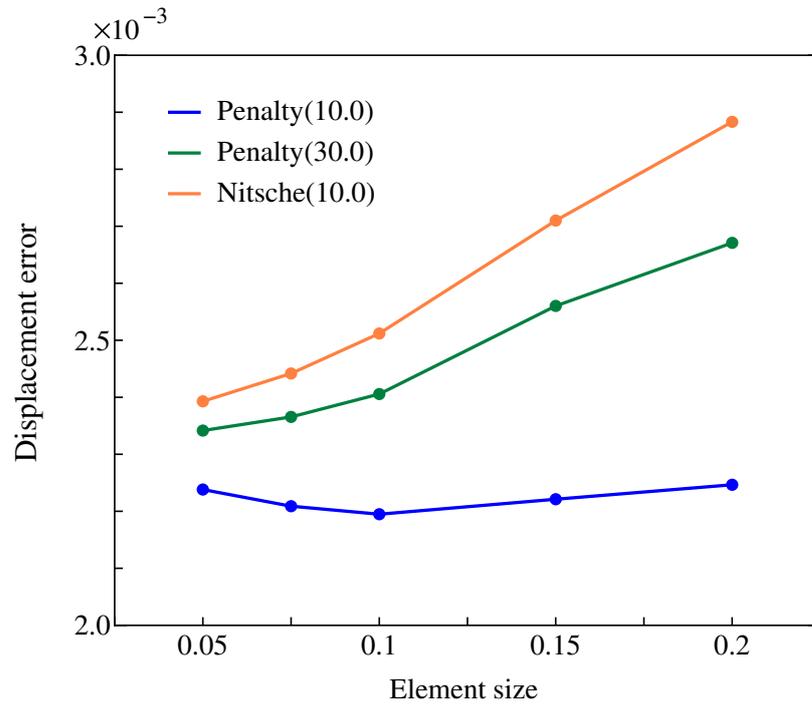


Fig. 4.28 Displacement error of sphere center (Sphere on rigid foundation)

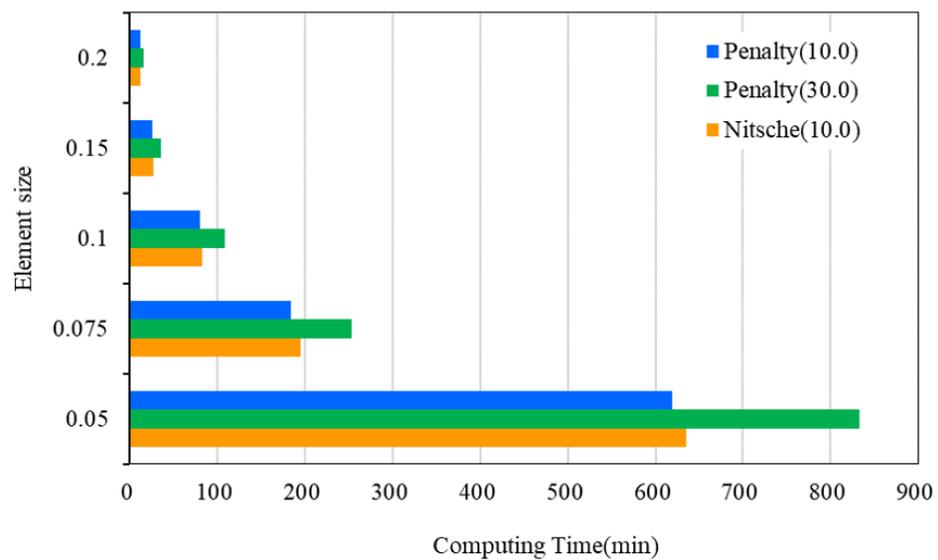


Fig. 4.29 Computing time (Sphere on rigid foundation)

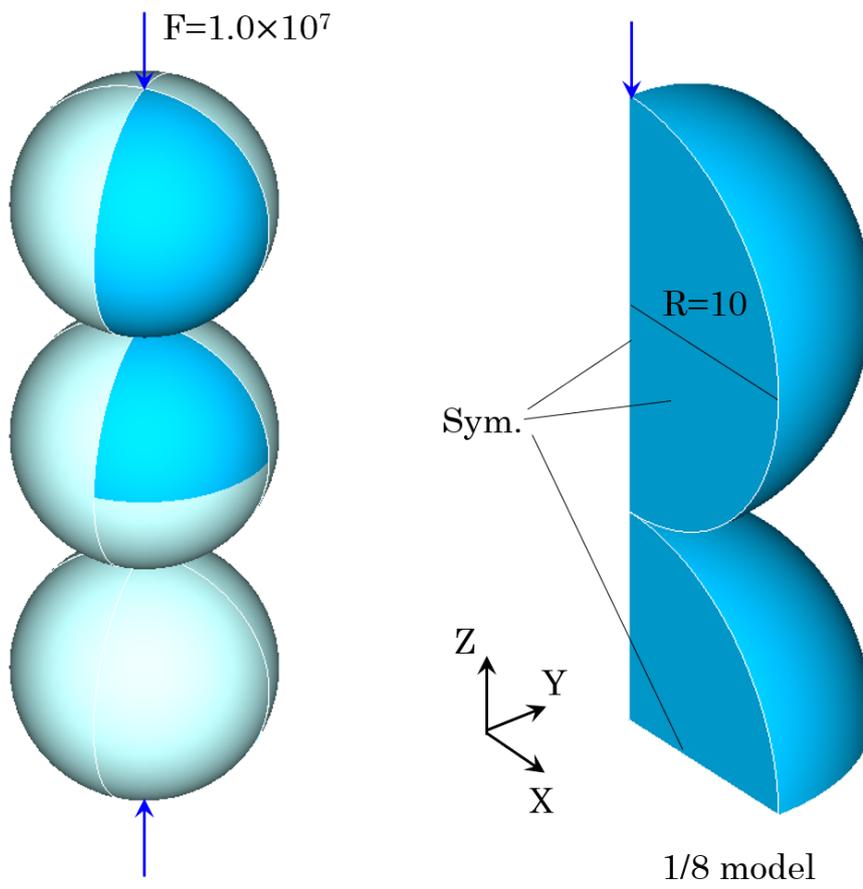
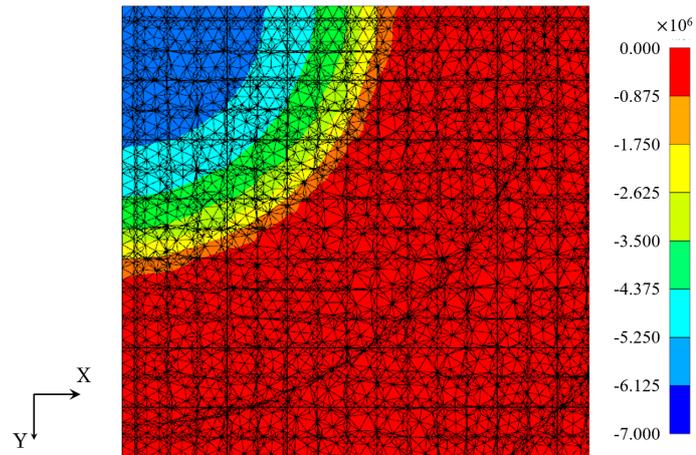
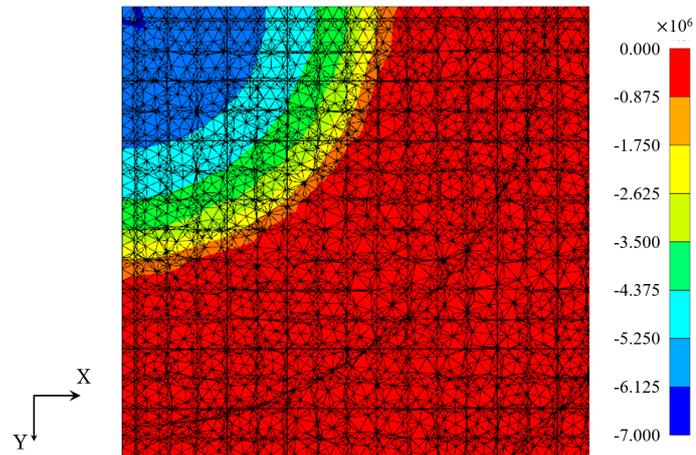


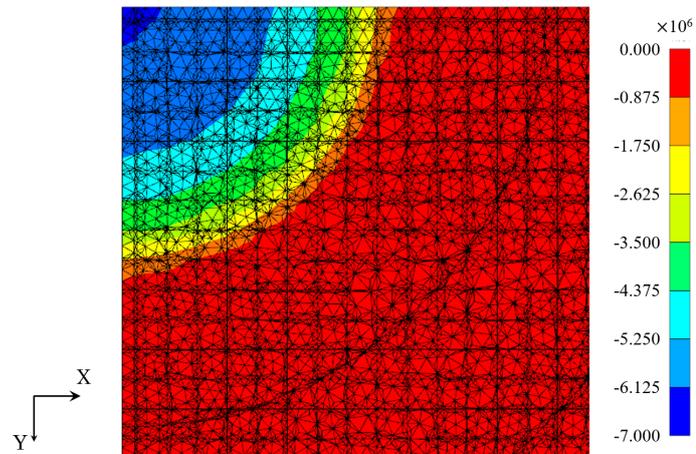
Fig. 4.30 Contact of spheres



(a) Penalty(5.0)

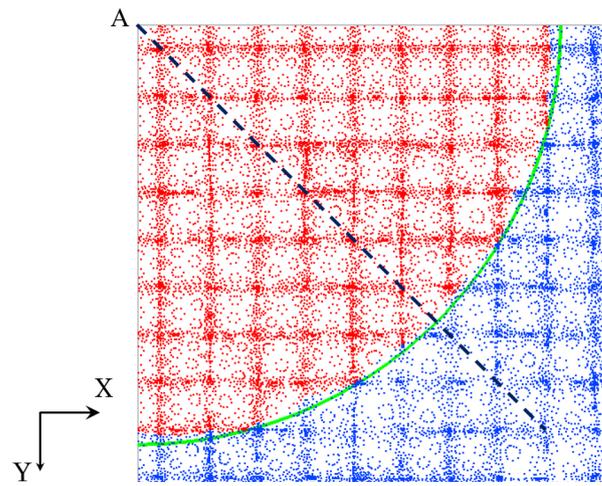


(b) Penalty(25.0)

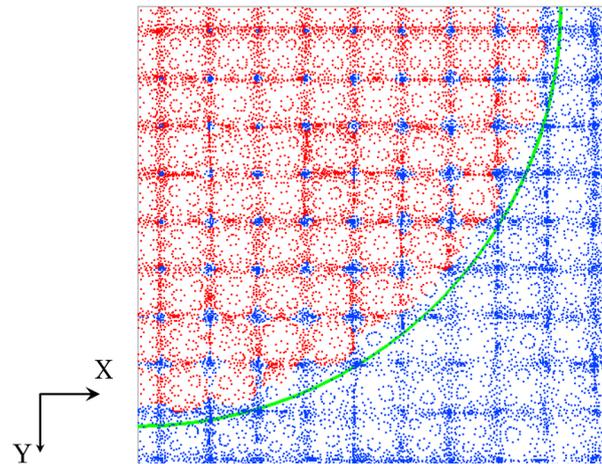


(c) Nitsche(5.0)

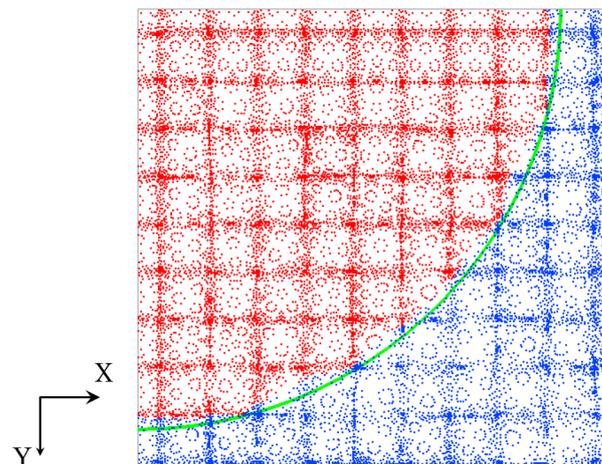
Fig. 4.31 Contact stress (Contact of spheres)



(a) Penalty(5.0)



(b) Penalty(25.0)



(c) Nitsche(5.0)

Fig. 4.32 Contact on/off (Contact of spheres)

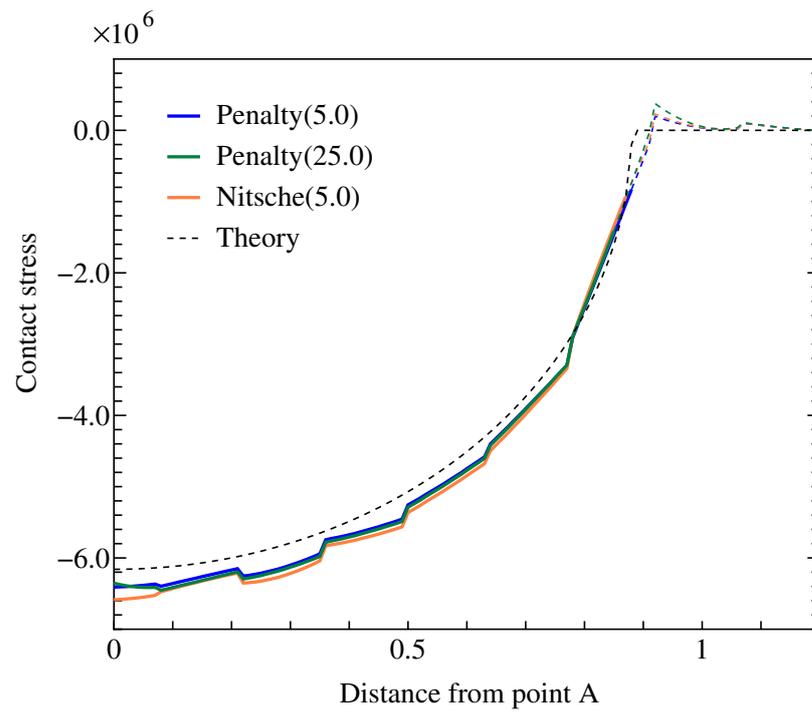


Fig. 4.33 Contact stress (Contact of spheres, along the sampling line)

