中学校数学科の授業における数学的活動とアクティブ・ラーニング

安藤秀朗*・両角達男**
(中央大学プロジェクト・コーディネーター*，横浜国立大学教育学部**)

Mathematical Activities and Active Learning in Mathematics Classes in Junior High School

Hideaki ANDO*, Tatsuo MOROZUMI**
(Chuo University*, Yokohama National University**)

1　問題の所在と研究の目的

PISA などの国際的な学力調査とその結果を踏まえ、日本の子供たちの学力低下が懸念された平成 15 年(2003 年)から、平成 20 年の学習指導要領の改訂を機に、全国学力・学習状況調査（平成 19 年 4 月 26 日第 1 回調査実施）の実施や教育基本法の改正（平成 18 年 12 月 22 日公布）などが行われた。これらの施策とその実行、および子供たちの学力向上に向けた学校教育現場での努力を通して、子どもたちの学力は改善の傾向にある。しかしながら、これからの 10 年、20 年、さらに 50 年先を展望した時、科学技術の急速な進展やグローバル社会の中で日本の子供たちが高い専門性を持ち生きていくためには、「物事の本質を見抜き理解し、的確な判断ができる思考力」が一層求められる。中学校数学教育において、子供たちがこうした思考力を育むためにどのような授業を展開したらよいのであろうか。この問いに応えるべく、平成 29 年告示の中学校学習指導要領では、数学的活動とアクティブ・ラーニング(主体的・対話的で深い学び)の実現という鍵となる考えが提案されている。

本研究の目的は、「物事の本質を見抜き理解し、的確な判断ができる思考力」を育むための中学校数学科における数学的活動とアクティブ・ラーニングを実現する複数の指導事例を提案することである。

そこで、筆者が実践してきた中学校数学の授業を振り返り、「物事の本質を見抜き理解し、的確な判断ができる思考力」を育むことができる典型的事例を選出し、その事例について、数学的活動とアクティブ・ラーニングの実現という視点から解釈を行う。

2　改訂学習指導要領における数学的活動とアクティブ・ラーニング

中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説数学編では、数学的活動について「数学的活動とは，事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行することである。」とし、さらに「今回の改訂では，数学的に考える資質・能力を育成する上で，数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開することを重視することとした。」(p.23，2018)とある。改訂学習指導要領では、小学校算数、中学校数学、高等学校数学の全領域の内容において「数学的活動を通して」とあり、学習全般において数学的活動を通して実施することを求めている。

また、平成 26 年の中央教育審議会の諮問において、今後の「アクティブ・ラーニング」の具体的な在り方についてどのように考えるかを示している。その中で、今後の授業改善の取り組みを活性化していく視点として、「主体的・対話的で深い学び」を位置づけている。

「アクティブ・ラーニング」については、「教員による一方向的な講義形式の教育とは異なり、学修者の能動的な学修への参加を取り入れた教授・学習法の総称。学修者が能動的に学修することによって、認知的、倫理的、社会的能力、教養、知識、経験を含めた汎用的能力の育成を図る。発見学習、問題解決学習、体験学習、調査学習等が含まれるが、教室内でのグループ・ディスカッション、ディベート、グループ・ワーク等も有効なアクティブ・ラーニングの方法である。」（文部科学省用語解説）とある。

「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程」を進めていくためには、学習主体となる子供が、他者と協働しながら、数学の問題を見いだしたり、解決に向けた素朴な考えなどを互いに出し合ったりしながら、数学の言葉を用いて議論し、吟味をしていく必要がある。数学的活動を進め，深める過程そのものが、言葉を媒介としたアクティブ・ラーニングともいえる。その活動を促すために、子供の思考や言語活動を促す場（学習課題）の設定が不可欠となる。

３　指導事例１　【合唱コンクールの順位決め】

（１）課題

右の表は、ある中学校の合唱コンクールの採点表です。
5 クラスの合唱について、T1~T5 の 5 人の審査員が採点し、それぞれが 1 位から 5 位までの順位をつけました。
5 人の審査員の結果から最終的に成績を決めます。成績を決める方法を考え、その結果の順位を示しなさい。また、その方法の良さについて説明しなさい。

5 人の審査員による順位

審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	T5
1組	4	3	2	2	2
2組	2	4	3	4	1
3組	3	5	1	1	5
4組	1	2	4	5	4
5組	5	1	5	3	3

数学的活動における問題発見・解決の過程の一つに、「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」とある。合唱コンクールは多くの中学校が実施しており、審査員が審査した得点などを集計する集計方法にはいくつもの方法が考えられる。本稿ではこの合唱コンクールの採点という事象を数理的に捉え、数学の世界において考察することにより、数学的活動としての問題解決学習を提案する。

本課題の解決には様々な方法が考えられる。授業では一人ひとりが解決の方法を考え、考えた方法とその良さについてまとめ、お互いに発表することで、思考し説明し伝え合う学びとなる。さらに他者の考えを受け、新たな気づきを追求することで対話的で深い学びとなる。それぞれの考え方の価値については、絶対的なものがあるとは言えない。そのことにも十分注意を払い授業を行う。

本課題は、集計の方法によって総合順位が変わってくる。このことは、単に様々な方法があり方法によっては結果が変わるというだけではなく、総合優勝を決めるにあたり「操作をすることが可能である」という課題にも気づかせたい。学校内での合唱コンクールでは、そういった課題については十分配慮されているものと思われるが、このようなコンクールや競技では、上位成績が拮抗しているなど微妙なケースでは、審査集計方法により優勝者が変わってくるということ、すなわち、勝者を意識しながら、集計方法を決めることも可能になるということについて生徒に気づかせ、そのことの持つ社会的な意味についても課題意識を持たせたい。

（２）授業の展開（３時間扱い）

第 1 時

① 自力解決により、各人が最終的な成績の決め方を考え、妥当であろうという方法をあげる。この段階では、決め方について無理に一つに絞るのではなく、妥当であると思う方法を複数あげても構わない。この後のグループでの検討でさらに深めることとする。

② 4 人毎のグループを作り、それぞれの考えを発表する。発表の際、その方法の良さや妥当性、課題についても説明する。

③ 4 人の発表後、どの方法が最も良いかを検討する。

④ 最善と思う方法を決め、グループとしての最終判断とする。ただし、ひとつに決めきれない場合は複数を可とするが、その際、なぜそのような判断となったかを説明できるようにする。

