博士論文

高次元格子上の量子ウォークの局在化に関する研究
(Study on localization of quantum walks on higher-dimensional lattices)

横浜国立大学大学院
理工学府

成松　明廣
(NARIMATSU AKIHIRO)

学籍番号　19QC102

学位授与　2022 年 3 月

目次

1　序

量子ウォークは，通常のランダムウォークを量子化したモデルとして Aharonov らによって提案されたモデルである [1]．その関連分野は，トポロジカル絶縁体 [5]，放射性廃棄物の低減 [12] など様々であるが，特に近年では，大きな注目を集める量子コンピュータの上で動作する量子探索アルゴリズム [15] の存在も影響し，社会と関わりの大きい研究分野である．

本論文では，離散時間の量子ウォークについて扱う．量子ウォークの定義の仕方は色々考えられるが，そのうちのひとつとして，量子ウォークを走らせる場所となるグラフおよびその上のウォーカーの状態に対応するヒルベルト空間と，その元に対して作用させるユニタリ作用素（および初期状態）の組を量子ウォークとするものがある [14]．

例えば，量子ウォークの代表的な例として知られている 1 次元上の Hadamard walk では，ヒルベルト空間は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{C}^2)$ となり，ユニタリ作用素は，ウォーカーの移動を定めるシフト作用素と，量子情報の分野で Hadamard ゲートとしてよく知られる次の行列を含む，コイン作用素の積として定義できる．

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

時間発展作用素の詳細な定義は後の章で行うが，この Hadamard walk に代表される 1 次元量子ウォークについては，多くの研究が行われており，その特性は，参考文献 [10] にまとめられている．その中で，最も重要な結果の一つに，次の弱収束極限定理がある [8, 9]．ここで，確率変数 Y_n について，$Y_n \Rightarrow Y$ を，Y_n が Y に弱収束するといい，Y の密度関数を $f(y)$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} P\bigl(u \le Y_n \le v\bigr) = \int_u^v f(y)dy,$$

を満たすこととする．また，量子ウォークの時間発展に関係するユニタリ行列は，

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

とする．ただし，$a, b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である．

定理 1.1 時刻 n で量子ウォーカーが存在する場所に関する確率変数を X_n とする．原点を出発点とする，初期状態が $\Psi_0(0) ={}^T\left[\alpha, \beta\right] \in \mathbb{C}^2$ である 1 次元 2 状態の量子ウォークは，$n \to \infty$ で次を満たす．ただし，${}^T M$ は，行列 M の転置とする．

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow Z.$$

ただし，Z の密度関数は

$$f(x) = f\big(x; \alpha, \beta\big) = \big\{1 - C(a, b; \alpha, \beta)x\big\} f_K(x; |\alpha|)$$

で与えられ，

$$C(a, b; \alpha, \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\overline{b\beta} + \overline{a\alpha}b\beta}{|\alpha|^2}$$

および，

$$f_K(x; r) = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\pi(1 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} I_{-r,r}(x) \quad (0 < r < 1)$$

である．また，$I_A(x)$ は指示関数で，

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

を満たす．

この結果から，ランダムウォークと比較した際の量子ウォークのよく知られた特徴である，線形的な拡がりが確認できる．

一方，前述の 1 次元 2 状態の量子ウォークの他に，もう一つの代表的な量子ウォークの例として，1 次元 3 状態の量子ウォークがある．この例は，ランダムウォークと比較した際の量子ウォークのもう一つの特徴である，局在化が起こることが知られている非自明なものである．

1 次元 3 状態の量子ウォークにおける重要な結果として，次の Grover walk の極限測度に関するものがある [4]．ただし，1 次元 3 状態の Grover walk は，次の Grover 行列を時間発展作用素に含むものである．