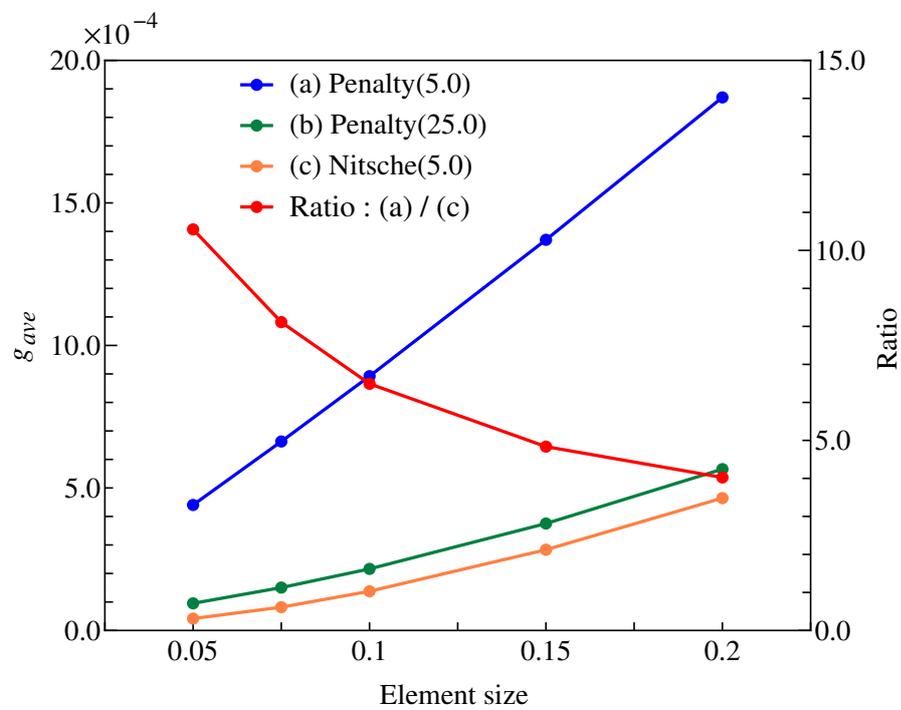


Fig. 4.34 g_{ave} (Contact of spheres)

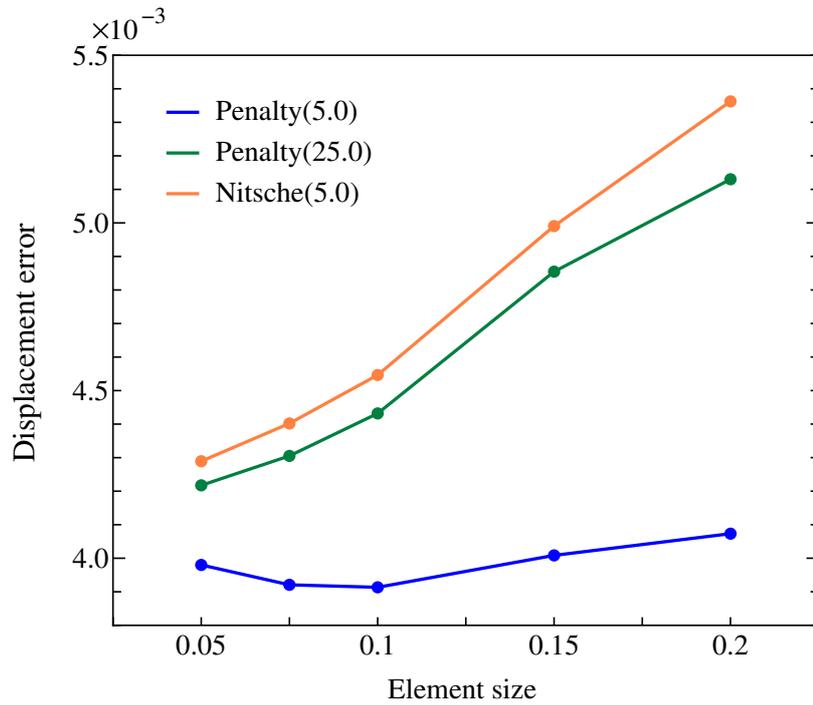


Fig. 4.35 Displacement error of sphere center (Contact of spheres)

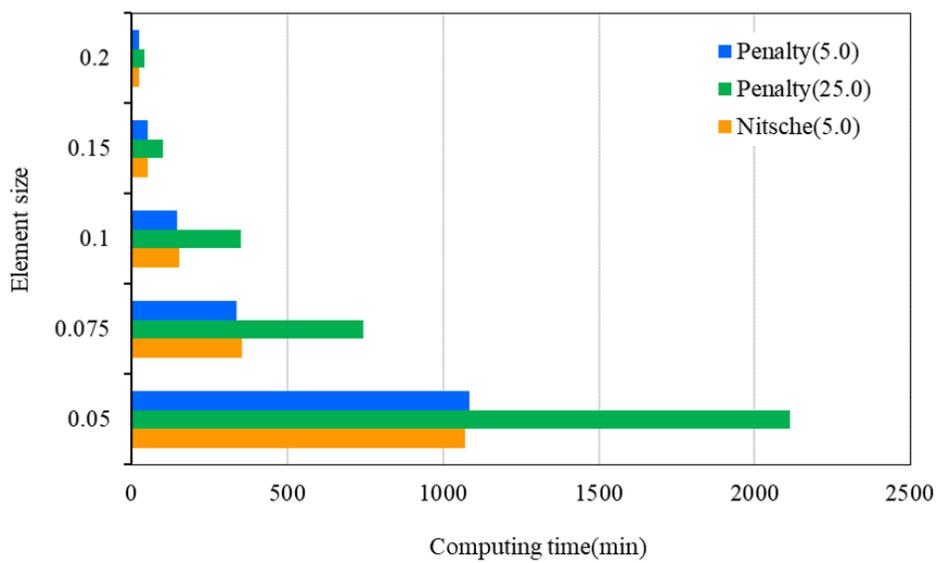


Fig. 4.36 Computing time (Contact of spheres)

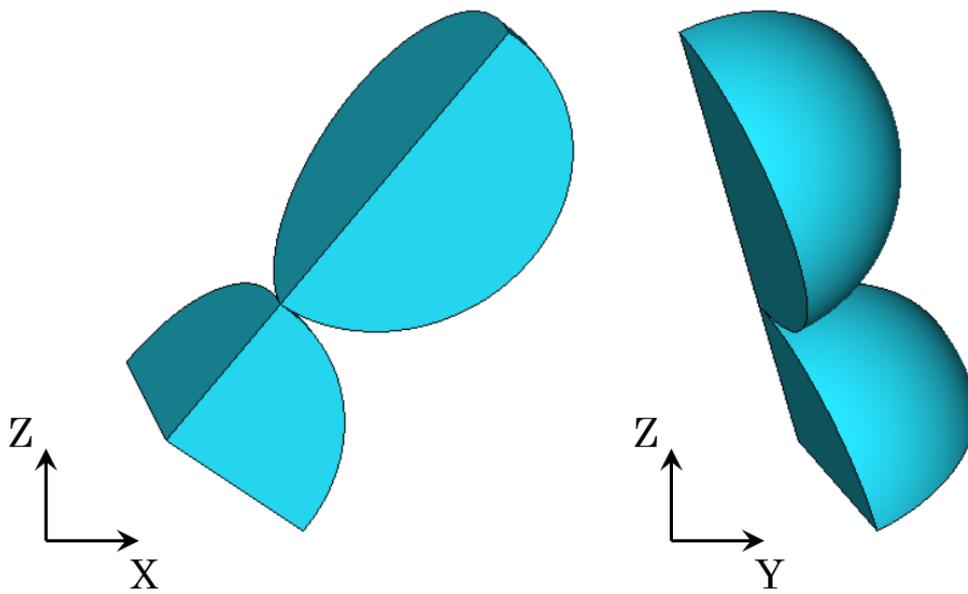
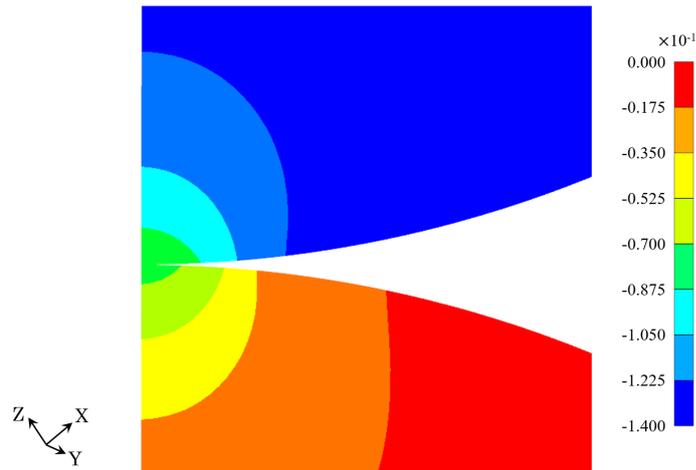
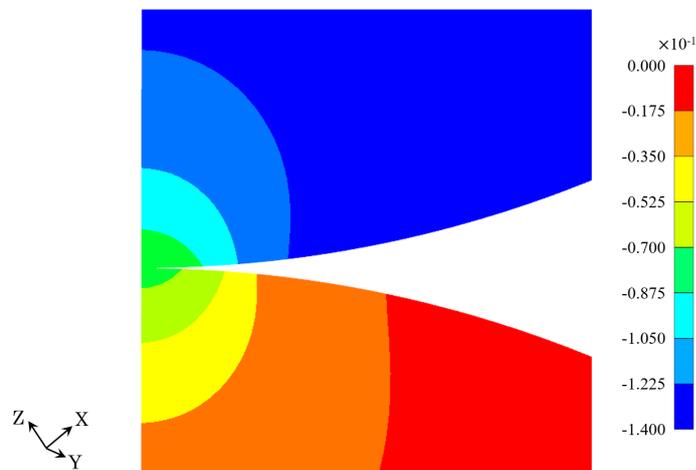


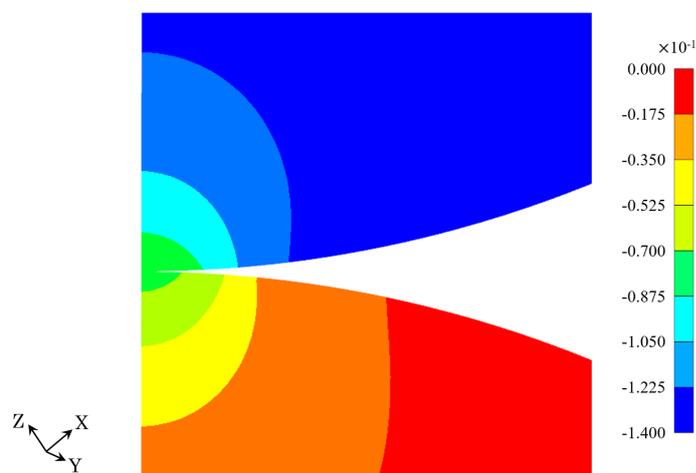
Fig. 4.37 Contact of spheres - inclined



(a) Penalty(5.0)

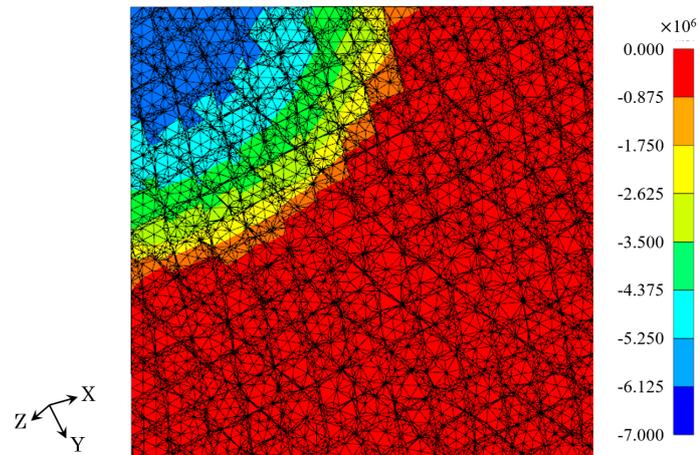


(b) Penalty(25.0)

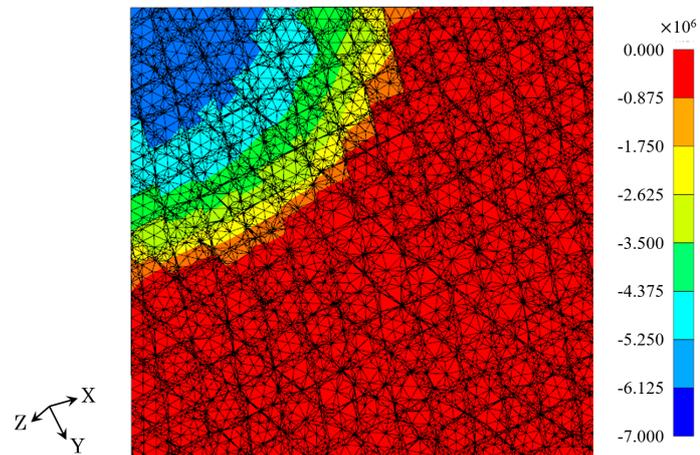


(c) Nitsche(5.0)

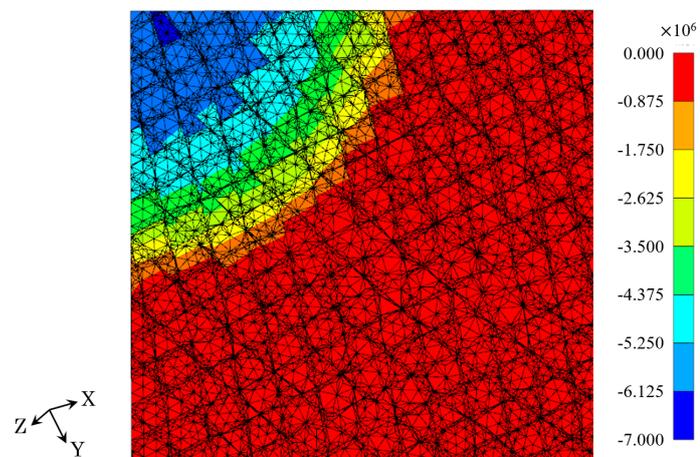
Fig. 4.38 Vertical displacement (Contact of spheres - inclined)



(a) Penalty(5.0)

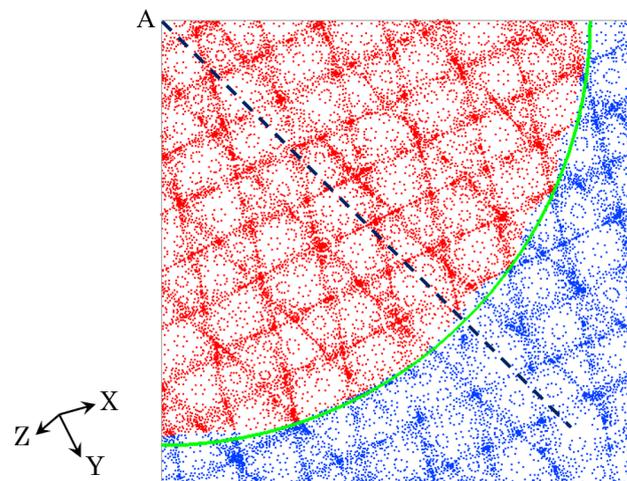


(b) Penalty(25.0)