⑤ グループ毎に発表する方法をまとめる。
※4 人グループについては効果的な討議ができるよう教師が指定する。

第 2 時

① グループ毎に、書画カメラなどを使い、まとめた考えを発表する。

② 発表者は、終了後に他のグループから質問を受ける。

③ 質問に対しては、発表者だけでなくグループとしてメンバー内で答える。

④ 各グループの発表後、集計方法は違うが数学的に同じ意味をもつ方法はないかを検討する。

⑤ それぞれに良さがあるが、逆に問題もある場合がある。良さと課題を明らかにする。

⑥ 「各集計方法から気が付くことはないか」と投げかけ、方法により結果が変わることを認識する。

⑦ 新体操など同様な採点方法をとっている競技などの得点集計について調べる。（課題として提示）

第３時

① 方法により順位がかわることについて、その条件などを検討する。

② 方法により順位がかわることによる問題はないかを考える。

③ 集計方法によっては順位が変わることを知り、現実の問題として、全クラスが合唱を発表した後にその成績を見たうえで、意図的に順位を変えることも可能であることの問題点に気づく。

④ 順位決定の抱える問題について、その改善策を考える。

（３）課題の解決

総合順位を決める方法として次のような方法が考えられる。

集計方法　＜１＞

(1.1)　順位の点数化による集計方法

ア　各クラスの得点を、5 人の審査員が決めた順位の合計（和）とする。点数の低い方が上位。

イ　各クラスの得点を、5 人の審査員が決めた順位の平均値とする。点数の低い方が上位。

ウ　各クラスの得点を、5 人の審査員が決めた順位の積とする。点数の低い方が上位

エ　各クラスの得点を、5 人の審査員が決めた順位に応じて得点を与え、その合計による。
得点の与え方により上位が決まる。

エ－１　1 位 5 点、2 位 4 点、3 位 3 点、4 位 2 点、5 位 1 点　を与える。
※　差はすべて 1 点、点数の高い方が上位。

エ－２　1 位 100 点、2 位 80 点、3 位 60 点、4 位 40 点、5 位 20 点　を与える。
※　差はすべて 20 点、点数の高い方が上位。

エ－３　1 位 10 点、2 位 5 点、3 位 3 点、4 位 2 点、5 位 1 点　を与える。
※　順位に重みを付け、与える点数の差を変える。点数の高い方が上位。

エ－４　1 位 10 点、2 位 7 点、3 位 3 点、4 位 2 点、5 位 1 点　を与える。
※　順位に重みを付け、与える点数の差を変える。（エ－３の重みを変えたもの）
点数の高い方が上位。

エ－５　3 位を基準とし　1 位 +2 点、2 位 +1 点、3 位 0 点、4 位 －1 点、5 位 －2 点
を与える。　※　差はすべて 1 点、点数の高い方が上位。　　ほか

(1.2)　順位の様子による集計方法

オ　1 位が多いクラスが上位。

カ　1 位と 2 位の多いクラスが上位。

キ　順位の中央値。中央値が低い方が上位。

ク　最頻値。最頻値が低い方が上位。　　　　　ほか

集計方法　＜２＞

各クラスに与えられた 5 人の審査員の順位について、最上位と最下位を１つずつ除き、残りの３条件の順位による集計を行う方法（注：本稿では「上下カット（集計）」と呼ぶ）。この状態で(1.1)、(1.2)

と同様の方法で行うことができる。

この状態での順位の点数化による集計方法を(2.1)、順位の様子による集計方法を(2.2)とする。

集計方法　＜３＞

(1.1)において、一部の審査員の判断に重みを付ける方法。その上で(1.1)、(1.2)と同様に行うことができる。

この状態での順位の点数化による集計方法を(3.1)、順位の様子による集計方法を(3.2)とする。

（４）点数化による集計方法の整理

(1.1)で示した総合順位を決定する方法で、ア（審査員の順位の合計）とイ（同平均値）は同値（低い点が上位）。

また、エー１、エー２、エー５（順位を点数に置き換え）も与える点数に違いはあるが、順位間の点数差が等しく設定してあるので、本質的には同値（高い点が上位）である。さらに、これらの方法は点数の与え方が逆（点数が低い点が上位または下位）ではあるが、順位を決定する方法としてはすべて同値である。

エー３、エー４は２位の重み付けが違うために、合計点にも違いが生じている。さらに重み付けを変えれば、それに応じて合計点が変わってくる。

（５）それぞれの集計方法による結果

＜各集計方法による総合順位の比較＞

(1. 1)、(2. 1)、(3. 1)順位の点数化による集計方法　((2.1)上下カット、(3.1)T5 審査員の判断を 3 倍)

1.1　得点化による集計																	順位の点数化（重みづけほか）による集計									
５人の審査員による順位						ア順位計		イ　平均		ウ　積		順位の数					エ−1		エ−2		エ−3		エ−4		エ−5	
審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	T5	総合順位		総合順位		総合順位		1位の数	2位の数	3位の数	4位の数	5位の数	総合順位		総合順位		総合順位		総合順位		総合順位	
						計	順位	Ave.	順位	計	順位						計	順位	計	順位	計	順位	計	順位	計	順位
1組	4	3	2	2	2	13	1	2.6	1	96	2	0	3	1	1	0	17	1	340	1	20	3	26	1	2	1
2組	2	4	3	4	1	14	2	2.8	2	96	2	1	1	1	2	0	16	2	320	2	22	2	24	3	1	2
3組	3	5	1	1	5	15	3	3	3	75	1	2	0	1	0	2	15	3	300	3	25	1	25	2	0	3
4組	1	2	4	5	4	16	4	3.2	4	160	4	1	1	0	2	1	14	4	280	4	20	3	22	4	-1	4
5組	5	1	5	3	3	17	5	3.4	5	225	5	1	0	2	0	2	13	5	260	5	18	5	18	5	-2	5