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

また，1 次元 3 状態量子ウォークの時刻 n 場所 x における状態を $\Psi_n(x) \in \mathbb{C}^3$ としたとき，場所 $x \in \mathbb{Z}$ における極限測度を，

$$\mu_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \|\Psi_n(x)\|^2$$

とする．

定理 1.2 原点を出発点とする，初期状態が $\Psi_0(0) = {}^T \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ である 1 次元 3 状態の *Grover walk* の極限測度は以下で与えられる．

$$\mu_\infty(x) = \mu_\infty(x;\alpha,\beta,\gamma)$$
$$= \begin{cases} \{(3+\sqrt{6})|2\alpha+\beta|^2 + (3-\sqrt{6})|\beta+2\gamma|^2 - 2|\alpha+\beta+\gamma|^2\}(49-20\sqrt{6})^x & (x \geq 1) \\ \dfrac{5-2\sqrt{6}}{2}(|2\alpha+\beta|^2 + |\beta+2\gamma|^2) & (x=0) \\ (3-\sqrt{6})|2\alpha+\beta|^2 + (3+\sqrt{6})|\beta+2\gamma|^2 - 2|\alpha+\beta+\gamma|^2\}(49-20\sqrt{6})^x & (x \leq -1) \end{cases}.$$

この結果を見ると，極限分布が指数的に減衰していることがわかる．一方で，$x = 0$ の部分に注目すると，初期状態として適切な α, β, γ を選ぶことで，原点に量子ウォーカーが留まり続けることがわかるが，これが局在化に対応している．

本論文は，量子ウォークの特徴的な性質のうち，局在化現象について，2 以上の高次元の量子ウォークに関する研究を行ったものである．この局在化現象は，時間発展作用素の固有値解析によって導出できることが知られている．

また，固有値解析に関連して，時間発展作用素の固有ベクトルを求めることを考えた研究が，量子ウォークの定常測度に関する研究である [3]．この研究では，1 次元 3 状態の量子ウォークの時間発展作用素の固有ベクトルの求め方が紹介されているが，これは時刻を進めても量子ウォーカーの移動が起こっていないように見える状態になっており，ℓ^2 解が得られる場合は，局在化が起こっている状態のひとつを求めていると解釈できる．

以上のように，1 次元の量子ウォークは多くの特徴が明らかにされている．しかし，2 次元またはより高次元上の量子ウォークの特徴は，Grover walk の場合 [6, 11, 16, 18] を除き，明らかになっていない．

例えば，本論文で扱う Fourier walk は，1 次元の場合は Hadamard walk となるため，量子ウォークの中で，ある意味で基本的なものであると考えられるが，それ以外の次元において得られている研究成果は，2 次元の際に局在化が起こらないことが知られている程度であった [2, 7]．

このような多次元上の量子ウォークの解析が困難である大きな理由は，次元が 1 増えるごとに状態数が 2 個増加することであると考えられる．例えば，量子ウォークの解析手法のうち，Fourier 変換を用いた時間発展作用素の固有値解析では，次元が増えるたびに状態数が 2 ずつ増加するため，対象の量子ウォークが d 次元の場合，サイズが $2d$ となる行列が解析の対象である．つまり，固有値を考えるだけでも，2 次元の場合は 4 次方程式を解くことが必要であり，3 次元の段階で 6 次方程式を考える必要がある．このことから，時間発展作用素の固有値解析は，一般の場合には難しいことがわかる．

先述の通り，3 以上の次元において時間発展作用素の固有値解析は困難であったが，本論文では，固有関数の研究で行われた考え方を応用して，量子ウォークの局在化について，先行研究で与えられた結果を基に，その条件を整理した．その結果，解析困難な計算を省いて局在化を議論することが可能となった．そしてその結果を応用することで，d 次元格子 ($d \geq 2$) 上の Fourier walk について，局在化が起こらないことを示した．

本論文は，参考文献 [13] の内容に加筆し，まとめたものである．

2　定義

この章では，量子ウォークや局在化の定義を述べる．

2.1　多次元正方格子上の量子ウォーク

以下のヒルベルト空間上の量子ウォークを考える．

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d \otimes \mathbb{C}^{2d}) = \{\Psi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}^{2d} \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \|\Psi(x)\|^2 < \infty\}.$$

次に，I_d を，$\mathbb{Z}^d$ 上の恒等写像とし，コイン行列 C を，サイズ $2d$ のユニタリ行列とする．また，量子ウォークの移動を決める shift 作用素 S を，次で定める．

$$S = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=0}^{d-1} \big(|x - e_j\rangle\langle x| \otimes |2j\rangle\langle 2j| + |x + e_j\rangle\langle x| \otimes |2j+1\rangle\langle 2j+1| \big), \tag{1}$$

