博士論文

量子ウォークに対応するグラフゼータの伊原表示について

On the Ihara expression of graph zeta functions corresponding to quantum walks

横浜国立大学大学院
理工学府

石川 彩香
Ayaka Ishikawa

2022 年 9 月

目次

第 1 章

導入

1.1 概要

グラフゼータ函数の研究は, 伊原 [9] により定義された 2×2 p-進特殊線形群のある離散群の共役類の数え上げに関するゼータ函数（伊原ゼータ函数）の研究が発端である．当初，伊原ゼータ函数はグラフゼータ函数と解釈されていなかったが，Serre[17] によって，伊原ゼータ函数が正則グラフに対するゼータ函数であることが指摘され，その後，砂田 [19] により伊原ゼータ函数のグラフ理論的解釈による定義が与えられた．この結果が発端となり，橋本, Bass, Bartholdi, そして今日までに水野, 佐藤をはじめとする様々な研究者によって，多岐にわたるグラフゼータ函数が研究されている (cf. [1, 2, 7, 14])．現在，グラフゼータ函数は様々な分野への応用にも用いられており，本論文の主題にもある量子ウォークにおいては，特に盛んに研究が行われている．そのきっかけは，量子ウォークにおいて非常に重要な定理であり，尚且つグラフゼータ函数と量子ウォークの関係を初めて明らかにした「今野-佐藤の定理」[12] である．この結果は，佐藤ゼータ函数 [16] によって Grover ウォーク [6] の遷移行列の特性多項式が得られることを示し，これにより遷移行列の固有値集合が与えられた．Grover ウォークは量子ウォークの代表的なモデルの一つであり，数学のみならず，情報数学や量子物理などの分野でも広く興味が持たれている研究対象である．通常，量子ウォークの挙動を明らかにするには膨大な計算を行なう必要があるが，遷移行列の固有値が分かれば，局在化などの特徴的な挙動を突き止めることができる．ただし，扱うグラフや遷移行列が複雑であれば，計算もより複雑になってしまう．今野-佐藤の定理は，グラフが有限単純グラフであれば，どのようなグラフの上でも Grover ウォークの挙動を特定することを可能にした．一方，佐藤ゼータ函数とはグラフゼータ函数の一つである．今野-佐藤の定理は，佐藤ゼータ函数が橋本表示, 伊原表示という 2 種類の行列式を持つという結果が基盤にあって成り立っている．

Grover ウォークには，その一般化の一つである Szegedy ウォーク [20] というモデルが考えられている．Szegedy ウォークも，やはり様々な分野で研究されている量子ウォークモデルであり，その挙動の特定はどの分野でも興味を持たれている．しかし，Szegedy ウォークの遷移行列の特性多項式や固有値集合を与えるような，今野-佐藤の定理の Szegedy ウォークへの拡張は未だ得られていない．その一番の原因は，Grover ウォークと対応関係をもつ佐藤ゼータ函数のように，Szegedy

ウォークに対応するようなグラフゼータ函数が知られていないことにある．そこで，本論文では，そのような対応関係を持つ「一般化佐藤ゼータ函数」を定義し，遷移行列の固有値集合を与えるのに必要な伊原表示を導出した．その結果を用いて，今野-佐藤の定理を Szegedy ウォークへ拡張することに成功した．これにより，任意の有限グラフ上での Szegedy ウォークの遷移行列の固有値集合を与えることが可能となった．

一般化佐藤ゼータ函数の橋本表示は佐藤ゼータ函数と同様の方法で得られるが，伊原表示はその限りではない．それは，橋本表示が一般のグラフゼータ函数に対して定義され，その導出方法が確立されているのに対し，伊原表示は定義すら曖昧であり，導出方法も扱うグラフゼータ函数によって異なるからである，さらに，伊原表示に現れる行列は，有限無向グラフに一対一対応する対称有向グラフを扱うか，一般の有限有向グラフを扱うかにより異なることも知られている．伊原表示はこのように非常に曖昧な表示ではあるが，実はグラフゼータ函数でしか確認されていない表示であるため，グラフゼータ函数の応用では伊原表示を持つグラフゼータ函数が扱われている．扱うグラフやグラフゼータに依らない伊原表示を定義するには，まずは各グラフゼータにおいて，グラフに依らない「伊原表示の標準形」を導出する必要がある．本論文では，これまでの導出方法とは異なる，伊原表示の新しい導出方法を採用し，先行研究のどの伊原表示とも異なる形の「伊原表示」を導出した，この新しい導出方法はグラフに依存しない方法であり，さらに，この方法で得た伊原表示に現れる行列もグラフに依存しない．すなわち，本主定理では一般化佐藤ゼータにおける伊原表示の標準形を与えたと言える．

以降，各章節の内容を簡単に説明する．本章である第 1 章では，以降，ここで用いる記号や用語の定義を紹介する．第 2 章はグラフゼータ函数を指数表示で定義し，これがオイラー表示，橋本表示を持つことを示す．伊原表示に関しては，現状，具体的な荷重を持つグラフゼータ函数でなければ導出できていないため，先行研究のいくつかのグラフゼータ函数とその伊原表示を紹介する．それら伊原表示の導出については，先行研究のグラフゼータ函数を特別な場合に持つ「一般荷重ゼータ函数」を用いて一挙に証明する．主題である Szegedy ウォークに対応するグラフゼータ函数は，第 3 章で導入する．まず，有限無向グラフに対する対称有向グラフに対しての伊原表示を導出し，今野-佐藤の定理の拡張を行う．ここでの伊原表示の導出方法は，従来の方法に従う．その後，一般の有限有向グラフ上の一般化伊原ゼータ函数を扱う．新しい導出方法はここで採用する．さらに，有限無向グラフに対する対称有向グラフに対しての伊原表示を，改めて新しい方法により導出し，一般化伊原ゼータ函数の標準形を与える．

以下，単に「ゼータ」と言えばグラフゼータ函数を指すこととする．

1.2 定義

本稿で使う記号や用語の定義をここで述べる．

頂点集合 V と辺集合 E からなる組 $G=(V,E)$ を (無向) グラフという．本稿では，便宜上 V に全順序 $<$ を入れる．V,E が共に有限集合の場合，G を有限グラフという．辺 $e=\{u,v\}\in E$ について，$u=v$ のとき e をループと呼ぶ．グラフ G の各 2 頂点間に辺が高々 1 つしか存在せず，どの

頂点にもループが存在しないとき，このグラフは単純であるという．各頂点 $u \in V$ に対し，$\deg u$ を集合 $\{\{u,v\} \in E | v \in V\}$ の位数とし，これを u の次数という．

V を頂点集合，いくつかの頂点順序対からなる多重集合を $\mathcal{A}$ とおく．組 $\Delta = (V, \mathcal{A})$ を有向グラフといい，$\mathcal{A}$ の要素をアーク (有向辺) という．$V, \mathcal{A}$ が共に有限である場合，有限有向グラフという．有向グラフを描画する場合，各アーク $a = (u,v) \in \mathcal{A}$ は頂点 v 側に矢尻が来るような u, v を結ぶ矢印で表される．このとき，u, v をそれぞれ尾 (tail)，頭 (head) といい，$\mathfrak{t}(a), \mathfrak{h}(a)$ で表す．アーク $a \in \mathcal{A}$ が $\mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a)$ を満たすとき，a をループという．特に断りがない限り，本稿で扱うグラフは有限であり，多重辺（多重アーク）や多重ループを許す．頂点 $u, v \in V$ に対し，次のアーク部分集合を定義する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{uv} &:= \{a \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{t}(a) = u, \mathfrak{h}(a) = v\}, \\
\mathcal{A}_{u*} &:= \{a \in \mathcal{A} | \mathfrak{t}(a) = u\}, \\
\mathcal{A}_{*v} &:= \{a \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{h}(a) = v\}, \\
\mathcal{A}(u,v) &:= \mathcal{A}_{uv} \cup \mathcal{A}_{vu}.
\end{aligned}$$

ただし，$\mathcal{A}(u,v)$ と書く場合，$u \leq v$ を常に満たすこととする．集合 Φ_Δ を $V \times V$ の部分集合 $\{(u,v) \in V \times V | u \leq v, \mathcal{A}(u,v) \neq \emptyset\}$ とする．ただし，Φ_Δ はアーク部分集合ではなく，アークが存在する 2 頂点間の集合と見る．

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，アーク集合 $\mathcal{A}(G) := \{(u,v),(v,u) | e = \{v,u\} \in E\}$ を定義する．このとき，$\Delta(G) = (V, \mathcal{A}(G))$ を G の対称有向グラフという．すなわち，$\Delta(G)$ は各辺 $e = \{u,v\} \in E$ に互いに逆向きの 2 つのアーク $(u,v),(v,u)$ を対応させた有向グラフである．これら 2 つのアークを $a, a' \in \mathcal{A}(G)$ とおく．このとき，$\overline{a} := a'$ または，$\overline{a'} := a$ と書くこととする．特に言及がない限り，有向グラフ Δ と言えば一般の有限有向グラフ，対称有向グラフのどちらでも構わない．