2.1　得点化による集計　（上下カット）																	順位の点数化（重み付けほか）による集計									
５人の審査員による順位						ア順位計		イ　平均		ウ　積		順位の数					エ−1		エ−2		エ−3		エ−4		エ−5	
審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	T5	総合順位		総合順位		総合順位		1位の数	2位の数	3位の数	4位の数	5位の数	総合順位		総合順位		総合順位		総合順位		総合順位	
						計	順位	Ave.	順位	計	順位						計	順位	計	順位	計	順位	計	順位	計	順位
1組		3		2	2	7	1	1.4	1	12	1	0	2	1	0	0	11	1	220	1	13	2	17	1	2	1
2組	2		3	4		9	2	1.8	2	24	3	0	1	1	1	0	9	2	180	2	10	3	12	3	0	2
3組	3			1	5	9	2	1.8	2	15	2	1	0	1	0	1	9	2	180	2	14	1	14	2	0	2
4組		2	4		4	10	4	2	4	32	4	0	1	0	2	0	8	4	160	4	9	4	11	4	-1	4
5組			5	3	3	11	5	2.2	5	45	5	0	0	2	0	1	7	5	140	5	7	5	7	5	-2	5

3.1　得点化による集計　（Ｔ５審査を３倍）																			順位の点数化（重みづけほか）による集計									
５人の審査員による順位								ア順位計		イ　平均		ウ　積		順位の数					エ−1		エ−2		エ−3		エ−4		エ−5	
審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	Ｔ５			総合順位		総合順位		総合順位		1位の数	2位の数	3位の数	4位の数	5位の数	総合順位		総合順位		総合順位		総合順位		総合順位	
								計	順位	Ave.	順位	計	順位						計	順位	計	順位	計	順位	計	順位	計	順位
1組	4	3	2	2	2	2	2	17	2	3.4	2	384	2	0	5	1	1	0	25	2	500	2	30	2	40	2	4	2
2組	2	4	3	4	1	1	1	16	1	3.2	1	96	1	3	1	1	2	0	26	1	520	1	42	1	44	1	5	1
3組	3	5	1	1	5	5	5	25	5	5	5	1875	3	2	0	1	0	4	17	5	340	5	27	3	27	3	-4	5
4組	1	2	4	5	4	4	4	24	4	4.8	4	2560	5	1	1	0	4	1	18	4	360	4	24	4	26	4	-3	4
5組	5	1	5	3	3	3	3	23	3	4.6	3	2025	4	1	0	4	0	2	19	3	380	3	24	4	24	5	-2	3

（６）各集計方法の持つ意味、良さと課題

(1.2)、(2.2)、(3.2)順位の様子による集計方法

((2.2)上下カット、(3.2)T5 審査員の判断を 3 倍)

1.2　順位の様子による集計

5人の審査員による順位						(1.2)　順位の様子による集計							
審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	T5	オ　1位の数 計	オ　1位の数 順位	カ 1･2位の数 計	カ 1･2位の数 順位	キ 中央値	キ 中央値 順位	ク 最頻値	ク 最頻値 順位
1組	4	3	2	2	2	0	**5**	3	**1**	2	**1**	2	判定不能
2組	2	4	3	4	1	1	**2**	2	**2**	3	**2**	4	
3組	3	5	1	1	5	2	**1**	2	**2**	3	**2**	1	
4組	1	2	4	5	4	1	**2**	2	**2**	4	**5**	4	
5組	5	1	5	3	3	1	**2**	1	**5**	3	**2**	3,5	

2.2　順位の様子による集計　（上下カット）

5人の審査員による順位						(2.2)　順位の様子による集計							
審査員／クラス	T1	T2	T3	T4	T5	オ　1位の数 計	オ　1位の数 順位	カ 1･2位の数 計	カ 1･2位の数 順位	キ 中央値	キ 中央値 順位	ク 最頻値	ク 最頻値 順位
1組		3		2	2	0	**2**	2	**1**	2	**1**	2	判定不能
2組	2		3	4		0	**2**	1	**2**	3	**2**	―	
3組	3			1	5	1	**1**	1	**2**	3	**2**	―	
4組		2	4		4	0	**2**	1	**2**	4	**5**	4	
5組			5	3	3	0	**2**	0	**5**	3	**2**	3	

3.2　順位の様子による集計　　（Ｔ５審査を３倍）

5人の審査員による順位								順位の様子による集計							
審査員	T1	T2	T3	T4	Ｔ５			オ　1位の数 計	オ　1位の数 順位	カ 1･2位の数 計	カ 1･2位の数 順位	キ 中央値	キ 中央値 順位	ク 最頻値	ク 最頻値 順位
1組	4	3	2	2	**2**	**2**	**2**	0	**5**	5	**1**	2	**1**	2	**2**
2組	2	4	3	4	**1**	**1**	**1**	3	**1**	4	**2**	2	**1**	1	**1**
3組	3	5	1	1	**5**	**5**	**5**	2	**2**	2	**3**	5	**5**	5	**5**
4組	1	2	4	5	**4**	**4**	**4**	1	**3**	2	**3**	4	**4**	4	**4**
5組	5	1	5	3	**3**	**3**	**3**	1	**3**	1	**5**	3	**3**	3	**3**

アの集計方法（各審査委員が与えた順位の和により合計が少ない方が上位）が一般的であり、公平である。シンプルでわかりやすいこと、計算が容易であることなどが根拠となる。実際の学校現場では、合唱コンクールをはじめ、体育祭の得点集計などでこの方法がとられているケースがある。ただし、合計得点が少ない（低い）クラスが、成績上位になるという判断は、一般の感覚からは若干のずれを感じるともいえる。一般的には勝敗を決定する場合、得点が高い方が上位であることが受け入れやすい。その意味では、以下のいくつかの方法にもその良さがある。

（４）でふれたようにア、イ及びエ－１、２、５は同値である。これらの方法は与える点数が違うが、思考としては本質的に同様である。実際の校内のおける合唱コンクールでは、点数を公表するかしないかでも考え方が違ってくるものと思われる。一桁の点数は採点する作業の立場では楽だが、生徒が取り組んできた作品（合唱）の発表に対する評価という観点では、あまりにも機械的な処理である。生徒の取組に対してプラスの評価を与えるという意味で 100 点を最高点にするなどの教育的な判断があるべきである。また、たとえ公表しないとしても、教育の場として 0 点やマイナスは使用するべきではない。イ（平均値）についても数学的には同値だが、前述と同様、生徒の発表に対する評価としてはとるべきではない。平均値により合唱の発表（取組）が評価されたのではあまりにも無機質である。授業では、複数の考え方が同値であるという数学的な判断という視点とともに、現実の採点方法として使用するかどうかという視点をもつことで、決定は人の感性とともになされることの重要さや数学的な事象の処理としての価値を確認することができる。