ただし，e_j は Euclid 空間の標準基底とする．このとき，量子ウォークの時間発展作用素は以下で与えられる．

$$U = S(I_d \otimes C). \tag{2}$$

$\Psi_n \in \mathcal{H}$ を時刻 $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ における状態とする．このとき，Ψ_n は次のように書ける．

$$\Psi_n = U^n \Psi_0, \tag{3}$$

ただし，$\Psi_0 \in \mathcal{H}$ は時刻 0 の状態，即ち量子ウォークの初期状態である．ここで，式 (1〜3) は次のように表現できることに注意する．

$$\Psi_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{d-1} |2j\rangle\langle 2j| C\Psi_n(x + e_j) + |2j+1\rangle\langle 2j+1| C\Psi_n(x - e_j). \tag{4}$$

また，本論文では，以下の Fourier 行列をコインとする，$\mathbb{Z}^d$ 上の Fourier walk を主な題材として扱う．

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{2d}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d} & \omega_{2d}^2 & \cdots & \omega_{2d}^{2d-1} \\ 1 & \omega_{2d}^2 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{2d-1} & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(2d-1)} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

ただし，$\omega_j = \exp(2\pi i/j)$ とする．

2.2 局在化

この節では，局在化と Fourier 変換の定義を行う．

定義 2.1 量子ウォークに局在化が起こるとは，ある初期状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ と場所 $x \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\Psi_n(x)\| > 0$ を満たすことである．

次に，Fourier 変換を導入する．$\Psi_n(x)$ の Fourier 変換 $\hat{\Psi}_n(k) \in \mathbb{C}^{2d}$ を次で与える．

$$\hat{\Psi}_n(k) = (\mathcal{F}\Psi_n)(k) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{-i\langle k,x\rangle}\Psi_n(x),$$

ただし，$k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in [0, 2\pi)^d$ とする．ここで，以下が成り立つことに注意する．

$$\Psi_n(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\Psi}_n)(x) = \int_{[0,2\pi)^d} e^{i\langle k,x\rangle}\Psi_n(k)\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^d}.$$

k-空間上で，量子ウォークの時間発展は次で与えられる．

$$\hat{\Psi}_{n+1}(k) = \hat{U}(k)\hat{\Psi}(k),$$

ただし，

$$\hat{U}(k) = \begin{bmatrix} e^{ik_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{ik_d} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-ik_d} \end{bmatrix} C.$$

このとき，次の命題が先行研究 [17] で得られている．

命題 2.1 量子ウォークが局在化が起こることと，$\hat{U}(k)$ が k に依らない固有値を持つことは同値である．

3　結果

この章の目的は，得られた結果を紹介し，次の主定理を証明することである．

定理 3.1 $\mathbb{Z}^d$ $(d = 1, 2, 3, \dots)$ 上の *Fourier walk* は局在化が起こらない．

この定理の証明のためにいくつかの補題が必要であるので，以降それを述べていく．

3.1　局在化の条件

この節では，局在化に関するいくつかの条件について述べる．後の補題 3.2 のために，以下の集合を定義する．

$$\mathcal{W}^{(\lambda)} = \{\Psi^{(\lambda)} \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \mid U\Psi^{(\lambda)} = \lambda\Psi^{(\lambda)}\},$$

ただし，$\lambda \in \mathbb{C}$ は $|\lambda| = 1$ を満たす．この集合は，量子ウォークの時間発展作用素の固有値問題の解の集合である．さらに，次の集合は，有限の台を持つような量子ウォークの状態の集合である．

$$\mathcal{S}_f = \left\{\Psi \in \mathcal{H} \mid \#\{x \in \mathbb{Z}^d \mid \Psi(x) \neq 0\} < \infty\right\}.$$

このとき，次の補題が成立する．

補題 3.2 $\mathbb{Z}^d$ 上の空間的に一様な量子ウォークにおいて，局在化が起こるための必要十分条件は,

$$|\lambda| = 1 \text{ と } \mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f \neq \emptyset \text{ を満たすような} \lambda \in \mathbb{C} \text{ が存在する．}$$