有限有向グラフ Δ において, アークの列 $p = (a_i)_{i=1}^k$ が $i = 1, \ldots, k-1$ に対して $\mathfrak{h}(a_i) = \mathfrak{t}(a_{i+1})$ を満たすとき, p をパス（路）と呼ぶ．また，このパスを構成するアークの個数 k をパスの長さといい，$|p|$ で表す．さらに，パス p が $\mathfrak{h}(a_k) = \mathfrak{t}(a_1)$ を満たすとき，p を閉路と呼ぶ．X_k を Δ 上全ての長さ k の閉路の集合とする．閉路 $C \in X_k$，正整数 n に対し，C^n は C を n 個，数珠繋ぎにした長さ nk の閉路を表す．閉路 C が自身よりも短い閉路の冪で書けないとき，C は素であると言う．2 つの長さが等しい閉路 $C = (c_i)_{i=1}^k, C' = (c'_i)_{i=1}^k \in X_k$ に対し，ある非負整数 n が存在し，$c_i = c'_{i+n}$（ただし $c_{k+j} = c_j$ とする）となるとき，C, C' は同型であるといい，この関係を $C \sim C'$ と表す．明らかに，$\sim$ は同値関係である．関係 $\sim$ による同値類をサイクルとよび，C を代表元とするサイクルを $[C]$ と書く．このとき，同じサイクル内に属する任意の閉路の長さは等しいことに注意する．サイクルの長さを，そのサイクルに属する閉路の長さと定義する．また，サイクルに属するある閉路が素であれば，その他の閉路も素である．そのようなサイクルのことを素サイクルと呼ぶ．また，Δ 上の全ての素サイクルの集合を $\mathcal{P}_\Delta$ で表すこととする．

その他，次の記号も用いる．整数 $n \in \mathbb{Z}$ 以上の整数集合を $\mathbb{Z}_{\geq n}$ で表す．$\mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{C})$ を $n \times m$ 次複素行列の集合とする．特に，正方行列の集合については $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{C}) := \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$

と表すこととする．全ての成分が 1 である $m \times n$ 次行列を $\mathbb{1}_{m \times n}$ で表す．行列 $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ に対し，M の固有値全体の集合を $\mathrm{Spec}(M)$ と書く．命題 P に対し，δ_P を P が真の時に 1，偽の時に 0 を返す関数とする．

第 2 章

グラフゼータ函数

2.1　三種の表示

2.1.1　指数表示

有限有向グラフ $\Delta = (V, \mathcal{A})$ に対し，写像 $\theta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を，

$$\theta(a, a') \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a') \tag{2.1}$$

を満たすものと定義する．この条件を隣接条件という [15]．閉路 $C = (c_i)_{i=1}^m \in X_m$ に対し，$\mathrm{circ}_\theta(C)$ を巡回積 $\theta(c_1, c_2)\theta(c_2, c_3) \ldots \theta(c_m, c_1)$. で定義する．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.1. $C \sim C' \Rightarrow \mathrm{circ}_\theta(C) = \mathrm{circ}_\theta(C')$.

Proof. $C = (c_i)_{i=1}^m, C' = (c'_i)_{i=1}^m$ が同型と仮定する．閉路の同型の定義より $c_i = c'_{i+n}$ を満たす非負整数 n が存在する．このとき，以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathrm{circ}_\theta(C) &= \theta(c_1, c_2)\theta(c_2, c_3) \ldots \theta(c_m, c_1) \\ &= \theta(c'_n, c'_{1+n})\theta(c'_{1+n}, c'_{2+n}) \ldots \theta(c'_m, c'_1)\theta(c'_1, c'_2) \ldots \theta(c'_{n-1}, c'_n) \\ &= \theta(c'_1, c'_2)\theta(c'_2, c'_3) \ldots \theta(c'_m, c'_1) \\ &= \mathrm{circ}_\theta(C').\end{aligned}$$

□

$N_m(\mathrm{circ}_\theta) := \sum_{C \in X_m} \mathrm{circ}_\theta(C)$ と定義する．

定義 2.1. 有限有向グラフ Δ に対し，$Z_\Delta(t; \theta)$ を以下の形式的冪級数で定義する:

$$Z_\Delta(t; \theta) := \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{N_m(\mathrm{circ}_\theta)}{m} t^m\right). \tag{2.2}$$

このとき，$Z_\Delta(t; \theta)$ を Δ 上のグラフゼータといい，この表示をグラフゼータの指数表示と呼ぶ．また，写像 θ をグラフゼータの荷重という．

2.1.2 オイラー表示

$N_m(\mathrm{circ}_\theta)$ について次の命題が成り立つ．

命題 2.2.

$$N_m(\mathrm{circ}_\theta) = \sum_{\substack{[P]\in\mathcal{P}_\Delta \\ |P||m}} |P|\mathrm{circ}_\theta(P)^{m/|P|}$$

Proof. 任意の閉路 $C \in X_m$ は素閉路の冪で表される．素閉路 P が $C = P^k$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たすとき，C と同値な任意の閉路は P と同値なある素閉路の k-冪で一意に表される．よって，$\mathrm{circ}_\theta(C) = \mathrm{circ}_\theta(P)^k$ が成り立つ．また，明らかに $k = m/|P|$ となる．X_m には C と同値な閉路が m 個含まれる．任意の $C' \in [C]$ はある $P' \in [P]$ を用いて $C' = P'^k$ で表される．素サイクル $[P]$ の位数は $|P|$ であることから，$\sum_{C'\in[C]} \mathrm{circ}_\theta(C)$ は $|P|\mathrm{circ}_\theta(P)^{m/|P|}$ で表すことができる．よって命題が導かれる． □

有限有向グラフ Δ，荷重 θ に対し，$E_\Delta(t;\theta)$ を次のように定義する：

$$E_\Delta(t;\theta) := \prod_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_\theta(P)t^{|P|}}.$$

命題 2.3. グラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta)$ について，次が成り立つ：

$$Z_\Delta(t;\theta) = E_\Delta(t;\theta).$$

Proof. 命題 2.2 を用いると，$Z_\Delta(t;\theta)$ の対数は

$$\begin{aligned}
\log Z_\Delta(t;\theta) &= \sum_{m\geq 1} \frac{N_m(\mathrm{circ}_\theta)}{m} t^m \\
&= \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{[P]\in\mathcal{P}_\Delta \\ |P||m}} \frac{|P|\mathrm{circ}_\theta(P)^{m/|P|}}{m} t^m \\
&= \sum_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta} \sum_{\substack{m/|P|\geq 1 \\ |P||m}} \frac{\mathrm{circ}_\theta(P)^{m/|P|}}{m/|P|} t^m \\
&= \sum_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta} \sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{circ}_\theta(P)^k}{k} t^{|P|k}
\end{aligned}$$

と変形できる．一方，$E_\Delta(t;\theta)$ の対数について，

$$\begin{aligned}\log E_\Delta(t;\theta) &= \log \prod_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_\theta(P)t^{|P|}} \\ &= -\sum_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta} \log(1-\mathrm{circ}_\theta(P)t^{|P|}) \\ &= -\sum_{[P]\in\mathcal{P}_\Delta}\sum_{k\geq 1} -\frac{1}{k}(\mathrm{circ}_\theta(P)t^{|P|})^k \\ &= \log Z_\Delta(t;\theta)\end{aligned}$$

となることより，命題を得る． □

この $E_\Delta(t;\theta)$ をグラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta)$ のオイラー表示と呼ぶ (cf. [15]).

2.1.3 橋本表示

アークで添字付けられた行列 $M := (\theta(a,a'))_{a,a'\in\mathcal{A}}$ を考える．このとき，$H_\Delta(t;\theta)$ を次のように定義する:

$$H_\Delta(t;\theta) := \frac{1}{\det(I-tM)}.$$

グラフゼータがこの表示ををもつことを，Foata and Zeilberger [5] によって与えられた語に関する定理を用いて示す．

X を全順序集合（アルファベット），X^* を自由モノイド，すなわち X の元からなる語全体の集合とする． このとき，X^* の 2 つの語の積を語の連結と定義する． 語 $w = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$ に対し，n を w の長さという．k 個の w を連結させた語を w^k と表す．語 w が自身より短い語の冪で表せないとき，w を素語という．語の集合 X^* の部分集合 $\mathrm{Re}(w) := \{a_1a_2\ldots a_n,\ a_2a_3\ldots a_na_1,\ \ldots,\ a_na_1\ldots a_{n-1}\}$ を定める．集合 X 内の全順序から誘導される，X^* 上の辞書式順序を $<$ とする．$\mathrm{Re}(w)$ において最小元となる素語 $w\in X^*$ をリンドン語という．リンドン語全体の集合を $\mathrm{Lyn}(X)$ で表す．

定理 2.1 (Foata-Zeilberger [5])**.** 複素正方行列 $M = (m_{xx'})_{x,x'\in X}$ を定める． 語 $w = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$ に対して，$\mathrm{circ}_M(w) := m_{x_1x_2}m_{x_2x_3}\ldots m_{x_nx_1}$ と定義すると，以下の等式が成り立つ:

$$\frac{1}{\det(I-M)} = \prod_{w\in\mathrm{Lyn(X)}} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_M(w)}. \tag{2.3}$$