ウ（積）で行う場合、本課題では総合順位が他と違う結果となる。和と積の違いについて検討する機会ともなる。積による集計方法は、1 を乗じても数が変わらないことで、結果として 1 位の価値を認め重みを付けていることになる。オ（1 位の数での判断）まで明確な 1 位への重みではないが、1 位に対する一定のリスペクトがなされている。

オ（1 位の数）は、種目によっては 1 位のみが重要であるといった競技特性があれば、この方法をとることは考えられる。しかし審査員の数がある程度多くないと 1 位を決定できないことが容易に予想される。この方法は、得点化による集計方法により審査し同点（同率）の場合に採用するといった併用としての対応が考えられる。横浜市中学校総合体育大会（運動部夏の大会）での市内中学校間の順位決めがそれである。得点化による集計で複数の学校が同点となった場合、第 1 位を獲得した競技種目が多い学校が上位としている。

カ(1，2 位の数)、キ(中央値)、ク(最頻値)については、説明するだけの根拠は乏しい。カは、オ同様 1 位 2 位こそが意味があるという競技が想定できればこの方法も考えられるが、逆に本稿で指摘している恣意的に順位を操作する方法とも捉えられかねない。キ(中央値)、ク(最頻値)については、なぜこの方法が良いのかを説明することが難しく課題が多い。クについては順位を特定することも難しく、いずれも適切ではない。適切ではないことを説明することも多くの根拠を必要とし学びが深まる。ただし、これらの方法にも、優劣をつける競技性よりもお互いの発表を称えるといった視点により一定の良さや公平さなどの根拠が示される可能性はあり、そこからの学びも期待できる。いずれも丁寧に扱いたい。

エ－３、４に関しては、（１）で述べたように、点数化する際に重みを付けることで 1 位が入れ替わることがある。表 1.1 のエ－３において、1 位に 10 点、2 位に 5 点の重みを付けることで、それまでの順位が変わる。しかし、エ－４のように次に 2 位の得点を 5 点から 7 点にすることで再び、順位がかわることになった。授業では与える得点を少し変えることで状況が変わることに気づき、このことの価値と課題についてしっかと根拠をもって意見を述べ合うことが大切である。また、公平公正を期すために、こういう集計方法を採用する際にはどういうことに注意をするべきかといった現実的な議論も有効で、生きた数学の学習となる。

集計方法＜２＞は、より客観性を高めるために上下をカットする考え方で実際に多くの競技などで取り入れられている。「データの活用」の学習で扱う「外れ値」とつながり、数学的に意味のある考え方である。授業では上下 2 名の審査結果を外すことに関しての是非についても議論をしたい。審査員の数が少ない場合には上下の 2 つの情報をはずすことにより、判断材料が極めて少なくなるという課題もある。できれば 7 人程度の審査員が望まれる。

集計方法＜３＞は、一部の審査員の判断に重みを付けることで、そのほかの場合と比較して、総合順位が大きく変動する。表 1.1 にある 3 組は、集計方法によって 3 位や 1 位ともなるが、表 3.1 では 5 位となっている。重みを付ける特定の審査員の結果（意向）に大きく影響される。この課題では、5 人の審査員に対して、一人に 3 倍の重みを付けたため、この審査員の持ち点が 1/5＝20％から 3/7≒42.9％となった。筆者はこれまでにこういったコンクールの採点で、1 人の審査員に他の審査員の 5~8 倍の重みが提案された経験がある。仮に 5 人の審査員に対して 1 人の審査員の重みが 5 倍であれば、20％から、5/9≒55.6％、8 倍であれば 8/12≒66.7％の決定権をもつことになる。これでは他の審査員は名ばかりであると言わざるを得ない。提案者は、5 倍、8 倍という数値に対して数学的な価値を考慮していなかったと思われる。

授業全体を通して、生徒が考えたそれぞれの集計方法について、その方法の良さについて根拠をもって分かりやすく主張（説明）するよう求める。また、質問を受ける中で、新たな課題に気づいたりよりよい集計方法を考えたりすることが大切である。

（７）　演技種目や音楽コンクールなどにおける採点方法・集計方法での学び

本稿では、各審査員が審査をした上での集計方法について課題とし授業を提案し、考察をした。実際の競技やコンクールでの採点では、集計方法以前の各審査員の審査の仕方についても様々な方法が考えられる。審査員に順位を求めるのであればその根拠となる点数などの在り方についての検討が必要である。複数の審査項目に対して評価をするのであれは、その達成度に対する評価基準に客観性を担保しなければならない。演技種目や音楽コンクールなどの審査の難しさを学び、社会通念にのっとり演技者をはじめ多くの人に理解されることが望ましい。授業では、本課題を通して、審査に関する実際と課題を学び、関心を持つことと、数学を通して身の回りにある事象に意識をもつことを学ぶことができる。

４　指導事例２　【論理的思考　相手の数を特定する】

（１）課題

＜問１＞　A と B のふたりに、次のような同じ情報が書かれたカードを渡しました。

情報『あなた方の数は正の整数で、２人の数の和は、３か４です。$x+y=3$ or 4』

そのうえで A のカードには『あなたの数は２です』 B のカードには『あなたの数は１です』と書かれています。

B が A に『私の数がわかりますか。』と質問しました。すると A はわからないので『わかりません。』と回答しました。次に A が B に『私の数がわかりますか。』と質問しました。すると B は A の数を特定することができました。なぜ、B は A の数を特定できたのかを説明しなさい。

Aのカード	Bのカード
あなた方の数は正の整数で、 2人の数の和は、３か４です $x+y=$ ３ or ４ あなたの数は 2です。	あなた方の数は正の整数で、 2人の数の和は、３か４です $x+y=$ ３ or ４ あなたの数は １です。