証明. $\mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f$ は, 時間発展作用素の固有ベクトルの中で, 有限の台を持つようなものの集合であるため, このような固有ベクトルが存在するとき, 局在化の定義から, 局在化は起こっている．よって, 十分性は満たしている．従って, 以下で必要性を示す．命題 2.1 より, 局在化が起こるとき, $\hat{U}(k)$ は k に依らない固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ を持つ．この λ で $\mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f \neq \emptyset$ を満たすことを示す．$v^{(\lambda)}(k) = {}^T\begin{bmatrix} v_0^{(\lambda)}(k) & v_1^{(\lambda)}(k) & \dots & v_{2d-1}^{(\lambda)}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2d}$ を，$\hat{U}(k)$ の k に依らない固有値 λ に対応する固有ベクトルとする．このとき，

$$\hat{U}(k)v^{(\lambda)}(k) = \lambda v^{(\lambda)}(k) \tag{6}$$

が成立することに注意すると，ある $\ell \in \{0,1,\dots,2d-1\}$ が存在して，任意の $j \in \{0,1,\dots,2d-1\}$ に対し，次を満たす．

$$v_j^{(\lambda)}(k) = \frac{f_j^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})}{g_j^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})} v_\ell^{(\lambda)}(k),$$

ただし，$f_j^{(\lambda)}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ と $g_j^{(\lambda)}(x_1, x_2, \dots, x_d) \neq 0$ は，$(x_1, x_2, \dots, x_d)$ の多変数多項式である．$v^{(\lambda)}(k)$ は $\hat{U}(k)$ の固有ベクトルだから，$v_\ell^{(\lambda)}(k) = \displaystyle\prod_{m=0}^{2d-1} g_m^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})$ とおくと，

$$v_j^{(\lambda)}(k) = \frac{f_j^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d}) \prod_{m=0}^{2d-1} g_m^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})}{g_j^{(\lambda)}(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})}$$

となり，$v^{(\lambda)}(k)$ の各成分 $v_j^{(\lambda)}(k)$ が，$(x_1, x_2, \dots, x_d)$ の多変数多項式となる．ここで，$\Psi^{(\lambda)} = (\mathcal{F}^{-1} v^{(\lambda)}) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ とする．各 $v_j^{(\lambda)}(k)$ が $(e^{ik_1}, e^{ik_2}, \dots, e^{ik_d})$ の多変数多項式であり，項数は有限だから，これを Fourier 逆変換すると，

$$\#\{x \in \mathbb{Z}^d \mid \Psi^{(\lambda)}(x) \neq 0\} < \infty$$

が成立する．また，式 (6) より，$U\Psi^{(\lambda)} = \lambda \Psi^{(\lambda)}$ が成立するから，$\Psi^{(\lambda)} \in \mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f$ である．よって，$\mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f \neq \emptyset$ が成り立つ．以上より，十分性も示された． □

ここで，局在化が起こることが知られている例として，2 次元正方格子上の Grover walk を考える．コイン行列は次で与えられる．

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

先行研究 [16] により，$\hat{U}(k)$ は固有値 $\lambda = 1$ を持ち，それに対応する固有ベクトルは次で与えられることが知られている．

$$v^{(1)}(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} {}^{T}\begin{bmatrix} 1 + e^{-ik_2} & e^{-ik_1} + e^{-ik_1 - ik_2} & 1 + e^{-ik_1} & e^{-ik_2} + e^{-ik_1 - ik_2} \end{bmatrix}.$$

これを Fourier 逆変換することで，$\Psi^{(1)} \in \mathcal{W}^{(1)} \cap \mathcal{S}_f$ が得られる．

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} = (\mathcal{F}^{-1} v^{(1)}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big(& {}^{T}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes |0,0\rangle + {}^{T}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes |1,0\rangle \\ & + {}^{T}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes |0,1\rangle + {}^{T}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes |1,1\rangle \Big). \end{aligned}$$

先行研究 [11] では，より高次元の Grover walk に対し，$\mathcal{W}^{(1)} \cap \mathcal{S}_f$ に関する研究が行われている．

補題 3.2 を使うことで，次の主張が得られる．

補題 3.3 $\mathbb{Z}^d$ 上の空間的に一様な量子ウォークにおいて，局在化が起こるためには，次の条件が必要である．

$$\text{任意の } \ell = (\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{d-1}) \in \{0,1\}^d,\ \text{に対し，} \operatorname{rank}(C^{(\ell)}) < d,$$