ここで話をグラフに戻す．有向グラフ $\Delta = (V,\mathcal{A})$ について，先の定義にて V に全順序 $<$ を定めた．この全順序 $<$ を $\mathcal{A}$ へと誘導すると，$\mathcal{A}$ は全順序集合となる．従って，アークの列はアークによる語とみることができる．今，$X=\mathcal{A}$ とおくと，X^* はアークの列の集合となり，語 $w = a_1a_2\ldots a_n$ はアークの列 $C_w = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ と同一視できる．さらに，$m_{a,a'} = \theta(a,a')$

とおくと，$\mathrm{circ}_M(w)$ はアークの列 C_w に対する値 $\mathrm{circ}_\theta(C_w)$ となる．ただし，C_w が閉路でないと仮定すると，$\mathfrak{h}(a_i) \neq \mathfrak{t}(a_{i+1})$ であるから，隣接条件 (2.1) より $\theta(C_w) = 0$ が成り立つ．$\frac{1}{1-\mathrm{circ}_M(w)} \neq 1$ を満たすリンドン語 w は，素サイクル $[C_w]$ に対応することから，以下の式が成り立つ：

$$\prod_{w \in \mathrm{Lyn(X)}} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_M(w)} = \prod_{[C_w] \in \mathcal{P}_\Delta} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_\theta(C_w)}.$$

式 (2.3) の左辺は，変数 t に対して $M = tM$ とおくことで，$H_\Delta(t;\theta)$ となり，右辺は $E_\Delta(t;\theta)$ となる．よって，$H_\Delta(t;\theta) = E_\Delta(t;\theta)$ が成り立つ．この $H_\Delta(t;\theta)$ をグラフゼータの橋本表示という (cf.[15])．

2.2 伊原表示

グラフゼータの伊原表示とは，グラフの隣接行列や次数行列，またはそれらの類似で構成された行列式表示と言われている．先行研究では，様々な荷重が様々なグラフ上で定義され，各状況におけるグラフゼータの伊原表示が個別に導出されてきた．本節では，それら先行研究のグラフゼータとその伊原表示をいくつか紹介するが，まずは伊原表示を考える上で必要な「逆アーク」の定義を導入する．

2.2.1 逆アークの定義

有向グラフ $\Delta = (V, \mathcal{A})$ のアーク $a \in \mathcal{A}$ に対し，集合 $\mathrm{Inv}(a)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Inv}(a) := \begin{cases} \{\overline{a}\} & G \text{ の対称有向グラフ} \Delta(G) \text{ のとき,} \\ \mathcal{A}_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a)} & \text{一般の有向グラフのとき.} \end{cases}$$

このとき，$\mathrm{Inv}(a)$ の元を a の逆アークと呼ぶ．グラフに依らず，a の逆アークは $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a)}$ に属することに注意されたい．また，Δ が一般の有向グラフのとき，ループ $a \in \mathcal{A}_{uu}$ に対して $\mathrm{Inv}(a) = \mathcal{A}_{uu}$ が成り立つので，a の逆アークには a 自身が含まれている．

伊原表示を導出する際には，各アークがどのアークと逆アーク同士かを明確に記述することが求められる．そこで，「任意の 2 つのアークが逆アーク同士か，同じ逆アーク集合をもつか」の条件を満たす部分集合の族で $\mathcal{A}$ を分割する．

アーク $a \in \mathcal{A}$ に対し，a と同じ逆アーク集合を持つアークの集合

$$\mathcal{A}[a] := \{a' \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Inv}(a) = \mathrm{Inv}(a')\}$$

を定義する．これにより，$\mathcal{A}[a], \mathrm{Inv}(a)$ は互いに他の逆アーク集合同士と言える．実際，対称有向グラフ $\Delta(G)$ の場合，任意のアーク a に対して $\mathcal{A}[a] = \{a\}$ となる．一方，Δ が一般の有向グラフの場合，$a \in \mathcal{A}_{uv}$ のとき $\mathcal{A}[a] = \mathcal{A}_{uv}$ が成り立つ．よって，$\mathcal{A}(a) := \mathcal{A}[a] \cup \mathrm{Inv}(a)$ とおくと，この集合こそが先述の「任意の 2 つのアークが逆アーク同士か，同じ逆アーク集合をもつか」の条件

を常に満たす集合である．実際，$\Delta(G)$ では．任意の $a \in \mathcal{A}(G)$ に対して $\mathcal{A}(a) = \{a, \overline{a}\}$ となり，$\mathcal{A}(u,v)$ は $\bigsqcup_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \mathcal{A}(a)$ と分割できる．また，Δ が一般の有限有向グラフのときは，$a \in \mathcal{A}_{uv}$ ならば $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}_{uv} \cup \mathcal{A}_{vu} = \mathcal{A}(u,v)$ が成り立つ．よって，$\mathcal{A}(u,v)$ はこれ以上分割できないことが言える．以上をまとめると，2 頂点 $u \le v$ について，集合 $B(u,v)$ を

$$B(u,v) := \begin{cases} \mathcal{A}_{uv} & G \text{ の対称有向グラフ} \Delta(G) \text{ のとき，} \\ \{a\} \quad \text{for} \quad \forall a \in \mathcal{A}(u,v) & \text{一般の有向グラフのとき．} \end{cases}$$

とおくと，$\mathcal{A}(u,v)$ の分割となる部分集合族を $\{\mathcal{A}(a)\}_{a \in B(u,v)}$ と表すことができ，任意のグラフに対して，$\mathcal{A}$ は以下のように分割できる：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bigsqcup_{(u,v) \in \Phi_\Delta} \bigsqcup_{a \in B(u,v)} \mathcal{A}(a) \\ &= \begin{cases} \bigsqcup_{(u,v) \in \Phi_\Delta} \bigsqcup_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \{a, \overline{a}\} & G \text{ の対称有向グラフ} \Delta(G) \text{ のとき，} \\ \bigsqcup_{(u,v) \in \Phi_\Delta} \mathcal{A}(u,v) & \text{一般の有向グラフのとき．} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.2　様々な荷重と伊原表示

先にも述べた通り，伊原表示の標準形は未だ得られておらず，伊原表示は具体的な荷重が与えられた時のみ導出できている．ここでは，先行研究で定義されたいくつかの代表的なグラフゼータとその伊原表示について紹介する．

伊原ゼータ

荷重 $\theta^{\mathrm{I}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\theta^{\mathrm{I}}(a, a') = \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a' \in \mathrm{Inv}(a)}$$

このとき，$Z_\Delta(t; \theta^{\mathrm{I}})$ を伊原ゼータという．伊原ゼータは 1966 年に伊原 [9] にて初めて定義されたグラフゼータである．ここで示された行列式表示が，今では伊原表示と呼ばれている重要な表示となっている．ただし，同論文で扱っているグラフは正則グラフであり，無向グラフに対する対称有向グラフにおける伊原表示が示されたのは，橋本 [7], Bass[2] である．

定理 2.2 (伊原 [9]; 橋本 [7]; Bass [2])**.** 有限無向グラフ $G = (V, E)$ に対し，伊原ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_{\Delta(G)}(t; \theta^{\mathrm{I}}) = \frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|} \det(I - tA + t^2(D - I))}.$$

ただし，A, D はそれぞれグラフ G の隣接行列，次数行列である．

水野-佐藤ゼータ

写像 $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ に対し，荷重 $\theta^{\mathrm{MS}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\theta^{\mathrm{MS}}(a, a') = \tau(a') \left(\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a' \in \mathrm{Inv}(a)} \right)$$

このとき，$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{MS}})$ を水野-佐藤ゼータという．

荷重が $0,1$ 以外をとるグラフゼータ自体は橋本 [7] にて初めて定義され，その後，Stark and Terras[18] にて一般化された．しかし，そこでは橋本表示までしか得られていなかった．その伊原表示を導出すべく定義されたのが水野-佐藤ゼータである．

定理 2.3 (水野-佐藤 [14])**.** 有限無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，$\tau(\overline{a})=\tau(a)^{-1}$ を満たすとき，水野-佐藤ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{MS}})=\frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-tA^{\mathrm{MS}}+t^2(D-I))}.$$

ただし，$A^{\mathrm{MS}}=(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\tau(a))_{u,v\in V}$ とする．

A^{MS} は各 $\mathcal{A}_{uv}$ のアーク（辺）の荷重の和を $(u,v)-$ 成分に持つ「荷重隣接行列」と捉えられる．

この結果までは無向グラフに対する対称有向グラフ上のグラフゼータしか考えられてこなかった．しかし，後述の有向グラフ上で定義された Bowen-Lanford ゼータが登場したことを受けて，水野-佐藤ゼータも有向グラフへの拡張が考えられた．ただしその時点では，Bowen-Lanford ゼータ，水野-佐藤ゼータ両者とも，任意の 2 頂点間にアークが高々 1 つの有限有向グラフ上でしか考えられていなかった．

定理 2.4 (水野-佐藤 [13])**.** $\Delta=(V,\mathcal{A})$ が各 $u,v\in V$ に対して $|\mathcal{A}(u,v)|\leq 1$ を満たすとき，水野-佐藤ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{MS}})=\frac{1}{\det(I-tA^{\mathrm{MS}})}.$$

