巴戦の一般化に関する考察

馬場　裕 *　　　　山本　光 †

Consideration on generalization of Tomoesen

Abstract : In this paper, we consider the generalization of Tomoesen, which is the special case of Waldegrave's problem. In the usual Tomoesen with three players, we consider two probability models in which the winning probability of each player changes from game to game, while three players have the same ability. For these two models, we derive the winning probability of each player and the probability distribution of the number of games until the winner decides. Further we derive the probability generating function, expectation and variance of the number of games until the winner decides. The results obtained in this paper contain existing results and useful generalization for applications is made.

Keywords : Tomoesen, winning probability, probability generating function, expectation, variance

1. はじめに

巴戦は，大相撲における優勝決定戦の方式の一種で，本割の結果，相星の力士が 3 人いる場合の優勝者決定のための方法である．具体的には次の方式で優勝者を決める．

- 戦う選手は A, B, C の 3 人
- 1 試合目は A と B が戦う
- $n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に待機していた人が戦う
- 全員の実力は同じ
- 誰かが 2 連勝したらその人が優勝してゲーム終了

全員の実力が同じということから，どの試合でも各選手の勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるが，最初に対戦する 2 人と 2 試合目に出てくる選手の優勝確率はそれぞれ $\frac{5}{14}, \frac{4}{14}$ で，最初の 2 人が有利であること，また，優勝者が決まるまでの試合数の期待値は 3 であることが知られている（森村 [4]）．実際に大相撲においては，これまでに幕内で巴戦により優勝決定戦が行われたのは 7 回あり，優勝決定までの試合数は 2 試合が 3 回，3 試合が 3 回，4 試合が 1 回となっている（巴戦， Wikipedia [5]）．

巴戦の問題を拡張して，$r+1$ 人の同じ実力を持った選手の誰かが r 連勝するまで戦うゲームは，「ワルデグレーブの問題」と呼ばれ，ブロム，ホルスト，サンデル [1], Hald [2], Kinney [3] で議論

*横浜国立大学名誉教授 baba-yutaka-sv@ynu.ac.jp
†横浜国立大学教育学部 yamamoto-ko-zf@ynu.ac.jp

されており，各人の優勝確率や優勝者が決まるまでの試合数の期待値などが得られている．しかし，筆者の知る限りでは，これまで解析されたモデルは各試合ごとに各選手が勝つ確率が一定である場合のみであり，試合を経るごとに勝つ確率が変わっていく場合を解析したものはない．

そこで本論文では，巴戦において，3 人が同じ実力ではあるものの，試合を経ることによって勝つ確率が変わっていく 2 つのモデルについて考察する．本論文で得られた結果は既存の結果を含み，種々の一般化がなされている．

2. モデルと解析

モデル 1：1 勝したら次に連勝する確率が p となるモデル

現実の試合では，試合が連続すると体力が奪われること等により，1 試合勝って連戦する選手が勝つ確率が小さくなることがあると考えられる．このような場合には，連戦になった選手が次も勝つ確率 p を $0 < p < \frac{1}{2}$ の値とすることにより，巴戦の新しい変形版モデルを考えることができる．また，逆に p を $\frac{1}{2} < p < 1$ の値とすることにすれば，1 勝した方がもっと勝ちやすくなるモデルとして扱うことが可能である．

いま，X_Y を X が Y に勝つことを表すものとすると，C が優勝するパターンは

$$A_B C_A C_B,\ A_B C_A B_C A_B C_A C_B,\ A_B C_A B_C A_B C_A B_C A_B C_A C_B, \cdots$$

と

$$B_A C_B C_A,\ B_A C_B A_C B_A C_B C_A,\ B_A C_B A_C B_A C_B A_C B_A C_B C_A, \cdots$$

であり，最初に A と B が戦う時だけはそれぞれが勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であることに注意すると，それらの確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}(1-p)p,\ \frac{1}{2}(1-p)^4 p,\ \frac{1}{2}(1-p)^7 p, \cdots$$

と

$$\frac{1}{2}(1-p)p,\ \frac{1}{2}(1-p)^4 p,\ \frac{1}{2}(1-p)^7 p, \cdots$$

である．A, B, C が優勝する確率をそれぞれ P_A, P_B, P_C とすると

$$P_C = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(1-p)^{3n-2} p = \frac{1-p}{p^2 - 3p + 3} \tag{1}$$