ただし，$C = \begin{bmatrix} c_{j,k} \end{bmatrix}_{j,k=0,1,\ldots,2d-1}$，$C^{(\ell)} = \begin{bmatrix} c^{(\ell)}_{j,k} \end{bmatrix}_{j,k=0,1,\ldots,d-1}$，および，$c^{(\ell)}_{j,k} = c_{2j+\ell_j, 2k+\ell_k}$．

証明の前に，具体例を考える．$d=3$, $\ell = (0,1,0)$ のとき，

$$C = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & c_{0,3} & c_{0,4} & c_{0,5} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} \\ c_{4,0} & c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} \\ c_{0,0} & c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} \end{bmatrix}$$

であり，これに対し，

$$C^{(\ell)} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,3} & c_{0,4} \\ c_{3,0} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,0} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{bmatrix}$$

である．

補題 3.3 の証明. $\mathbb{Z}^2$ の場合を考えることが本質的である．よって，以下 $\mathbb{Z}^2$ で考える．補題 3.2 より，局在化が起こるならば，$\Psi_0 \in \mathcal{W}^{(\lambda)} \cap \mathcal{S}_f$ を満たすような，絶対値が 1 である U の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．このとき，$\Psi_0 \in \mathcal{S}_f$ から，点 $(x_0^{(\ell)}, x_1^{(\ell)}) \in \mathbb{Z}^2$ $\big(\ell = (\ell_0, \ell_1) \in \{0,1\}^2\big)$ が存在して，$\Psi_n(x_0^{(\ell)}, x_1^{(\ell)}) \neq \mathbf{0}$ および次が成立する．

$$\Psi_n(x_0^{(\ell)} - (-1)^{\ell_0}, x_1^{(\ell)}) = \Psi_n(x_0^{(\ell)}, x_1^{(\ell)} - (-1)^{\ell_1}) = \mathbf{0}\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

言い換えれば，ある有限の台には，長方形の四隅に当たるような点が存在する，ということである．ここで，$\Psi_n(x_0^{(\ell)}, x_1^{(\ell)}) = {}^T\begin{bmatrix} \alpha_n^{(\ell)} & \beta_n^{(\ell)} & \gamma_n^{(\ell)} & \delta_n^{(\ell)} \end{bmatrix}$ とおく．$\ell = (0,1)$ の場合

を考える．式 (7) より，点 $(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) \in \mathbb{Z}^2$ が存在して，Ψ_0 は $\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) \neq \mathbf{0}$ と次を満たす．

$$\Psi_0(x_0^{(0,1)} - (-1)^0, x_1^{(0,1)}) = \Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)} - (-1)^1) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

式 (4) より，次が成立する．

$$\begin{aligned}\Psi_1(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) &= {}^T\begin{bmatrix}\alpha_1^{(0,1)} & \beta_1^{(0,1)} & \gamma_1^{(0,1)} & \delta_1^{(0,1)}\end{bmatrix} \\ &= \big(U\Psi_0\big)(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) \\ &= |0\rangle\langle 0|C\Psi_0(x_0^{(0,1)} + 1, x_1^{(0,1)}) + |1\rangle\langle 1|C\Psi_0(x_0^{(0,1)} - 1, x_1^{(0,1)}) \\ &\quad + |2\rangle\langle 2|C\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)} + 1) + |3\rangle\langle 3|C\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)} - 1).\end{aligned}$$

よって，次を得る．

$$\begin{aligned}\beta_1^{(0,1)} &= \langle 1|C\Psi_0(x_0^{(0,1)} - 1, x_1^{(0,1)}), \\ \gamma_1^{(0,1)} &= \langle 2|C\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)} + 1).\end{aligned} \tag{9}$$

式 (8) を式 (9) に代入することで，$\beta_1^{(0,1)} = \gamma_1^{(0,1)} = 0$ を得る．Ψ_n は固有ベクトルだから，任意の $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し，$\beta_n^{(0,1)} = \gamma_n^{(0,1)} = 0$ が成立する．式 (7) から $\Psi_n(x_0^{(\ell)} - 1, x_1^{(\ell)}) = \Psi_n(x_0^{(\ell)}, x_1^{(\ell)} + 1) = \mathbf{0}$ であることに注意すると， 式 (4) より次が成り立つ．

$$|0\rangle\langle 0|C\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) = |3\rangle\langle 3|C\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) = \mathbf{0}.$$