中学校数学科の授業で各単元の終盤に学習する応用問題は、直前までの授業で学習した単元内容を活用し解決できるように設定されている。そのため、生徒は解法の手段をおおよそ想定でき、こういった応用問題で生徒から創造的な思考を引き出すには限度がある。また、一度解法の手順が示されてしまうと、解決の筋道が知識となっており、思考を高める学習とはなりにくい。

このような条件下での学習だけでは、これからの社会で求められる予測不能な課題を解決する力を育むには十分ではない。これからの数学教育では、生徒にとって既習でない問題解決的な思考問題を準備し、様々な既習事項を総合的に機能させ考えさせる場面が必要である。ここでは、論理的な思考を必要とする課題について、筆者の授業実践を踏まえて新たな可能性について提案する。

（２）授業の展開（２時間扱い）

第１時

① 問題を把握する。

② 自力解決により課題の解決を図る。その際、思考の視点として、B の立場、A の立場になって考えることが有効である。考えたことを相手に説明するには、正確に表現すること、またどのような方法があり有効かを工夫し言葉の説明のほかにも、図や表など様々な方法を検討する。

③ 4 人毎のグループを作り、それぞれの考えを発表する。根拠をもとに相手が理解できるように工夫して説明をする。

④ 全体で共有する。複数のグループに説明を求める。同様の説明であっても説明方法を工夫するなどし、相手にわかりやすく説明できるかを大切にする。他のグループの説明からより分かりやすく整理された説明を学ぶ。

⑤ ＜問２＞　カード（次ページ）提示。

「問１と同じの方法（正整数使用）で、まず B が A に『私の数がわかりますか。』と質問します。この繰り返しにより B が A の数を特定することができます。どのような理由で特定できるのかを説明しなさい。」

⑥　②③同様、自力解決、グループ内解決、全体共有を図る

⑦　説明を共有できたら「追加質問」を与え、課題を深める。

Aのカード
あなた方の数は正の整数で、
2人の数の和は、5か10か20です
$\chi + y = 5$ or 10 or 20
あなたの数は 4です。

Bのカード
あなた方の数は正の整数で、
2人の数の和は、5か10か20です
$\chi + y = 5$ or 10 or 20
あなたの数は 6です。

追加質問　＜問３＞「この課題で、先にＡがＢに『私の数がわかりますか。』と質問をしたら、展開はどのようになりますか」

⑧　④での学びを生かし、②③同様グループ内解決、全体共有を図る。

第２時　（④以降は発展的扱いとし、グループ内や学級全体など状況に応じて展開する）

①　＜問４＞　カード提示。

問１と同じ方法で、最初にＢからＡに質問します。この質問を繰り返し、どの段階でどちらが相手の数を特定できるかを示し、その理由を説明しなさい。

②　前時同様、自力解決、グループ内解決、全体共有を図る。グループの中で、発表の準備をする際、言葉での説明のほかに、図や表を書いたり、２人が説明者となりＡ、Ｂそれぞれの立場で説明をしたりするなど、様々な方法を考え相手に伝わるように工夫することを求める。

Aのカード
あなた方の数は正の整数で、
2人の数の差は3です
$\chi - y = 3$
あなたの数は　14　です

Bのカード
あなた方の数は正の整数で、
2人の数の差は3です
$\chi - y = 3$
あなたの数は　11　です

③　複数のグループが発表し、他のグループの説明からより分かりやすく整理された説明を学ぶ。

④　グループで、課題の特徴について考える。

⑤　グループで、Ａから質問を始める場合とＢから質問を始める場合の違いはあるのか、また、数を特定できるのは質問の順番と関係があるのかを検討する。

⑥　グループで、この課題の論理的な原理はどのようにものか。

⑦　課題と同様な論理による作問を行い、学級内で作問された問題を解決することで課題を深める。

（３）課題の解決

＜問１＞ Ａの回答の後、ＢがＡの数を２と特定する。

Ｂが１で２人の数の和が３か４であることからＡは２か3。もしＡが３ならばＡは１回目の回答でＢの数を１と特定することができるはずだが「わかりません」と回答したことからＡは３ではない。Ａの回答のあとに、Ｂが「Ａは２」と特定できる。

＜問2＞　Ａが「わかりません」と回答した後、ＢがＡの数を４と特定することができる。

Ａは自分の数が４であることからＢは１か６か16であることがわかるが特定できないので「わかりません」と回答する。次にＢは自分の数が６であることから、Ａは条件から−1はないので、４か14とわかる。もしＡが14ならば、Ａは１回目の回答で「Ｂの数は６」と特定することができるはずだが「わからない」と回答した。したがってＡは14でない。４と特定できる。

【問２】

① Aの回答
自分が4だからBは1か6か16
→　わからない

② Bの回答
自分が6だからAは4か14
もし、Aが14だったら
Aは①でBが6とわかるはず。
しかし、わからなかったから
Aは14ではない　→　Aは4

＜問3＞　⑤追加質問　Ａが最初に質問してもＢは「わかりません」と回答し、あとは同じ展開となる。

ＢはＡが４か14であることしかわからないため、「わかりません」と回答することになる。次の質問

に対しては、A は自分の数が 4 であることから B は、1 か 6 か 14 であることがわかる。もし B が 14 であれば、B は最初の回答で「A の数は 4」と特定することができるが「わかりません」と回答したことから、B は 14 ではないことがわかる。しかし残りの 1 であるか 6 であるかは特定できないため、次に A も「わかりません」と回答することになる。2 度目の A の質問に対して、B は、上記問 2 の考えで「A は 4」と特定することができる。

【問3】

① Bの回答
自分が6だからAは4か14 → わからない

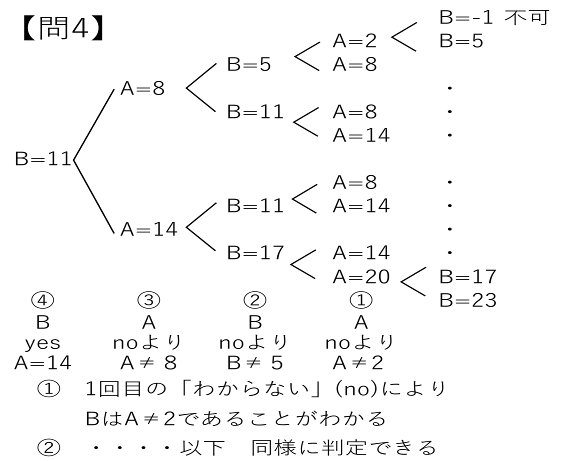
② Aの回答
自分が4だから Bは1か6か16
もし、Bが16だったらBは①でAが4とわかるはず。
しかし、わからなかったからAは16ではない。
1か6は特定できない。 → わからない