Bowen-Lanford ゼータ

荷重 $\theta^{\mathrm{BF}}:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\theta^{\mathrm{BF}}(a,a')=\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}$$

このとき，$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BF}})$ を Bowen-Lanford ゼータという．

定理 2.5 (Bowen-Lanford [3])**.** $\Delta=(V,\mathcal{A})$ が各 $u,v\in V$ に対して $|\mathcal{A}(u,v)|\leq 1$ を満たすとき，*Bowen-Lanford* ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BF}})=\frac{1}{\det(I-tA)}.$$

佐藤ゼータ

荷重 $\theta^{\mathrm{S}}:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\theta^{\mathrm{S}}(a,a')=\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}-\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)}$$

このとき，$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{S}})$ を佐藤ゼータという．

定理 2.6 (Sato [16])**.** 有限無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，佐藤ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{S}})=\frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-tA^{\mathrm{S}}+t^2(D^{\mathrm{S}}-I))}. \tag{2.5}$$

ただし，$A^{\mathrm{S}}=(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\tau(a))_{u,v\in V}, D^{\mathrm{S}}=(\delta_{uv}\sum_{a\in\mathcal{A}_{u*}}\tau(a))_{u,v\in V}$．これらの行列はそれぞれ「荷重隣接行列」，「荷重次数行列」と捉えられる．

注意 2.1. 以上に散見される通り，グラフの伊原表示とは，グラフの隣接行列や次数行列，またはその類似で構成される行列式表示であると言える．

2.3 一般荷重ゼータの伊原表示

ここまで紹介したグラフゼータは，限られた状況や荷重のもとでしか議論されておらず，各グラフゼータにおける議論が混迷していた．しかし，森田 [15] にて導入された一般荷重ゼータにより先行研究のグラフゼータの統一的記法が与えられた．

有限有向グラフ $\Delta=(V,\mathcal{A})$ に対し，荷重 $\theta^{\mathrm{W}}:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\theta^{\mathrm{W}}(a,a')=\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}-\upsilon(a')\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)}$$

このとき，$Z_{\Delta}(t;\theta^{\mathrm{W}})$ を一般荷重ゼータという．

有限無向グラフに対する対称有向グラフ上の一般荷重ゼータの伊原表示は，井手, 石川, 森田, 佐藤, 瀬川 [8] により導出された．

定理 2.7 (井手, 石川, 森田, 佐藤, 瀬川 [8])**.** 有限無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，行列 $A_G^{\mathrm{W}},D_G^{\mathrm{W}}\in\mathrm{Mat}(|V|;\mathbb{C})$ を以下で定義する*:*

$$\begin{aligned}
(J^{\mathrm{W}})_{aa'}&:=\upsilon(a')\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)},\\
(A_G^{\mathrm{W}})_{uv}&:=\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\frac{\tau(a)}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})},\\
(D_G^{\mathrm{W}})_{uv}&:=\delta_{uv}\sum_{w\in V}\sum_{a\in\mathcal{A}_{uw}}\frac{\tau(a)\upsilon(\overline{a})}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})}.
\end{aligned}$$

このとき，一般荷重ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{W}})=\frac{1}{\det(I+tJ^{\mathrm{W}})\det(I-tA_G^{\mathrm{W}}+t^2D_G^{\mathrm{W}})}.$$

Proof. 行列 $J^{\mathrm{W}}\in\mathrm{Mat}(|\mathcal{A}(G)|;\mathbb{C}),K^{\mathrm{W}}\in\mathrm{Mat}(|\mathcal{A}(G)|\times|V|;\mathbb{C}),L^{\mathrm{W}}\in\mathrm{Mat}(|V|\times|\mathcal{A}(G)|;\mathbb{C})$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}
(K^{\mathrm{W}})_{av}&:=\delta_{\mathfrak{h}(a)v},\\
(L^{\mathrm{W}})_{ua'}&:=\tau(a')\delta_{u\mathfrak{t}(a')}.
\end{aligned}$$

このとき，一般荷重ゼータの辺行列 $M^{\mathrm{W}} = (\theta(a,a'))_{a,a' \in \mathcal{A}(G)}$ は $M^{\mathrm{W}} = K^{\mathrm{W}}L^{\mathrm{W}} - J^{\mathrm{W}}$ と表せる．これより，橋本表示は

$$\begin{aligned} H_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{W}})^{-1} = \det(I - tM^{\mathrm{W}}) &= \det(I - t(K^{\mathrm{W}}L^{\mathrm{W}} - J^{\mathrm{W}})) \\ &= \det((I + tJ^{\mathrm{W}}) - tK^{\mathrm{W}}L^{\mathrm{W}}) \\ &= \det(I + tJ^{\mathrm{W}}) \det(I - t(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}}L^{\mathrm{W}}) \\ &= \det(I + tJ^{\mathrm{W}}) \det(I - tL^{\mathrm{W}}(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}}) \end{aligned}$$

と変形することができる．行列 J^{W} の成分は，2 つのアークが逆アーク同士でなければ常に 0 となる．すなわち，行列の成分に 0 以外の値が出るのは，各 $\mathcal{A}(a)$ に関する J^{W} の小行列の部分である．今，対称有向グラフを考えているので，$\mathcal{A}(a) = \{a, \overline{a}\}$ が成り立つ．各 $a \in B(u,v)$ に対し，J^{W} の小行列 $J(a) := (\upsilon(a'')\delta_{a'' \in \mathrm{Inv}(a')})_{a',a'' \in \mathcal{A}(a)} = \begin{bmatrix} 0 & \upsilon(\overline{a}) \\ \upsilon(a) & 0 \end{bmatrix}$ を考える．$\mathcal{A}$ の分割 (2.4) により，行列 J^{W} は $J(a)$ の直和

$$J^{\mathrm{W}} = \bigoplus_{(u,v) \in \Phi_{\Delta(G)}} \bigoplus_{a \in \mathcal{A}_{uv}} J(a)$$

で与えられる．ここで，$\cup_{(u,v) \in \Phi_{\Delta(G)}} B(u,v) = \{a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n\}$ とおくと，$I + tJ^{\mathrm{W}}$ は次のように書ける:

$$I + tJ^{\mathrm{W}} = (I + tJ(a_1)) \oplus (I + tJ(a_2)) \oplus \ldots \oplus (I + tJ(a_n)).$$

また，$(I + tJ(a))^{-1} = (1 - t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a}))^{-1}(I - tJ(a))$ となる．行列 $K^{\mathrm{W}}, L^{\mathrm{W}}$ の $\mathcal{A}$ に関する添字を上の分割に従って並び替え，各 $\mathcal{A}(a)$ に関する小行列を

$$K(a) = (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathcal{A}(a), v \in V},\ L(a) = (\upsilon(a')\delta_{u\mathfrak{t}(a')})_{u \in V, a' \in \mathcal{A}(a)}$$

とおくと，$K^{\mathrm{W}}, L^{\mathrm{W}}$ は以下のように書ける：

$$L^{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} L(a_1)\ L(a_2) \cdots L(a_n) \end{bmatrix}, \qquad K^{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} K(a_1) \\ K(a_2) \\ \vdots \\ K(a_n) \end{bmatrix}.$$

これにより，

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{W}}(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}} &= \begin{bmatrix} L(a_1) \cdots L(a_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I + tJ(a_1))^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (I + tJ(a_n))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(a_1) \\ \vdots \\ K(a_n) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{(u,v) \in \Phi_{\Delta(G)}} \sum_{a \in \mathcal{A}_{uv}} L(a)(I + tJ(a))^{-1}K(a) \\ &= \sum_{(u,v) \in \Phi_{\Delta(G)}} \sum_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \frac{L(a)(I - tJ(a))K(a)}{1 - t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$A_G^{\mathrm{W}}, D_G^{\mathrm{W}}$ は

$$\sum_{(u,v)\in\Phi_{\Delta(G)}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}} \frac{L(a)K(a)}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})} = \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}} \frac{\tau(a)}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})}\right)_{u,v\in V} = A_G^{\mathrm{W}},$$
$$\sum_{(u,v)\in\Phi_{\Delta(G)}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}} \frac{L(a)J(a)K(a)}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})} = \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}} \frac{\tau(a)\upsilon(\overline{a})}{1-t^2\upsilon(a)\upsilon(\overline{a})}\right)_{u,v\in V} = D_G^{\mathrm{W}}$$

となるので，

$$I - tL^{\mathrm{W}}(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}} = I - tA_G^{\mathrm{W}} + t^2 D_G^{\mathrm{W}}$$

が得られる．以上より，一般荷重ゼータの伊原表示が得られる． □

この定理により，第 2.2.2 節で紹介した $\Delta(G)$ 上のグラフゼータの伊原表示は，荷重 θ^{W} の τ, υ を適宜制限することで全て得られる．

次に，一般の有限有向グラフ $\Delta = (V, \mathcal{A})$ に対する一般荷重ゼータの伊原表示を紹介する．まず，その証明に使われる命題をいくつか紹介する．これらの証明は石川-森田-佐藤 [11] を参照されたい．

命題 2.4. 正方行列 $M = (m_j)_{i,j\in[1,n]}$ に対し，

$$(I + tM)^{-1} = \frac{I + t(\mathrm{tr}(M)I - M)}{\det(I + tM)},$$
$$\det(I + tM) = 1 + t\ \mathrm{tr}(M)$$