また，これは次の式と同値である．

$$\big(|0\rangle\langle 0| + |3\rangle\langle 3|\big)C\begin{bmatrix}\alpha_0^{(0,1)} \\ 0 \\ 0 \\ \delta_0^{(0,1)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & c_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0^{(0,1)} \\ 0 \\ 0 \\ \delta_0^{(0,1)}\end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

式 (10) は自明解 $\alpha_0^{(0,1)} = \delta_0^{(0,1)} = 0$ を持ち，$\Psi_0(x_0^{(0,1)}, x_1^{(0,1)}) \neq \mathbf{0}$ が成立するから，局在化が起こるとき，次の条件が必要であると言える．

$$\mathrm{rank}\Big(\begin{bmatrix}c_{0,0} & c_{0,3} \\ c_{3,0} & c_{3,3}\end{bmatrix}\Big) = \mathrm{rank}(C^{(0,1)}) < 2.$$

同様の考察を，別の隅にあたる $\ell \in \{0,1\}^2$ に対して行うことで，任意の $\ell \in \{0,1\}^2$ に対し，$\mathrm{rank}(C^{(\ell)}) < 2$ が必要である．この考察は，2 より大きい次元 d の場合には，2^d 個の隅に対して同様の考察が可能である．d 次元格子 $(d = 1, 2, 3, \dots)$ 上の空間的に一様な量子ウォークで局在化が起こるならば，任意の $\ell \in \{0,1\}^d$ で，$\mathrm{rank}(C^{(\ell)}) < d$ が成立する．
□

3.2　定理 3.1 の証明

この節全体で，定理 3.1 の証明を行う．

補題 3.3 の対偶を考えて，ある量子ウォークで局在化が起こらないことを示すには，$\mathrm{rank}(C^{(\ell)}) = d$ を満たすような $\ell \in \{0,1\}^d$ が少なくとも 1 つ存在することを証明すればよい．d 次元格子上の Fourier walk では，d の値によって，2 つの場合に分けて証明する．**(i)** d が奇数の場合，および **(ii)** d が偶数の場合である．場合分けが必要な理由は，後述する．

(i) d が奇数の場合

$\ell_{odd} = \{0, 0, \ldots, 0\} \in \{0,1\}^d$ とすると，

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{2d}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d} & \omega_{2d}^2 & \cdots & \omega_{2d}^{2d-1} \\ 1 & \omega_{2d}^2 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{2d-1} & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(2d-1)} \end{bmatrix}.$$

よって，次の行列が得られる．

$$C^{(\ell_{odd})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(2d-2)} \end{bmatrix}.$$

さらに，$\omega_{2d}^{2d} = 1$ に注意して変形すると，

$$C^{(\ell_{odd})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{1\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{1\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{1\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{3\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{3\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{3\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{3\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{3\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-1)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(2d-2)} \end{bmatrix}.$$

これは Vandermonde 行列であるが，後述する注意点があるため，ここで $C^{(\ell_{odd})}$ に行の入れ替えを行うと，次が得られる．

$$\overline{C}^{(\ell_{odd})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{1\cdot 2} & \omega_{2d}^{1\cdot 4} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \omega_{2d}^{2\cdot 4} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 2} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 4} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(2d-2)} \end{bmatrix}.$$

$\overline{C}^{(\ell)}$ は $d \times d$ の Vandermonde 行列だから，$\mathrm{rank}(\overline{C}^{(\ell_{odd})}) = d$ である．よってこれに行の入れ替えを行った行列でも，$\mathrm{rank}(C^{(\ell_{odd})}) = d$ である．よって補題 3.3 より，d が奇数のとき，Fourier walk に局在化は起こらない．