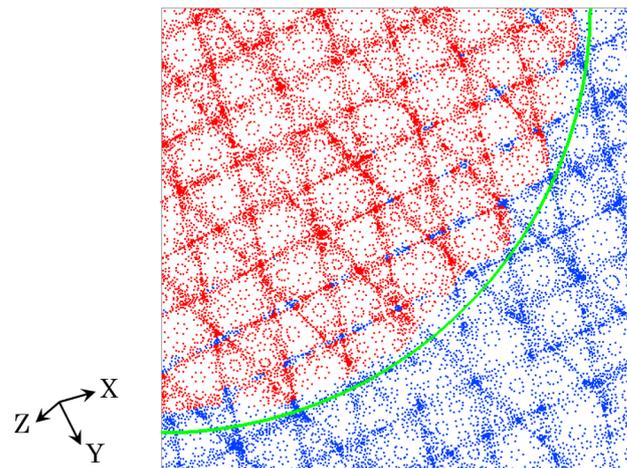


(c) Nitsche(5.0)

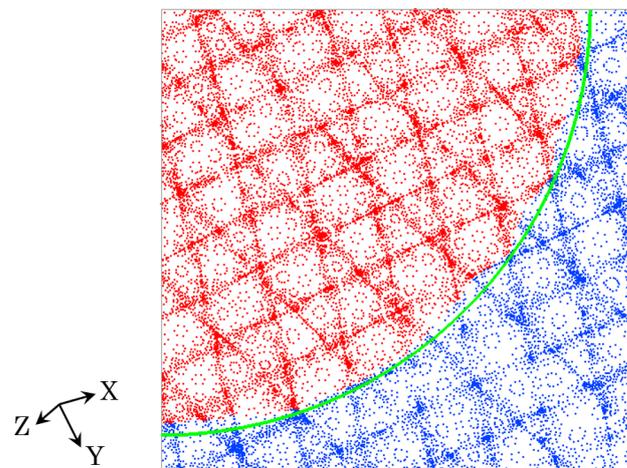
Fig. 4.39 Contact stress (Contact of spheres - inclined)



(a) Penalty(5.0)



(b) Penalty(25.0)



(c) Nitsche(5.0)

Fig. 4.40 Contact on/off (Contact of spheres - inclined)

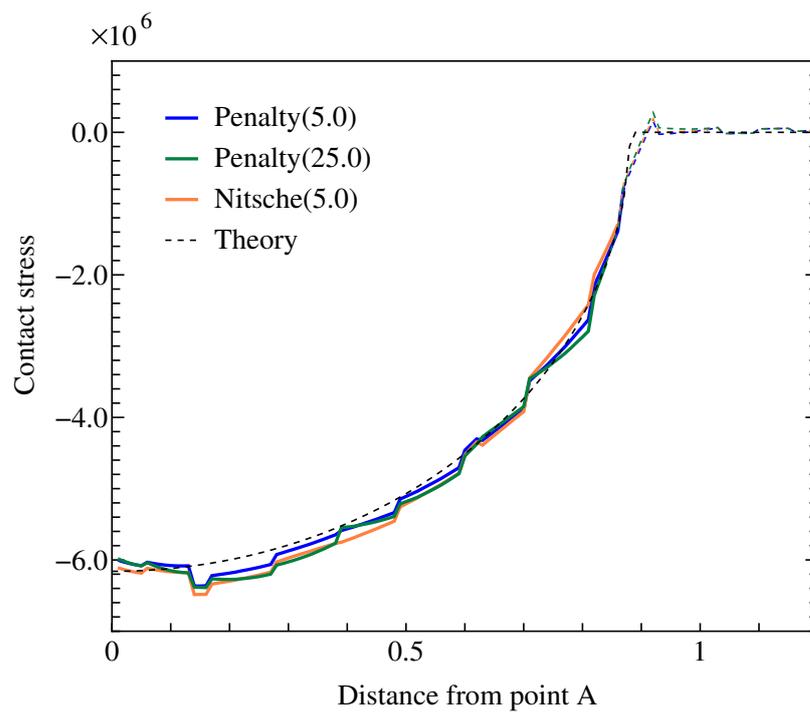


Fig. 4.41 Contact stress (Contact of spheres - inclined, along the sampling line)

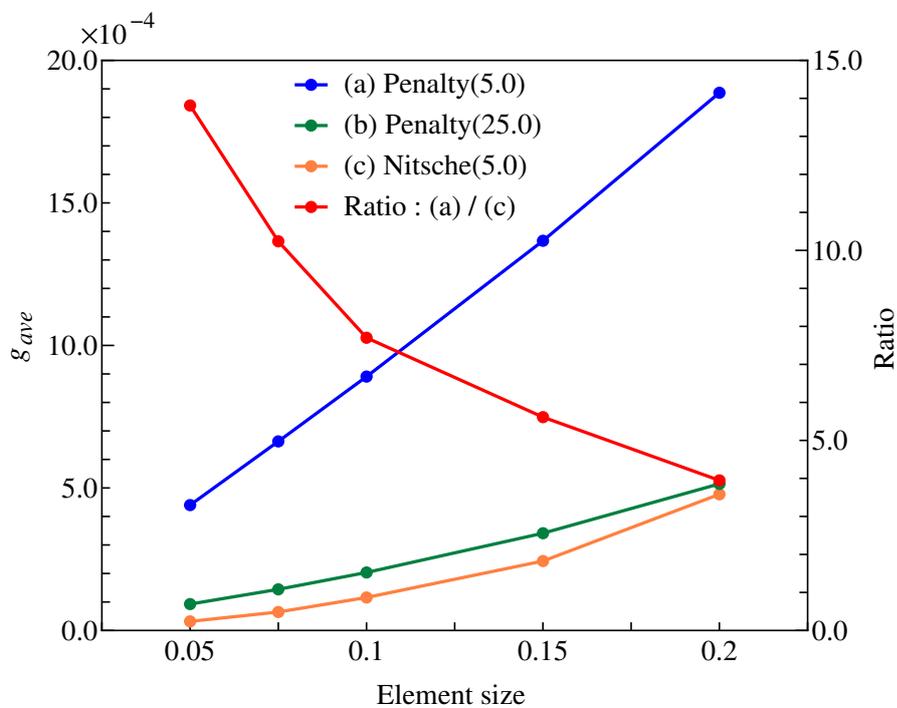


Fig. 4.42 g_{ave} (Contact of spheres - inclined)

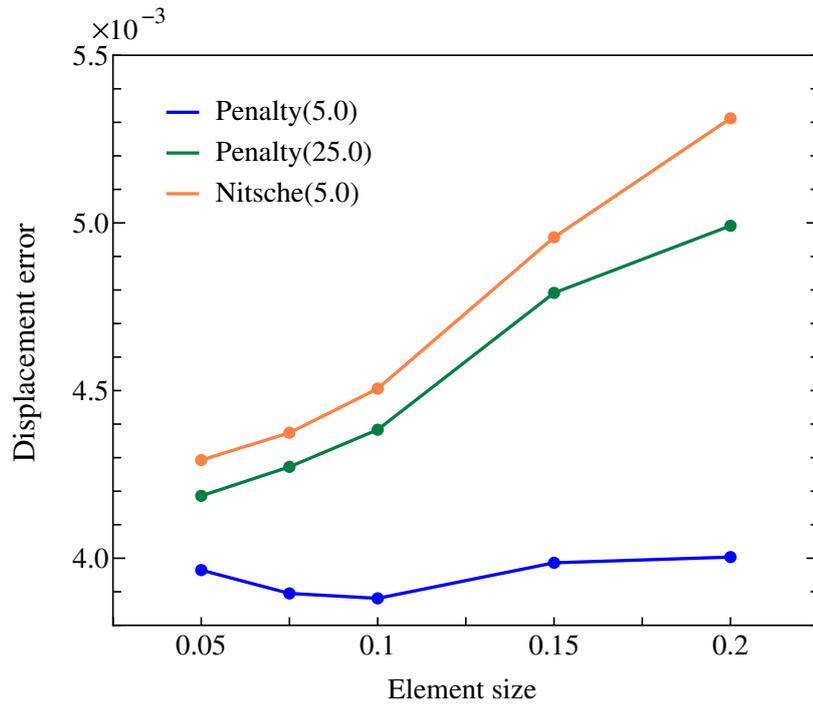


Fig. 4.43 Displacement error of sphere center (Contact of spheres - inclined)

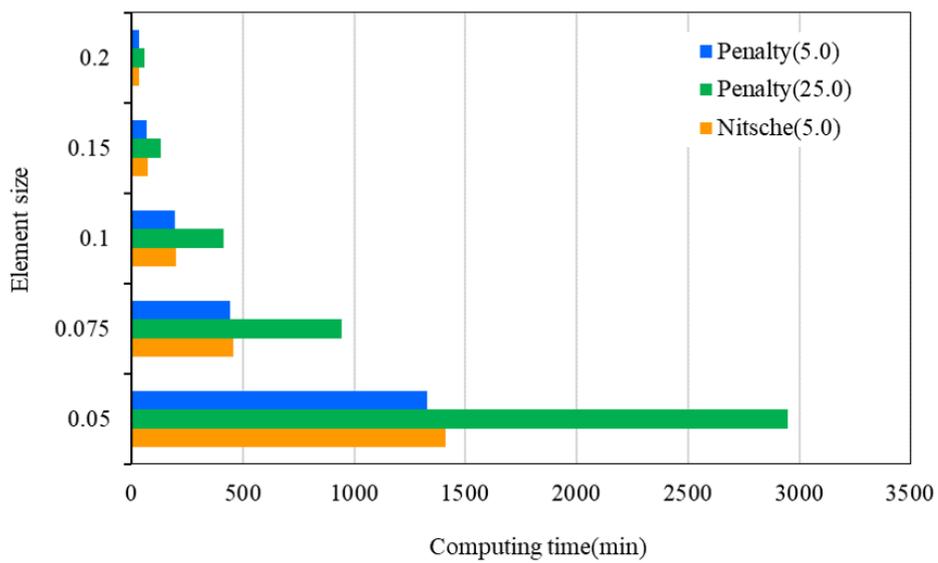
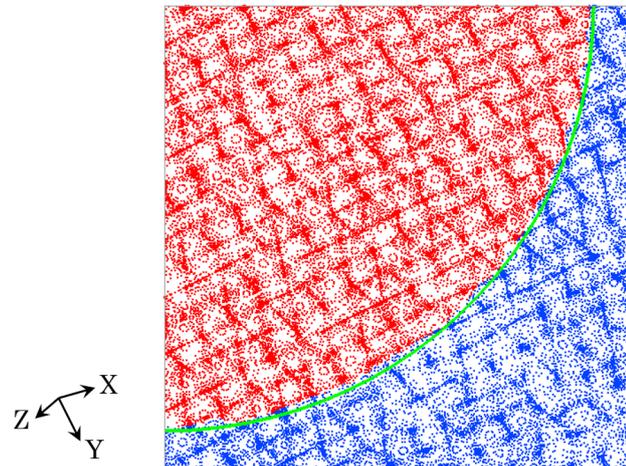
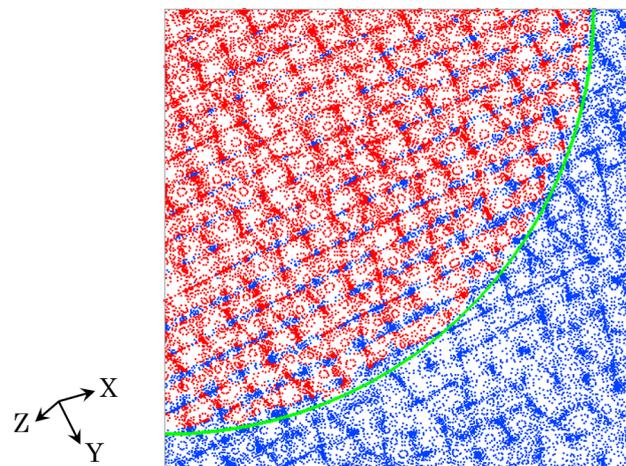


Fig. 4.44 Computing time (Contact of spheres - inclined)



(a) Nitsche(5.0)



(b) Penalty(75.0)

Fig. 4.45 Contact on/off (Contact of spheres - inclined, $h = 0.05$)