が成り立つ．

命題 2.5. ブロック行列 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $(A, D:$ 正方行列$, A:$ 正則$)$ に対し，M の A に関する *Schur* 補行列 $D - CA^{-1}B$ を M/A で表す．このとき，M の逆行列と行列式は以下で与えられる*:*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\det M = \det A \det(M/A).$$

上記の M がある条件を満たすとき，M^{-1} の $(1,1)$-ブロックの行列は次の定理を用いて簡単に表すことができる．

命題 2.6. 命題 *2.5* で用いた行列 M, A, B, C, D について A, D は正則とする．また，$M/D := A - BD^{-1}C, M/A := D - CA^{-1}B$ と定める．このとき，以下の等式が成り立つ*:*

$$(M/D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}.$$

さらにこのとき，M の行列式は以下で与えられる*:*

$$\det M = \det D \det(M/D).$$

以上を用いて，一般の有限有向グラフに対する一般荷重ゼータの伊原表示が次のように与えられた．

定理 2.8 (石川, 森田, 佐藤 [11])**.** 多重アークや多重ループを許す一般の有限有向グラフ $\Delta = (V, \mathcal{A})$, 各 $(u,v) \in \Phi_\Delta$ に対し, $f(u,v) := \begin{cases} 1 - t^2 \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_{vu}} \upsilon(a)\right)\left(\sum_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \upsilon(a)\right) & u \neq v \text{ のとき}, \\ 1 + t\sum_{a \in \mathcal{A}_{uu}} \upsilon(a) & \text{その他} \end{cases}$
とする．行列 $A_\Delta^{\mathrm{W}}, D_\Delta^{\mathrm{W}} \in \mathrm{Mat}(|V|;\mathbb{C})$ を以下で定義する*:*

$$(A_\Delta^{\mathrm{W}})_{u,v \in V} := \sum_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \frac{\tau(a)}{f(u,v)},$$

$$(D_\Delta^{\mathrm{W}})_{u,v \in V} := \delta_{uv} \sum_{w \in V, u \neq w} \sum_{a \in \mathcal{A}_{uw}, a' \in \mathcal{A}_{wu}} \frac{\tau(a)\upsilon(a')}{f(u,w)}.$$

このとき，一般荷重ゼータは次の行列式表示をもつ*:*

$$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{W}}) = \frac{1}{\det(I + tJ^{\mathrm{W}})\det(I - tA_\Delta^{\mathrm{W}} + t^2 D_\Delta^{\mathrm{W}})}.$$

Proof. 定理 2.7 と同様に，$J^{\mathrm{W}}, K^{\mathrm{W}}, L^{\mathrm{W}}$ を用いて橋本表示を変形すると，

$$H_\Delta(t;\theta^{\mathrm{W}})^{-1} = \det(I + tJ^{\mathrm{W}})\det(I - tL^{\mathrm{W}}(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}})$$

が得られる．また，J, K, L の各 $\mathcal{A}(a)$ に関する小行列 $J(a), K(a), L(a)$ を用いると，先ほどと同様に

$$L^{\mathrm{W}}(I + tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}} = \sum_{(u,v) \in \Phi_{\Delta(G)}} \sum_{a \in B(u,v)} L(a)(I + tJ(a))^{-1}K(a)$$

が成り立つことがわかる．ただし，a が異なる 2 頂点間にある場合か，ループかによって，行列 $J(a)$ の形が変化し，その結果 $(I + tJ(a))^{-1}$ の形も変化する．以降，アーク a に関して場合分けを行い，各 $L(a)(I + tJ(a))^{-1}K(a)$ を求めていく．

アーク $a \in \mathcal{A}_{uv}$ が $u \neq v$ を満たす時，Δ 上の逆アークの定義により，$\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}[a] \sqcup \mathrm{Inv}(a) = \mathcal{A}_{uv} \sqcup \mathcal{A}_{vu}$ が成り立つ．よって，$J(a)$ は行列 $J_1 := (\upsilon(a'))_{a \in \mathcal{A}_{uv}, a' \in \mathcal{A}_{vu}}, J_2 := (\upsilon(a'))_{a \in \mathcal{A}_{vu}, a' \in \mathcal{A}_{uv}}$ を用いて，$J(a) = \begin{bmatrix} O & J_1 \\ J_2 & O \end{bmatrix}$ と表せる．この添字の並びに従い，$K(a), L(a)$ の $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(u,v)$ に関する部分を並び変え，各 $\mathcal{A}_{uv}$ に関する小行列を

$$K_{uv} := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathcal{A}_{uv}, v \in V},\ L_{uv} = (\upsilon(a')\delta_{u\mathfrak{t}(a')})_{u \in V, a' \in \mathcal{A}_{uv}}$$

とおくと，

$$L(a) = [L_{uv}\ L_{vu}], \quad K(a) = \begin{bmatrix} K_{uv} \\ K_{vu} \end{bmatrix}$$

と書ける．また，命題 2.5, 2.6 により，以下が得られる:

$$
\begin{aligned}
&(I+tJ(a))^{-1}=\begin{bmatrix} I & tJ_1 \\ tJ_2 & I \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (I-t^2J_1J_2)^{-1} & -tJ_1(I-t^2J_2J_1)^{-1} \\ -t(I-t^2J_2J_1)^{-1}J_2 & (I-t^2J_2J_1)^{-1} \end{bmatrix}, \\
&\det(I+tJ(a))=\det(I-t^2J_2J_1)=\det(I-t^2J_1J_2).
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)=&L_{uv}\{(I-t^2J_1J_2)^{-1}K_{uv}-tJ_1(I-t^2J_2J_1)^{-1}K_{vu}\} \\
&+L_{vu}\{-t(I-t^2J_2J_1)^{-1}J_2K_{uv}+(I-t^2J_2J_1)^{-1}K_{vu}\}.
\end{aligned}
$$

各項を計算する．正方行列 J_3, J_4 を $J_3 := (v(a'))_{a,a'\in\mathcal{A}_{uv}}, J_4 := (v(a'))_{a,a'\in\mathcal{A}_{vu}}$ と定義すると，$J_1J_2 = \mathrm{tr}(J_4)J_3$, $J_2J_1 = \mathrm{tr}(J_3)J_4$ が成り立つ．これらに命題 2.4 を用いると，

$$
\begin{aligned}
&\det(I+tJ(a))=1-t^2\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}v(a)\right)\left(\sum_{a'\in\mathcal{A}_{vu}}v(a')\right)=f(u,v), \\
&(I-t^2J_1J_2)^{-1}=\frac{I-t^2(\mathrm{tr}(J_3)\mathrm{tr}(J_4)I-\mathrm{tr}(J_4)J_3)}{\det(I-t^2J_1J_2)}=\frac{I-t^2\mathrm{tr}(J_4)(\mathrm{tr}(J_3)I-J_3)}{f(u,v)}, \\
&(I-t^2J_2J_1)^{-1}=\frac{I-t^2(\mathrm{tr}(J_3)\mathrm{tr}(J_4)I-\mathrm{tr}(J_3)J_4)}{\det(I-t^2J_2J_1)}=\frac{I-t^2\mathrm{tr}(J_3)(\mathrm{tr}(J_4)I-J_4)}{f(u,v)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$J_3K_{uv} = \mathrm{tr}(J_3)K_{uv}$, $J_4K_{vu} = \mathrm{tr}(J_4)K_{vu}$ が成り立つので，

$$
(I-t^2J_1J_2)^{-1}K_{uv}-tJ_1(I-t^2J_2J_1)^{-1}K_{vu}=\frac{K_{uv}-tJ_1K_{vu}}{f(u,v)}.
$$

さらに，$J_4J_2 = \mathrm{tr}(J_4)J_2$ が成り立つので，

$$
-t(I-t^2J_2J_1)^{-1}J_2K_{uv}+(I-t^2J_2J_1)^{-1}K_{vu}=\frac{-tJ_2K_{uv}+K_{vu}}{f(u,v)}.
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)&=\frac{L_{uv}(K_{uv}-tJ_1K_{vu})}{f(u,v)}+\frac{L_{vu}(-tJ_2K_{uv}+K_{vu})}{f(u,v)} \\
&=\frac{1}{f(u,v)}[L_{uv}\ L_{vu}]\begin{bmatrix} I & -tJ_1 \\ -tJ_2 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{uv} \\ K_{vu} \end{bmatrix} \\
&=\frac{L(a)(I-tJ(a))K(a)}{f(u,v)}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

次に，アーク $a \in \mathcal{A}_{uu}$ について考える．Δ 上の逆アークの定義より，$\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}[a] = \mathrm{Inv}(a) = \mathcal{A}_{uu}$ が成り立つ．よって，$J(a) = (v(a'))_{a,a'\in\mathcal{A}_{uu}}$ と書ける．命題 2.4 より，

$$
\begin{aligned}
&\det(I+tJ(a))=1+t\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uu}}v(a)\right)=f(u,u), \\
&(I+tJ(a))^{-1}=\frac{I+t(\mathrm{tr}(J(a))I-J(a))}{f(u,u)}
\end{aligned}
$$