であり，$P_A = P_B$ より

$$P_A = P_B = \frac{1}{2}(1 - P_C) = \frac{p^2 - 2p + 2}{2(p^2 - 3p + 3)} \tag{2}$$

となる．

次に優勝者が決まるまでの試合数の確率分布，確率母関数および期待値，分散などのモーメントを導出する．確率変数 X を優勝者が決まるまでの試合数とする．C が優勝するパターンと同様にして，A が優勝するパターンは

$$B_A C_B A_C A_B,\ B_A C_B A_C B_A C_B A_C A_B,\ B_A C_B A_C B_A C_B A_C B_A C_B A_C A_B, \cdots$$

と

$$A_B C_A B_C A_B A_C,\ A_B C_A B_C A_B C_A B_C A_B A_C,\ A_B C_A B_C A_B C_A B_C A_B C_A B_C A_B A_C, \cdots$$

で，それらの確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}(1-p)^2p,\ \frac{1}{2}(1-p)^5p,\ \frac{1}{2}(1-p)^8p,\cdots$$

と

$$\frac{1}{2}(1-p)^3p,\ \frac{1}{2}(1-p)^6p,\ \frac{1}{2}(1-p)^9p,\cdots$$

である．B が優勝するパターンの確率とそれらの確率は同様であるから，C が優勝するパターンと合わせて，X の確率分布は

$$P(X=n)=(1-p)^{n-2}p \qquad (n\geq 2)$$

となる．また，試合数 X の確率母関数を $G_1(z)=E(z^X)\quad(|z|\leq 1)$ とすると，

$$G_1(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(1-p)^{n-2}pz^n=\frac{pz^2}{1-(1-p)z} \tag{3}$$