③ Bの回答
自分が6だからAは4か14
もし、Aが14だったらAは②でBが6とわかるはず。
しかし、わからなかったからAは14ではない
→ Aは4

＜問 4＞ A、B、A の順に「わかりません」と回答したあとに B が A の数を 14 と特定する。

B が 11 で差が 3 であることから、B は「A は 14 か 8」と考える。もし A が 8 であるならば、A は「B は 11 か 5」と考えるはず、B が 5 であれば、さらに B は「A は 8 か 2」であると考える。もし A が 2 であれば 1 回目の回答で A は「B の数は 5」と特定するはずである（正整数から）が、1 回目に特定していないから B は A が 2 でないことがわかり、2 回目の B の回答で「A の数は 8」と特定できるはずである。ところが 2 回目の B の回答で B は「A の数は 8」と特定しなかったことから、A は B が 5 ではなく 11 であると特定できることになる。しかし 3 回目の A の回答でも A は「B の数は 11」と特定しなかったので A は 8 ではない。「A は 14」と特定できる。

【問4】



（4）本課題の特徴・価値

ア 相手の『わからない』という回答が、相手の数を絞り込む論理構造である。

イ 論理的な考え方としては高度で、筋道をたてて理解することが求められる。

ウ 単純ではないやり取りとりで、他の人に対して自分の推論をいかにわかりやすい言葉や方法で明確にまとめられるかが求められる。

エ 最初の条件設定により、どちらが相手の数を特定できるかが決まる。

（5）実践から

筆者は、本課題について文献を参考に横浜市立中学校の 1、2 年生各 1 クラスで、ゲーム形式で対戦する実践をした。2 人ずつのグループを作り、A、B を指定し順番に回答し相手の数を特定するゲームとした。ゲームは論理的な思考を育成する学習として大変有効であるが、複雑な思考を要し正確にゲームを進行するには生徒の高い思考力が求められる。正確な論理を組み立て、推測ではなく確信をもって回答しなければならない。実際の授業では、相手の「わからない」という回答を手がかりとして相手の数を絞ることに考えが及ばないケースがほとんどであった。最終的に、解決できた生徒による説明や筆者の解説等により理解ができた生徒は中学 1 年生でほぼ半数、中学 2 年生では 8 割程度となった。問 2 でロジックに気付き説明ができた生徒は 1、2 年ともクラスに 1 人だけであった。ゲーム形式での実施では生徒の思考に差がありゲームとして成立しないペアも多数あったことから、本稿はグループでこの「論理」を説明する活動を考察した。単純な課題であれば中学 1 年生でも解決可能であるが、複雑な課題になると理解が困難な生徒も生じる。中学 3 年生での実施が望ましい。

５　指導事例３　【式を読む】

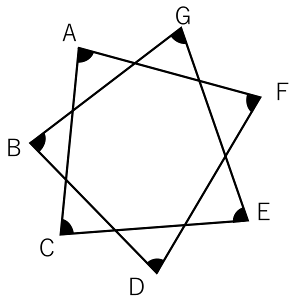
（１）課題

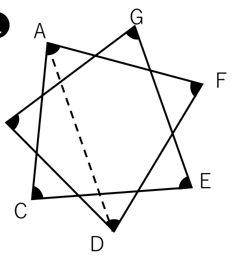
右の図は、7 つの頂点をひとつとばしに結ぶ 7/2 角形と呼ばれる図形です。

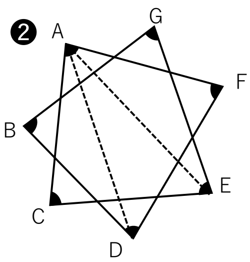
（ｉ）下の図と式は、この 7/2 角形の 7 つの頂点（A～G）の角度（印）の合計を求めるために必要な補助線を引き（点線）求め方を示したものです。❶～❹について、それぞれどのような方法で求めたのかを説明しなさい。

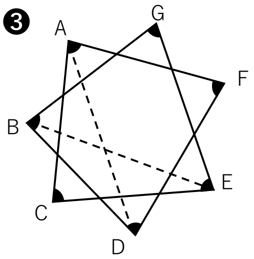
（ⅱ）❺～❼　についても同様に説明しなさい。

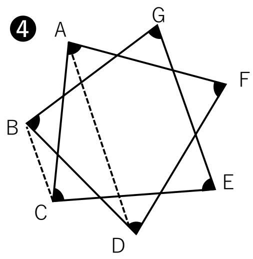
（ⅲ）一般の n/2 角形（n≧5）では、それぞれの頂点の合計はどのようになるか、❶～❼のいずれかの方法を用いて説明しなさい。

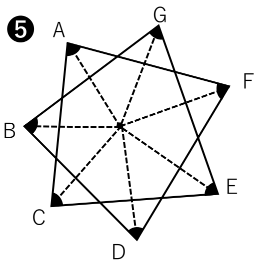


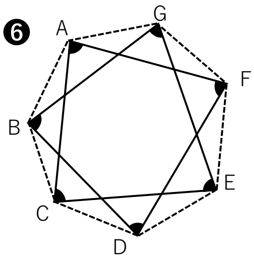
❶


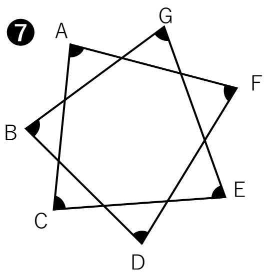
❷


❸


❹


❺


❻


❼


❶ $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$
❷ $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$
❸ $180^\circ + 180^\circ \times 2 = 540^\circ$
❹ $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$
❺ $180^\circ \times (7-2) - 360^\circ = 540^\circ$
❻ $180^\circ \times (7-2) - 360^\circ = 540^\circ$
❼ $180^\circ \times 7 - 360^\circ \times 2 = 540^\circ$