となる．また，$J(a)K(a) = \mathrm{tr}(J(a))K(a)$ が成り立つことに注意すると，

$$L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a) = \frac{L(a)K(a)}{f(u,u)} \tag{2.7}$$

が得られる．

式 (2.6), (2.7) をまとめると，

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{W}}(I+tJ^{\mathrm{W}})^{-1}K^{\mathrm{W}} &= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta} \sum_{a\in B(u,v)} L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a) \\ &= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta} \sum_{a\in B(u,v)} \left(\frac{L(a)K(a)}{f(u,u)} - t\delta_{u\neq v} \frac{L(a)J(a)K(a)}{f(u,v)} \right) \\ &= A_\Delta^{\mathrm{W}} - tD_\Delta^{\mathrm{W}}. \end{aligned}$$

以上より，一般荷重の伊原表示が得られる． □

注意 2.2. これまでの伊原表示の導出方法では，$a \in \mathcal{A}$ に関する場合分けにより $L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)$ をそれぞれ求めていた．さらに，$J_3K_{uv} = \mathrm{tr}(J_3)K_{uv}$，$J_4K_{vu} = \mathrm{tr}(J_4)K_{vu}$ など，行列 $J^{\mathrm{W}}, K^{\mathrm{W}}$ の性質がうまく噛み合って計算できている状況もあった．本稿の主定理である定理 *3.3* では，*Szegedy* ウォークに対するグラフゼータを対称有向グラフ上で考え，その伊原表示を導出する．そこでは K^{W} の定義が異なるが，対称有向グラフにおける逆アークの定義の単純さが要因となり，定理 *2.7* と同様の導出方法が使える．一方，一般の有限有向グラフ上で伊原表示を示す定理 *3.5* では，定理 *2.8* とは行列 K^{W} の定義が異なるのに加え，逆アークの定義は煩雑である．しかし，上の導出方法とは異なる，新しい導出方法を用いることで伊原表示が得られることが判明した．

第 3 章

Szegedy ウォークに対応する一般化佐藤ゼータ

3.1　量子ウォークとグラフゼータの関係

$G=(V,E)$ を単純グラフ，その対称有向グラフを $\Delta(G)=(V,\mathcal{A})$ とする．任意の頂点 $v\in V$ に対し，$\sum_{a\in\mathcal{A}(G)}\delta_{\mathfrak{t}(a)v}p(a)=1$ を満たす写像 $p:\mathcal{A}\to[0,1]$ を G 上の遷移確率という．G 上の Grover ウォーク [6] とは，次の遷移行列 $U^{\mathrm{GR}}=(U^{\mathrm{GR}}(a,a'))_{a,a'\in\mathcal{A}(G)}\in\mathrm{Mat}(|\mathcal{A}(G)|;\mathbb{C})$ で遷移が定まる量子ウォークモデルである：

$$U^{\mathrm{GR}}(a,a'):=\frac{2}{\deg\mathfrak{t}(a)}\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{h}(a')}-\delta_{a'\overline{a}}.$$

この遷移行列を Grover 遷移行列と呼ぶ.

Emms et al. [4] はグラフの同型問題と Grover ウォークの関係性について予想を立てた．グラフ $G=(V_G,E_G),H=(V_H,E_H)$ が同型であるとは，任意の頂点の隣接関係を保存する全単射 $f:V_G\to V_H$ が存在することを指し，これを $G\simeq H$ で表す.

予想 3.1 (Emms et al. [4])**.** G,H を強正則グラフとする．このとき，以下が成り立つことが予想される：

$$G\simeq H \iff \mathrm{Spec}\{((U^{\mathrm{GR}})^3)^+\}=\mathrm{Spec}\{((U^{\mathrm{GR}})^3)^+\}.$$

ただし $((U^{\mathrm{GR}})^3)^+$ は $(U^{\mathrm{GR}})^3$ の正台を表している．

この論文で Emms らは U^{GR} とその正台，さらに $(U^{\mathrm{GR}})^2$ の正台の固有値を与えたが，特性多項式は与えていなかった．今野-佐藤 [12] は，Grover 遷移行列と佐藤ゼータの橋本表示を構成する辺行列の対応を見出し，Grover 遷移行列の特性多項式を佐藤ゼータを用いて与えた．実際，佐藤ゼータの荷重 $\theta^{\mathrm{S}}(a,a')=\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}-\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)}$ において，$\tau(a')=\frac{2}{\deg\mathfrak{t}(a')}$ のとき，橋本表示を構成する辺行列について ${}^{t}M^{\mathrm{S}}=U^{\mathrm{GR}}$ が成り立つ．従って，$H_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{S}})^{-1}$ は

$$\det(I-tM^{\mathrm{S}})=\det(I-t^{t}(M^{\mathrm{S}}))=\det(I-tU^{\mathrm{GR}})$$

となり，これは Grover 遷移行列の反転特性多項式になっている．さらに，佐藤ゼータの伊原表示を用いて，次の定理を示した．

定理 3.1 (Konno and Sato [12])**.** 頂点集合 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, 位数 m の辺集合 E からなる単純連結グラフを $G=(V,E)$ とおく．このとき, G 上 *Grover* 遷移行列 U^{GR} の特性多項式は次の形で与えられる*:*

$$\det(\lambda I-U^{\mathrm{GR}})=\frac{(\lambda^2-1)^{m-n}\det((\lambda^2+1)D-2\lambda A)}{\prod_{i=1}^{n}\deg(v_i)}.$$

行列 $T=(T_{uv})_{u,v\in V}$ を以下で定義する:

$$T_{uv}=\begin{cases}\frac{1}{\deg u} & \text{if } \{u,v\}\in E,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

このとき，この行列を用いて Grover 遷移行列の固有値集合を与えることができる．

定理 3.2 (Konno and Sato [12])**.** 単純連結グラフ G 上の *Grover* 遷移行列の特性多項式は次のようにも表せる*:*

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-U^{\mathrm{GR}})&=(\lambda^2-1)^{|E|-|V|}\det((\lambda^2+1)I-2\lambda T)\\&=(\lambda^2-1)^{|E|-|V|}\prod_{\mu\in\mathrm{Spec}(T)}((\lambda^2+1)-2\mu\lambda).\end{aligned}$$

これにより，*Grover* 遷移行列の固有値集合は次で与えられる*:*

$$\mathrm{Spec}(U^{\mathrm{GR}})=\{\pm1\}^{|E|-|V|}\sqcup\{\lambda\mid\lambda^2-2\mu\lambda+1=0,\ \text{for each }\mu\in\mathrm{Spec}(T)\}.$$

Proof. 固有値集合は特性多項式からすぐに得られるので，特性多項式についてのみ証明する．佐藤ゼータ $Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{S}})$ において，$\tau(a)=\frac{2}{\deg\mathfrak{t}(a)}$ のとき，式 (2.5) に現れる行列 $A^{\mathrm{S}},D^{\mathrm{S}}$ は以下のようになる:

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{S}}&=\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\frac{2}{\deg\mathfrak{t}(a)}\right)_{u,v\in V}=\left(\frac{2}{\deg u}\right)_{u,v\in V}=2T,\\D^{\mathrm{S}}&=\left(\delta_{uv}\sum_{a\in\mathcal{A}_{u*}}\frac{2}{\deg\mathfrak{t}(a)}\right)_{u,v\in V}=\left(\delta_{uv}\deg u\frac{2}{\deg u}\right)_{u,v\in V}=2I.\end{aligned}$$

これを式 (2.5) に代入すると，$H_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{S}})^{-1}$ は

$$\begin{aligned}\det(I-tM^{\mathrm{S}})=\det(I-tU^{\mathrm{GR}})&=(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-t2T+t^2(2I-I))\\&=(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-t2T+t^2I)\end{aligned}$$

となり，この反転を取ると U^{GR} の特性多項式が得られる． □

注意 3.1. この結果により，予想 *3.1* は否定的に解決されたが，グラフの同型問題に関する新たな予想に繋がった．

G 上の Szegedy ウォーク [20] とは，以下の遷移行列 $U^{\mathrm{SZ}} = (U^{\mathrm{SZ}}(a,a'))_{a,a'\in\mathcal{A}(G)} \in \mathrm{Mat}(|\mathcal{A}(G)|;\mathbb{C})$ で定まる量子ウォークモデルである:

$$U^{\mathrm{SZ}}(a,a') := 2\sqrt{p(a)p(\overline{a'})}\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{h}(a')} - \delta_{a'\overline{a}}.$$

これは，Grover ウォークの一般化のモデルのひとつである．実際，各 $a \in \mathcal{A}(G)$ に対して $p(a) = \frac{1}{\deg \mathfrak{t}(a)}$ とおくと $U^{\mathrm{SZ}} = U^{\mathrm{GR}}$ が成り立つ．

この Szegedy ウォークに対応するグラフゼータは先行研究には存在しない．すなわち，第 2.3 節で定義した一般荷重ゼータの荷重 $\theta^{\mathrm{W}}(a,a') = \tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \upsilon(a')\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)}$ にどのような制限を加えても，一般に M^{W} は U^{GR} に対応しない．特に，$\tau(a')$ と $2\sqrt{p(a)p(\overline{a'})}$ を比べると，変数の個数の差からも，両者が対応しないことは明らかである．従って，先行研究のグラフゼータでは，Szegedy ウォークへ拡張させた今野-佐藤の定理を考えることはできない．そこで，本研究では，Szegedy ウォークに対応するグラフゼータを新たに定義し，その伊原表示を与えた．これを次の節で紹介する．