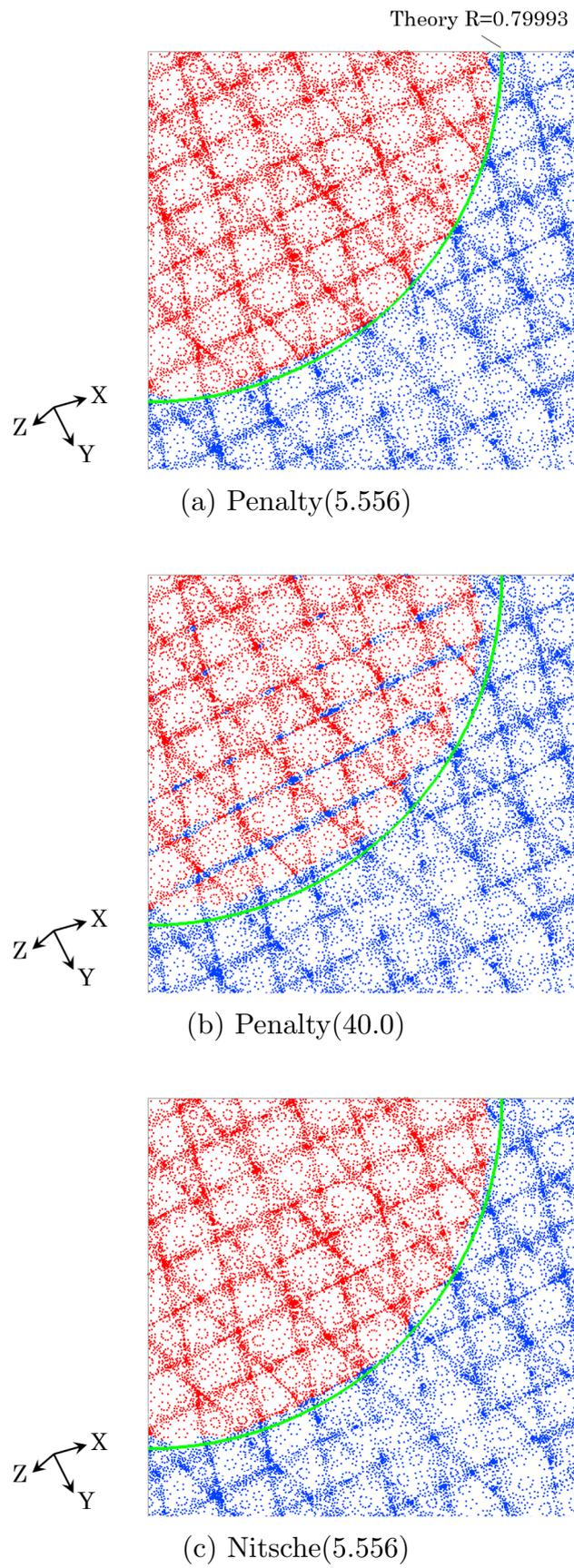
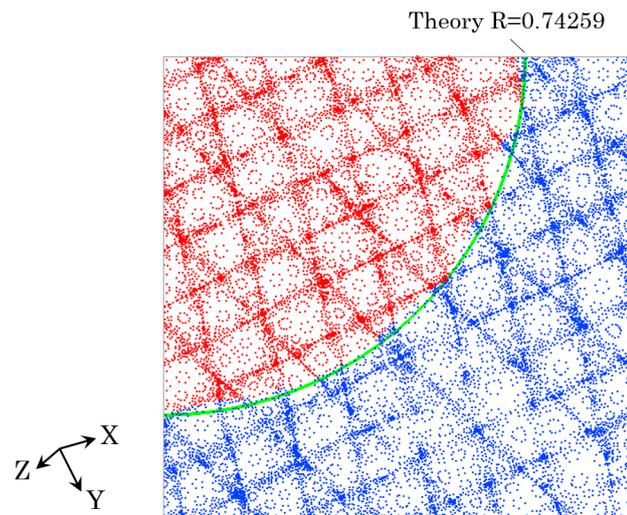
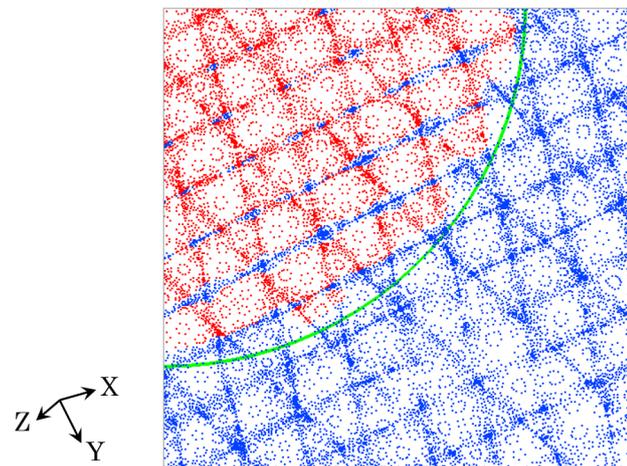


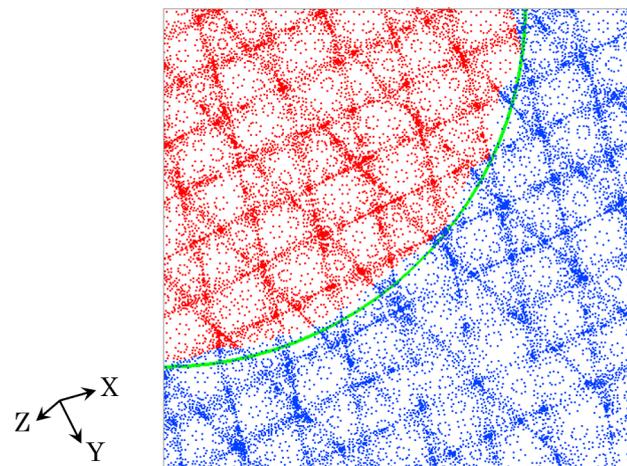
Fig. 4.46 Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 2E_1$)



(a) Penalty(7.222)



(b) Penalty(50.0)



(c) Nitsche(7.222)

Fig. 4.47 Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 5E_1$)

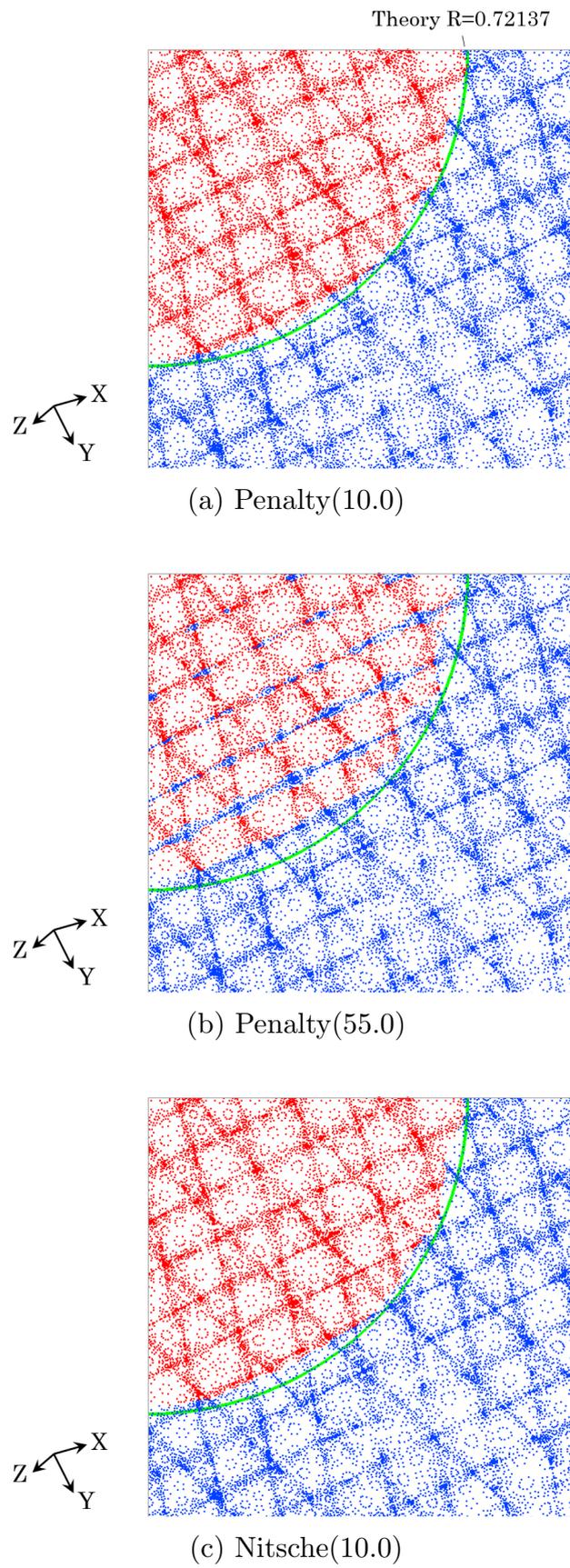


Fig. 4.48 Contact on/off (Contact of spheres - $E_2 = 10E_1$)

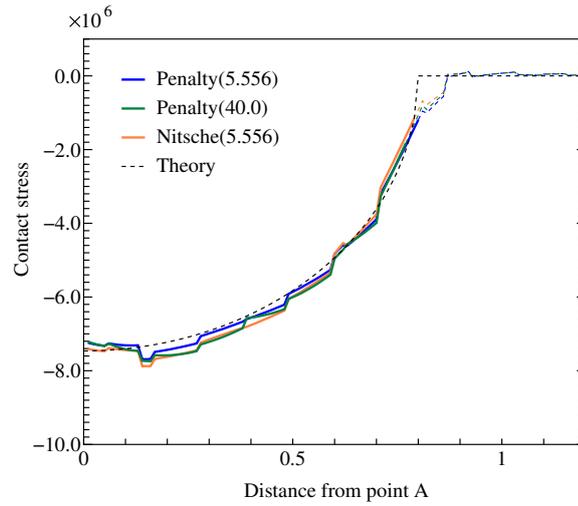
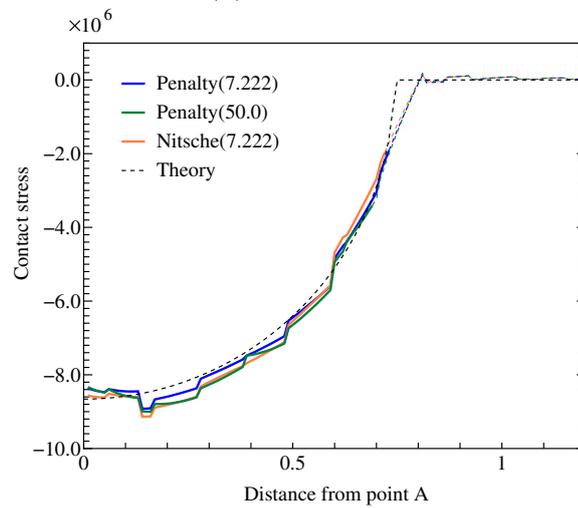
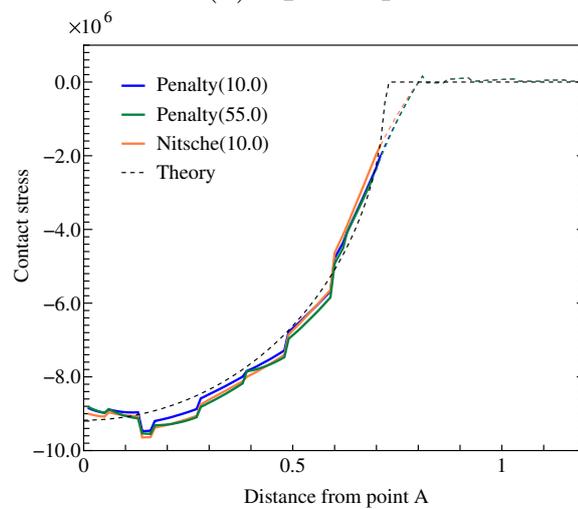
(a) $E_2 = 2E_1$ (b) $E_2 = 5E_1$ (c) $E_2 = 10E_1$

Fig. 4.49 Contact stress (Contact of spheres - different materials, along the sampling line)

第5章 高速化をはじめとする実用的な問題解決のための検証

5.1 はじめに

前章までで、ボクセル型構造解析の枠組みにおける実用的な接触解析手法を開発する目的で、FCMにおける線形弾性体の微小変形範囲における摩擦なし接触解析アルゴリズムを構築し、2次元および3次元の基本的な接触問題に適用してその有効性を確認した。また特に、接触拘束条件の定式化にNitscheの方法を用いることにより、計算コストを低く抑えながらも解析精度を確保することが可能であることを確認した。

開発した接触解析手法を汎用的なシミュレーションソフトウェアに組み込んで利用可能とするためには、解析手法の妥当性や精度は当然として、その他にも「解析モデルの準備が容易であるか」、「問題に応じて調整が必要なパラメータが存在しないか」、「実用上許容できる計算時間で解析できるか」、「わかりやすいポスト処理が可能か」など、様々な観点で実用性を満足する必要がある。

本章では、これらの課題の中でも特に重要な「計算時間」に焦点を当て、ボクセル型構造解析における要素分割の容易性を生かし、粗い要素サイズから細かい要素サイズへ連続的に解析を行うことによる計算の高速化手法について提案する。またその他にも、汎用的なシミュレーションソフトウェアに組み込んで実用化するための留意点について触れる。最後に実用的な接触問題としてナックルジョイントの接触解析を取り上げ、提案手法を用いた汎用的なシミュレーションソフトウェアの実現性を検証する。

5.2 段階的な要素サイズを用いた計算時間の短縮

5.2.1 手法の概要

実用上、短時間で計算結果が得られることは非常に重要である。本研究では、要素分割処理が煩雑にならないように、解析対象全体を均一な大きさと形状を持つボクセルで分割している。しかしこの場合、特に接触境界付近などの精度を確保したい領域の要素サイズで全体の要素サイズが決まるため、結果的に自由度数が膨大になることが多い。本研究ではこのような大規模な解析を想定し、連立一次方程式の解法として、メモリ使用量の面で極めて有利な EBE-PCG 法を用いているが、反面、EBE-PCG 法では全体剛性マトリクスを構築しないため、高度な前処理を行うことができず、CG 法の反復回数が増大して計算時間がかかることが難点である。

そこで計算時間の短縮を目的として、まず最初に粗い要素サイズで接触解析を行った後に、その結果を用いて所望の要素サイズで接触解析を行うという、2 段階の要素サイズを用いた解析手法を構築し、有効性を検討した。具体的には、以下の手順で解析を行う (**Fig. 5.1**)。

- i) 1 段階目として、粗い要素サイズで接触解析を行う。
- ii) 所望の細かい要素サイズで要素分割しなおし、i) の解析結果から接触範囲を引き継ぐ。
- iii) 2 段階目として、細かい要素サイズで接触解析を行う。

この 2 段階の要素サイズを用いた解析手法は、以下の点において本研究の解析手法に適している。

- 本研究の解析手法では、要素分割が自動で、一意かつロバストに行えるため、上記 i)~iii) の手順を連続的に処理することができる。
- 2 段階の解析はいずれも共通の入力データ（三角形パッチ群）を用いるため、1 段階目の解析結果である接触／非接触の情報を 2 段階目の解析に簡単に引き継ぐこと

ができる。

これらの特性により、元のアゴリズムにごくわずかな改変を加えるだけで2段階の要素サイズを用いた解析が可能となる。

1段階目から2段階目への接触／非接触の状態の引き継ぎは、具体的に以下に示すアルゴリズムにて実装した。

- i) 1段階目の解析結果として、粗い要素サイズの解析結果の接触／非接触の状態が、「粗い要素サイズにおける分割パッチ」の各積分点（本研究では1パッチあたり3点）ごとに得られる。
- ii) 2段階目の「細かい要素サイズにおける分割パッチ」の各積分点が、1段階目の分割パッチ群のうちのどのパッチに含まれるか調べ、その三角形内での局所座標 ξ を計算する (**Fig. 5.2**)。
- iii) 次式により、2段階目の解析における各積分点の接触／非接触の初期値を決定する。

$$\sum_{i=1}^3 \chi_i N_i(\xi) \quad (5.1)$$

ここで χ_i は粗い要素サイズにおける分割パッチの積分点 i における接触／非接触の状態（接触の場合は1、非接触の場合は0）、 N_i は積分点 i に最も近い三角形頂点で1、それ以外の頂点で0となる形状関数である。式(5.1)の評価結果が0.5より大きい場合は、2段階目の当該積分点の初期値を接触状態、小さい場合は非接触状態とする。つまり、1段階目の分割パッチ内で線形補間された接触状態値により2段階目の接触状態の初期値を決定するということである。