多くの授業で星形 5 角形を扱い、5 つの頂点の角度の和を求める課題を扱っている。その発展課題として、頂点を 7 つにふやし角度の合計を求める課題を扱うケースがある。様々な考え方ができるが、本稿は式と補助線から考え方を説明する課題について授業の展開を考察した。

式は立式者の思考経過を表すことができる。生徒は課題への取組みを通して、立式者の思考に思いを巡らせ、式の持つ意味を読む。式の有用性、数学的表現のすばらしさを感得し、式を活用しようという数学的な考え方を育む授業となる。

（２）授業の展開（２時間扱い）

第１時

①　最初は❶～❹の課題を与え、自力解決を図る。式の持つ意味を読みとり、どのような考えで解法しているのかを考える。

②　一定時間のち、4 人毎のグループを作り❶～❹についてグループ内でお互いに自分の考えを説明する。生徒は正確な用語を使い相手にわかりやすく説明するよう努める。

③　学級全体で共有を図る。❶～❹について、2 グループずつ②同様、式の説明をする。

第２時

①　❺～❼の課題を与え、第 1 時②③と同様に行う。

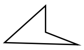
②　他の解法がないかを課題として与える。

③　一般の n/2 角形の場合は各頂点の角度の合計がどのようになるかを考える。

（３）指導上の留意

式が表している意味を考える際には、式の中の数値やかっこ、文字が持つ意味を考えることが必要である。180°であれば、三角形の内角の和のほかに、直線が作る角、平行線の同側内角の和、星形５角形の頂点の角の和など。７であれば本課題の多角形の角数、（5−2）、(7−2）であれば、多角形の内角の和を導く式との関わりを想起することになる。授業では、生徒の発表の際に、なぜ、そう考えたのかを説明させ、全体で共有することが大切である。

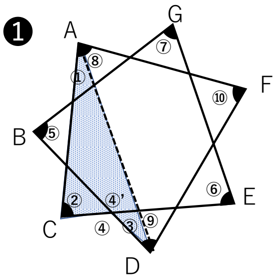
また、補助線についても、それぞれの図形の補助線を通してその意味を確認し指導する。本課題では、対角線を利用した補助線はいわゆるブーメラン型※四角形や星形5角形に帰着する方法を提示している。補助線のひき方として、対角線を結ぶ場合は、1本、2本と増やしていくこと、また対角の位置関係を重複なくすべてのパターンを組み合わせるなどが考えられる。さらに対角線に限らず、❺や❻のような補助線も図形によっては有効な手段となる。ただし、課題解決のための補助線は、単純であり分かりやすいこと、エレガントであることなどが求められる。課題が複雑になる補助線は有効ではない。解決できるという理由でいたずらに多くの補助線を用いたり、無理やり図の外に引いたりすることは適切ではない。本課題の学習にあたっては、補助線の引きかたについても指導を行う。

(※  の形をした四角形をブーメラン型と呼ぶ)

（４）課題の解決

（ｉ）❶～❹の式の説明

❶



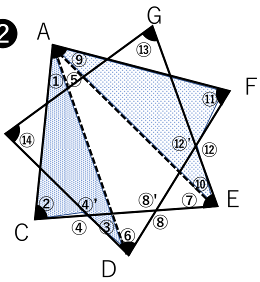
❶　**180°　＋　360°　＝ 540°**

図形の中にあるブーメラン型を用いる。

①＋②＋③＝④＝④’、

各頂点の合計は、④’の角を含む四角形 B④’EG と△ADF の内角の和となり、 **180°　＋ 360°　＝ 540°**

❷



❷　**180°　×（5−2）＝540°**

図形の中にある３つのブーメラン型を用いる。

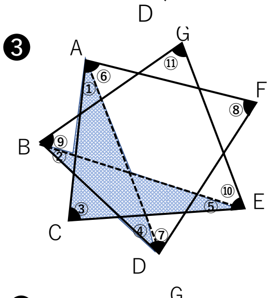
①＋②＋③＝④＝④’、　⑤＋⑥＋⑦＝⑧＝⑧’、⑨＋⑩＋⑪＝⑫＝⑫’

より　A、C、D、E、F の合計が④’、⑧’、⑫’の和となる。

よって、すべての頂点の合計は、④’⑧’⑫’の頂点と GB による５角形の内角の和となっている。５角形の内角の和は

180°　×（5−2）＝ 540°

❸



❸　**180°　＋ 180°　×2＝ 540°**

図形の中にある星形５角形と２つの三角形を用いる。

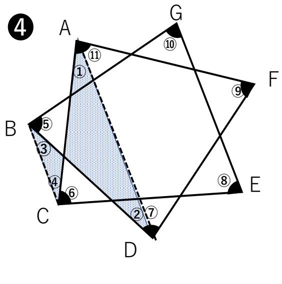
ABCDE で 5/2 角形（星形５角形）を形成しているから

①＋②＋③＋⑤＝180°

また、その他に△ADF と△BEG を形成しているから

すべての頂点の合計は　**180°　＋ 180°　×2＝ 540°**

❹



❹　**180°　＋360°　＝540°**

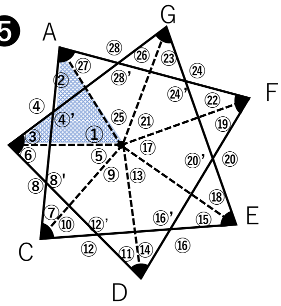
△ADF と四角形 BCEG に分割して考える。

∠A、∠D を図のように①⑪、②⑦にわけると①＋②＝③＋④　より

すべての頂点の合計は△ADF と四角形 BCEG の内角の和となり、

180°　＋ 360°　＝ 540°

（ⅱ）❺～❼の式の説明

❺


❺　**180°　×（7－2）－ 360°　＝ 540°**

図形の中にある 7 つのブーメラン型を用いる。

①＋②＋③＝④＝④’、⑤＋⑥＋⑦＝⑧＝⑧’、⑨＋⑩＋⑪＝⑫＝⑫’、

⑬＋⑭＋⑮＝⑯＝⑯’、⑰＋⑱＋⑲＝⑳＝⑳’、㉑＋㉒＋㉓＝㉔＝㉔’、

㉕＋㉖＋㉗＝㉘＝㉘’