となる．すなわち，カウントにずれのある幾何分布である．よって，X の期待値，分散はそれぞれ

$$E(X)=G_1'(1)=1+\frac{1}{p} \tag{4}$$

$$V(X)=G_1''(1)+G_1'(1)-\{G_1'(1)\}^2=\frac{1-p}{p^2} \tag{5}$$

となる．

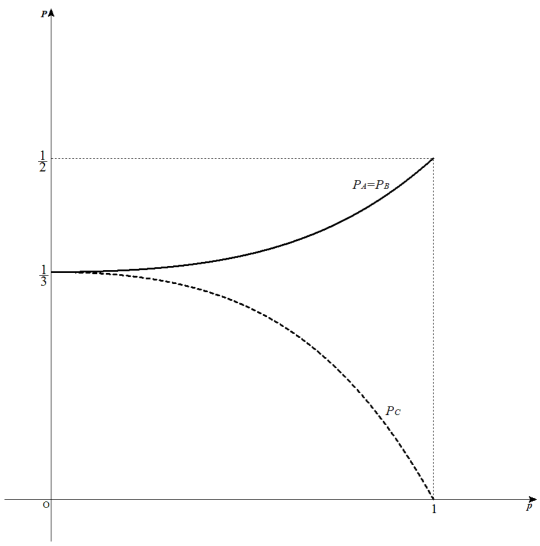

図 1: $P_A=P_B$ および P_C

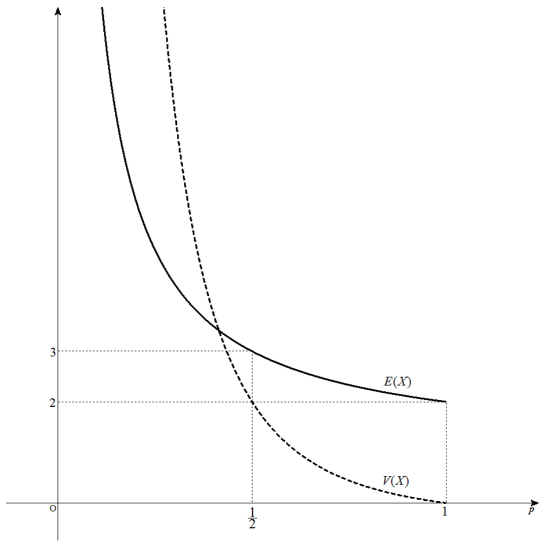

図 2: $E(X)$ および $V(X)$

（注 1） $p=\dfrac{1}{2}$ のときは通常の巴戦であり，

$$P_A=P_B=\frac{5}{14},\quad P_C=\frac{4}{14},\quad E(X)=3,\quad V(X)=2$$

である．また，

$$\lim_{p\to+0}E(X)=\infty \qquad \lim_{p\to 1-0}E(X)=2$$

$$\lim_{p\to+0}V(X)=\infty \qquad \lim_{p\to 1-0}V(X)=0$$

となる．

モデル 2：1 戦ごとに強さが q 倍となるモデル

各選手の最初の強さは 1 であり，1 戦ずつ戦うごとにその強さが前回の試合の q 倍になっていくモデルについて考える．$0 < q < 1$ のときは 1 試合ごとに弱くなっていくモデルと考えることができ，$q > 1$ のときは 1 試合ごとに強くなっていくモデルと考えることができる．各試合において対戦する選手の勝つ確率は，その時点での強さに比例するものとする．どの試合においても対戦する 2 人がこれまでに戦った試合数は同数であるか（どちらも k 試合とする），どちらかが 1 試合多いかである（k 試合と $k+1$ 試合とする）ことに注意すると，試合数が同数である場合は，どちらが勝つ確率も $\dfrac{q^k}{q^k+q^k} = \dfrac{1}{2}$ であり，どちらかが 1 試合多い場合は，それぞれが勝つ確率は $\dfrac{q^k}{q^k+q^{k+1}} = \dfrac{1}{1+q}$, $\dfrac{q^{k+1}}{q^k+q^{k+1}} = \dfrac{q}{1+q}$ となるから，それまでに戦った試合数によらない．これらのことを考慮して，モデル 1 の場合と同じ解析を行う．A, B, C が優勝する確率をそれぞれ，Q_A, Q_B, Q_C とする．C が優勝するパターンは

$$A_BC_AC_B,\ A_BC_AB_CA_BC_AC_B, A_BC_AB_CA_BC_AB_CA_BC_AC_B, \cdots$$

と

$$B_AC_BC_A, B_AC_BA_CB_AC_BC_A, B_AC_BA_CB_AC_BA_CB_AC_BC_A, \cdots$$

であり，最初に A と B が戦う時だけはそれぞれが勝つ確率が $\dfrac{1}{2}$ であることに注意すると，それらの確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$$

と

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$$

であるから，

$$Q_C = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(1+q)^n} = \frac{2}{4q+3} \tag{6}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{1}{2}(1-Q_C) = \frac{4q+1}{2(4q+3)} \tag{7}$$

となる．次に，確率変数 Y を優勝者が決まるまでの試合数とする．A が優勝するパターンは

$$B_AC_BA_CA_B, B_AC_BA_CB_AC_BA_CA_B, B_AC_BA_CB_AC_BA_CB_AC_BA_CA_B, \cdots$$

と

$$A_BC_AB_CA_BA_C, A_BC_AB_CA_BC_AB_CA_BA_C, A_BC_AB_CA_BC_AB_CA_BC_AB_CA_BA_C, \cdots$$

で，それらの確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{1+q}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{1+q}, \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\frac{q}{1+q}, \cdots$$

と

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{1+q},\ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{q}{1+q},\ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+q}\cdot\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{q}{1+q},\cdots$$

である．B が優勝するパターンの確率も同様であるから，Y の確率分布は

$$P(Y=3n)=\frac{2}{4^n(1+q)^n}\qquad(n\geq 1)$$
$$P(Y=3n-1)=\frac{q}{4^{n-1}(1+q)^n}\qquad(n\geq 1)$$
$$P(Y=3n+1)=\frac{1}{4^n(1+q)^n}\qquad(n\geq 1)$$

となる．また，優勝者が決まるまでの試合数 Y の確率母関数を $G_2(z)=E(z^Y)\quad(|z|\leq 1)$ とすると，

$$\begin{aligned}G_2(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4^n(1+q)^n}z^{3n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q}{4^{n-1}(1+q)^n}z^{3n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(1+q)^n}z^{3n+1}\\&=\frac{z^2(z^2+2z+4q)}{4(1+q)-z^3}\end{aligned}\tag{8}$$