(ii) d が偶数のとき

$\ell_{even} = \{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{d/2-1}, \ell_{d/2}, \ell_{d/2+1}, \ldots, \ell_{d-1}\} = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1\} \in \{0,1\}^d$ とすると，

$$C^{(\ell_{even})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(2d-1)} \\ 1 & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+1)\cdot(2d-1)} \\ 1 & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+3)\cdot(2d-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(d+1)} & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(d+3)} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-1)\cdot(2d-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{2\cdot 1} & \omega_{2d}^{2\cdot 3} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 1} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 3} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-1)} \\ 1 & \omega_{2d}^{1\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{1\cdot 1} & \omega_{2d}^{1\cdot 3} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(d-1)} \\ 1 & \omega_{2d}^{3\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{3\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{3\cdot 1} & \omega_{2d}^{3\cdot 3} & \cdots & \omega_{2d}^{3\cdot(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 1} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 3} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d-1)} \end{bmatrix}.$$

これに行，列の入れ替えを行って，次を得る．

$$\overline{C}^{(\ell_{even})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{1\cdot 1} & \omega_{2d}^{1\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{1\cdot(d-1)} \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 1} & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 1} & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-1)\cdot(d-1)} \end{bmatrix}.$$

$\overline{C}^{(\ell_{even})}$ は $d \times d$ の Vandermonde 行列だから，d が偶数のとき，$\mathrm{rank}(\overline{C}^{(\ell_{even})}) = d$ であり，これに行，列の並べ替えを行った行列でも，$\mathrm{rank}(C^{(\ell_{even})}) = d$ である．よって補題 3.3 より，d が偶数のとき，Fourier walk に局在化は起こらない．

以上 **(i)** および **(ii)** より，任意の次元 d において，Fourier walk に局在化は起こらない．
□

本節の証明に関する補足として，もし，**(ii)** d が偶数のときに $\ell = \{0, 0, \ldots, 0\} \in \{0, 1\}^d$ とした場合，

$$C^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{2\cdot d} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot d} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{d\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{d\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{d\cdot d} & \omega_{2d}^{d\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{d\cdot(2d-2)} \\ 1 & \omega_{2d}^{(d+2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d+2)\cdot d} & \omega_{2d}^{(d+2)\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d+2)\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot d} & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{(2d-2)\cdot(2d-2)} \end{bmatrix}$$

となるが，$\omega_{2d}^{2d} = 1$ より，

$$C^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{2\cdot d} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot d} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(2d-2)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2d}^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{2\cdot d} & \omega_{2d}^{2\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{2\cdot(2d-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot 2} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d-2)} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot d} & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(d+2)} & \cdots & \omega_{2d}^{(d-2)\cdot(2d-2)} \end{bmatrix}$$

となり，これも Vandermonde 行列である．しかし，この行列には完全に一致する複数の行が存在するため，$\mathrm{rank}(C^{(\ell)}) = d/2 < d$ となり，今回の証明のためには不適当である．また，このようなケースが起こっていないことを確認するために，**(i)** の d が奇数のときも，念のため行の並べ替えを行って見やすくしている．

4　まとめ

本論文では，定理 3.1 で Fourier walk に局在化が起こらないことを証明した．また，それを示すために，補題 3.2 および 3.3 で局在化が起こるための複数の条件を与えた．これからの課題としては，補題 3.3 で得られた局在化が起こるための必要条件と，必要十分条件の間のギャップを埋めること，正方格子だけでなく，六角格子や結晶格子の局在化について議論を行うことなどが考えられる．

参考文献

[1] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe and U. V. Vazirani (2001), Quantum walks on graphs, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp.50-59

[2] M. Asano, T. Komatsu, N. Konno and A. Narimatsu (2020), The Fourier and Grover walks on the two-dimensional lattice and torus, *Yokohama Mathematical Journal*, **65**, pp.13-32

[3] T. Endo, H. Kawai and N. Konno (2017), Stationary measures of three-state quantum walks on the one-dimensional lattice, *Yokohama Mathematical Journal*, **63**, pp.59-74

[4] N. Inui, N. Konno and E. Segawa (2005), One-dimensional three-state quantum walk, *Phys. Rev. E*, **72**, 056112

[5] T. Kitagawa (2012), Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases, *Quantum Inf. Process.*, **11**, pp.1107-1148

[6] T. Komatsu and N. Konno (2017), Stationary amplitudes of quantum walks on the higher-dimensional integer lattice, *Quantum Inf. Process.*, **16**, 291