3.2 一般化佐藤ゼータの伊原表示と今野-佐藤の定理の Szegedy ウォークへの拡張

$\Delta = (V,\mathcal{A})$ を有限有向グラフとする．任意の写像 $\tau_1, \tau_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を用いて，写像 $\tau : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を $\tau(a,a') = \tau_1(a)\tau_2(a')$ と定義する．さらに, 写像 $\theta^{\mathrm{GS}} : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を

$$\theta^{\mathrm{GS}}(a,a') = \tau(a,a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)}$$

と定める．このとき，グラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{GS}})$ を一般化佐藤ゼータと呼ぶことにする．また，一般化佐藤ゼータは隣接条件 (2.1) を満たすので，三種の表示を持つことが分かる．

注意 3.2. $\tau_1 = 1$ のとき，$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{GS}}) = Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{S}})$ が成り立つので，$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{GS}})$ は確かに佐藤ゼータの一般化の一つであると言える．ただし，一般荷重ゼータには含まれず，また，このゼータは一般荷重ゼータを含まない．

注意 3.3. 有限無向グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G)$ を考える．$\tau_1(a) = p(a), \tau_2(a) = p(\overline{a})$ とおくと，辺行列 $M^{\mathrm{GS}} = (\theta^{\mathrm{GS}}(a,a'))_{a,a'\in\mathcal{A}(G)}$ について，$M^{\mathrm{GS}} = {}^tU^{SZ}$ が成り立つ．よって，一般化佐藤ゼータを変形すると

$$\begin{aligned} Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{GS}})^{-1} &= H_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{GS}})^{-1} \\ &= \det(I - t\,{}^tM^{\mathrm{GS}}) \\ &= \det(I - tU^{\mathrm{SZ}}) \end{aligned}$$

となり，*Szegedy* 遷移行列の反転特性多項式が得られる．

有限有向グラフ $\Delta=(V,E)$ に対し，行列 $J^{\mathrm{GS}}\in\mathrm{Mat}(|\mathcal{A}|;\mathbb{C}), K^{\mathrm{GS}}\in\mathrm{Mat}(|\mathcal{A}|\times|V|;\mathbb{C}), L^{\mathrm{GS}}\in\mathrm{Mat}(|V|\times|\mathcal{A}|;\mathbb{C})$ を次で定義する:

$$(J^{\mathrm{GS}})_{aa'}:=\delta_{a'\in\mathrm{Inv}(a)},\quad (K^{\mathrm{GS}})_{av}:=\tau_1(a)\delta_{\mathfrak{h}(a)v},\quad (L^{\mathrm{GS}})_{va}:=\tau_2(a)\delta_{v\mathfrak{t}(a)}.$$

これらの $\mathcal{A}(a)$ に関する小行列 $J(a),K(a),L(a)$ を定理 2.7 と同様に定義する．ここで次の行列を定める．

$$\begin{aligned}A_G^{\mathrm{GS}}&=\sum_{(u,v)\in\Phi_{\Delta(G)}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}L(a)K(a),\\ D_G^{\mathrm{GS}}&=\sum_{(u,v)\in\Phi_{\Delta(G)}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}L(a)J(a)K(a).\end{aligned}$$

定理 3.3 ([10])**.** 有限無向グラフ $G=(V,E)$ に対する対称有向グラフ $\Delta(G)=(V,\mathcal{A}(G))$ に対し，$Z_{\Delta(G)}(t;\theta)$ は次のように表せる：

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{GS}})=\frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-tA_G^{\mathrm{GS}}+t^2(D_G^{\mathrm{GS}}-I))}. \tag{3.1}$$

Proof. 辺行列 M^{GS} について，$M^{\mathrm{GS}}=K^{\mathrm{GS}}L^{\mathrm{GS}}-J^{\mathrm{GS}}$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}\det(I+tM^{\mathrm{GS}})&=\det(I-t(K^{\mathrm{GS}}L^{\mathrm{GS}}-J^{\mathrm{GS}}))\\&=\det((I+tJ^{\mathrm{GS}})-tK^{\mathrm{GS}}L^{\mathrm{GS}})\\&=\det(I+tJ^{\mathrm{GS}})\det(I-t(I+tJ^{\mathrm{GS}})^{-1}K^{\mathrm{GS}}L^{\mathrm{GS}})\\&=\det(I+tJ^{\mathrm{GS}})\det(I-tL^{\mathrm{GS}}(I+tJ^{\mathrm{GS}})^{-1}K^{\mathrm{GS}})\end{aligned} \tag{3.2}$$

と変形できる．また，$L^{\mathrm{GS}}(I+tJ^{\mathrm{GS}})^{-1}K^{\mathrm{GS}}$ は以下のように書ける：

$$L^{\mathrm{GS}}(I+tJ^{\mathrm{GS}})^{-1}K^{\mathrm{GS}}=\sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta}\sum_{a\in B(u,v)}L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a). \tag{3.3}$$

有限グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G)=(V,\mathcal{A}(G))$ において，$B(u,v)=\mathcal{A}_{uv}$ であるから，各 $a\in\mathcal{A}_{uv}$ に対する $L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)$ を計算すればよいことが分かる．

まずは $(I+tJ(a))^{-1}$ を求める．対称有向グラフ $\Delta(G)$ における逆アークの定義より，各 $a\in\mathcal{A}(G)$ に対して $\mathcal{A}(a)=\{a,\overline{a}\}$ となる．従って，任意の $a\in\mathcal{A}(G)$ に対して $J(a)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ が成り立つので，$(I+tJ(a))^{-1}=\frac{1}{1-t^2}(I-tJ(a))$ を得る．よって，$L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)$ は

$$\begin{aligned}L(a)(I+tJ(a))^{-1}K(a)&=\frac{1}{1-t^2}L(a)(I-tJ(a))K(a)\\&=\frac{1}{1-t^2}(L(a)K(a)-tL(a)J(a)K(a))\end{aligned}$$

と書ける．従って，

$$\begin{aligned}L(I+tJ)^{-1}K&=\sum_{(u,v)\in\Phi_{\Delta(G)}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\frac{1}{1-t^2}(L(a)K(a)-tL(a)J(a)K(a))\\&=\frac{1}{1-t^2}(A_{\Delta(G)}-tD_{\Delta(G)})\end{aligned}$$

となる．これを式 (3.3) に代入することで一般化佐藤ゼータの伊原表示を得る． □

それでは，Szegedy ウォークと一般化佐藤ゼータの関係を用いて，今野-佐藤の定理を拡張する．有限単純グラフ $G = (V, E)$，その対称有向グラフ $\Delta(G) = (V, E)$ に対し，行列 $T = \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}} \sqrt{p(a)p(\overline{a})}\right)_{u,v\in V}$ を考える．荷重 θ^{GS} において，$\tau_1(a) = 2\sqrt{p(\overline{a})}$, $\tau_2(a) = \sqrt{p(a)}$ とすると，行列 $A^{\mathrm{GS}}_{\Delta(G)}, D^{\mathrm{GS}}_{\Delta(G)}$ は

$$A^{\mathrm{GS}}_{\Delta(G)} = 2T, \qquad D^{\mathrm{GS}}_{\Delta(G)} = 2I.$$

と表せる．これを式 (3.1) に代入することにより，今野-佐藤の定理の Szegedy ウォークに対する拡張が得られる．

定理 3.4 ([10])**.** 有限単純グラフ $G = (V, E)$ 上の *Szegedy* 遷移行列の特性多項式は次のように書ける*:*

$$\det(\lambda I - U^{\mathrm{SZ}}) = (\lambda^2 - 1)^{|E|-|V|} \det(\lambda^2 I - 2\lambda T + I).$$

また *Szegedy* 遷移行列の固有値集合は,

$$\mathrm{Spec}(U^{\mathrm{SZ}}) = \{\pm 1\}^{|E|-|V|} \sqcup \{\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2} \ \mid\ \mu \in \mathrm{Spec}(T)\}$$

となる．

3.3 有向グラフに対する一般化佐藤ゼータの伊原表示

今野-佐藤の定理の Szegedy ウォークへの拡張は，$\Delta(G)$ 上の一般化佐藤ゼータの伊原表示により得られた．しかし，一般化佐藤ゼータは一般の有限有向グラフ Δ 上で定義されている手前，Δ における伊原表示の考察の必要性も自然と生じる．

定理 3.5 ([10])**.** 多重アークや多重ループを許す有限有向グラフ $\Delta = (V, \mathcal{A})$ に対し，次の行列を定める*:*

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{GS}}_{\Delta} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta} \sum_{a\in B(u,v)} L(a)K(a), \\
D^{\mathrm{GS}}_{\Delta} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta} \sum_{a\in B(u,v)} \det(I + tJ(a))^{-1} L(a)J(a)K(a), \\
X^{\mathrm{GS}}_{\Delta} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta, u\neq v} \sum_{a\in B(u,v)} \det(I + tJ(a))^{-1} L(a)J(a)^2 K(a).
\end{aligned}$$