となる．よって，Y の期待値，分散はそれぞれ

$$E(Y)=\frac{8q+13}{4q+3},\qquad V(Y)=\frac{2(30q+19)}{(4q+3)^2}\tag{9}$$

となる．

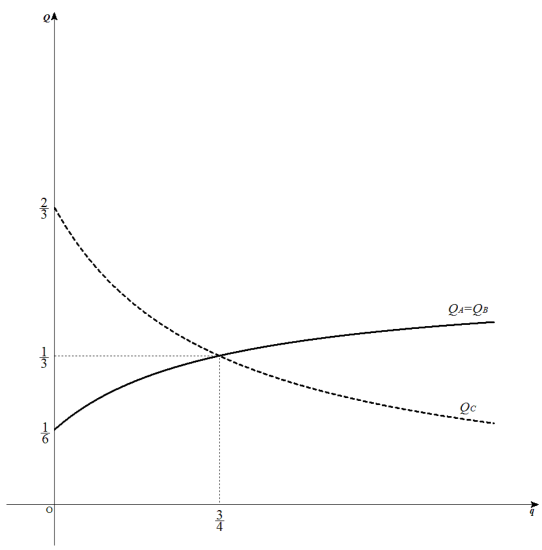

図 3: $Q_A=Q_B$ および Q_C

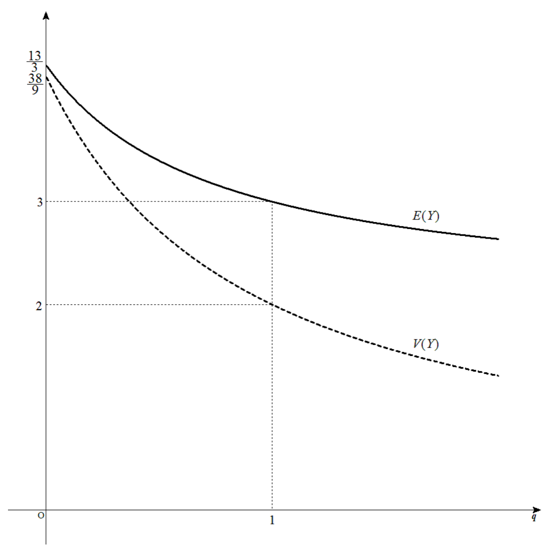

図 4: $E(Y)$ および $V(Y)$

（注 2） $q=1$ の場合は通常の巴戦であり，

$$Q_A=Q_B=\frac{5}{14},\quad Q_C=\frac{4}{14},\quad E(Y)=3,\quad V(Y)=2$$

である．また，

$$\lim_{q\to+0}E(Y)=\frac{13}{3}\qquad\qquad \lim_{q\to\infty}E(Y)=2$$
$$\lim_{q\to+0}V(Y)=\frac{38}{9}\qquad\qquad \lim_{q\to\infty}V(Y)=0$$

となる．
（注 **3**） (6), (7) より $0 < q < \dfrac{3}{4}$ のとき，$Q_A = Q_B < Q_C$，$q > \dfrac{3}{4}$ のとき，$Q_A = Q_B > Q_C$ であることがわかる．

3．結論

本論文では，巴戦の一般化となる試合を経ることによって勝つ確率が変わっていく 2 つのモデルについて考察し，応用上有用となる結果を得た．今後は．巴戦の別な拡張モデルを考えて解析を行うとか，$r+1$ 人で r 連勝するまで戦う「ワルデグレーブの問題」に対して，本論文で扱ったような一般化とかを行いたいと考えている．

参考文献

[1] ブロム, G., ホルスト, L., サンデル, D. 著，森真訳 (2005). 確率論へようこそ．シュプリンガーフェアラーク東京.

[2] Hald, A. (1990). *A History of Probability & Statistics and Their Applications before 1750.* Wiley, New York.

[3] Kinney, J. J. (2015), *Probability : An Introduction with Statistical Applications, 2nd Edition.* Wiley, New York.

[4] 森村英典 (1984). 確率 (教職数学シリーズ 基礎編 5)．共立出版.

[5] 巴戦, Wikipedia (https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%B4%E6%88%A6).