[7] T. Komatsu and T. Tate (2019), Eigenvalues of quantum walks of Grover and Fourier types, *J. Fourier Anal. Appl.*, **25**, pp.1293-1318

[8] N. Konno (2002), Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **1**, pp.345-354

[9] N. Konno (2005), A new type of limit theorems and absorption problems for quantum random walks in one dimension, *J. Math. Soc. Jpn.*, **2**, pp.578-595

[10] N. Konno (2008), Quantum Walks, Lecture Notes in Mathematics, **1954**, pp.309-452, Springer

[11] N. Konno and S. Takahashi (2020), On the support of the Grover walk on higher-dimensional lattices, *Yokohama Mathematical Journal*, **66**, pp.79-94

[12] L. Matsuoka, T. Kasajima, M. Hashimoto and K. Yokoyama (2011), Numerical study on quantum walks implemented on the cascade rotational transitions in a diatomic molecule, *J. Korean Phys. Soc.*, **59**, pp.2897-2900

[13] A. Narimatsu (2021), Localization does not occur for the Fourier walk on the

multi-dimensional lattice, *Quantum Inf. Compt.* **21** 5&6, pp.387-394

[14] A. Narimatsu, H. Ohno, K. Wada (2021), Unitary equivalence classes of split-step quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, **20**, 368

[15] R. Portugal (2018), Quantum Walks and Search Algorithms, second edition, Springer

[16] M. Stefanak, B. Kollar, T. Kiss and I. Jex (2010), Full revivals in 2D quantum walks, *Physical Scripta*, **2010**, T140

[17] T. Tate (2019), Eigenvalues, absolute continuity and localizations for periodic unitary transition operators, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **22**, 1950011

[18] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno (2008), Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A*, **77**, 062331

[19] 今野紀雄 (2014)，量子ウォーク，森北出版

[20] 今野紀雄，井手勇介 (2019)，量子ウォークの新展開，培風館

謝辞

本論文の執筆および，その元の研究を行うに当たり，多くの方々にご助力，ご指導頂きました．全ての皆様に感謝申し上げます．

指導教員の今野教授には，学部 1 年生の基礎演習でお会いして以来，量子ウォークのみならず，研究活動のいろはから教えていただきました．本論文の執筆の際にも，内容に関するご意見をいただいた他，英論文化の際には添削もしていただき，大いにご助力頂きました．その他，ここには書ききれませんが，学部時代から教わった内容の全てに感謝しております．

梶原教授には，今回の結果を出すに当たり非常に有益なご助言を頂きました．それだけでなく，学生生活において様々な点でご助力頂きました．心から感謝申し上げます．

竹居准教授には，学部 1 年生の数学演習や基礎演習でお会いして以降，私たちが試験対策の勉強会をしているときに声をかけて頂くなど，暖かい目で見守って頂きました．また，今野研究室に所属してからは，セミナーでの鋭い視点や，素晴らしい発表を見せて頂き，勉強になりました．その全てに感謝致します．

また，今野教授，梶原教授，黒木教授，竹居准教授，本田准教授には，お忙しい中，私の学位論文の審査をしていただきました．大変感謝しております．

瀬川准教授，井手さん，町田さん，斎藤さんをはじめとした研究室の先輩方には，色々なことを教わりました．また，研究室の仲間たちは，遠隔が主流となるまでは，研究に関することだけでなく，一緒に鍋を囲んだり，学会などの旅先で一緒に宿泊したりといった楽しい時間を共有できました．遠隔になってからも，zoom を利用したセミナーやリモート飲み会には助けられました．それら全てのおかげでこれまで進んで来ることができました．ありがとうございました．

そして，明らかに年齢が離れて浮いた存在であった私を暖かく受け入れてくれた，2013 年度入学の数理科学 EP の同期の皆さんにも，感謝しています．

また，大きな回り道を経た私がこの道を選ぶことを助けてくださった，PAS 心理教育研究所の橋本先生をはじめとしたセラピストや職員の皆様にも感謝申し上げます．

最後に，私の非常に長引く学生生活で多大な迷惑をかけたにも関わらず，様々な面で支えてくれた家族にも心から感謝します．

本当に，ありがとうございました．