なお、1段階目、2段階目とも、元の入力データである三角形パッチ群は共通であるため、2段階目の分割パッチの各積分点に対し、必ず親の三角形パッチを同じくする1段階目の分割パッチが一意に定まる。このため、上記手順ii)における探索と ξ の計算は、容易かつ一意に行うことができる。

5.2.2 手法の有効性の検証

本手法の有効性の確認のために、前章で取り上げた球体同士の接触問題（モデルが傾斜していない場合）に適用した。1段階目の要素サイズは0.2、2段階目の要素サイズは0.1とし、接触拘束条件の定式化には Nitsche の方法を用いた。その他の解析条件はすべて前章と同じである。

各段階での接触／非接触の状態を **Fig. 5.3** に示す。(a) は1段階目の解析結果の接触状態、(b) は1段階目から2段階目に接触領域が引き継がれた状態（すなわち2段階目の解析の初期接触状態）、(c) は2段階目の解析結果の接触状態である。(a) と (b) から、接触領域が適切に2段階目へ引き継がれていることが確認できる。また最終的な接触状態(c) を、前章にて要素サイズ0.1で解析した結果 (**Fig. 4.32**) と比較すると、ほぼ同一の接触状態に収束していることが確認できる。実際に接触状態が異なる積分点は数点のみであり、本手法の解析精度の妥当性が確認できた。

要素分割まで含む全体の計算時間を **Table 5.1** に示す。最初から要素サイズ0.1で解析した場合に比べて、本手法により計算時間が約62%削減できていることが確認できる。

同様に、2段階目の要素サイズを0.05とした場合の計算時間を **Table 5.2** に示す。計算時間の削減効果はさらに顕著になり、最初から要素サイズ0.05で解析した場合と比較して、計算時間が約71%削減できた。これらの結果から、本提案手法が計算時間の削減に有効であることが確認できた。

なお補足として、1段階目の解析結果として得られる未知数ベクトル（すなわち変位ベクトル）を適宜補間して2段階目の未知数ベクトルの初期値として与えることにより、2段階目の計算時間の更なる短縮を試みたが、実際に数値実験を行ったところほとんど効果が得られなかった。よって本研究では2段階目の解析における未知数ベクトルはすべて0に初期化して解析を行った。

5.3 実用化への留意点

5.3.1 解析の準備

本研究では、FCMにおける3次元物体の形状表現として、三角形パッチ群を用いているが、これには汎用の3次元CADソフトウェアから一般的に出力可能なSTL形式をそのまま用いることができるため、非常に汎用性が高いと言える。

また三角形パッチ群に対して、荷重、拘束、接触といった境界条件がかかるパッチを指定する必要がある。これには、三角形パッチ群で表されるモデル上で平面を認識したり、三角形パッチ同士の法線のなす角が所定のしきい値以下の範囲を認識したりする機能を持ったグラフィカルユーザーインターフェース（GUI）を用意することにより、ユーザーが容易に境界条件の設定範囲を指定し、そのまま前章で構築した3次元の解析アルゴリズムに受け渡すことが可能である。あるいは元のCADソフトウェアに、CADモデルにおけるサーフェスと三角形パッチを関連付ける情報を出力する機能があれば、CADモデル上で境界条件を付与した上で、三角形パッチ群に受け渡すことも可能である。

解析を実行するにあたって、問題ごとにユーザーが調整すべきパラメータが存在すると、汎用ソフトウェアとしての実用性は大きく損なわれる。その点、本研究で構築したNitscheの方法を用いたアルゴリズムでは、前章で示したように、接触拘束条件に関するペナルティ係数や接触応力重み係数が要素サイズと物性値から決定されるため、ユーザーが設定すべきパラメータは実質的に要素サイズのみである。さらに通常の有限要素解析では、一般的にユーザーが要素分割を明示的に行う必要があり、解析対象の形状によってはしばしば煩雑な作業を伴う。これに対して提案手法では、要素分割処理そのものをユーザーから隠蔽することも可能であり、解析に要する人的コストの少ないシステムを構築することができる。

5.3.2 ポスト処理

構造解析におけるポスト処理として、変形図と変位および応力に関するコンター図の描画は欠かせない機能である。通常の有限要素法では、物体形状をそのまま表現している有

限要素モデル上に自由度を持つ節点が存在しているため、それを直接利用して変形図やコンター図の描画が可能である。

一方 FCM では、自由度を持つ節点の位置が物体形状の表面から離れているため、ポスト処理には工夫が必要である。しかし本研究の手法では、解析対象を含む空間が単純な直交格子で区切られ、その格子点に自由度を持つ節点が存在しているため、物体形状を表す分割パッチの各頂点において、変位や応力を補間する計算は容易である。ひとたび分割パッチ上に補間されれば、後は通常の有限要素法と同じように変形図やコンター図を描画することができるので、汎用のポストプロセッサを利用することも可能である。

ただし、本研究で用いた 3 重 1 次要素では、応力は要素間で不連続であるため、単純に分割パッチの頂点位置で算出した応力を用いてコンター図を描画すると、特に頂点が要素境界付近に位置するような場合に、局所的に精度の悪いコンター図になる恐れがある。これに対する対策として、一例として、当該の分割パッチ頂点を含む要素の 8 節点における応力をそれぞれ、各節点を含む周辺の要素の要素中心応力の平均値として求めた上で、元の要素内で 3 重 1 次補間により当該頂点位置での応力を算出するといった手法が考えられる。実用上はこのようなポスト処理の工夫も必要であると考えられ、実際に次節における解析結果の応力のコンター図は、上記の手順を用いて描画した。

5.4 実用的な問題への適用

5.4.1 ナックルジョイントの接触解析

複雑な接触を含む実用的な例題として、**Fig. 5.4** に示すナックルジョイント⁶¹⁾の接触解析を行った。荷重条件、拘束条件は同図に示す通りである。本モデルは **Fig. 5.5** に示すように 3 つの部品から構成されており、図中に黄色で示された面は接触する可能性がある面として事前に指定した面である。また要素分割方向を表す座標系の向きとモデルとの関係を **Fig. 5.6** に示す。要素サイズは 1.0mm とした。材質は合金鋼（ヤング率 210.0GPa, ポアソン比 0.28）である。ディリクレ条件には Nitsche の方法 ($\beta_D = 10.0$) を、接触拘束条件にはペナルティ法および Nitsche の方法（いずれも $\beta = 5.0$ ）を用いた。なお Nitsche の方法における接触応力重み係数 α は、式 (4.13) を用いて定めた。またペ

ナルティ法については、精度向上のために β を 20.0 とした場合の解析も併せて行った。また前章で有効性を確認した ghost penalty を適用するとともに、外部と判定されたサブボクセルにはヤング率の 1.0×10^{-6} 倍の剛性を与えた。

各手法による解析結果の変形図および構成部品に生じる接触応力分布図を、それぞれ **Fig. 5.7** および **Fig. 5.8** に示す。いずれの解析結果においても接触が適切に評価され、妥当な結果が得られている。またピン部品の接触／非接触の状態を **Fig. 5.9** に示す。いずれの結果でも、ピンの軸上に縞状に非接触と判定される領域が見られる。これは軸形状を、三角形の集合、すなわち区分的な平面で表現することによる形状誤差により、微妙に非接触と判定される積分点が発生することによるものと考えられる。特にペナルティ法でペナルティ係数を大きくした場合に、非接触と判定される点が多く見られる。さらに **Fig. 5.10** に赤い点線で示した線分上の g_N を **Fig. 5.11** に示す。同じペナルティ係数に対して、Nitsche の方法の方が全体的に貫入量が小さく、高い精度で解析できていることが確認できる。

各手法における計算コスト（接触反復回数，総 CG 法反復回数，要素分割まで含む全体の計算時間）を **Table 5.3** に示す。自由度数は 1,389,024 である。Nitsche の方法の方が 1 枚の分割パッチあたりの接触拘束条件に関する積分計算の計算量が多いため、同じペナルティ係数を用いた場合の計算時間はペナルティ法の方がやや短い。一方ペナルティ法で $\beta = 20.0$ とした場合、**Fig. 5.11** に示す通り貫入量は Nitsche の方法と同程度まで改善するが、CG 法の反復回数および計算時間は大幅に増加している。

続いて本問題に、5.2 節で示した 2 段階の要素サイズを用いた高速化手法を適用した。1 段階目の要素サイズは 2.0mm，2 段階目の要素サイズは 1.0mm である。解析結果の接触／非接触の状態を **Fig. 5.12** に示す。ペナルティ法および Nitsche の方法いずれの接触状態についても **Fig. 5.9** とほぼ一致していることが確認できる。また計算コストの比較を **Table 5.4** に示す。最初から要素サイズ 1.0mm で計算した場合 (**Table 5.3**) と比較すると、本手法により計算時間が約 60% 削減できており、2 段階の要素サイズを用いた高速化手法が、実用上も高い有効性を発揮することが確認できた。

5.4.2 並列性能とメモリ使用量

本研究では、EBE-PCG 法を用いることにより、並列計算において高いスケーラビリティが得られるアルゴリズムを構築した。ディリクレ条件や接触拘束条件の処理をはじめ、ghost penalty の処理についても、Element-by-Element の手法に則り、並列性能を損なわないよう留意した。また、ボクセル型構造解析に EBE-PCG 法を適用することにより、極めてメモリ使用量の少ないアルゴリズムを構築することができた。

構築したアルゴリズムの並列性能とメモリ使用量を検証するために、前項のナックルジョイントの解析（要素サイズ 1.0mm, 自由度数 1,389,024）を、SMP にて並列数を変化させて実施した。解析には、Intel[®] Xeon Silver 4116(2.1GHz, 12 cores)×2, 物理メモリ 256GB 搭載の計算機を用いた。なお純粋な並列性能の比較が目的であるため、2 段階の要素サイズを用いた高速化手法は適用していない。また解析全体ではなく、計算時間の大半を占める接触反復部分の計算時間を比較した。

並列数に対する計算コストの比較を Fig. 5.13 に示す。並列数と計算時間との関係から、並列数が増加しても、構築したアルゴリズムが高いスケーラビリティを維持していることがわかる。また並列数の増加に伴ってメモリ使用量も増加するが、一般的に同程度の自由度数による構造解析では、連立一次方程式の解法に直接法を用いた場合で約 25GB, ICCG 法などの反復法を用いた場合でも 1.5GB 程度は必要であり、これらと比較すると圧倒的にメモリ使用量が小さく抑えられていることがわかる。

5.5 おわりに

本章では、本研究の提案手法を汎用的なシミュレーションソフトウェアに組み込んで実用的な接触問題に適用するにあたり、実用上最も問題となる計算時間の短縮方法として、粗い要素から細かい要素へと 2 段階の要素サイズを用いて高速化する手法を提案した。この手法は、ボクセル型構造解析の特長である、要素分割の容易性とロバスト性を生かしたものであり、前章までに構築したアルゴリズムとの親和性も高い。実際に球体同士の接触問題に本手法を適用し、計算時間の短縮に高い効果を発揮することを確認した。本研究で

は1段階目と2段階目の要素サイズの比率が $1/2$ および $1/4$ の場合について、いずれも計算時間の短縮に顕著な効果が認められることを確認したが、問題に応じて最適な要素サイズの比率や、あるいはより多段階の要素サイズを用いた場合の計算効率についても、さらに検討が必要と考える。

続いて、提案手法を汎用的なシミュレーションソフトウェアに組み込むにあたって、解析準備とポスト処理の各段階において留意すべき点を検討し、既存の技術やソフトウェアを組み合わせることにより、提案手法を核とする解析システムの構築が十分実現可能であることを確認した。

さらに、実用的な問題の具体例としてナックルジョイントの接触解析を取り上げ、複雑な接触問題における提案手法の実用的な有効性を確認した。また、構築したアルゴリズムが並列計算において高いスケーラビリティを示すことを確認した。今後さらに計算機の並列性能の向上が見込まれることを考えると、提案手法の高い並列性能は、実用上重要な特性であると考えられる。

Table 5.1 Calculation cost (Contact of spheres, $h = 0.1$)

	Steps	Total CG iter.	Analy. time(min)	Total(min)
Phase 1 ($h = 0.2$)	13	6584	25.0	
Phase 2 ($h = 0.1$)	4	2619	34.6	59.6
Single phase ($h = 0.1$)	15	13221	158.4	158.4

Table 5.2 Calculation cost (Contact of spheres, $h = 0.05$)

	Steps	Total CG iter.	Analy. time(min)	Total(min)
Phase 1 ($h = 0.2$)	13	6584	25.0	
Phase 2 ($h = 0.05$)	5	5279	309.6	334.6
Single phase ($h = 0.05$)	15	24682	1155.8	1155.8

Table 5.3 Calculation cost (Knuckle joint, $h = 1.0\text{mm}$)

Contact	Steps	Total CG iter.	Analy. time(min)
Penalty(5.0)	13	49472	243.4
Penalty(20.0)	20	98169	420.9
Nitsche(5.0)	13	46252	291.4

Table 5.4 Calculation cost (Knuckle joint, 2 phases analysis)

Contact	Phase	Steps	Total CG iter.	Analy. time (min)	Total (min)
Penalty(5.0)	Phase 1($h = 2.0\text{mm}$)	12	27210	44.7	
	Phase 2($h = 1.0\text{mm}$)	4	9448	50.5	95.3
Nitsche(5.0)	Phase 1($h = 2.0\text{mm}$)	13	24309	55.2	
	Phase 2($h = 1.0\text{mm}$)	4	9793	62.9	118.1