このとき，$Z_\Delta(t; \theta^{\mathrm{GS}})$ は次の伊原表示をもつ*:*

$$Z_\Delta(t; \theta^{\mathrm{GS}}) = \frac{1}{\prod_{u,v\in V} \det(I + tJ(a)) \det(I - tA^{\mathrm{GS}}_\Delta + t^2 D^{\mathrm{GS}}_\Delta - t^3 X_\Delta)}.$$

注意 3.4. 以下では，この定理の証明を行うが，第 *2.3* 節で紹介した Δ 上一般荷重ゼータの伊原表示とは異なる方法で行う．この方法は，先の方法よりも計算量が少なく済み，実はグラフの対称性にも依らない．この事実については後程言及する．

Proof. 式 (3.2), (3.3) は Δ 上でも成り立つ．まず，各 $(I+tJ(a))^{-1}$ を求める．

各 $\mathcal{A}_{uv}$ の位数を n_{uv} とおく．任意の $u\in V, a\in\mathcal{A}_{uu}$ に対し，$J(a)=\mathbb{1}_{n_{uu}\times n_{uu}}$ が成り立つ．このとき，$\det(I+tJ(a))=1+tn_{uu}$ となる．整数 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，

$$(-tJ(a))^n=(-t)^n n_{uu}^{n-1}J(a)^{n-1}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}(I+tJ(a))^{-1}&=\sum_{n\geq 0}(-tJ(a))^n\\&=I-tJ(a)\sum_{n\geq 0}(-tn_{uu})^n\\&=I+t\det(I+tJ(a))^{-1}J(a)\end{aligned}$$

と書ける．

一方, 異なる 2 頂点間にあるアーク $a\in\mathcal{A}(u,v)$ に対し，$J(a)$ は $J(a)=\begin{bmatrix}O & \mathbb{1}_{n_{uv}\times n_{vu}}\\ \mathbb{1}_{n_{vu}\times n_{uv}} & O\end{bmatrix}$ と表せる．このとき，$\det(I+tJ(a))=1-t^2n_{vu}n_{uv}$ となることに注意されたい．正整数 n に対して，

$$\begin{aligned}(-tJ(a))^{2n}&=t^2(t^2n_{vu}n_{uv})^{n-1}J(a)^2,\\(-tJ(a))^{2n-1}&=-t^{2n-1}(n_{vu}n_{uv})^nJ(a)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}(I+tJ(a))^{-1}&=\sum_{n\geq 0}(-tJ(a))^n\\&=I+\sum_{n\geq 1}(-tJ(a))^{2n-1}+(-tJ(a))^{2n}\\&=I-t(1-t^2n_{vu}n_{uv})^{-1}J(a)+t^2(1-t^2n_{vu}n_{uv})^{-1}J(a)^2\\&=I-t\det(I+tJ(uv))^{-1}J(a)+t^2\det(I+tJ(a))^{-1}J(a)^2\end{aligned}$$

と書ける．先の証明と同様にして，式 (3.3) に代入することで定理を得る．

$\square$

注意 3.5. 上記の導出方法は，一般の有限有向グラフに対してのみでは無く，対称有向グラフに対しても適用できる．有限無向グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G)$ において，任意の $a\in\mathcal{A}(G)$ に対し，$J(a)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ が成り立つ．さらに $J(a)^2=I$ を満たすので，正整数 n に対して，

$$(-tJ(a))^{2n}=t^{2n}I,\quad (-tJ(a))^{2n-1}=-t^{2n-1}J(a)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}(I+tJ(a))^{-1} &= \sum_{n\geq 0}(-tJ(a))^n \\ &= I+\sum_{n\geq 1}(-tJ(a))^{2n-1}+(-tJ(a))^{2n} \\ &= I-t(1-t^2)^{-1}J(a)+t^2(1-t^2)^{-1}I\end{aligned}$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned}A_G^{\mathrm{GS}\prime} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta}\sum_{a\in B(u,v)} L(a)K(a) = L^{\mathrm{GS}}K^{\mathrm{GS}}, \\ D_G^{\mathrm{GS}\prime} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta}\sum_{a\in B(u,v)} \det(I+tJ(a))^{-1}L(a)J(a)K(a) = \frac{L^{\mathrm{GS}}J^{\mathrm{GS}}K^{\mathrm{GS}}}{1-t^2}, \\ X_G^{\mathrm{GS}\prime} &:= \sum_{(u,v)\in\Phi_\Delta}\sum_{a\in B(u,v)} \det(I+tJ(a))^{-1}L(a)J(a)^2K(a) = \frac{L^{\mathrm{GS}}K^{\mathrm{GS}}}{1-t^2}\end{aligned}$$

とおくと，$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{GS}})$ の伊原表示は次のようにも書ける：

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta^{\mathrm{GS}}) = \frac{1}{(1-t^2)^{|E|}\det(I-tA_G^{\mathrm{GS}\prime}+t^2D_G^{\mathrm{GS}\prime}+t^3X_G^{\mathrm{GS}})}. \tag{3.4}$$

実際，$-tA_G^{\mathrm{GS}\prime}+t^3X_G^{\mathrm{GS}\prime} = -t(1-t^2)^{-1}A_G^{\mathrm{GS}}$, $D_G^{\mathrm{GS}\prime}=(1-t^2)^{-1}D_G^{\mathrm{GS}}$ が成り立ち，これを式 *(3.4)* に代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-t^2)^{|E|}\det(I-tA_G^{\mathrm{GS}\prime}+t^2D_G^{\mathrm{GS}\prime}+t^3X_G^{\mathrm{GS}})} \\ &= \frac{1}{(1-t^2)^{|E|}\det(I-t(1-t^2)^{-1}A_G^{\mathrm{GS}}+t^2(1-t^2)^{-1}D_G^{\mathrm{GS}})} \\ &= \frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det((1-t^2)I-tA_G^{\mathrm{GS}}+t^2D_G^{\mathrm{GS}})} \\ &= \frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-tA_G^{\mathrm{GS}}+t^2(D_G^{\mathrm{GS}}-I))}\end{aligned}$$

となり，式 *(3.1)* が得られる．

注意 3.6. このように，グラフが一般の有限有向グラフでも，対称有向グラフでも，同様の手順で伊原表示を導出できる．これまでは，第 *2.3* 節から観察できる通り，伊原表示の形はグラフによって変化していた．しかし，一般化佐藤ゼータの伊原表示においては，$A_\Delta^{\mathrm{GS}}, D_\Delta^{\mathrm{GS}}, X_\Delta^{\mathrm{GS}}$ を用いて表すことで，グラフに依存しない伊原表示の標準形が得られることが判明した．

謝辞

本研究を進めるに当たり，指導教官の今野紀雄教授からは多大なご指導ご鞭撻を賜りました．ここで深く感謝申し上げます．また，共同研究者の佐藤巌先生と森田英章先生，そして今野研究室の

皆様にも厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, *Eiseign. Math.* **45** (1999), 83-131.

[2] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.* **3** (1992), 83-131.

[3] R. Bowen and O. Lanford, Zeta functions of restrictions of the shift transformation, , *Proc. Symp. Pure Math.* **14** (1970), 43-50.

[4] D. Emms, E. Hancock, S. Severini and R. Wilson, A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, *Electr. J. Comb.* **13** (2006).

[5] D. Foata and D. Zeilberger, A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (1999), 2257-2274.

[6] L. Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, *in* Proc. 28th Annual ACM symposium on the theory of computing, pp. 212-219, 1996.

[7] K.-i. Hashimoto, On the zeta- and L-functions of finite graphs, *Internat. J. Math.* **1** (1990), 381-396.

[8] Y. Ide, A. Ishikawa, H. Morita, I. Sato, and E. Segawa, The Ihara expression for the generalized weighted zeta function of a finite simple graph, *Lin. Alg. Appl.* **627** (2021), 227-241.

[9] Y. Ihara, On discrete subgroup of the two by two projective linear group over p-adic fields, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 219-235.

[10] A. Ishikawa, and N. Konno, A weighted graph zeta function involved in the Szegedy walk, *Quantum Information and Computation* **22** (2021), 38-52.

[11] A. Ishikawa, H. Morita, and I. Sato, The Ihara expression for generalized weighted zeta functions of Bartholdi type on finite digraphs, *in preparation.*

[12] N. Konno and I, Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Inf. Process.* **11** (2012), 341-349.

[13] H. Mizuno and I. Sato, Weighted zeta functions of digraphs, *Linear Algebra Appl.* **355** (2002), 35-48.

[14] H. Mizuno and I. Sato, Weighted zeta functions of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **91** (2004), 169-183.

[15] H. Morita, Ruelle zeta functions for finite digraphs, *Lin. Alg. Appl.* **603** (2020), 329-358.

[16] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* **1** (2007), 269-281.

[17] J. -P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[18] H. Stark and A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings, *Adv. Math.* **121** (1996), 124-165.

[19] T. Sunada, L-functions in geometry and some applications, in *Lecture Note in Math.* **1201**, Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 266-284.

[20] M. Szegedy, Quantum speed-up of markov chain based algorithms, *In 45th Annual IEEE symposium on foundations of computer science* (2004) 32-41.