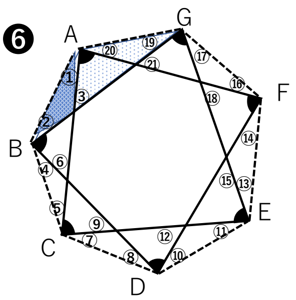
各頂点の合計＝④＋⑧＋⑫＋⑯＋⑳＋㉔＋㉘

－（①＋⑤＋⑨＋⑬＋⑰＋㉑＋㉕）

＝④’＋⑧’＋⑫’＋⑯’＋⑳’＋㉔’＋㉘’－360°

＝7 角形の内角の和－360°

＝ $\boxed{\textbf{180° × (7−2) − 360°} = 540°}$

❻


❻　**180°　×（7－2）－ 360°　＝ 540°**

7 角形 ABCDEFG の内角の和から(①＋②＋④＋⑤＋･･･＋⑲＋⑳)をひく。

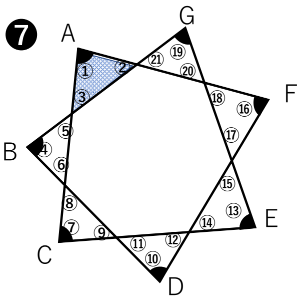
①＋②＝③、④＋⑤＝⑥、･･･ 、⑲＋⑳＝㉑　より

①＋②＋④＋⑤＋･･･＋⑲＋⑳＝③＋⑥＋⑨＋⑫＋⑮＋⑱＋㉑

＝内側の 7 角形の外角の和

＝**360°**

すべての頂点の合計は $\boxed{\textbf{180° × (7−2) − 360° =540°}}$

❼


❼　**180°　×7 － 360°　×2 ＝** 540°

A を頂点とする三角形（内角の和①＋②＋③=180°）ほか、B を頂点、

C を頂点・・・　以下同様に 7 つの三角形の内角の和の合計から

（②＋③＋⑤＋⑥＋⑦＋⑧＋･･･＋⑳＋㉑）をひく

（②＋③＋⑤＋⑥＋･･･＋⑳＋㉑）は内側の 7 角形の外角の和　2 つ分

＝360°　×2

よってすべての頂点の合計は、$\boxed{\textbf{180° ×7 − 360° ×2 = 540°}}$

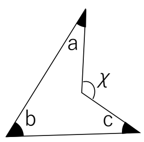
※　ただし、課題の解決にあたり次の内容は既習として扱っている。

・（n 角形の内角の和）＝180°　×（n－2）

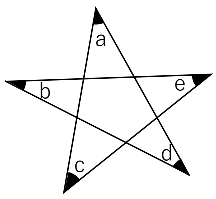
・（多角形の外角の和）＝360°

・ブーメラン型の角の関係（右図）

・星形５角形の角の頂点の関係（右図）



χ ＝a+b+c



a+b+c+d+e＝180°

（ⅲ）　n/2 角形（n≧5）の頂点の合計

汎用性のある補助線を引いた❺、❻の方法と補助線を使っていない❼の方法を一般化することができる。いずれも（ⅱ）の説明を　n/2 角形に拡張し、

❺　180°　×（n－2）－360°　＝**180°　n　－　720°**

❻　180°　×（n－2）－360°　＝**180°　n　－　720°**

❼　180°　×　n　－360°　×2　＝**180°　n　－　720°**

６　単元で考え，単元で授業を実践する姿勢を高める
―数学的活動を核とした数学授業の一層の推進に向けて―

中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説数学編では，「主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善」に向けて、次のことが指摘されている(pp. 162-163).

「単元など内容や時間のまとまりを見通して，その中で育む資質・能力の育成に向けて，数学的活動を通して，生徒の主体的・対話的で深い学びの実現を図るようにする。」

「主体的・対話的で深い学びは，必ずしも１単位授業の中で全てが実現されるものではない。単元など内容や時間のまとまりの中で，例えば，主体的に学習に取り組めるよう学習の見通しを立てたり学習したことを振り返ったりして自身の学びや変容を自覚できる場面をどこに設定するか，対話によって自分の考えなどを広げたり深めたりする場面をどこに設定するか，学びの深まりをつくりだすために，生徒が考える場面と教師が教える場面をどのように組み立てるか，といった視点で授業改善を進めることが求められる。」

「物事の本質を見抜き理解し、的確な判断ができる思考力」を育むための中学校数学の授業を進めるためには、数学的活動を核としながら、アクティブ・ラーニングの方法をとり授業を進行する必要がある。数学的活動のサイクルそのものが、アクティブ・ラーニングの側面をもっている。この授業実践のためには、授業経験が豊富な数学教師が、自身の長期にわたる授業実践を振り返り、中学校数学科の授業における数学的活動とアクティブ・ラーニングの試みを具体的に論じ、省察し、その可能性と課題を提案することが不可欠である。教材の具体、授業の具体、生徒の動きの具体で語らなければ、数学的活動とアクティブ・ラーニングの内実に迫ることができない。

両角(2001)では、「よい数学の授業」として考えられることがらを、授業実践を通した生徒の動きを踏まえて６項目掲げている。本研究で挙げられた３つの指導事例は、おもしろさ、数学的な拡がりや深まり、感性の喚起、わかること等、両角(2001)で掲げた要件を満たしている。

（文責：1～5　安藤，6　両角）

引用・参考文献

K.E. Easterday, F. M. Simpson, and T.Smith(1999). Activities for Junior High School and Middle School Mathematics. NCTM.

片桐重男（2004）．新版数学的な考え方とその指導　第２巻　指導内容の体系化と評価　―数学的な考え方を育てるために―．明治図書.

両角達男(2001)．中学校数学の授業における導入問題に関する一考察．静岡大学教育実践総合センター紀要 No. 7，pp. 43-62.

文部科学省(2016)．初等中等教育における教育課程の基準等の在り方について（諮問）
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1353440.htm

文部科学省（2016）．幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）（中教審第 197 号）.
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731.htm

文部科学省(2018)．中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説　数学編．日本文教出版.

文部科学省(2018)．中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説　総則編．東山書房.

文部科学省(2018)．小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説　算数編．日本文教出版.

文部科学省(2019)．高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説　数学編　理数編．学校図書.