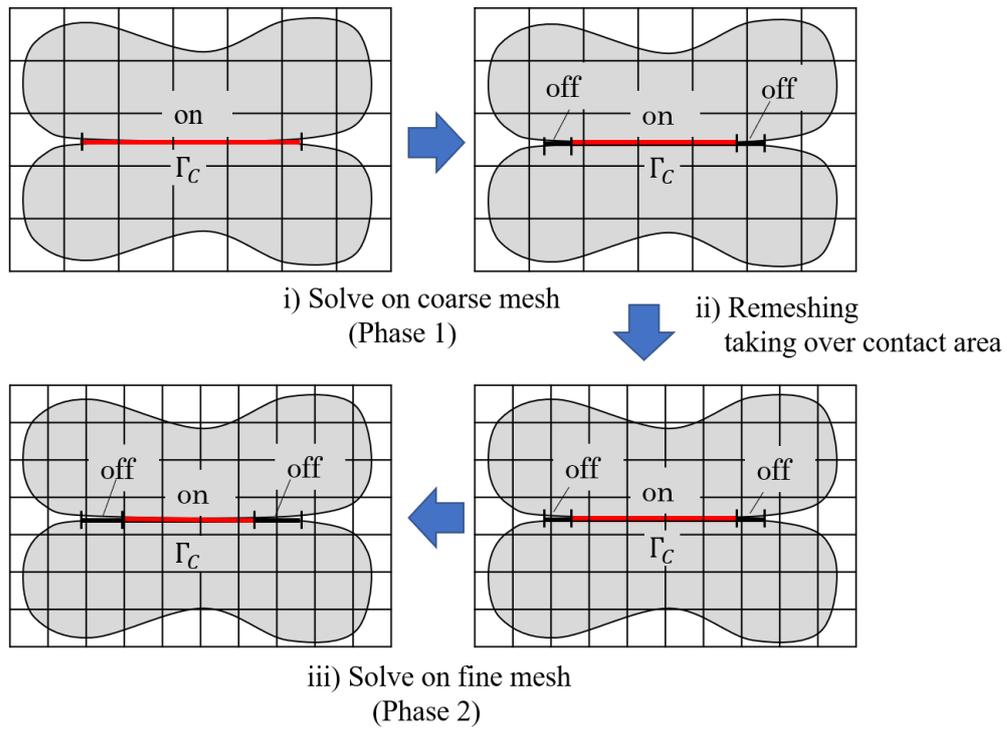


Fig. 5.1 Algorithm of 2 phases analysis

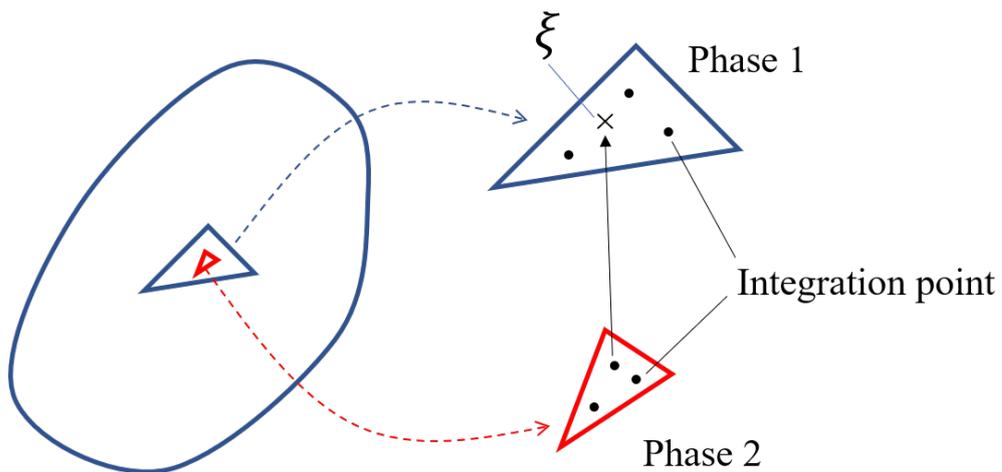
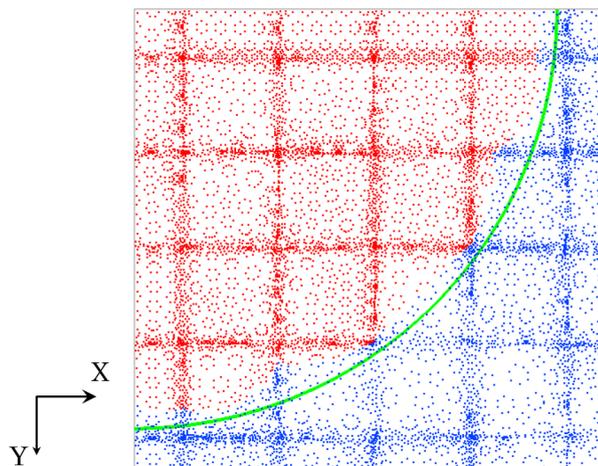
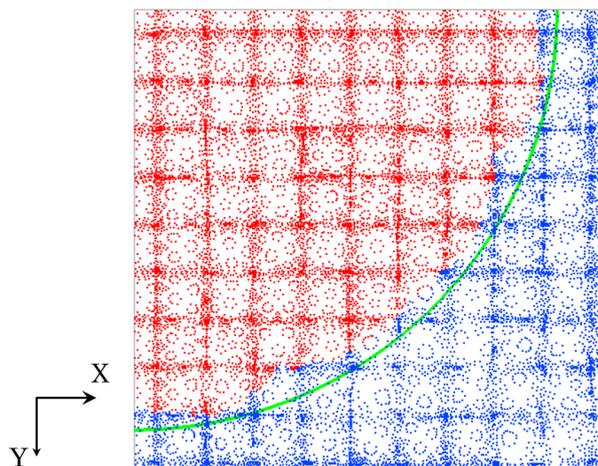


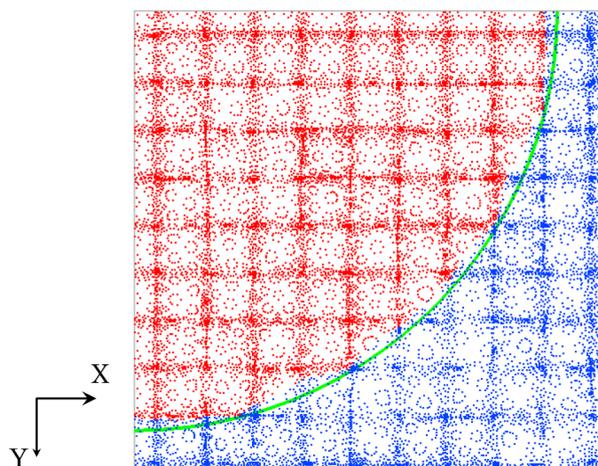
Fig. 5.2 Taking over contact status



(a) Phase 1 ($h = 0.2$, result)



(b) Phase 2 ($h = 0.1$, initial)



(c) Phase 2 ($h = 0.1$, result)

Fig. 5.3 Contact on/off (Contact of spheres, 2 phases analysis)

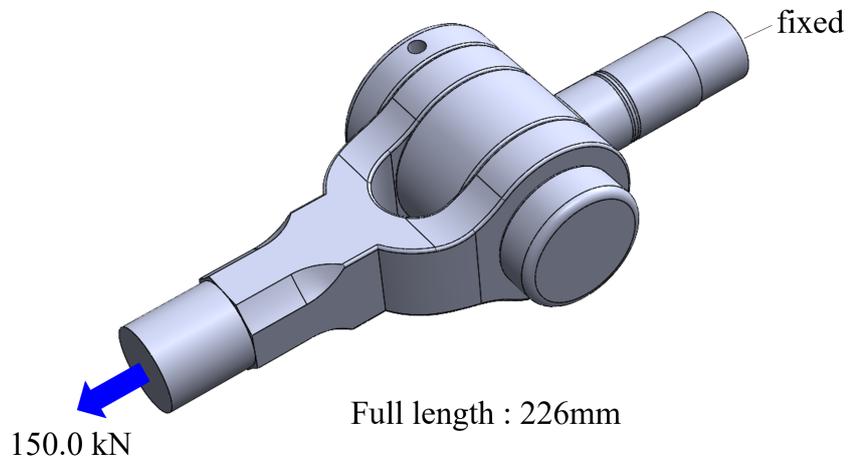


Fig. 5.4 Knuckle joint

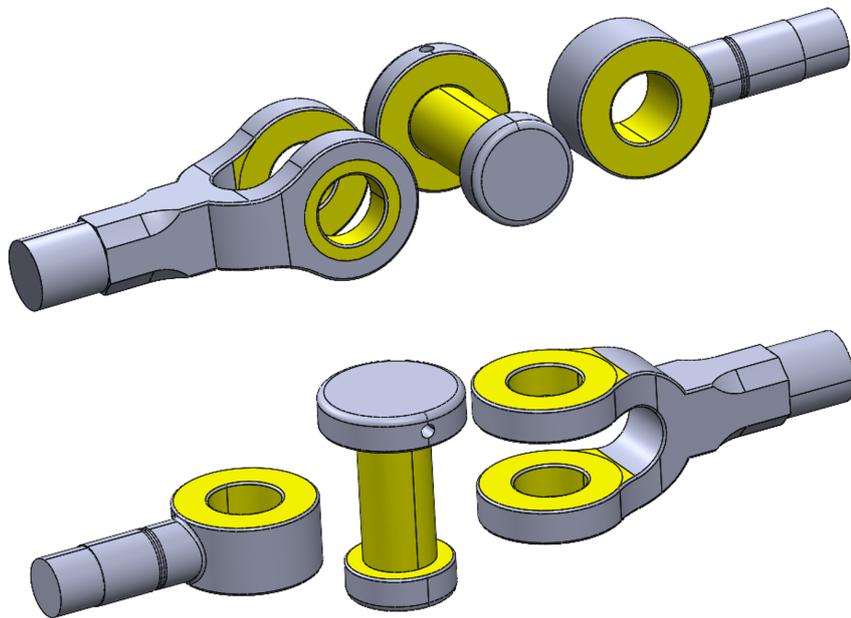


Fig. 5.5 Parts of knuckle joint

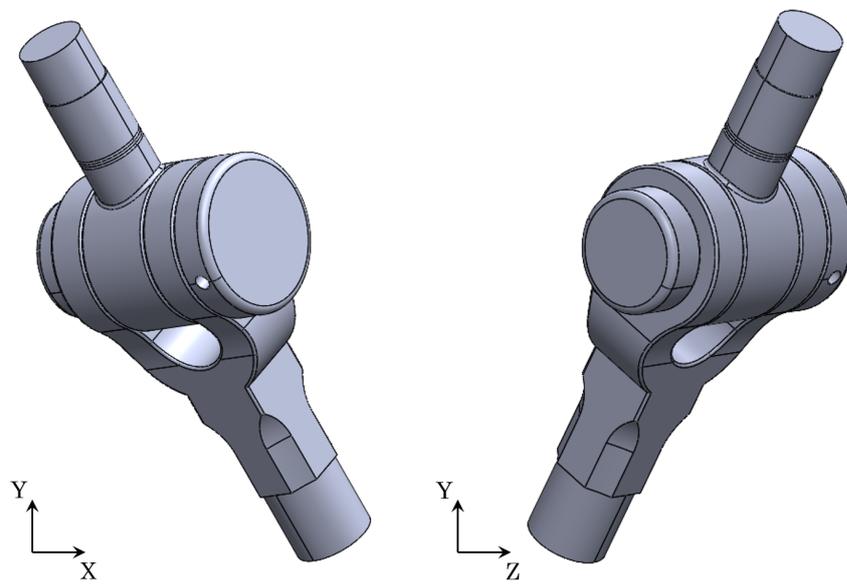


Fig. 5.6 Configuration (Knuckle joint)

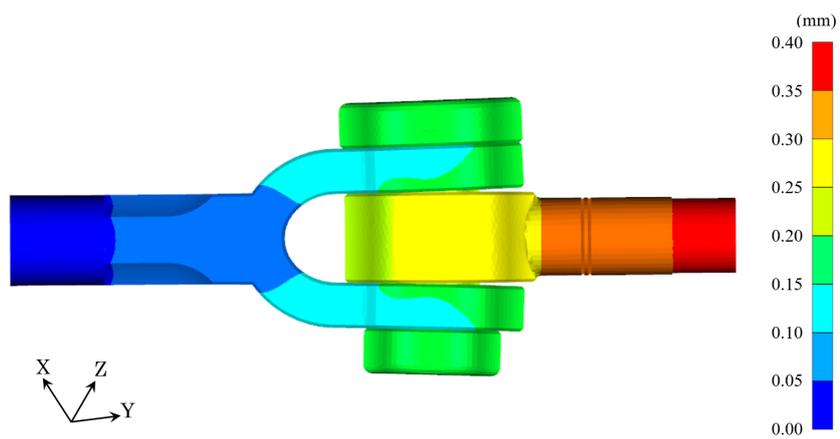
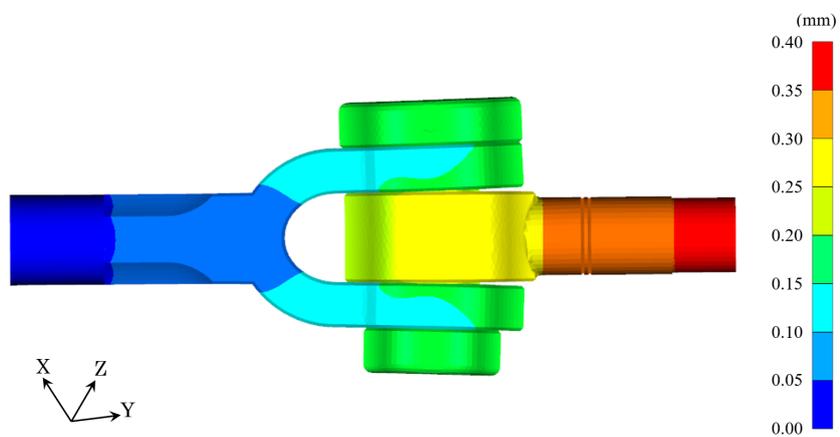
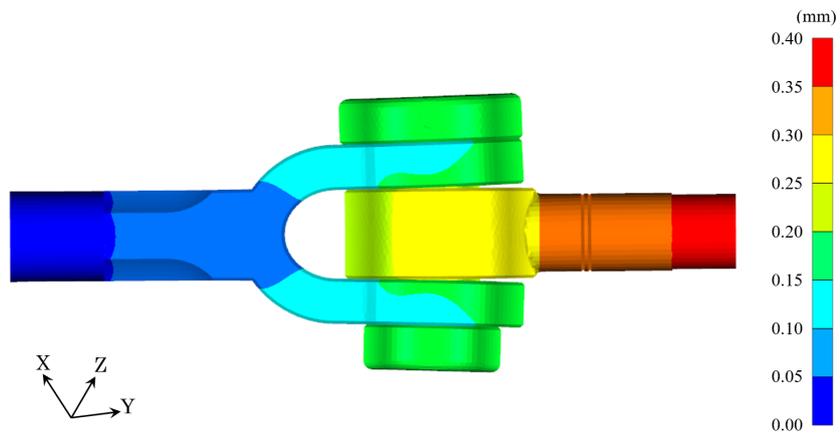
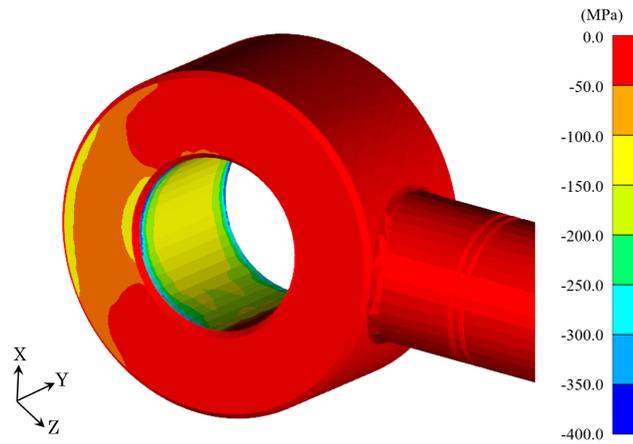
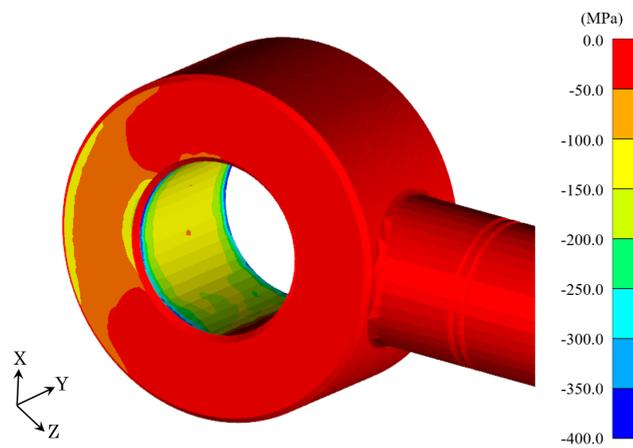


