

学位論文及び審査結果の要旨

横浜国立大学

氏名	前澤 俊一
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	環情博甲第2176号
学位授与年月日	令和2年9月30日
学位授与の根拠	学位規則(昭和28年4月1日文部省令第9号)第4条第1項及び 横浜国立大学学位規則第5条第1項 (論博の場合は第2項)
学府・専攻名	環境情報学府 情報環境専攻
学位論文題目	Connected subgraphs with certain properties in dense graphs
論文審査委員	主査 横浜国立大学 准教授 小関健太 横浜国立大学 教授 根上生也 横浜国立大学 教授 中本敦浩 横浜国立大学 准教授 白崎実 芝浦工業大学 教授 松田晴英

論文及び審査結果の要旨

グラフにハミルトン閉路を見つける問題は、四色定理とのかかわりなど理論的な興味と、巡回セールスマン問題等への応用など応用的な理由から、グラフ理論において多くの研究がなされている。与えられたグラフにハミルトン閉路や道が存在するかどうかを判定する問題は、NP-完全問題と呼ばれる難しいクラスに入るため、ハミルトン閉路や道の存在を保証するよりよい十分条件を求める研究が主流となっている。特に、Oreによる「任意の非隣接頂点の次数和がグラフの頂点数以上であるならば、そのグラフはハミルトン閉路をもつ」という結果以降、辺数が頂点数と比較して多い密なグラフに対してのハミルトン閉路の研究が盛んに行われている。また、ハミルトン閉路から派生した、最大次数の低い全域木、分岐点や葉の数の制約のある全域木、長い閉路など、多くの研究がなされている。これらのような様々な条件を満たす部分グラフの存在は、応用と結びつきながら発展してきた。

本論文は、様々な条件を満たす部分グラフの存在を保証する十分条件について述べており、Introductionと全4章で構成されている。Introductionでは本論文のモチベーションについて、背景となっている先行研究や本分野の現状が詳しく説明されている。第1章では、第2章以降で登場する定義・概念が簡潔に解説されており、第2章～第4章では前澤氏の研究について述べられている。

第2章では、Connected degree factor(次数制約の連結因子)という題目で、主に最大次数が定数 k 以下である全域木(全域 k -treeと呼ばれている)について述べている。ハミルトン道は最大次数が2以下の全域木とみなすことができるため、最大次数の観点で発展させるという研究である。特に、Oreの結果を全域 k -treeに拡張したWinの結果と、グラフクラスを狭めることでOreの定理に必要な次数条件を緩和したLiuらの結果に注目し、これらの共通の拡張の結果を得ている。これは、単に重ね合わせただけで得られるものではなく、どのようなグラフがその次数条件の最善性を示すのか、などの深い考察が必要であり、前澤氏の結果はこの点を乗り越えたものである。得られた条件も最善なものであり興味深いものであると言える。さらに、禁止部分グラフ条件による k -treeの存在性について、また、総超過数が制限された全域木の存在性についても、議論されている。ここで、木の総超過数は、各頂点の次数の k からの超過分の総和として定義され、その木の全域 k -treeからの逸脱度を表している。これらも既存の条件を改良した最善の結果とな

っている。

第 3 章では、現実の避難経路問題をモチベーションにした分岐点と端数が少ない全域木を対象としており、そのような全域木が存在するための次数条件を考察している。ハミルトン道は、分岐点と端数の合計が 3 以下の全域木と同値であるので、これもやはりハミルトン道を発展させる研究である。Nikoghosyan と Saito・Sano らは独立にそのような全域木が存在するための次数と条件を与えているが、前澤氏はその次数と条件のより本質的な形を追求し彼らの結果を拡張している。加えて、いくつかの頂点が指定されたとき、それらを葉の集合とする全域木が存在するかどうか、という問題は、指定された頂点がちょうど 2 点のときに端点指定のハミルトン道問題と一致するので、やはりハミルトン性の拡張として研究が進んでいる。本章では、そのような全域木の存在性について、Fan-型と呼ばれる新しい十分条件を与えている。これも最善の結果となっている。

第 4 章では、2 部グラフに長い道が存在するための次数条件を与えている。長さが頂点数-1 の道はハミルトン道であるので、これはやはりハミルトン道の拡張となっている。本研究では、2 部グラフ版の Ore の定理である Moon・Moser の結果を長い道を得るという方向に拡張し、さらにそれを使い、2 部グラフ的 Ramsey 数の結果を得た。単に全域連結部分グラフを保証する十分条件を得ただけでなく、それを他の研究分野へと応用するもので研究者間の評価も高い。

以上のように、本論文では、様々な制約条件をみたす部分グラフの存在を、次数条件を満たす密なグラフに保証するもので、独自の観点・手法により多角的に研究し、研究成果を高い完成度でまとめたものである。

本論文を構成する主要な研究成果は、査読付論文誌に受理済の論文 3 編と投稿中の論文 3 編によって公表されており、高い評価を受けている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分な価値を有すると、審査委員全員一致で認めるものである。令和 2 年 7 月 21 日(火) 10 時から 11 時までの博士論文発表会終了後に、審査委員全員の出席のもとで、前澤 俊一氏の最終試験を行った。当該分野の外部の研究者を含めて 11 名が発表会に参加され、学位論文での研究内容の説明がなされたのち、活発な質疑応答がなされた。学力試験として、グラフ理論を中心とする専門分野および離散数学関連分野における口頭試問を行い、これらの分野の研究に関する深い専門知識と理解、および質疑応答における適切な対応能力を同氏が有することを確認した。外国語は、本学位論文や国際雑誌受理論文が英語で書かれていること、および英語での講演を行っていることをもって、十分な学力を有すると判定した。また、博士課程後期修了に必要な単位すべてを取得していることを確認した。

これらより、前澤俊一氏が最終試験に合格であると、審査委員全員一致で判定した。

注 論文及び審査結果の要旨欄に不足が生じる場合には、同欄の様式に準じ裏面又は別紙によること。