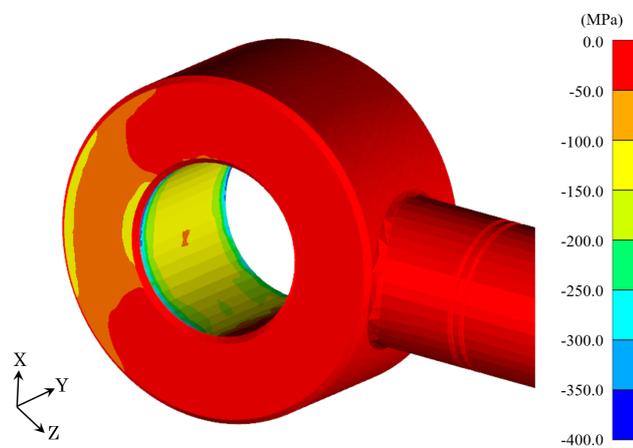
Fig. 5.7 Displacement($\times 30$) (Knuckle joint)



(a) Penalty(5.0)

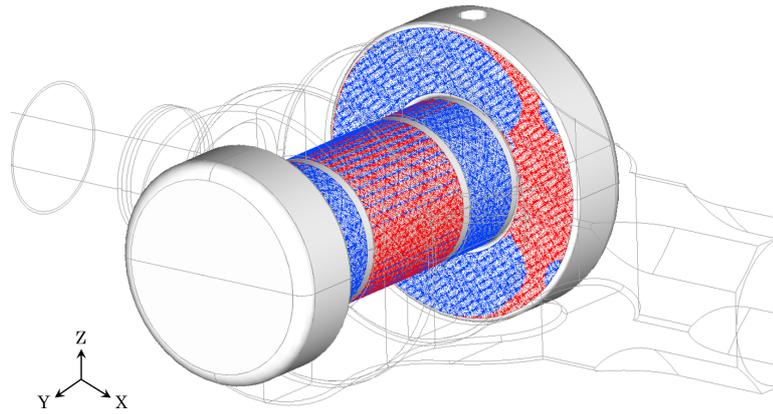


(b) Penalty(20.0)

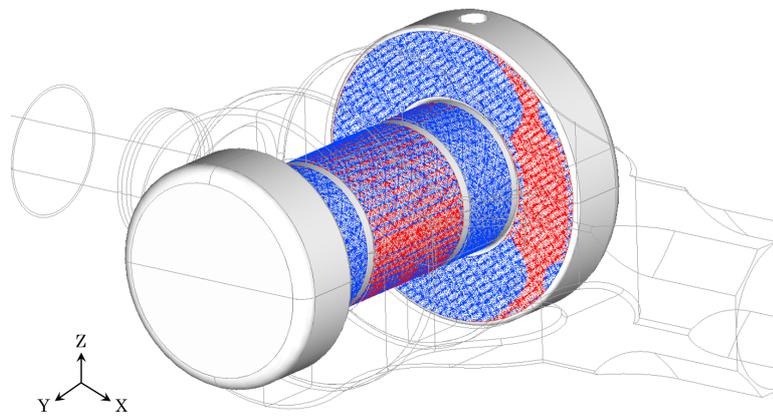


(c) Nitsche(5.0)

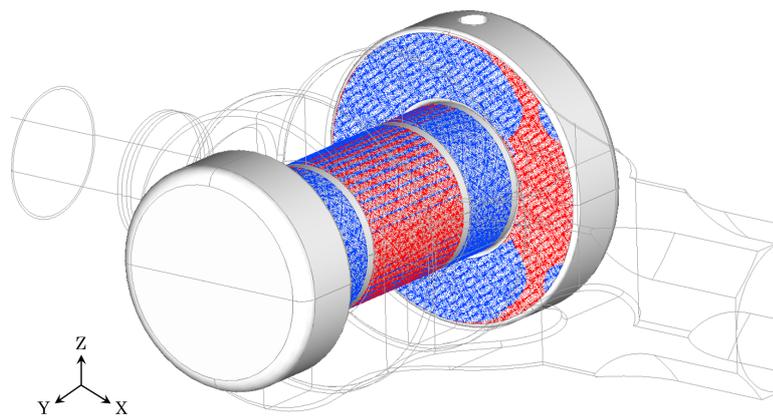
Fig. 5.8 Contact stress (Knuckle joint)



(a) Penalty(5.0)



(b) Penalty(20.0)



(c) Nitsche(5.0)

Fig. 5.9 Contact on/off (Knuckle joint)

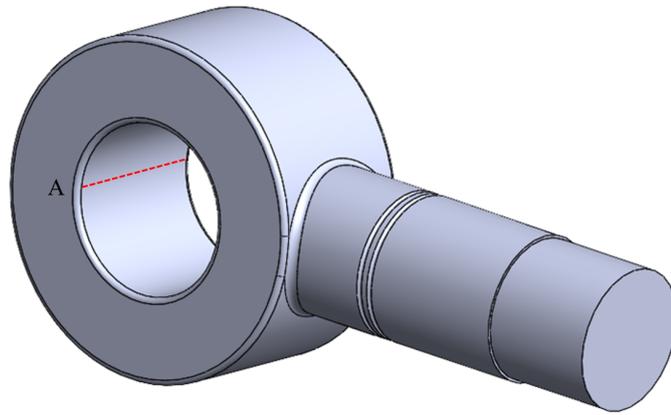


Fig. 5.10 Sampling line (Knuckle joint)

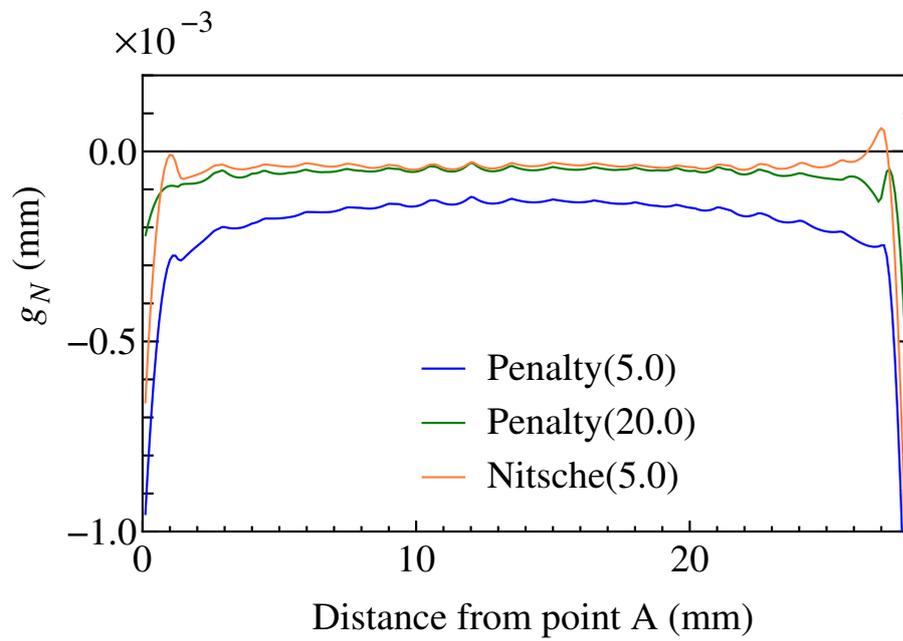
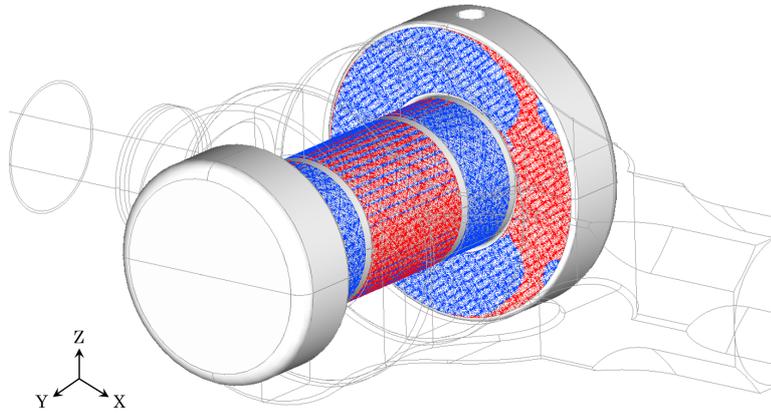
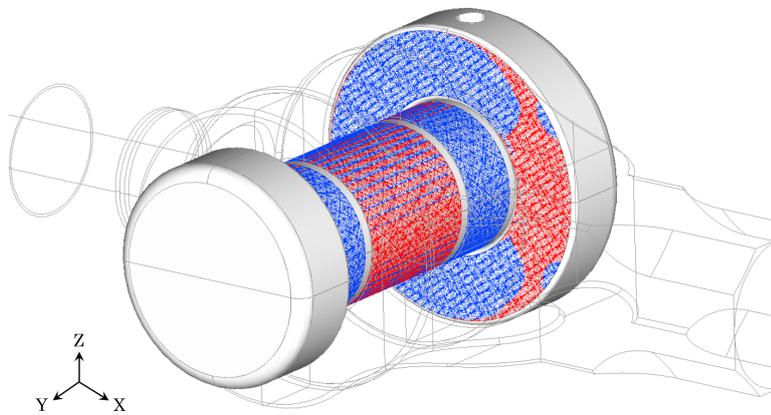


Fig. 5.11 g_N (Knuckle joint)



(a) Penalty(5.0)



(b) Nitsche(5.0)

Fig. 5.12 Contact on/off (Knuckle joint, 2 phases analysis)

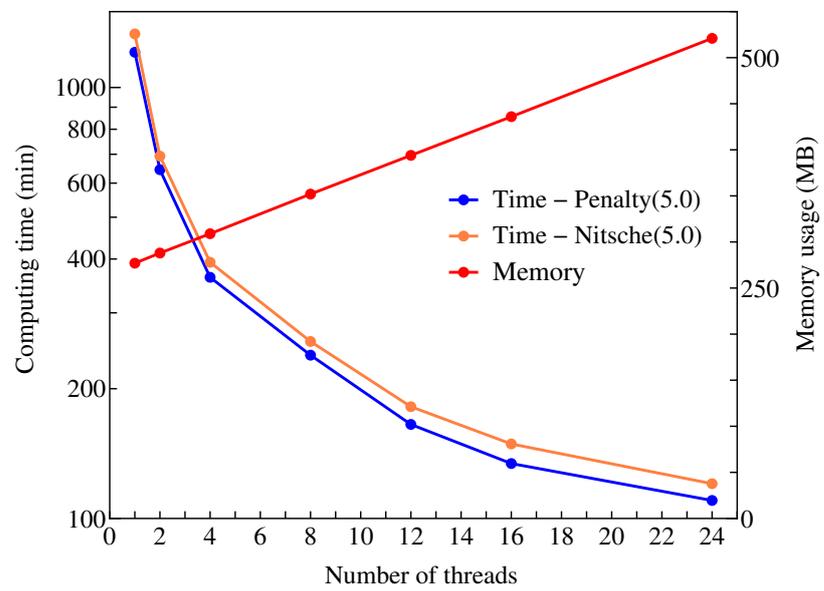


Fig. 5.13 Parallel performance and memory usage (Knuckle joint)

第6章 結論と展望

6.1 結論

ボクセル型構造解析の枠組みにおける実用的な接触解析手法の開発を目的として、有限被覆法による線形弾性体の微小変形範囲における摩擦なし接触解析アルゴリズムを構築した。また有限被覆法における接触拘束条件の定式化にペナルティ法を用いた場合の問題点に対処する目的で、Nitscheの方法を用いたアルゴリズムを提案した。

本研究ではまず、実用的な観点に基づいて採用したFCMにおける要素分割方法と近似関数の定式化を示した。また、FCMのように、自由度が定義される節点が物体表面から独立して位置しているために、節点値を直接制御するタイプの接触拘束条件が適用できない解析手法における接触拘束条件の定式化として、導入の容易なペナルティ法と本研究で提案するNitscheの方法を取り上げ、それぞれの定式化を示した。さらに重要な観点として、ペナルティ法は、本質的に接触拘束条件を満足しないことを一定程度許容する手法であり精度面での問題があること、また精度を確保するためにペナルティ係数を大きくすると、剛性マトリクスの性質が悪化して数値的な不安定を引き起こすことを示した。一方Nitscheの方法は、接触条件も含め、元の支配方程式との整合性が保持される手法であり、精度面で有利であることに加え、安定化項のペナルティ係数に大きな値を用いる必要がないため、数値的な安定性にも優れていることを示した。

続いて、構築したFCMにおける接触解析アルゴリズムを基本的な2次元問題に適用し、数値解析により有効性を確認した。また、接触拘束条件の定式化としてNitscheの方法を用いることにより、ペナルティ法を用いた場合に比べて小さなペナルティ係数でも貫入量が小さい高精度な解が得られることを確認するとともに、ペナルティ法を用いてNitscheの方法と同程度の精度を得るためには、ペナルティ係数を増加する必要がある

り、その結果として過拘束による接触応力の乱れが引き起こされることを示した。さらに、Nitscheの方法における接触応力の評価に際し、接触する2物体が要素内に占める充填率を考慮する手法を提案し、これによって接触応力の不安定性が改善できることを数値解析により示した。

提案手法の3次元問題への適用にあたっては、連立一次方程式の解法として、省メモリでボクセル型構造解析と相性の良いEBE-PCG法を採用した。その際、物体表面における境界要素の数値積分を効率良く行えるように、サブボクセル分割とNewton-Cotes積分を用いた積分手法を適用した。また、要素内で物体の占める領域が微小な要素が全体剛性マトリクスの性質を悪化させ、EBE-PCG法の収束性を著しく低下させる問題に対し、FCMによる解析にghost penaltyを導入することを提案し、数値解析により、応力精度および反復法の収束性の改善に極めて有効であることを示した。

これらの3次元問題における接触解析アルゴリズムの改善を図った上で、基本的な3次元問題に提案手法を適用し、数値計算により有効性を確認した。また2次元問題と同様に、同程度の小さなペナルティ係数に対して、ペナルティ法と比較してNitscheの方法の方がより高精度な解が得られるとともに、要素分割に対する誤差の収束性も高いことを確認した。またペナルティ法の精度を高めるためにペナルティ係数を大きくすると、全体剛性マトリクスの性質が悪化し、EBE-PCG法の収束性が低下して、計算時間が増大することを確認した。

提案手法の実用化にあたっては、特に計算時間の短縮が重要な課題となる。そこで本研究では、ボクセル型構造解析の要素分割の容易性・ロバスト性を生かして、2段階の要素サイズを用いた高速化手法を提案し、数値計算により高い有効性を確認した。また実用上、問題に応じてユーザーが調整すべきパラメータが存在することは好ましくない。ペナルティ法では、問題に応じて適切なペナルティ係数を決めることは必ずしも容易ではないが、Nitscheの方法では異種材料の接触問題も含めて、要素サイズと物性値から、適切な無次元化ペナルティ係数や接触応力重み係数が決定できることを示した。最後に提案手法を複雑な接触を含む実用的な接触問題に適用し、実用上の有効性を確認するとともに、並列計算において高いスケーラビリティを示すことを確認した。

以上により本研究にて、精度および計算効率の観点からペナルティ法よりも優れた Nitsche の方法を用いて、ボクセル型構造解析における実用的な接触解析手法を開発することができた。これにより、機械部品一般の設計初期段階でのアセンブリ解析における、ボクセル型構造解析の実現性を確認することができた。一般にボクセル型構造解析は計算時間のかかる手法であり、本研究で提案した高速化手法を用いても、なおそれなりの計算時間を要している。しかし一方で要素分割にかかる人的工数は大幅に削減することが可能であり、全体として見れば解析コストは決して高くはない。今後の計算機の並列性能の向上も視野に入れると、提案手法は十分な実用性を有するものと考えられる。

6.2 展望

本研究で構築した有限被覆法による接触解析アルゴリズムでは、連立一次方程式の解法として EBE-PCG 法を適用した。その適用にあたっては、並列計算との親和性を強く意識した。具体的には、EBE-PCG 法においてボトルネックとなり得る、物体表面における境界要素の積分計算に対し、サブボクセル分割と Newton-Cotes 積分を用いて効率化を図った。また接触拘束条件やディリクレ条件の積分処理では、各分割パッチの属する要素が一意に定まるようにすることによって、境界積分処理がパッチごとに非対称にならないように留意した。さらに ghost penalty 項の積分処理も、ボクセル型構造解析では EBE-PCG 法との相性が良い。これらの並列計算への適性により、本研究の手法は、GPGPU をはじめとするメニーコアタイプのプロセッサや、大規模な PC クラスタ環境など、今後ますます並列性能の向上が期待される計算機環境において高い有効性を発揮するものと期待できる。

また八分木構造のボクセルモデルを用いる手法や、あるいは領域ごとに異なる要素サイズを用い、領域境界を本研究で用いた Nitsche の方法により接続する手法など、全体の自由度数を低減してさらに計算時間を短縮できる可能性も考えらる。マルチグリッド法による高速化なども含め、今後の検討が必要と考える。さらに FCM は一般化有限要素法としての側面を持ち、被覆ごとに近似精度をコントロールすることもできる。これを利用して、高い精度が求められる接触境界付近のみ高次の近似関数を用いるような手法も今後の

研究課題と考える。

応用的な側面として、本研究で構築した手法は、要素分割に人手を煩わせなくて済むことから、設計システム内部に組み込まれて、多数の設計案に対して自動的に接触解析まで含めた構造解析を処理する機能を担うといった利用も期待される。本研究では三角形パッチ群を入力形状としてアルゴリズムを構築したが、本質的には要素分割に必要な内外判定と境界積分に必要な三角形分割さえ適切に行えれば、提案手法を適用することが可能であり、CAD データを直接入力データとするような拡張も可能と考えられる。

またボクセル型構造解析の特長として、CT 画像など、通常の有限要素法では取り扱いにくいような様々な入力データが比較的容易に扱えるという利点がある。このような現物データに対しても、適宜スムージングを施せば、本提案手法による接触解析が適用できる可能性もあり、特にバイオエンジニアリング分野などでの応用が期待できる。

今後、生産技術の進化や 3D プリンターの発展などにより、従来の画一的な製品の大量生産から、より顧客ニーズに即した多品種少量生産へものづくりの在り方が広がって行くことが予想される。これに伴い、製品設計においても、実物の計測データなど、より多様な形式の入力データに基づく構造解析が求められることが考えられる。ボクセル型構造解析では、多様な入力データを扱えるのみならず、CAD データと CT 画像を組み合わせでモデリングするなど、複数の異なる形式の入力データを同時に扱うことも可能な汎用性の高い解析手法であり、通常の有限要素法では困難な様々な解析ニーズに対応し得るものと期待される。

参考文献

- 1) 日本計算工学会 (編), 鈴木克幸, 長嶋利夫, 萩原世也 (著), メッシュフリー解析法, 丸善, 2006.
- 2) 中川義葵, 永井学志, 月野誠, ボクセル FEM コードのマルチ GPU 化, 計算工学講演会論文集, **18**, 2013.
- 3) 鈴木 克幸, 特集 メッシュレス法, 計算工学, **7**(1), pp. 410, 日本計算工学会, 2002.
- 4) 野口 裕久, メッシュフリー法のクラス分けと実用化に向けて, 計算工学, **7**(1), pp. 411–414, 日本計算工学会, 2002.
- 5) Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L., Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**(2), pp. 229–256, 1994.
- 6) Liu, W. K., Jun, S., Zhang, Y. F., Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **20**(8–9), pp. 1081–1106, 1995.
- 7) Monaghan, J. J., An introduction to SPH, *Comput. Phys. Comm.*, **48**(1), pp. 89–96, 1988.
- 8) Koshizuka, S., Tamako, H., Oka, Y., A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation, *Comput. Fluid Dyn. J.*, **4**(1), pp. 29–46, 1995.
- 9) Shi, G. H., Manifold Method of Material Analysis, *Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, **92-1**, U.S. Army Research Office, 1991.
- 10) Babuška, I., Melenk, J. M., The partition of unity method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **40**(4), pp. 727–758, 1997.

- 11) Strouboulis, T., Babuška, I., Copps, K., The design and analysis of the Generalized Finite Element Method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **181**(1–3), pp. 43–69, 2000.
- 12) Duarte, C. A., Babuška, I., Oden, J. T., Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems, *Comp. & Struct.*, **77**(2), pp. 215–232, 2000.
- 13) Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **46**(1), pp. 131–150, 1999.
- 14) Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T., Extended finite element method for three-dimensional crack modelling, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **48**(11), pp. 1549–1570, 2000.
- 15) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉, 被覆単位で精度をコントロールするマニフォルド法 (FCM), *計算工学講演会論文集*, **2**, pp. 399–402, 1997.
- 16) 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, 関勝載, 金伝栄, 中西克嘉, ボクセル被覆による3次元ソリッドのメッシュレス解析, *土木学会応用力学論文集*, **1**, pp. 215–222, 1998.
- 17) 浅井光輝, 寺田賢二郎, 有限被覆法による不連続面進展解析, *土木学会応用力学論文集*, **6**, pp. 193–200, 2003.
- 18) 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎, 有限被覆法の弾塑性問題への適用とその性能評価, *土木学会応用力学論文集*, **6**, pp. 247–256, 2003.
- 19) Haslinger, J., Renard, Y., A new fictitious domain approach inspired by the extended finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **47**(2), pp. 1474–1499, 2009.
- 20) Burman, E., Hansbo, P., Fictitious domain finite element methods using cut elements: I. A stabilized Lagrange multiplier method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **199**(41–44), pp. 2680–2686, 2010.

- 21) Burman, E., Hansbo, P., Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method, *Appl. Numer. Math.*, **62**(4), pp. 328–341, 2012.
- 22) Burman, E., Claus, S., Hansbo, P., Larson, M. G., Massing, A., CutFEM: Discretizing geometry and partial differential equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **104**(7), pp. 472–501, 2015.
- 23) Parvizian, J., Düster, A., Rank, E., Finite Cell Method: h- and p-extension for embedded domain problems in solid mechanics, *Comput. Mech.*, **41**, pp. 121–133, 2007.
- 24) Düster, A., Parvizian, J., Yang, Z., Rank, E., The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **197**(45–48), pp. 3768–3782, 2008.
- 25) 鳥垣俊和, 藤谷克郎, 富田直幸, ボクセルモデルを用いた構造解析における接触問題の取り扱い, 計算工学講演会論文集, **3**(2), pp. 369–372, 1998.
- 26) Bell, H., Suzuki, K., Ohtsubo, H., Finite Cover Method on Contact Problem in 3D Solid, *Theoretical and Applied Mechanics*, **50**, pp. 381–390, 2001.
- 27) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Fox, D. D., *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, 7th Edition*, Butterworth-Heinemann, 2013.
- 28) Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics 2nd Edition*, Springer, 2006.
- 29) Papadopoulos, P., Taylor, R. L., A mixed formulation for the finite element solution of contact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **94**(3), pp. 373–389, 1992.
- 30) Puso, M. A., Laursen, T. A., A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **193**(6–8), pp. 601–629, 2004.
- 31) Babuška, I., The finite element method with Lagrangian multipliers, *Numer. Math.*, **20**, pp. 179–192, 1973.

- 32) Stenberg R., On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method, *J. Comput. Appl. Math.*, **63**(1–3), pp. 139–148, 1995.
- 33) Bernardi, C., Maday, Y., Patera, A. T., Domain Decomposition by the Mortar Element Method, in *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, NATO ASI Series, **384**, pp. 269–286, 1993.
- 34) Barbosa, H. J. C., Hughes, T. J. R., Boundary Lagrange multipliers in finite element methods: Error analysis in natural norms, *Numer. Math.*, **62**, pp. 1–15, 1992.
- 35) Baiocchi, C., Brezzi, F., Marini, L. D., Stabilization of Galerkin methods and applications to domain decomposition, in *Future Tendencies in Computer Science, Control and Applied Mathematics*, Lecture Notes in Computer Science, **653**, pp. 343–355, 1992.
- 36) Chouly, F., Fabre, M., Hild, P., Mlika, R., Pousin, J., Renard, Y., An overview of recent results on Nitsche’s method for contact problems, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **121**, pp. 93–141, Proceedings of the UCL Workshop 2016 on Geometrically Unfitted Finite Element Methods and Applications, 2017.
- 37) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Fox, D. D., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7th Edition*, Butterworth-Heinemann, 2013.
- 38) Wriggers, P., Simo, J. C., Taylor, R., Penalty and Augmented Lagrangian formulations for contact problems, In J. Middleton and G. Pande, editors, Proceedings of NUMETA Conference, Balkema, Rotterdam, 1985.
- 39) Simo, J. C., Laursen, T. A., An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comp. & Struct.*, **42**(1), pp. 97–116, 1992.
- 40) Nitsche, J., Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **36**, pp. 9–15, 1971.

- 41) Becker R., Hansbo P., Stenberg R., A finite element method for domain decomposition with non-matching grids, *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.*, **37**(2), pp. 209–225, 2003.
- 42) Hansbo, A., Hansbo, P., An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **191**(47–48), pp. 5537–5552, 2002.
- 43) 山田貴博, 落合亮, 松井和己, 背景直交格子を用いた領域分割型重合メッシュ有限要素法, *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, **67**(2), p. I-117–I-125, 2011.
- 44) 綿貫達也, 山田貴博, 松井和己, 領域分割型重合メッシュ法による応力解析, *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, **70**(2), p. I-255–I-264, 2014.
- 45) 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 不連続 Galerkin 有限被覆法の開発とその性能評価, *土木学会応用力学論文集*, **8**, pp. 215–224, 2005.
- 46) 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 有限被覆近似における一般化要素の界面近似特性 —界面を含む一般化要素のパッチテスト—, *日本計算工学会論文集*, **2006**, p. 20060014, 2006.
- 47) 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 領域分割問題における有限要素メッシュ界面の接手法について, *土木学会論文集 A*, **62**(2), pp. 345–361, 2006.
- 48) Wriggers, P., Zavarise, G., A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by Nitsche, *Comput. Mech.*, **41**(3), pp. 407–420, 2008.
- 49) Heintz, P., Hansbo, P., Stabilized Lagrange multiplier methods for bilateral elastic contact with friction, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **195**(33–36), pp. 4323–4333, 2006.
- 50) Chouly, F., Hild, P., A Nitsche-based method for unilateral contact problems: numerical analysis, *SIAM J. Numer. Anal.*, **51**(2), pp. 1295–1307, 2013.
- 51) Fabre, M., Pousin, J., Renard, Y., A fictitious domain method for frictionless contact problems in elasticity using Nitsche’s method, *SMAI J. Comput. Math.*, **2**, pp. 19–50, 2016.

- 52) Jin, C., Suzuki, K., Ohtsubo, H., Linear Structural Analysis Using Cover Least Square Approximation, *Journal of Applied Mechanics*, **3**, pp. 167–175, JSCE, 2000.
- 53) Hansbo P., Nitsche's method for interface problems in computational mechanics, *GAMM-Mitt.*, **28**(2), pp. 183–206, 2005.
- 54) Renard, Y., Generalized Newton's methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **256**, pp. 38–55, 2013.
- 55) Sanders, J. D., Dolbow, J. E., Laursen, T. A., On methods for stabilizing constraints over enriched interfaces in elasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **78**(9), pp. 1009–1036, 2009.
- 56) Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.
- 57) 大坪英臣, 鈴木克幸, 安藤裕友, EBE 法による大規模有限要素ソルバ, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **17**, pp. 483–488, 1993.
- 58) 山田知典, 長嶋利夫, 構造格子を用いたメッシュフリー有限要素解析における境界要素積分手法, 日本計算工学会論文集, **2009**, p. 20090006, 2009.
- 59) Burman, E., Ghost penalty, *Comptes Rendus Mathematique*, **348**(21–22), pp. 1217–1220, 2010.
- 60) Annavarapu, C., Hautefeuille, M., Dolbow, J. E., A robust Nitsche's formulation for interface problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **225–228**, pp. 44–54, 2012.
- 61) Khurmi, R. S., Gupta J. K., *A Textbook of Machine Design*, Eurasia Publishing House, 2005.